

# Izvijanje stupova

---

**Huskić, Alen**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:450940>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-01**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
GRAĐEVINSKI FAKLTET  
PRIJEDIPLOMSKI STUDIJ

IZVIJANJE STUPOVA

Završni rad

Alen Huskić

Zagreb, rujan 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
GRAĐEVINSKI FAKLTET  
PRIJEDIPLOMSKI STUDIJ

IZVIJANJE STUPOVA  
Završni rad

Alen Huskić  
Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Duvnjak

Zagreb, rujan 2023.

Mentor rada: Ivan Duvnjak, izv. prof. dr. sc.

Završni rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, pred povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Ocjena rada: \_\_\_\_\_



## TEMA ZAVRŠNOG ISPITA

Ime i prezime studenta: **Alen Huskić**

JMBAG: **0246078724**

Završni ispit iz predmeta: **Otpornost materijala 2**

|                                 |     |                            |
|---------------------------------|-----|----------------------------|
| Naslov teme<br>završnog ispita: | HR  | <b>Izvijanje stupova</b>   |
|                                 | ENG | <b>Buckling of columns</b> |


Opis teme završnog ispita:

- Sadržaj,
- Sažetak rada i ključne riječi (na hrvatskom i engleskom jeziku),
- Općenito teorijske postavke o izvijanju stupova
- Izvijanje zglobno oslonjenih stupova
- Rankine-Gordon formula pri izvijanju stupova
- Utjecaj geometrijske imperfekcije
- Efektivna duljina izvijanja
- Ekscentricitet pri unosu sile
- Inicijalno zakrivljeni stupovi
- Izvijanje stupova prirazličitim rubnim uvjetima
- Zaključak,
- Popis literature,

Datum: **17.04.2023.**

Komentor:   
(Ime i prezime komentora)

Mentor: **Ivan Duvnjak**  
(Ime i prezime mentora)

  
(Potpis mentora)

## Sadržaj

|  |    |
|--|----|
| Sažetak rada i ključne riječi .....  | 5  |
| Summary and key words .....  | 5  |
| 1. Općenito teorijske postavke o izvijanju stupova.....                        | 6  |
| 2. Izvijanje zglobno oslonjenih stupova.....                                   | 8  |
| 3. Rankine-Gordon formula pri izvijanju stupova .....                          | 14 |
| 4. Utjecaj geometrijske imperfekcije .....                                     | 17 |
| 5. Efektivna duljina izvijanja .....   | 18 |
| 6. Ekscentricitet pri unosu sile .....   | 19 |
| 7. Inicijalno zakrivljeni stupovi.....   | 25 |
| 8. Izvijanje stupova pri različitim rubnim uvjetima .....                      | 31 |
| 8.1 Izvijanje obostrano upetog stupa .....                                     | 31 |
| 8.2 Izvijanje jednostrano upetog stupa.....                                    | 32 |
| 8.3 Izvijanje stupa upetog na jednoj strani, na drugoj zglobno oslonjenog..... | 33 |
| 9. Numerički primjer .....   | 37 |
| Zaključak .....  | 44 |
| Popis literature.....  | 45 |
| Popis slika .....  | 46 |
| Popis tablica .....  | 47 |
| Popis dijagrama .....  | 48 |

## **Sažetak rada i ključne riječi**

Izvijanje stupa je pojava koja se obično povezuje s vitkim stupovima, koji se izvijaju u elastičnom području. U ovom završnom radu su izvedeni izrazi za kritična opterećenja štapova sa različitim načinima oslanjanja, prema Rankine-Gordonovoj teoriji. Ona u obzir uzima otpornost elementa na tlačno opterećenje i otpornost elementa na izvijanje. Iz tog razloga se ona može koristiti za proračun kratkih stupova kojima je glavni uvjet nosivost, ali i za proračun vitkih stupova koji moraju zadovoljiti i uvjete stabilnosti protiv izvijanja. Također, radu je priložen primjer proračuna tlačnog opterećenog elementa u metalnoj rešetkastoj konstrukciji prema važećim propisima iz Eurokoda, te usporedba s rezultatima proračuna prema Eulerovim formulama.

Ključne riječi: izvijanje, kritična sila, vitkost, Eulerova formula, Rankine-Gordonova formula

## **Summary and key words**

Column buckling is a phenomenon usually associated with slender columns, which buckle in the elastic region. In this final paper, are derived expressions for the critical loads of rods with different methods of support, according to the Rankine-Gordon theory. It considers the resistance of elements to compressive load and the resistance of elements to buckling. For this reason, it can be used for the calculation of short columns, for which the main requirement is load-bearing capacity, but also for the calculation of slender columns, which must also meet the conditions of stability against buckling. Also, an example of the calculation of a compressive loaded element in a metal truss according to the valid Eurocode regulations is attached to the paper, as well as a comparison with the results of calculations according to Euler's formulas.

Keywords: buckling, critical force, slenderness, Euler's formula, Rankine-Gordon's formula

## 1. Općenito teorijske postavke o izvijanju stupova

Izvijanje je pojava gubitka stabilnosti elemenata konstrukcije opterećenih uzdužnom tlačnom silom. Na primjer, vitki stup opterećen vertikalnom tlačnom silom u vrhu, će se izviti kada sila dosegne kritičnu vrijednost  $F_{kr}$ .

Aksijalno opterećeni elementi mogu doći u stanje loma čim tlačna sila  $F$  dostigne kritičnu vrijednost, ali često može doći do kritičnog stanja i prije dosezanja kritične vrijednosti zbog ekscentričnosti tlačne sile  $F$ , nehomogenosti materijala, početne zakrivljenosti osi stvarnog štapa, načina učvršćivanja štapa... „Pojava gubitka stabilnosti sastavnih dijelova tehničkih konstrukcija posebno je opasna jer se zbiva iznenada i pri relativno malim naprezanjima koja zadovoljavaju uvjete čvrstoće. Proces porasta deformacija pri gubitku stabilnosti zbiva se vrlo brzo.

Da bismo bili sigurni da neće doći do izvijanja (gubitka stabilnosti) ravnog štapa, opterećenog centričnom tlačnom silom  $F$ , mora biti ispunjen uvjet stabilnosti koji glasi:

$$F \leq F_{idop} \quad (1.1)$$

gdje je:

$$F_{idop} = \frac{F_{kr}}{k_i} \quad (1.2)$$

a  $k_i$  je koeficijent sigurnosti protiv izvijanja.“(Šimić, 1992.)

Pri proračunu stabilnosti tlačno opterećenih štapova uvode se pretpostavke:

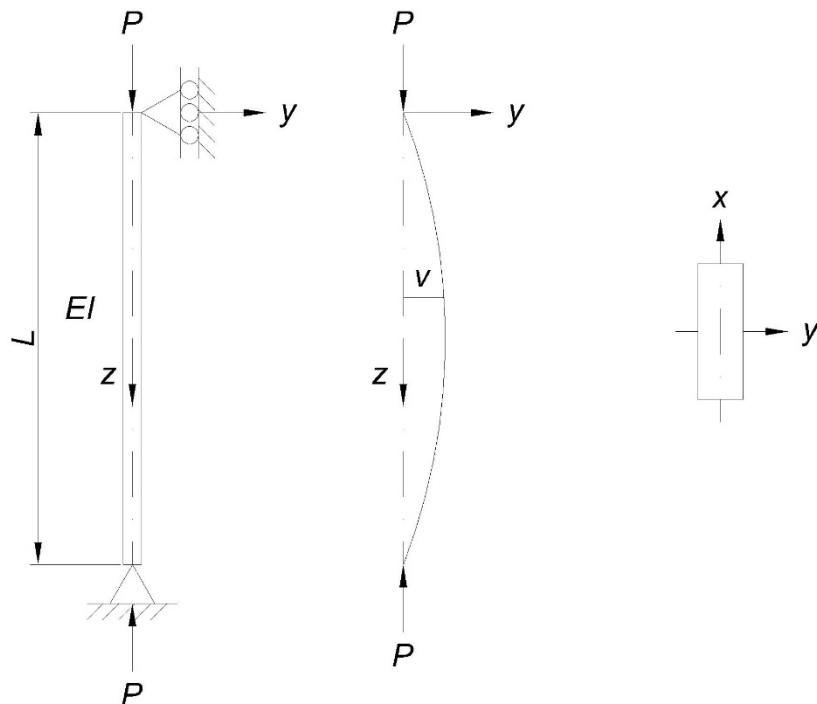
- stup je idealno ravan i izrađen od homogenog materijala
- ovisnost naprezanja i deformacija je linearna (Hookov zakon)
- stup je konstantnog poprečnog presjeka po visini



