

Problem stabilnosti stupova

Oreb, Nikola

Undergraduate thesis / Završni rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:066641>

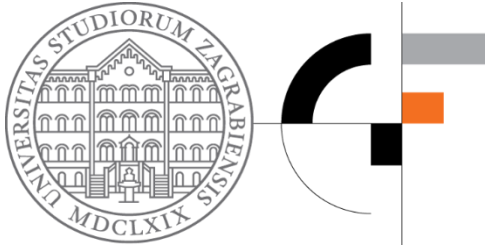
Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-13**

Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,
University of Zagreb](#)





SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Građevinski fakultet
UNIVERSITY OF ZAGREB
Faculty of Civil Engineering

ZAVRŠNI RAD
PROBLEM STABILNOSTI STUPOVA
COLUMN STABILITY PROBLEM

Mentor:

izv. prof. dr. sc. Marko Bartolac

Student:

Nikola Oreb

Zagreb, 2023.



TEMA ZAVRŠNOG ISPITA

Ime i prezime studenta: **Nikola Oreb**

JMBAG: **0082066757**

Završni ispit iz predmeta: **Otpornost materijala 2**

Naslov teme
završnog ispita:

HR	Problem stabilnosti stupova
ENG	Column Stability Problem

Opis teme završnog ispita:

Završni rad treba sadržavati sljedeće:

- Popunjen i potpisan Obrazac 2,
- Sažetak rada i ključne riječi na hrvatskom i engleskom jeziku,
- Obradenu temu o teoriji izvijanja i proračunu stupova,
- Riješene zadatke,
- Popis literature.

Datum: **17. 04. 2023.**

Komentor:

(Ime i prezime komentora)

Mentor:

Marko Bartolac

(Ime i prezime mentora)

(Potpis mentora)



Sažetak

Predmet ovog završnog rada je analiza gubitka stabilnosti stupova opterećenih tlačnom silom uslijed izvijanja. Prilikom analize čeličnih vruće valjanih IPE profila promatran je utjecaj imperfekcije štapa (početna zakrivljenost) i ekscentričnost opterećenja na pojavu izvijanja. Parametarska analiza dovela je do zaključka da imperfekcije štapa i opterećenja imaju značajan utjecaj na kritičnu silu, koja se porastom vrijednosti imperfekcija može smanjiti i oko 50 %. Zatim se promatralo kako se ugradnjom jedne ili više bočnih stabilizacija povećava krutost IPE profila u slabijoj glavnoj ravnini. Na temelju provedenih analiza za različite duljine izvijanja i položaje bočnih stabilizacija, uočen je trend da IPE profilima većih dimenzija bočna stabilizacija treba biti postavljena na manjem razmaku kako bi se dobile približno jednake kritične sile u obje glavne ravnine. Rad nadalje prikazuje smjernice dimenzioniranja elemenata na izvijanje koje su popraćene riješenim primjerima dimenzioniranja zglobno učvršćenih štapova. Na temelju provedenih parametarskih analiza i dobivenih grafova dani su zaključci o ponašanju čeličnih IPE profila koji su izloženi izvijanju.

Ključne riječi: stup, stabilnost, izvijanje, tlačna sila



Summary

The subject of this paper is the analysis of the loss of stability of columns loaded with compressive force due to buckling. In the analysis of hot-rolled steel IPE sections, the influence of the imperfection of the bar (initial curvature) and the eccentricity of the load on the occurrence of buckling was observed. The parametric analysis led to the conclusion that bar and load imperfections have a significant influence on the critical force, which can be reduced by about 50% with an increase in the value of the imperfections. It was then observed how the stiffness of the IPE profile in the weaker plane increases with the installation of one or more lateral stabilisations. Based on the analyses performed for different buckling lengths and positions of the lateral stabilisation, a trend was found that for IPE sections with larger dimensions, the lateral stabilisation should be placed at a smaller distance to obtain approximately equal critical forces in both main planes. The paper also provides guidelines for the design of elements subject to buckling, accompanied by solved examples for the design of articulated bars. Based on the parametric analyses carried out and the diagrams obtained, conclusions were drawn about the behaviour of IPE steel sections at risk of buckling.

Key words: column, stability, buckling, compressive force



Sadržaj

1. UVOD.....	6
1.1. Vrste ravnoteže tlačno opterećenog štapa.....	6
1.2. Eulerova kritična sila	8
1.2.1 Štap zglobno učvršćen na oba kraja.....	9
1.2.2 Ostali načini učvršćenja štapa	11
1.3. Kritično naprezanje	13
1.4. Izvijanje u plastičnom području	15
1.5. Utjecaj imperfekcija na kritično naprezanje	16
1.6. Izvijanje u građevinarstvu	16
2. IMPERFEKCIJE ŠTAPA I OPTEREĆENJA.....	18
2.1. Početna zakrivljenost štapa	19
2.2. Ekscentrično opterećenje štapova.....	25
3. DULJINA IZVIJANJA IPE PROFILA	31
4. DIMENZIONIRANJE ŠTAPOVA NA IZVIJANJE	37
5. PRIMJERI DIMENZIONIRANJA ŠTAPOVA NA IZVIJANJE	39
5.1 Dimenzioniranje štapa IPE uz početni ekscentricitet.....	39
5.2 Određivanje poprečnog presjeka štapa uz početnu zakrivljenost.....	41
5.3 Dimenzioniranje štapa IPE profila sa bočnim pridržanjima	43
6. ZAKLJUČAK	45
Popis literature.....	47
Popis simbola:	48
Popis slika i tablica	50

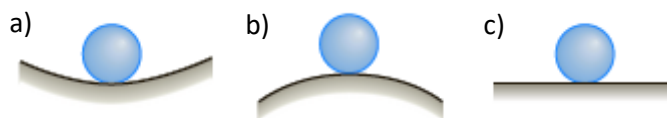
1. UVOD

Konstruktivski element je dio konstrukcije koji je projektiran i izveden na način da preuzme na konstrukciju nametnuta djelovanja te ih na siguran način prenese do temelja i dalje u tlo. Linijski element je konstruktivski element jednodimenzionalne geometrije, što znači da mu je jedna dimenzija dominantna u odnosu na ostale.

Stupovi su vertikalni linijski konstruktivski elementi koji su najčešće opterećeni uzdužnom tlačnom silom.

1.1. Vrste ravnoteže tlačno opterećenog štapa

Svako tijelo može biti u stanju stabilne, labilne i indiferentne ravnoteže. Sva tri stanja mogu se jednostavno opisati na primjeru kugle koja je položena na različite podloge. Na slici 1 prikazane su s lijeva na desno kugla na konkavnoj, konveksnoj i ravnoj podlozi [3].



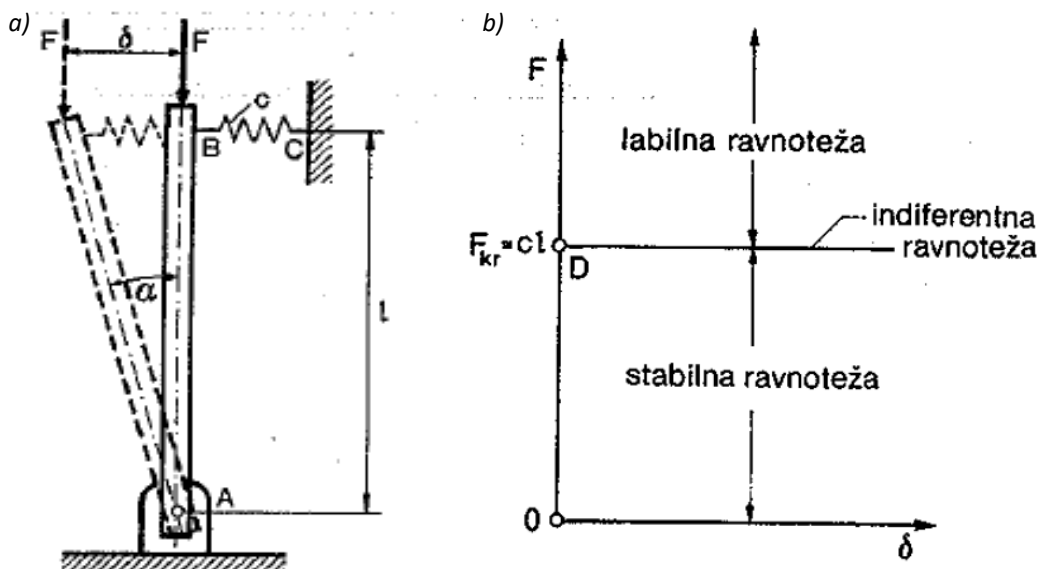
Slika 1: Vrste ravnoteže tijela (a) stabilna; (b) labilna; (c) indiferentna [3]

Kugla na konkavnoj podlozi nalazi se u stanju stabilne ravnoteže (slika 1a). Ako ju pomaknemo iz tog ravnotežnog položaja te ju prepustimo samoj sebi, ona će se vratiti u svoj prvobitni ravnotežni položaj. Stabilnom položaju kugle odgovara minimum potencijalne energije.