- duljina stupa je višestruko veća u odnosu na poprečni presjek (velika vitkost)
- progibi su mali u odnosu na dimenzije štapa

## 2. Izvijanje zglobno oslonjenih stupova

Prikazani štap na slici je idealno ravan, konstantnog presjeka i ima dvije osi simetrije  $x$  i  $y$ , te je zglobno oslonjen na krajevima. Štap je opterećen centrično tlačnom silom  $P$ . Pretpostavit ćemo da je moment tromosti oko osi  $x$   $I_x$  manji u odnosu na moment tromosti oko osi  $y$   $I_y$ , a savojna krutost  $EI$  će biti konstantna.



Slika 1. Izvijanje zglobno oslonjenog štapa

Pošto je  $I_x$  manji u odnosu na  $I_y$ , možemo zaključiti da će doći do izvijanja oko osi  $x$ . Iz krajnjih uvjeta oslanjanja vidljivo je da se štap ne može izviti na krajevima nego samo po svojoj duljini. Pomak izvijene linije u bilo kojoj točki od osi štapa ćemo pretpostaviti kao varijablu  $v$ . Jedino vanjsko opterećenje koje djeluje na štap su sile  $P$  koje djeluju na rubovima štapa, za koje se pretpostavlja da će djelovati u osi štapa i nakon pojave izvijanja. Moment savijanja u promatranom presjeku će iznositi:

$$M = P \cdot v \tag{2.1}$$

Moment elastične linije nosača u promatranom presjeku iznosi:

$$M = -EI \frac{d^2 v}{dz^2} \quad (2.2)$$

Uz pretpostavku da su posrijedi mali progibi jednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$P \cdot v = -EI \frac{d^2 v}{dz^2} \quad (2.3)$$

$$P \cdot v + EI \frac{d^2 v}{dz^2} = 0 \quad (2.4)$$

Uvedemo li oznaku:

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (2.5)$$

dobit ćemo izraz:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + k^2 v = 0 \quad (2.6)$$

Opće rješenje ove diferencijalne jednadžbe iznosi:

$$v = A \cos kz + B \sin kz \quad (2.7)$$

Konstante integracije  $A$  i  $B$  ćemo izračunati iz rubnih uvjeta:

$$v(z = 0) = 0 \text{ i } v(z = L) = 0$$

Iz prvog uvjeta dobivamo :

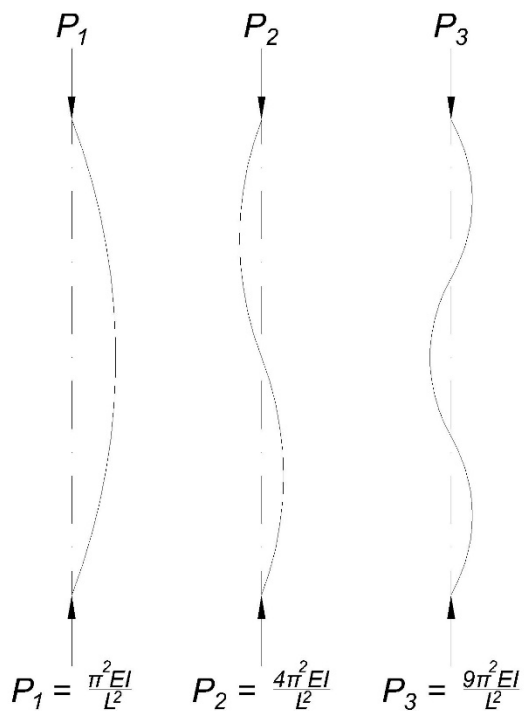
$$A = 0$$

$$v = B \sin kL$$

Iz drugog uvjeta dobivamo :

$$B \sin kL = 0$$

Ako je  $B = 0$ , konstante  $A$  i  $B$  će biti 0 i stup neće biti izvijen.



Slika 2. Oblik elastične linije

Ako je  $B \sin kL = 0$ , konstanta  $B$  mora biti  $B \neq 0$  za izvijeni oblik štapa, odakle mora biti:

$$\sin kL = 0$$

Ili:

$$kL = \pi, 2\pi, \dots \tag{2.8}$$

Konačan izraz za vrijednost sile pri kojoj nastupa izvijanje štapa:

$$P = k^2 EI = \frac{\pi^2 EI}{L^2}, \frac{4\pi^2 EI}{L^2}, \dots \quad (2.9)$$

Iz gornjeg izraza se može zaključiti da postoji beskonačan broj vrijednosti sile  $P$  koje će uzrokovati različite oblike izvijanja (slika 2). U praksi nas zanima najmanja moguća sila pri kojoj će doći do bočnog izvijanja, a ona iznosi:

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.10)$$

i naziva se Eulerova kritična sila za zglobno oslonjen štap kojem oblik elastične linije odgovara obliku jednog poluvala sinusoide. Kritična sila:

$$P = \frac{2^2 \pi^2 EI}{L^2} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.11)$$

odgovara obliku izvijanja dva poluvala elastične linije. U praksi kritična vrijednost  $P_e$  se nikada neće prekoračiti jer se kod ovog opterećenja pojavljuju velika naprezanja koja uzrokuju slom elementa. Stoga nas ne zanimaju opterećenja veća od najmanjeg opterećenja koje će izazvati izvijanje. Pri ovom opterećenju idealno ravan štap će biti u stanju *indiferentne ravnoteže*, a progib:

$$v = B \sin kL$$

će biti neodređen, zato jer je konstanta  $B$  neodređena. Teoretski, štap će biti u stanju ravnoteže za opterećenje  $\pi^2 EI/L^2$  za bilo koju malu vrijednost  $B$ , koja će odgovarati uvjetima *indiferentne ravnoteže*. Kod ovog opterećenja možemo očekivati da će izvijeni oblik štapa odgovarati malom sinusoidalnom valu male amplitude. To se može eksperimentalno dokazati opterećivanjem vitkog elastičnog štapa.

Pri vrijednostima manjim od  $\pi^2 EI/L^2$  štap će biti u stanju *indiferentne ravnoteže*. Bilo koji bočni poremećaj će uzrokovati pomak opterećenja iz ravnotežnog položaja i slom štapa. Kod statičkih opterećenja koja se nanose postepeno, vrijednost  $\pi^2 EI/L^2$  se ne može prekoračiti.

Izraz za kritičnu silu:

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

je primjenjiv samo kod malih pomaka. Kod većih pomaka odnos momenta savijanja i elastične linije nosača:

$$M = -EI \frac{d^2 v}{dz^2}$$

nije primjenjiv, jer je zakrivljenost elastične linije izražena približnim izrazom  $d^2 v/dz^2$  i promatrali linearnu jednadžbu  $M = -EI \frac{d^2 v}{dz^2}$  koja vrijedi samo za male pomake (teorija drugog reda).