Kugla na konveksnoj podlozi nalazi se u stanju labilne odnosno nestabilne ravnoteže (slika 1b). Ako ju pomaknemo iz ravnotežnog položaja, ona se neće sama vratiti u prvobitni položaj, već će se sve više udaljavati od prvobitnog ravnotežnog položaja. Labilnoj ravnoteži kugle odgovara maksimum potencijalne energije.

Kugla na horizontalnoj podlozi nalazi se u stanju indiferentne ravnoteže (slika 1c). Ako ju pomaknemo iz ravnotežnog položaja, ona se neće vratiti u ravnotežni položaj, nego će ostati u ravnoteži u nekom novom položaju koji je blizak početnom položaju. Pritom potencijalna energija kugle ostaje nepromijenjena.

Jednako tako se i štap može nalaziti u različitim stanjima ravnoteže. Ako se promatra tlačno opterećen štap, stanja ravnoteže mogu se opisati ovisno o vrijednosti tlačne sile kojoj je štap izložen.



Slika 2: Ravni deformabilni štap aksijalno tlačno opterećen (a) grafički prikaz; (b) vrste ravnoteže štapa u ovisnosti o kritičnoj sili [1]

Na slici 2a nalazi se ravni deformabilni štap koji je aksijalno opterećen tlačnom silom. Na donjem kraju štap je zglobo oslonjen, a na gornjem pridrzan elastičnom oprugom. Pritom sila na štap djeluje idealno centrično, a štap je idealno ravan i izrađen od homogenog materijala. Štap će se pod djelovanjem sile F deformirati dok se ne uspostavi ravnoteža između vanjskih i unutarnjih sila. Pritom ravnoteža štapa pridrzanog oprugom ovisi o veličini sile F . Ako neko kratkotrajno bočno opterećenje uzrokuje mali bočni pomak δ , na štap će djelovati moment $F\delta$ koji djeluje destabilizirajuće, odnosno teži udaljiti štap od vertikalnog ravnotežnog položaja, i moment elastične opruge $c\delta l$ (gdje je c krutost opruge) koji nastoji štap vratiti u početni vertikalni položaj. Za dovoljno male vrijednosti sile F vrijedi da je $F\delta < c\delta l$ te se štap pod djelovanjem opruge vraća u vertikalni položaj koji u ovom slučaju označuje položaj stabilne ravnoteže (slika 2b). Ukoliko se sila F poveća do vrijednosti za koju je ispunjen uvjet:

$$F\delta = c\delta l$$

štap će nakon prestanka djelovanja bočnog opterećenja koje je uzrokovalo bočni pomak δ zadržati novi položaj određen danim bočnim pomakom δ . To je položaj indiferentne ravnoteže štapa, a iz gornjeg izraza izlazi definicija kritičnog opterećenja odnosno kritične sile.

$$F_{kr} = cl$$

Za $F > F_{kr}$ sistem je u labilnoj ravnoteži, jer je moment djelovanja $F\delta$ veći od momenta sile u opruzi $c\delta l$ ($F\delta > c\delta l$) pa pomak δ stalno raste i štap se ponaša kao da nije pridržen oprugom. Točka D na slici 2b naziva se točkom razgranjenja ili točkom bifurkacije.

Sličan problem stabilnosti javlja se i kod deformabilnih štapova. Pod tlačnim opterećenjem štap se deformira dok se ne uspostavi ravnoteža između unutarnjih i vanjskih sila. Ravnotežni oblik, kao što je prethodno spomenuto, ovisi o veličini opterećenja, a može biti stabilan ($F < F_{kr}$), indiferentan ($F = F_{kr}$) i labilan ($F > F_{kr}$), gdje se u trenutku indiferentne ravnoteže štap nalazi u kritičnom stanju pri kojem gubi stabilnost.

Ta opisana pojava gubitka stabilnosti ravnog štapa opterećenog centričnom tlačnom silom F naziva se izvijanje, a granična vrijednost centrične tlačne sile do koje je štap stabilan naziva se kritičnom silom F_{kr} . Kako u stvarnosti štap nije idealno ravan, a sila ne djeluje idealno centrično, do izvijanja dolazi čim tlačna sila F dosegne kritičnu vrijednost. Jednom kada dođe do izvijanja, štap u izvijenom obliku može podnijeti i veće tlačno opterećenje, međutim izvijeni štap ima značajne pomake koji se u građevinarstvu generalno ne toleriraju i dozvoljavaju, stoga se dozvoljena tlačna sila u štapu ograničava na onu kod koje dolazi do izvijanja [2].