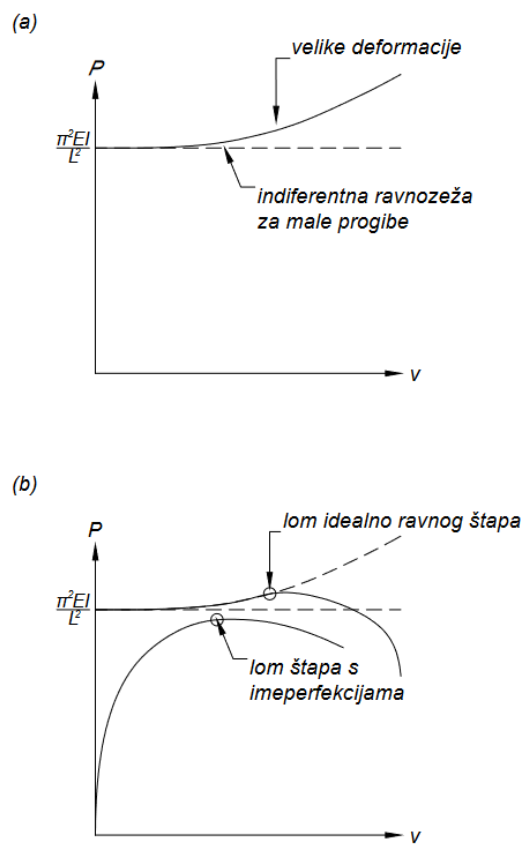
Odnos sile  $P$  i poprečnog pomaka  $v$  za idealno ravan štap biti će oblika kako je prikazano na grafu 1(a), na kojoj je vidljivo da su bočni pomaci mogući kada je:

$$P \geq \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Ovo je primjenjivo samo za idealno ravne štapove. Kod realnih štapova koji imaju imperfekcije, pomak  $v$  je moguć za bilo koju vrijednost sile  $P$  (graf 1(b)) i teorijsko stanje *indiferentne ravnoteže* pri sili:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

nije moguće. Svi materijali imaju granicu proporcionalnosti. Kada se ona dosegne, savojna krutost štapa brzo pada. Na  $P - v$  dijagramu to odgovara području *indiferentne ravnoteže*.



Dijagram 1. Velike deformacije i lom štapa

### **3. Rankine-Gordon formula pri izvijanju stupova**

Eulerova formula za primjenjiva samo za štapove velike vitkosti koji imaju male imperfekcije. Međutim, u praksi će štapovi dosegnuti granicu plastičnosti i eksperimentalno dobivene kritične sile će biti znatno manje od izračunatih vrijednosti prema Eulerovim formulama. Za ovakve slučajeve se koristi Rankine-Gordonova poluempijska formula, koja u obzir uzima tlačnu čvrstoću materijala, Youngov modul elastičnosti i omjer vitkosti  $L/k$ , gdje su:

$L$  - duljina štapa

$k$  – najmanji polumjer tromosti poprečnog presjeka

$$P_c = \sigma_c A \quad (3.1)$$

$A$  – poprečni presjek štapa

$\sigma_c$  – tlačno naprezanje

U izrazu:

$$\frac{1}{P_R} = \frac{1}{P_e} + \frac{1}{P_c} \quad (3.2)$$

su:

$P_R$  – Rankine-Gordonova sila izvijanja

$P_e$  – Eulerova sila izvijanja

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Uvrštavanjem svih varijabli dobivamo:



$$\frac{1}{P_R} = \frac{L^2}{\pi^2 EI} + \frac{1}{\sigma_{yc} A}$$

$$\frac{1}{P_R} = \frac{L_0^2}{\pi^2 E A k^2} + \frac{1}{\sigma_{yc} A} \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{P_R} = \frac{L_0^2 \sigma_{yc} + \pi^2 E k^2}{\pi^2 E A k^2 \sigma_{yc}}$$

$$P_R = \frac{\pi^2 E A k^2 \sigma_{yc}}{L_0^2 \sigma_{yc} + \pi^2 E k^2}$$

$$P_R = \frac{\sigma_{yc}}{L_0^2 \sigma_{yc} / \pi^2 E A k^2 + \pi^2 E k^2 / \pi^2 E A k^2} \quad (3.4)$$

$$P_R = \frac{\sigma_{yc} A}{(\sigma_{yc} / \pi^2 E)(L_0/k)^2 + 1}$$

Ako je:

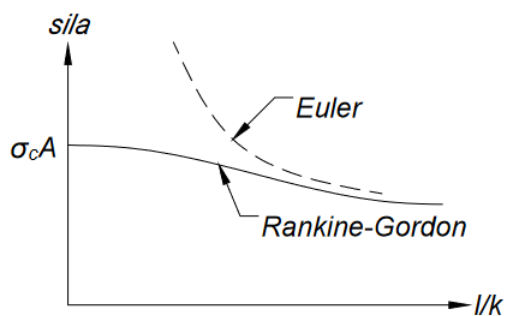
$$a = \frac{\sigma_{yc}}{\pi^2 E} \quad (3.5)$$

onda je:

$$P_R = \frac{\sigma_{yc} A}{1 + a(L_0/k)^2} \quad (3.6)$$

gdje je  $a$  konstanta koja ovisi i rubnim uvjetima i svojstvima materijala.

Usporedba Rankine-Gordonove i Eulerove formule, za geometrijski idealne štapove, je prikazana na dijagramu 2. Uobičajene vrijednosti za omjer  $l/a$  i  $\sigma_{yc}$  su dane u tablici 1.



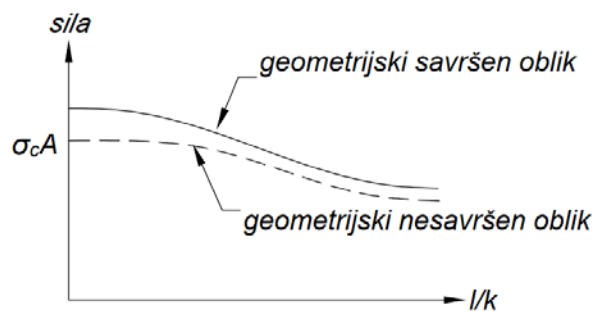
Dijagram 2. Usporedba Eulerove i Rankine-Gordonove formule

Tablica 1. Rankinove konstante

| <b>Materijal</b> | $l/a$ | $\sigma_{yc}$ |
|------------------|-------|---------------|
| meki čelik       | 7500  | 300           |
| kovano željezo   | 8000  | 250           |
| lijevano željezo | 18000 | 560           |
| drvo             | 1000  | 35            |

#### 4. Utjecaj geometrijske imperfekcije

Štapovi koji imaju geometrijske imperfekcije, kao što su nepravilnost oblika poprečnog presjeka ili promjenjive debljine stijenki poprečnog presjeka, će podnijeti manja opterećenja izvijanja, kako je prikazano na dijagramu 3.

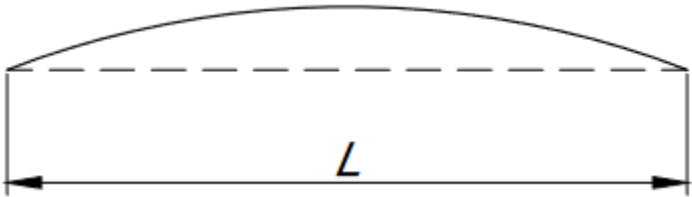
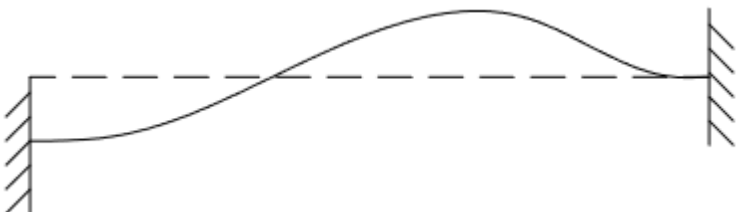
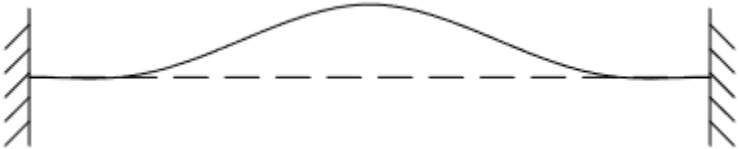
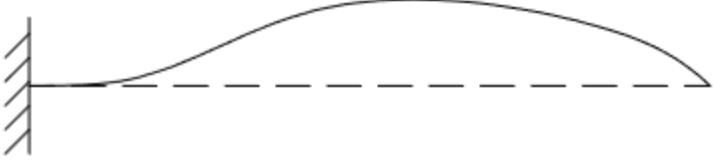
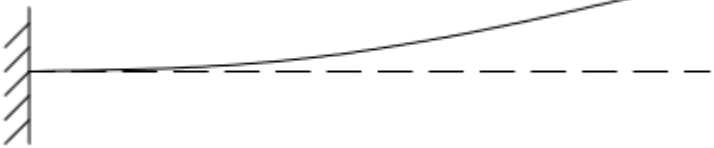


Dijagram 3. Rankine-Gordonova sila za savršene i nesavršene štapove

## 5. Efektivna duljina izvijanja

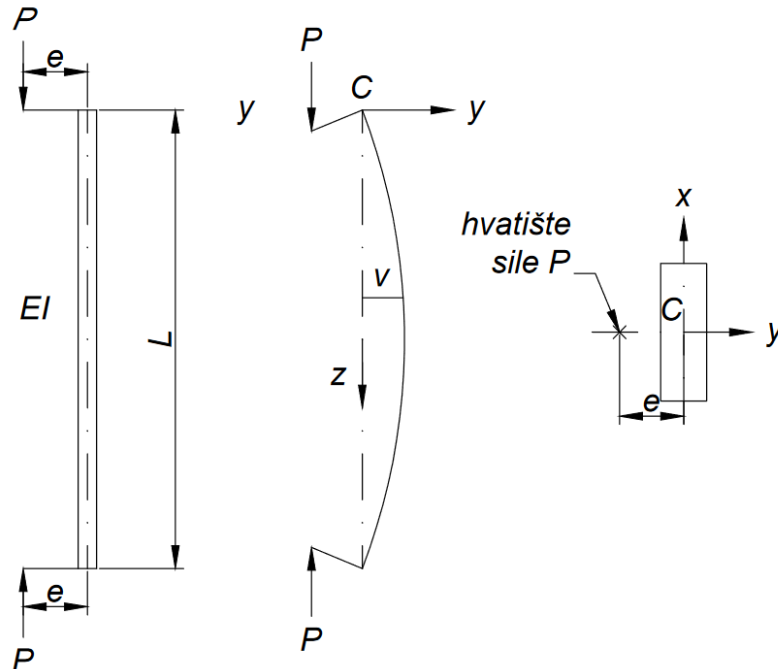
Prema formuli za kritičnu silu izvijanja, zglobno oslonjeni štapa će se izviti pri sili koja je četiri puta manja od kritične sile izvijanja štapa upetog na oba kraja i pri sili koja je četiri puta veća od kritične sile izvijanja štapa upetog na jednom kraju i zglobno oslonjenog na drugom kraju.

Tablica 2. Efektivne duljine izvijanja

| Način oslanjanja  | Efektivna duljina izvijanja |
|---|-----------------------------|
|    | $L_o = L$                   |
|   | $L_o = L$                   |
|  | $L_o = 0.5L$                |
|  | $L_o = 0.7L$                |
|  | $L_o = 2L$                  |

## 6. Ekscentricitet pri unosu sile

U stvarnosti je nemoguće opteretiti stup idealno centrično po cijeloj visini. Iz tog razloga je potrebno uzeti u obzir ekscentrično djelovanje sile  $P$  na štap konstantne savojne krutosti  $EI$  i duljine  $L$ .



Slika 3.. Ekscentrično opterećenje štapa

Pretpostaviti ćemo da se tlačna sila  $P$  primjenjuje na udaljenosti  $e$  od središta pravokutnog poprečnog presjeka, koji ima najmanji moment tromosti  $I_x$ . Tlačna sila  $P$  se primjenjuje na kratkoj konzoli koja je kruto vezana za štap. To će uzrokovati savijanje štapa. Pomak bilo koje točke od osi štapa ćemo pretpostaviti kao varijablu  $v$ . Moment savijanja u promatranom presjeku će iznositi:

$$M = P(e + v)$$

Ako pretpostavimo da su pomaci  $v$  jako mali onda je:

$$M = -EI \frac{d^2v}{dz^2}$$

Slijedi da je:

$$-EI \frac{d^2 v}{dz^2} = P(e + v)$$

$$EI \frac{d^2 v}{dz^2} + Pv = -Pe$$

Kada je ekscentricite  $e = 0$ , onda ćemo dobiti rješenje za centrično opterećeni štap.

Kao i prije:

$$k^2 = \frac{P}{EI}$$

dobit ćemo izraz:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + k^2 v = -k^2 e$$

Opće rješenje ove diferencijalne jednačbe iznosi:

$$v = A \cos kz + B \sin kz - e$$

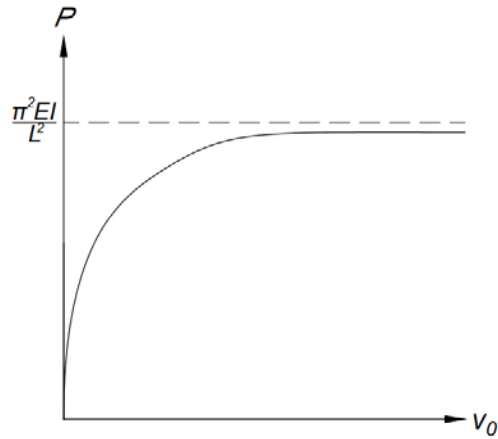
Konstante integracije  $A$  i  $B$  ćemo izračunati iz rubnih uvjeta:

$$v(z = 0) = 0 \text{ i } v(z = L) = 0$$

i tako ćemo dobiti:

$$A - e = 0$$

$$A \cos kL + B \sin kL - e = 0$$



Dijagram 4. Progibi ekscentrično opterećenog štapa

Prva jednađba daje rješenje  $A = e$ , a rješenje druge jednađbe je:

$$B = \frac{e(1 - \cos kL)}{\sin kL}$$

Onda je:

$$v = e(\cos kz - 1) + \frac{e(1 - \cos kL)}{\sin kL} \sin kz \quad (6.1)$$

Pomak  $v$  u sredini raspona je:

$$v_0 = e \left[ \left( \cos \frac{kL}{2} - 1 \right) + \frac{1 - \cos kL}{\sin kL} \sin \frac{1}{2} kL \right]$$

$$v_0 = e \left[ \frac{2 \sin \frac{1}{2} kL (1 - \cos \frac{1}{2} kL)}{\sin kL} \right] \quad (6.2)$$

Ako je  $\sin \frac{1}{2} kL \neq 0$ , dobijemo:

$$v_0 = e \left( \sec \frac{1}{2} kL - 1 \right) \quad (6.3)$$

Kada je  $P = 0$ :

$$\frac{1}{2}kL = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} = 0$$

i  $v_0 = 0$ . Kako se  $P$  približava  $\pi^2 EI/L^2$ ,  $1/2kL$  se približava  $\pi/2$ , a:

$$\sec \frac{1}{2}kL \rightarrow \infty$$

Stoga su vrijednosti  $v_0$  moguće od početka nanošenja opterećenja i rasti će nelinearno sa povećanjem  $P$ . Sila  $P$  neće poprimiti vrijednost  $\pi^2 EI/L^2$  jer bi u tom slučaju  $v_0$  bio beskonačno velik, a lom materijala bi nastupio za manju vrijednost sile  $P$ .