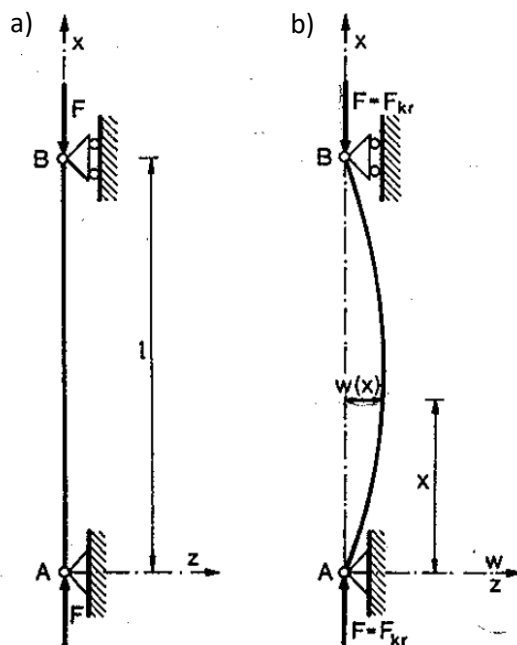
1.2. Eulerova kritična sila

Leonhard Euler bio je švicarski matematičar, fizičar i astronom koji je prvi istražio stabilnost štapova koji su aksijalno opterećeni na tlak. On je 1774. godine izveo izraz za kritičnu silu pri kojoj dolazi do gubitka stabilnosti tlačno opterećenog štapa i pokazao da vrijednost kritične sile ovisi o načinu učvršćenja krajeva štapa.

Prema načinu učvršćenja krajeva štapa razlikuju se 4 osnovna slučaja izvijanja štapa. U nastavku je detaljno opisan princip izvoda izraza za Eulerovu kritičnu silu za štap zglobno učvršćen na oba kraja, dok će se za ostale načine učvršćenja napisati konačna formula po kojoj se određuje kritična sila.

1.2.1 Štap zglobno učvršćen na oba kraja

Štap zglobno učvršćen na oba kraja za potrebe izvoda izraza ravnoteže prikazan je na slici 3a u nedeformiranom obliku i na slici 3b u deformiranom obliku.



Slika 3: Štap zglobno oslonjen na oba kraja (a) nedeformiran oblik štapa; (b) deformiran oblik štapa [1]

Diferencijalna jednačba elastične (progibne) linije štapa glasi [1]:

$$\frac{d^2w}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} = -\frac{M}{EI}$$

Uz pretpostavku da su progibi mali, izraz $\left(\frac{dw}{dx} \right)^2$ poprima vrijednost približno nuli pa je nazivnik $\left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} \approx 1$. U trenutku kada centrična tlačna sila F dosegne vrijednost F_{kr} , podjednako je moguće da štap zadrži ravni oblik i da se izvije. Ukoliko dođe do izvijanja, u nekom presjeku izvijenog štapa pojaviti će se moment savijanja:

$$M = F \cdot w$$

Izvijanje štapa nastati će u ravnini najmanje fleksijske krutosti štapa pa u izraz uvrštavamo minimalni moment tromosti poprečnog presjeka štapa I_{min} . Stoga se gornja jednačba može zamijeniti približnom linearnom diferencijalnom jednačbom:



$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{F \cdot w}{EI_{min}}$$

Uz oznaku $\alpha^2 = \frac{F}{EI_{min}}$ dobijamo homogenu diferencijalnu jednadžbu drugog reda s konstantnim koeficijentima:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2 w = 0$$

Opće rješenje jednadžbe je:

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$$

Konstante integracije dobijemo iz rubnih uvjeta. Za štap koji je zglobno učvršćen na oba kraja, progib na početku i na kraju štapa je jednak nuli.

$$w(0) = 0 \text{ i } w(l) = 0$$

Iz prvog uvjeta dobije se da je $B = 0$ pa opće rješenje poprima oblik:

$$w = A \sin \alpha x$$

Kada se uvrsti drugi uvjet:

$$A \sin \alpha l = 0$$

Gornja jednadžba će biti jednaka nuli kada je $A = 0$ ili kada je $\sin \alpha l = 0$. Za $A = 0$, rješenje jednadžbe će poprimiti oblik $w(x) = 0$ što znači da je moguće da štap ostane u ravnotežnom obliku. Za izvijeni oblik štapa konstanta integracije $A \neq 0$, pa je

$$\sin \alpha l = 0$$

$$\alpha l = n\pi$$

$$\alpha = \frac{n\pi}{l}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Jednadžba elastične linije sada glasi:

$$w = A \sin \frac{n\pi}{l} x$$

Ako u izraz $\alpha^2 = \frac{F}{EI_{min}}$ uvrstimo da je $\alpha = \frac{n\pi}{l}$, dobije se izraz za silu pri kojoj dolazi do izvijanja štapa:

$$F = \frac{n^2 \pi^2 EI_{min}}{l^2}$$

S inženjerskog stajališta bitna je najmanja sila pri kojoj dolazi do izvijanja štapa, a ona se dobije kada je $n = 1$:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2}$$

Sila F_{kr} je Eulerova kritična sila za štap koji je zgloбно oslonjen na oba kraja. Po jednakom principu, uz poznate rubne uvjete i elastičnu liniju, moguće je izvesti izraze za štap upet na jednom kraju, slobodan na drugom, za štap upet na jednom kraju, zgloбно oslonjen na drugom i za štap upet na oba kraja, a ti izrazi dani su u idućem poglavlju.