Moment savijanja će biti u sredini duljine štapa, gdje je najveći bočni pomak, a on iznosi:

$$M = P(v_0 + e) = Pe \sec \frac{1}{2}kL \quad (6.4)$$

Varijabla  $c$  predstavlja udaljenost osi štapa i najudaljenijih vlakanca štapa. Normalno naprezanje uslijed djelovanja momenta  $M$  je:

$$\sigma_1 = \frac{Mc}{I} = \frac{Pe \sec \frac{1}{2}kL}{I} \quad (6.5)$$

Srednje normalno tlačno naprezanje uslijed sile  $P$  je:

$$\sigma_2 = \frac{P}{A} \quad (6.6)$$

gdje je  $A$  površina poprečnog presjeka štapa. Najveće normalno tlačno naprezanje iznosi:



$$\sigma_{max} = \sigma_2 + \sigma_1 = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{I} \sec \frac{1}{2} kL \quad (6.7)$$

Pretpostavit ćemo da je  $I = Ar^2$ ,  $r$  je polumjer tromosti poprečnog presjeka oko osi  $x$ . Onda je:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{ec}{r^2} \sec \frac{1}{2} kL \right] \quad (6.8)$$

Najmanje tlačno naprezanje je:

$$\sigma_{min} = \frac{P}{A} \left[ 1 - \frac{ec}{r^2} \sec \frac{1}{2} kL \right] \quad (6.9)$$

Vrijednost sile  $P$  koja dovodi do najvećeg tlačnog naprezanja  $\sigma$ :

$$P = \frac{A\sigma}{1 + \frac{ec}{r^2} \sec \frac{1}{2} kL} \quad (6.10)$$

Kako je:

$$\frac{1}{2} kL = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

funkcija sile  $P$ , gore napisane jednadžbe se moraju rješavati iteracijski. Dobra aproksimacija je:

$$\frac{1}{2} kL = \theta, \text{ za } 0 < \theta < \pi/2$$

$$\sec \theta = \frac{1 + 0.26 \left(\frac{20}{\pi}\right)^2}{1 - \left(\frac{20}{\pi}\right)^2} = \frac{P_e + 0.26P}{P_e - P}$$

što dovodi do sljedeće jednadžbe za  $P$ :

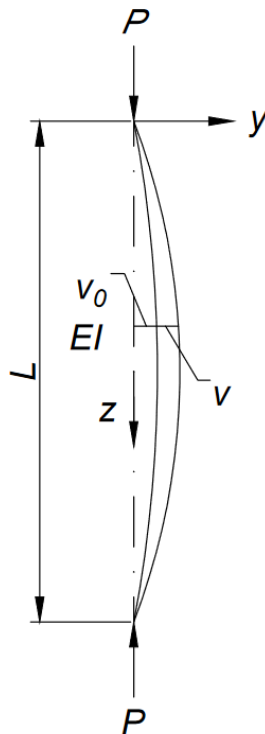
$$P^2 \left(1 - 0.26 \frac{eC}{r^2}\right) - P \left[ P_e \left(1 + \frac{eC}{r^2}\right) + \sigma_A \right] + \sigma A P_e = 0$$

Ako je  $e = 0$ , onda je  $P = P_e$  ili  $\sigma A$ .

## 7. Inicijalno zakrivljeni stupovi

Idealno ravan štap je nemoguće izvesti u praksi. Stoga bi pri analizi izvijanja štapova trebalo uzeti u obzir početnu zakrivljenost.

Promatrat ćemo štap zglobno učvršćen na oba kraja, koji u neopterećenom stanju ima malu početnu zakrivljenost. Početni progib  $v_0$  je udaljenost promatrane točke od uzdužne osi (slika 4). Hvatišta sila  $P$  na rubovima štapa će biti u središtu poprečnog presjeka.



Slika 4. Inicijalno zakrivljeni štap

Nakon opterećenja štapa u promatranom presjeku se javlja dodatni progib  $v$ . Moment savijanja u promatranom presjeku iznosi:

$$M = P(v + v_0)$$

Ako je štap u početnom stanju neopterećen, moment savijanja u promatranom presjeku je proporcionalan progibu elastične linije:

$$M = -EI \frac{d^2 v}{dz^2}$$

Ako dodatna zakrivljenost štapa nastaje zbog dodatnog progiba  $v$ , a ne zbog ukupnog progiba  $(v + v_0)$ , dobit ćemo:

$$EI \frac{d^2 v}{dz^2} + P(v + v_0) = 0$$

Ako je  $k^2 = P/EI$ , dobit ćemo:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + k^2 v = -k^2 v_0$$

Ako pretpostavimo da elastična linija ima sinusoidalni oblik, tada je:

$$v_0 = a \sin \frac{\pi z}{L} \tag{7.1}$$

gdje je konstanta  $a$  početni progib točke u sredini duljine štapa. Onda dobijemo izraz:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + k^2 v = -k^2 a \sin \frac{\pi z}{L} \tag{7.2}$$

Opće rješenje nehomogene diferencijalne jednačine je:

$$v = A \cos kz + B \sin kz + \frac{k^2 a}{\frac{\pi^2}{L^2} - k^2} \sin \frac{\pi z}{L}$$

Ako je štap zglobno oslonjen, rubni uvjeti su:

$$v(z = 0) = 0 \text{ i } v(z = L) = 0$$

i tako ćemo dobiti:

$$A = 0$$

$$B \sin kL = 0$$

Ako pretpostavimo  $k \neq 0$ , onda je  $B = 0$ ,  $v$  iznosi:

$$v = \frac{k^2 a}{\frac{\pi^2}{L^2} - k^2} \sin \frac{\pi z}{L} \quad (7.3)$$

što se može zapisati na drugi način:

$$v = \frac{a \sin \frac{\pi z}{L}}{\frac{\pi^2}{k^2 L^2} - 1} \quad (7.4)$$

Ali, ako je  $k^2 = P/EI$  i  $P_e = \pi^2 EI/L^2$ , dobit ćemo:

$$v = \frac{a \sin \frac{\pi z}{L}}{\frac{P_e}{P} - 1} = \frac{v_0}{\frac{P_e}{P} - 1} \quad (7.5)$$