1.2.2 Ostali načini učvršćenja štapa

Kritična sila za štap upet na jednom kraju, a na drugom slobodan glasi [1]:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{4l^2}$$

Kritična sila za štap upet na jednom kraju, a zgloбно oslonjen na drugom glasi [1]:

$$F_{kr} = \frac{2\pi^2 EI_{min}}{l^2}$$

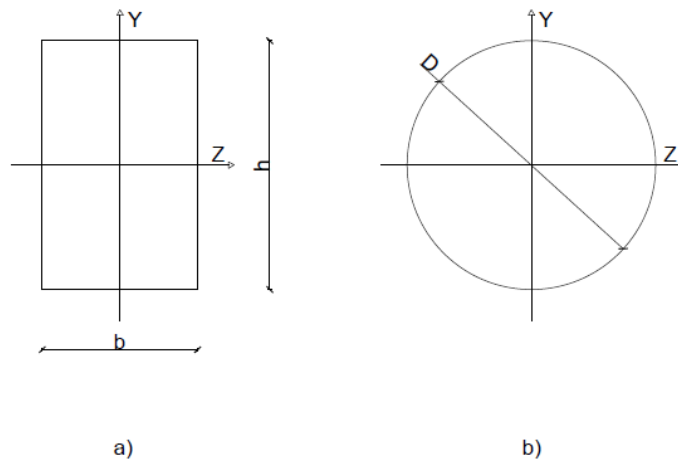
Kritična sila za štap upet na oba kraja glasi [1]:

$$F_{kr} = \frac{4\pi^2 EI_{min}}{l^2}$$

Sva četiri prethodno navedena izraza mogu se zapisati jednim, ako se umjesto duljine štapa l uvrsti l_i . Vrijednost l_i zove se duljina izvijanja ili efektivna duljina štapa, a predstavlja razmak između točaka infleksije elastične linije štapa [4]:

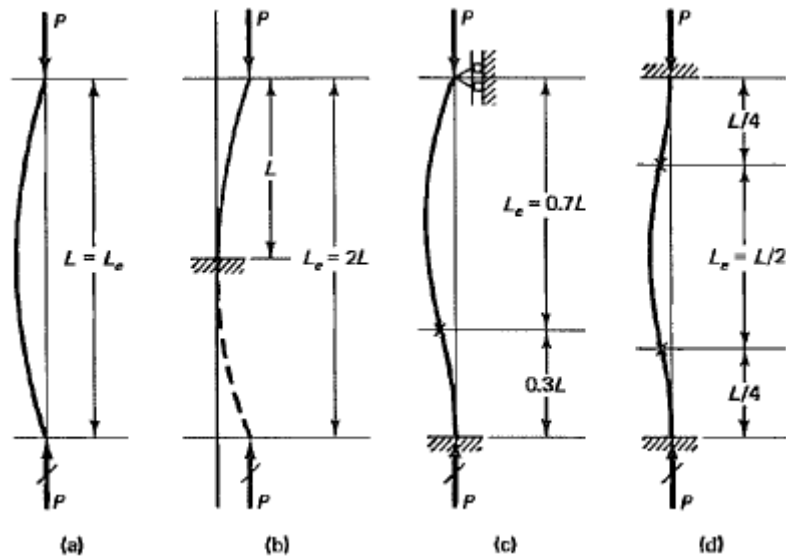
$$F_{kr} = \frac{4\pi^2 EI_{min}}{l_i^2}$$

Iz gornjeg izraza vidi se da Eulerova kritična sila ovisi o krutosti materijala elementa (E), minimalnom momentu tromosti poprečnog presjeka elementa (I_{min}) i duljini izvijanja elementa l_i .



Slika 4: pravokutni poprečni presjek (a); kružni poprečni presjek (b)

Presjeci općenito mogu imati različite ili iste momente tromosti u različitim ravninama. Na slici 4 prikazani su pravokutni i kružni poprečni presjek. Za pravokutni poprečni presjek glavni momenti tromosti su $I_y = \frac{bh^3}{12}$ i $I_z = \frac{hb^3}{12}$. Ako je $h > b$, moment tromosti I_y biti će veći od I_z , a kako se element izvija uvijek oko najslabije osi, pravokutni poprečni presjek ovakvog oblika uvijek će se izviti oko osi z, odnosno osi koja ima minimalni moment tromosti. S druge strane kružni poprečni presjek u svim ravninama ima jednake momente tromosti $I = \frac{D^4\pi}{64}$. To znači da je kružnom poprečnom presjeku svaki moment tromosti minimalan, odnosno on se može izviti oko bilo koje osi. To je razlog određivanja minimalnog momenta tromosti u izrazu za Eulerovu kritičnu silu.



Slika 5: Duljine izvijanja različito oslonjenih štapova: (a) Štap zglobno učvršćen na oba kraja; (b) Štap upet na jednom kraju, slobodan na drugom; (c) Štap upet na jednom kraju, zglobno oslonjen na drugom; (d) Štap upet na oba kraja [4]

Na slici 5 prikazane su duljine izvijanja različito oslonjenih štapova. One ovise o uvjetima oslanjanja štapa, a vrijednosti za pojedine slučajeve su dani u tablici 1:

Tablica 1: Duljine izvijanja ovisno o različitim uvjetima oslanjanja

Uvjeti oslanjanja	Štap zglobno učvršćen na oba kraja	Štap upet na jednom kraju, slobodan na drugom	Štap upet na jednom kraju, zglobno oslonjen na drugom	Štap upet na oba kraja
Duljina izvijanja l_i	$l_i = l$	$l_i = 2l$	$l_i = 0,7l$	$l_i = 0,5l$

1.3. Kritično naprezanje

Kritično naprezanje tlačno opterećenog štapa u trenutku izvijanja jednako je omjeru kritične sile i površine poprečnog presjeka [1]:

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_i^2 A}$$

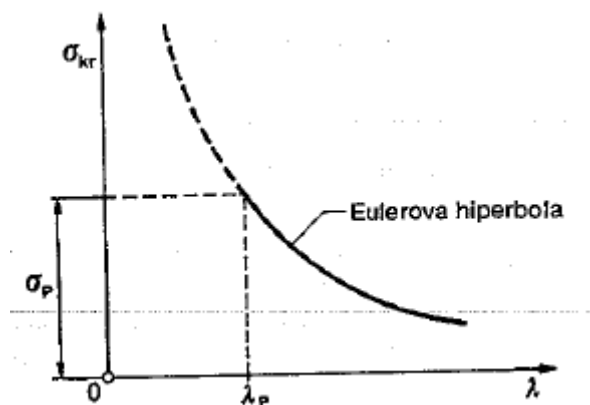
Minimalni polumjer tromosti presjeka iznosi:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$$

Kada se uvrsti u izraz za kritično naprezanje dobije se:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{l_i^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

λ je bezdimenzijska karakteristika štapa te se naziva vitkost štapa. Kako je π konstanta, iz izraza se vidi da kritično naprezanje ovisi o svojstvima materijala i o vitkosti štapa. Može se zaključiti da će štapovi male vitkosti, zdepasti štapovi, imati veliko kritično naprezanje, odnosno biti će dobro otporni na izvijanje, dok će štapovi velike vitkosti, vitki štapovi, biti osjetljivi na izvijanje. Ovisnost između σ_{kr} i λ prikazana je na slici 6.



Slika 6: Funkcionalna ovisnost između σ_{kr} i λ prikazana Eulerovom hiperbolom [1]

Eulerov izraz za kritičnu silu izveden je uz pretpostavku da vrijedi Hookeov zakon, pa izraz za kritično naprezanje σ_{kr} vrijedi samo do granice proporcionalnosti materijala σ_p , odnosno vitkost štapa mora biti takva da je naprezanje u štapu manje od granice proporcionalnosti:

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \lambda_p$$

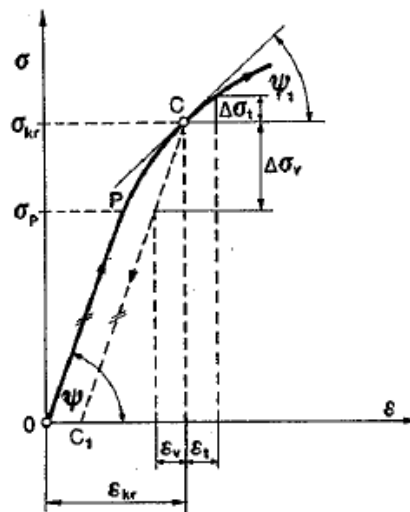
λ_p je granična vitkost ispod koje ne vrijede Eulerovi izrazi za kritičnu silu. S obzirom na graničnu vitkost štapove možemo podijeliti na štapove velike vitkosti $\lambda > \lambda_p$ koji se izvijaju u elastičnom području, dok se štapovi male i srednje vitkosti izvijaju u plastičnom području. U okviru ovog rada će se u razradi obrađivati štapovi velike vitkosti kod kojih se fenomen izvijanja odvija u elastičnom području.