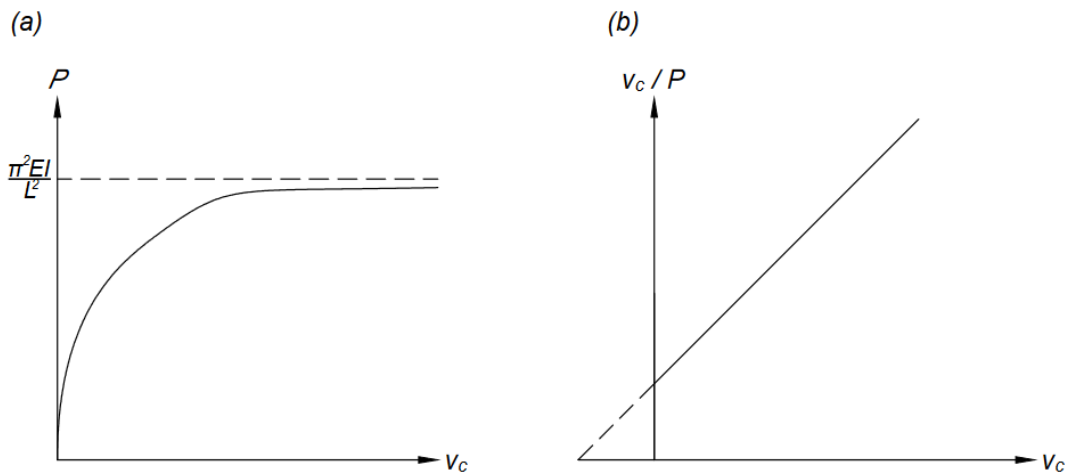
Sada je  $P_e$  sila izvijanja za idealno ravan štap. Iz navedenog izraza vidljivo je da će sila  $P$  povećati početnu zakrivljenost faktorom  $1/[(P_e/P) - 1]$ . Očito je da približavanje iznosa sile  $P$  sili izvijanja za idealno ravan štap,  $P_e$ , progib  $v$  teži u beskonačnost. Dodatni progib u sredini duljine štapa je:

$$v_c = \frac{a}{\frac{P_e}{P} - 1} \quad (7.6)$$

Odnos između  $P$  i  $v_c$  je grafički prikazan na dijagramu 5(a). Vrijednost  $v_c$  se brzo povećava kako se  $P$  približava  $P_e$ . Teoretski, sila  $P_e$  se može dosegnuti ako je progib beskonačno velik. U stvarnosti lom materijala će nastati prije dosezanja sile  $P_e$  i pri konačnom pomaku. Konstantu  $a$  možemo izraziti kao:

$$P_e \frac{v_c}{P} - v_c = a \quad (7.7)$$

Ovaj izraz nam daje linearnu ovisnost  $v_c/P$  i  $v_c$  (dijagram 5). Negativne vrijednosti za dodatni progib odgovaraju vrijednosti  $-a$ . Ako grafički prikažemo odnos  $v_c/P$  i  $v_c$ , može se ustanoviti da približavanjem kritičnoj vrijednosti  $P_e$  ove varijable su u linearnom odnosu kako smo prethodno zaključili. Nagib grafa predstavlja  $P_e$  kritičnu silu izvijanja idealno ravnog štapa.



Dijagram 5. Progib štapa s početnom zakrivljenosti

$P$ - $v_c$  krivulja se asimptotski približava pravcu  $P = P_e$  ako je materijal elastičan.

Prilikom analize izvijanja štapova potrebno je odrediti najveća uzdužna naprezanja. Najveći moment savijanja se javlja u sredini štapa i iznosi:

$$M = P(a + v_c) = Pa \left[ 1 + \frac{1}{\frac{P_e}{P} - 1} \right] = Pa \left[ \frac{P_e}{P_e - P} \right] \quad (7.8)$$

Najveće tlačno naprezanje se javlja u vlakancima najudaljenijim od središta poprečnog presjeka, a ono iznosi:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Pa P_e}{P_e - P} \left(\frac{c}{I}\right) = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{P_e}{P_e - P} \left(\frac{ac}{r^2}\right)\right] \quad (7.9)$$

gdje su  $A$  površina poprečnog presjeka,  $c$  je udaljenost od središta poprečnog presjeka do najudaljenijih vlakana i  $r$  je radijus tromosti poprečnog presjeka. Ako je srednje naprezanje  $\sigma = P/A$ , onda je:

$$\sigma_{max} = \sigma \left[1 + \frac{\sigma_e}{\sigma_e - \sigma} \left(\frac{ac}{r^2}\right)\right] \quad (7.10)$$

gdje je:

$$\sigma_e = \frac{P_e}{A} = \pi^2 E \left(\frac{r}{L}\right)^2 \quad (7.11)$$

Pretpostavimo li  $\frac{ac}{r^2} = \eta$ . Onda je:

$$\sigma_{max} = \sigma \left[1 + \frac{\eta \sigma_e}{\sigma_e - \sigma}\right] \quad (7.12)$$

$$\sigma_{max} = (\sigma_e - \sigma) = \sigma[(1 + \eta)\sigma_e - \sigma]$$

Slijedi da je:

$$\sigma^2 - \sigma[\sigma_{max} + (1 + \eta)\sigma_e] + \sigma_{max} \sigma_e = 0$$

$$\sigma = \frac{1}{2}[\sigma_{max} + (1 + \eta)\sigma_e] - \sqrt{\frac{1}{4}[\sigma_{max} + (1 + \eta)\sigma_e]^2 - \sigma_{max} \sigma_e} \quad (7.13)$$

Za rješenje korijena uzimamo negativnu vrijednost. Ovo rješenje nam daje prosječno naprezanje  $\sigma$ , pri kojem bi najveće tlačno naprezanje  $\sigma_{max}$  bilo ostvareno za bilo koju vrijednost  $\eta$ . Ako nas zanima vrijednost  $\sigma$  pri kojem je dosegnuta granica tečenja  $\sigma_y$  za štap od mekog čelika:

$$\sigma = \frac{1}{2}[\sigma_y + (1 + \eta)\sigma_e] - \sqrt{\frac{1}{4}[\sigma_y + (1 + \eta)\sigma_e]^2 - \sigma_y \sigma_e} \quad (7.14)$$



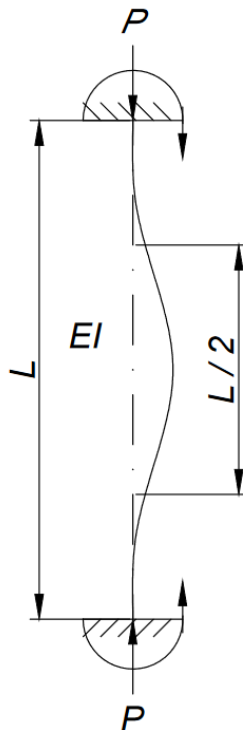
## 8. Izvijanje stupova pri različitim rubnim uvjetima

### 8.1 Izvijanje obostrano upetog stupa

Kod elastičnog izvijanja štapova do sada smo pretpostavljali da su krajevi štapa uvijek zgloбно spojeni s podlogom. Ako su na rubovima štapa spriječeni zaokreti (slika 4), tada će elastična linija poprimiti oblik polusinusoida sa tačkama infleksije u četvrtinama duljine štapa za najmanje kritično opterećenje. Stoga će najmanja kritična sila izvijanja iznositi:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{1}{2}L\right)^2} = 4\pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (8.1)$$

a efektivna duljina izvijanja  $L_0 = 0.5L$ .



Slika 5. Izvijanje obostrano upetog štapa

Ako su rubovi štapa upeti, moment upetosti će se razviti tek kada se štap izvijuje.

## 8.2 Izvijanje jednostrano upetog stupa

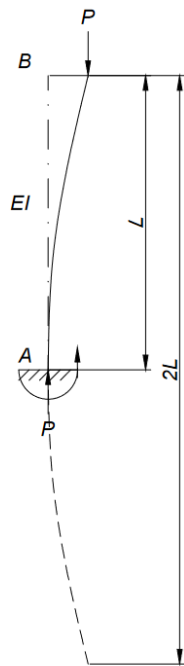
Ako se slobodni kraj konzole optereti tlačnom silom  $P$ , za najmanje kritično opterećenje, elastična linija će poprimiti oblik sinusoidalnog vala kojemu su točke infleksije na udaljenosti  $2L$  (slika 6).