1.4. Izvijanje u plastičnom području

Da bi se štapovi male i srednje vitkosti izvili, moraju biti izloženi naprezanju koje je veće od granice proporcionalnosti. U tom trenutku, netom prije izvijanja, pri kritičnom naprezanju $\sigma > \sigma_p$ krutost štapa je manja te se može izraziti tangentsnim modulom E_t koji predstavlja nagib tangente na naponsko deformacijsku krivulju u točki $\sigma > \sigma_p$. Tada se kritično naprezanje za izvijanje u plastičnom području može odrediti istim izrazom ukoliko se modul elastičnosti E zamjeni tangentsnim modulom E_t [4]:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2}$$

Navedeni izraz nije u potpunosti ispravan. Potrebno je uzeti u obzir činjenicu da je u dijagramu $\sigma - \varepsilon$ linija rasterećenja (CC_1) paralelna sa pravcem koji spaja granicu proporcionalnosti i ishodište sustava (na slici 7 OP pravac).



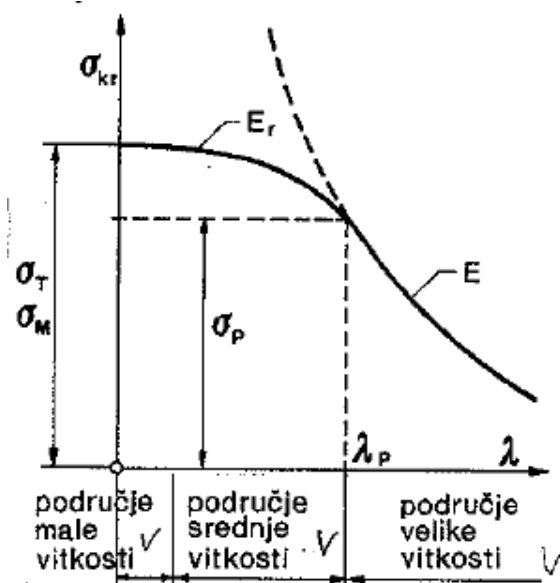
Slika 7: linija rasterećenja u dijagramu $\sigma - \varepsilon$ [1]

Pri savijanju će dio presjeka biti rasterećen naprezanjima od savijanja, te će za taj dio presjeka vrijediti modul elastičnosti E , dok će u drugom dijelu presjeka vrijediti tangentsni modul E_t . Tada se izraz za kritično naprezanje može napisati sa reduciranim modulom ili Engesser – Kármánovim modulom koji iznosi [1]:

$$E_r = \frac{1}{I_{min}} (EI_v + EI_t)$$

gdje su I_v i I_t momenti tromosti vlačne i tlačne površine poprečnog presjeka. Kritično naprezanje pri izvijanju u plastičnom području tad glasi [1]:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E_r}{\lambda^2}$$



Slika 8: područja vitkosti štapova [1]

Na slici 8 prikazana su tri područja vitkosti štapova. Štapovi velike vitkosti izvijaju se u elastičnom području. Kritično naprezanje prikazano je Eulerovom hiperbolom, odnosno pri proračunu σ_{kr} koristi se modul elastičnosti E . Štapovi srednje vitkosti izvijaju se u plastičnom području, odnosno pri proračunu σ_{kr} koristi se reducirani modul E_r . Štapovima male vitkosti kritično naprezanje za elastoplastični materijal približno je jednako granici tečenja materijala ($\sigma_{kr} \approx \sigma_T$), odnosno čvrstoći za krhki materijal ($\sigma_{kr} \approx \sigma_M$).