Kritična sila izvijanja će iznositi:

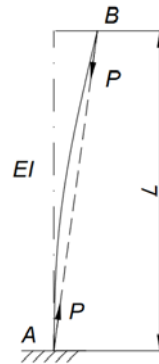
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (8.2)$$

a efektivna duljina izvijanja  $L_0 = 2L$ .

Važna pretpostavka ove analize je da sila koja djeluje na slobodnom kraju konzole ostaje u vertikalnom položaju. U protivnom će sila  $P$  djelovati na pravcu BA (slika 7), te neće nastati moment upetosti u ležaju A, a konzola će se ponašati kao zglobno oslonjen štap.



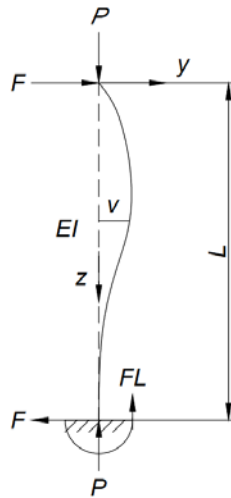
Slika 7. Izvijanje štapa upetog na jednom kraju, a na drugom slobodan



Slika 6. Štap se nastoji vratiti u početni položaj

### 8.3 Izvijanje stupa upetog na jednoj strani, na drugoj zglobno oslonjenog

Štap na jednom kraju upet, a na drugom slobodno oslonjen prikazan je na slici 8, te je opterećen vertikalnom silom  $P$ .



Slika 8. Izvijanje štapa upetog na jednom kraju, a na drugom zglobno oslonjen

Ako je  $v$  progib središnje osi paralelno s osi  $y$ , moment savijanja u promatranom presjeku je:

$$M = Pv - Fz$$

Međutim, moment savijanja u promatranom presjeku je proporcionalan progibu elastične linije:

$$M = -EI \frac{d^2v}{dz^2}$$

Slijedi:

$$-EI \frac{d^2v}{dz^2} = Pv - Fz$$

Ako je  $k^2 = P/EI$ , dobit ćemo:

$$\frac{d^2v}{dz^2} + k^2v = \frac{Fk^2z}{P}$$

Opće rješenje nehomogene diferencijalne jednačbe je:

$$v = A \cos kz + B \sin kz + \frac{F}{P} z$$

gdje su  $A$  i  $B$  proizvoljne konstante; a vrijednost sile  $F$  je isto nepoznata, pa postoje tri nepoznanice u jednačbi. Rubni uvjeti su:

$$v(z = 0) = 0 \text{ i } v(z = L) = 0 \text{ i } \frac{dv}{dz} = 0$$

Rješenja su:

$$A = 0$$

$$B \sin kL + \frac{FL}{P} = 0$$

$$B \cos kL + \frac{FL}{P} = 0$$

Zadnje dvije jednačbe daju rješenje:

$$\frac{B}{F} = -\frac{L}{P \sin kL} = -\frac{L}{Pk \cos kL}$$

Iz čega slijedi:

$$kL \cos kL = \sin kL \tag{8.3}$$

Ova jednađba će dati rješenja  $kL$  za neodređene konstante  $B$  i  $F$ , odnosno za uvjete *indiferentne ravnoteže*. Jednađbu možemo zapisati u obliku:

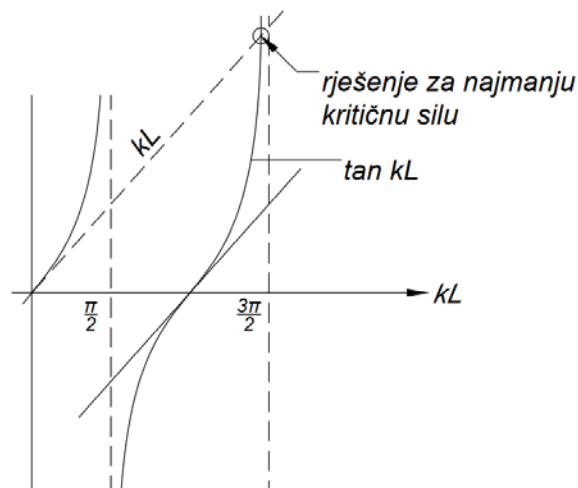
$$kL = \tan kL \quad (8.4)$$

Najmanja vrijednost za  $kL$  koja zadovoljava gornju jednađbu, uz uvjet da je različita od nule približno iznosi 4.49 (dijagram 6). Kritična sila izvijanja je:

$$P_{cr} = k^2 EI = 4.49^2 \frac{EI}{L^2} = 20.2 \frac{EI}{L^2}$$

Približnu vrijednost za  $kL$  možemo izvesti na način da pretpostavimo da je:

$$kL = \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$$



Dijagram 6. Grafičko određivanje kritične sile izvijanja

Zanima nas korijen jednađbe:

$$\frac{3\pi}{2} - \varepsilon = \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right)$$

Ako je  $\varepsilon$  mali onda:

$$\frac{3\pi}{2} - \varepsilon = \cot \varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{1}{3} \varepsilon^2 \right)$$

Približno je:

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{ili} \quad \varepsilon = \frac{2}{3\pi}$$

Onda je:

$$kL = \frac{3\pi}{2} - \frac{2}{3\pi} = \frac{9\pi^2 - 4}{6\pi}$$

$$P_{cr} = k^2 EI = \left( \frac{9\pi^2 - 4}{6\pi} \right)^2 \frac{EI}{L^2} = 20.3 \frac{EI}{L^2} \quad (8.5)$$

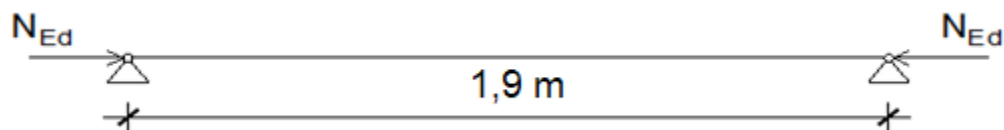
gdje je:

$$L_0 = \sqrt{\pi^2 / 20.3} = 0.7$$

## 9. Numerički primjer

U numeričkom primjeru je prikazan postupak dimenzioniranja gornjeg pojasa rešetkastog nosača opterećenog uzdužnom tlačnom silom prema EN 1993, te provjera iskoristivosti čvrstoće poprečnog presjeka i provjera iskoristivosti elementa na izvijanje preko Eulerove formule.

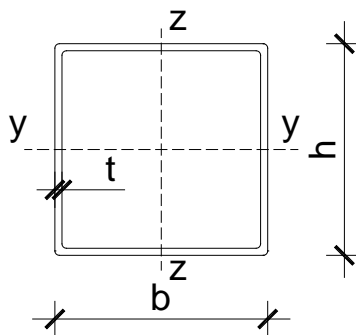
### Statički sustav



Slika 9. Statički sustav

$$N_{Ed} = F_d = 340.80 \text{ kN (tlačna sila)}$$

### Poprečni presjek



Slika 10. Poprečni presjek

Odabrani profil:

80×80×4

Tip poprečnog presjeka:

toplo dogotovljeni

Površina popr. presjeka:

$$A = 12.0 \text{ cm}^2$$

Moment tromosti:

$$I = 115 \text{ cm}^4$$

Visina presjeka:  $h = 80 \text{ mm}$

Širina pojasnice:  $b = 80 \text{ mm}$

Debljina stijenke:  $t = 4.0 \text{ mm}$

Osnovni materijal:

S 460

Granica popuštanja:  $f_y = 460 \text{ N/mm}^2$

Modul elastičnosti:  $E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$

Parcijalni faktori

$$\gamma_{M0} = 1.00$$

$$\gamma_{M1} = 1.10$$

Razradba poprečnog presjeka

Hrbat:

$$c = h - 3 \cdot t = 80 - 3 \cdot 4 = 68.00 \text{ mm}$$

$$\frac{c}{t} = \frac{68.00}{4} = 17.00$$

uvjet za klasu 1:

$$\frac{c}{t} \leq 33 \cdot \varepsilon$$

$$33 \cdot \varepsilon = 33 \cdot 0.71 = 23.59$$



$$17 \leq 23.59$$

Hrbat je svrstan u klasu 1

$$c = h - 3 \cdot t = 80 - 3 \cdot 4 = 68.00 \text{ mm}$$

$$\frac{c}{t} = \frac{68.00}{4} = 17.00$$

uvjet za klasu 1:

$$\frac{c}{t} \leq 33 \cdot \varepsilon$$

$$33 \cdot \varepsilon = 33 \cdot 0.71 = 23.59$$

$$17 \leq 23.59$$

Pojasnica je svrstana u klasu 1

Poprečni presjek svrstan je u klasu 1!!

Otpornost poprečnog presjeka u tlaku

$$N_{c,Rd} = N_{pl,Rd} = \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{12 \cdot 46}{1.00} = 552 \text{ kN}$$

Uvjet nosivosti:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{c,Rd}} \leq 1.00$$

$$\frac{340.80}{552.00} = 0.62$$

$$0.62 < 1.00$$

Odabrani profil zadovoljava, iskoristivost je 62%.

### Otpornost elementa na izvijanje

Konstruktivski element u tlaku

$$N_{b,y,Rd} = N_{b,z,Rd} = N_{b,Rd} = \chi \cdot \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M0}}$$

Za poprečne presjeke razreda 1, 2 i 3:

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}}$$

Ali  $\chi \leq 1,0$

$$\Phi = 0.5 \cdot [1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2]$$

Bezdimenzijska vitkost  $\lambda$ :

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}}$$

Elastična kritična sila  $N_{cr}$ :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_{cr}^2}$$

Os y-y:

$$L_{cr,y} = L = 190.00 \text{ cm}$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot 21000 \cdot 115}{190^2} = 660.25 \text{ kN}$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{12 \cdot 46}{660.25}} = 0.91$$

Os z-z:

$$L_{cr,y} = L = 190.00 \text{ cm}$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot 21000 \cdot 115}{190^2} = 660.25 \text{ kN}$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{12 \cdot 46}{660.25}} = 0.91$$

Mjerodavna krivulja izvijanja

Toplo gotovljena cijev – krivulja izvijanja a<sub>0</sub>

Faktor imperfekcije  $\alpha = 0.13$

Određivanje faktora redukcije  $\chi$ :

Os y-y i os z-z:

$$\Phi = 0.5 \cdot [1 + 0.13 \cdot (0.91 - 0.2) + 0.91^2] = 0.96$$

$$\chi = \chi_{min} = \frac{1}{0.96 + \sqrt{0.96^2 - 0.91^2}} = 0.79$$

$$N_{b,Rd} = 0.79 \cdot \frac{12.00 \cdot 46}{1.10} = 396.43 \text{ kN}$$

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \leq 1.00$$

$$\frac{340.80}{396.43} = 0.86$$

$$0.86 < 1.00$$

Odabrani profil zadovoljava, iskoristivost je 86%.

Provjera izvijanja prema Euleru

Duljina izvijanja:

$$l_i = l = 192.00 \text{ cm}$$

Polumjer tromosti presjeka:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{115.00}{12.00}} = 3.096 \text{ cm}$$

Vitkost štapa:

$$\lambda = \frac{l_i}{i_{min}} = \frac{190.00}{3.096} = 61.37$$

Granična vitkost štapa:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{115.00}{12.00}} = 3.096 \text{ cm}$$

$\lambda > \lambda_p \rightarrow$  *izvijanje u elastičnom području*

Eulerova kritična sila izvijanja:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_i^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210000 \cdot 1150000}{1900^2} = 660\,252 \text{ N} = 660.25 \text{ kN}$$

$$\frac{N_{Ed}}{P_{kr}} = \frac{340.80}{660.25} = 0.52$$

Iskoristivost je 52%.

Iz dobivenih rezultata je vidljivo da je kritična sila koju element može podnijeti prije gubitka stabilnosti prema EN 1993 znatno manja od one koja je izračunata Eulerovom formulom, što je očekivano jer se u normama eurokoda u obzir uzimaju rotacijski kapacitet presjeka te faktor redukcije normalne sile  $\chi$ .

## **Zaključak**

Opterećenje na stupove može uzrokovati tlačni slom, ali može uzrokovati i dodatne deformacije, koje će u konačnosti dovesti do gubitka stabilnosti. Istraživanjima je dokazano da će vitki stupovi doći do granice loma znatno prije nego li se dosegne tlačna čvrstoća materijala. Međutim, ako deformacije koje nastaju izvijanjem stupa ne uzrokuju slom, stup će ostati u deformiranom obliku i prenositi će opterećenje. Na izvijanje, osim tlačnog opterećenja, utječu i geometrijske karakteristike poprečnog presjeka, načini oslanjanja stupa na podlogu, svojstva materijala od kojeg je stup izrađen. Rankine-Gordon formula u obzir uzima otpornost elementa na tlačno opterećenje i otpornost elementa na izvijanje, te je primjenjiva za stupove male, srednje i velike vitkosti.

## **Popis literature**

[1]Šimić, V. (1995): Otpornost materijala II(I. izdanje), Sveučilište u Zagrebu, Školska knjiga, Zagreb

[2]Case, J., Lord Chilver, Ross, C.(1999): Strength of Materials and Structures (Fourth Edition), Arnold, a member of the Hodder Headline Group, London

[3]Krolo, J.(2013): Skripta – prof. Krolo: Izvijanje, gubitak elastične stabilnosti, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet. Dostupno

na: [https://www.grad.unizg.hr/download/repository/7\\_Izvijanje%5B1%5D.pdf](https://www.grad.unizg.hr/download/repository/7_Izvijanje%5B1%5D.pdf) (19. srpanj 2023.)

## **Popis slika**

|   |    |
|---|----|
| Slika 1. Izvijanje zglobno oslonjenog štapa .....                                   | 8  |
| Slika 2. Oblik elastične linije .....   | 10 |
| Slika 3.. Ekscentrično opterećenje štapa .....                                      | 19 |
| Slika 4. Inicijalno zakrivljeni štap.....   | 25 |
| Slika 5. Izvijanje obostrano upetog štapa.....                                      | 31 |
| Slika 6. Štap se nastoji vratiti u početni položaj .....                            | 32 |
| Slika 7. Izvijanje štapa upetog na jednom kraju, a na drugom slobodan .....         | 32 |
| Slika 8. Izvijanje štapa upetog na jednom kraju, a na drugom zglobno oslonjen ..... | 33 |
| Slika 9. Statički sustav .....  | 37 |
| Slika 10. Poprečni presjek.....   | 37 |



## **Popis tablica**

|   |    |
|---|----|
| Tablica 1. Rankinove konstante.....         | 16 |
| Tablica 2. Efektivne duljine izvijanja..... | 18 |

## **Popis dijagrama**

|   |    |
|---|----|
| Dijagram 1. Velike deformacije i lom štapa .....                          | 13 |
| Dijagram 2. Usporedba Eulerove i Rankine-Gordonove formule.....           | 16 |
| Dijagram 3. Rankine-Gordonova sila za savršene i nesavršene štapove ..... | 17 |
| Dijagram 4. Progibi ekscentrično opterećenog štapa .....                  | 21 |
| Dijagram 5. Progib štapa s početnom zakrivljenosti.....                   | 28 |
| Dijagram 6. Grafičko određivanje kritične sile izvijanja .....            | 35 |