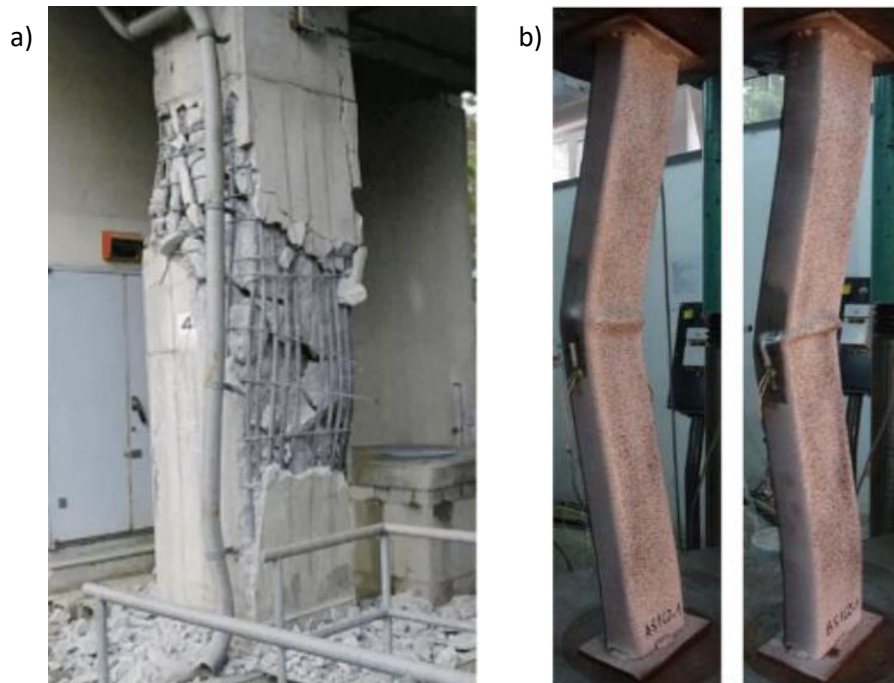
1.5. Utjecaj imperfekcija na kritično naprezanje

Realni štapovi gotovo nikada nisu savršeno ravni, odnosno imaju određenu početnu zakrivljenost. Također, tlačno opterećenje koje djeluje na štap gotovo nikada nije idealno centrično. Tlačna sila može djelovati s određenim ekscentricitetom. U oba slučaja će se u štapu, osim tlačnog naprezanja javiti dodatni moment zbog kojeg će se štap izviti i prije dostizanja kritičnog naprezanja koje je definirano za idealno ravan štap i idealno centričnu tlačnu silu.

1.6. Izvijanje u građevinarstvu

Prema europskoj normi svaki konstrukcijski element i svaka konstrukcija mora biti pouzdana, a pouzdanost predstavlja svojstvo konstrukcije da zadrži svoju nosivost i stabilnost, uz zadane zahtjeve funkcionalnosti, u vremenskom periodu za koji je projektirana. Kako bi konstrukcija i konstrukcijski element bili pouzdani, moraju se poznavati njegova granična stanja, a razlikuje se granično stanje

nosivosti ili krajnje granično stanje i granično stanje uporabljivosti. Provjera otpornosti na izvijanje spada u granično stanje nosivosti, gdje dolazi do gubitka statičke ravnoteže konstrukcije koja se ponaša kao kruto tijelo [5].



Slika 9: Problem izvijanja stupova (a) armiranobetonski stup – na terenu [6]; (b) čelični stup u laboratoriju za ispitivanje konstrukcija [7]

Na slici 9 nalaze se izvijeni betonski (slika 9a) i čelični stup (slika 9b), iz kojih se vidi da izvijeni elementi ne mogu ispuniti zahtjeve nosivosti koji se na njih nameću, stoga je izvijanje nužno uzeti u obzir kod proračuna konstrukcija.

Iako se svaki građevinski stup, ukoliko je opterećen silom dovoljno velikog intenziteta, može izviti, izvijanje je češća pojava kod metalnih konstrukcija, nego kod armiranobetonskih. AB stupovi obično su masivniji, većih dimenzija od metalnih i zato često nisu velike vitkosti te njihov gubitak stabilnosti uslijed izvijanja nije primarna provjera kod dokaza pouzdanosti, ukoliko je vitkost unutar potrebnih granica. S druge strane, metalni stupovi imaju dobra nosiva svojstva sa puno ekonomičnijim poprečnim presjecima od armiranobetonskih, međutim to uvjetuje da su upravo metalni stupovi često velike vitkosti i značajno osjetljiviji na izvijanje. Provjera metalnog elementa na izvijanje je neizostavna kod proračuna bilo kojeg tlačno opterećenog metalnog elementa te će zato u nastavku ovog rada biti promatrani čelični profili. U okviru ovog završnog rada promatrat će se čelični vruće valjani IPE profili, utjecaj imperfekcija na IPE profile te će se dati princip dimenzioniranja elemenata na izvijanje, koji će se i pokazati kroz nekoliko primjera.

2. IMPERFEKCIJE ŠTAPA I OPTEREĆENJA

Kao što je spomenuto u prethodnom poglavlju, realni stupovi gotovo nikada nisu savršeno ravni, odnosno imaju određenu početnu zakrivljenost. Također, tlačno opterećenje koje djeluje na štap često nije idealno centrično. Tlačna sila može djelovati s određenim ekscentricitetom. U oba slučaja će se u štapu, osim tlačnog naprezanja javiti dodatno naprezanje od savijanja zbog kojeg će se štap izviti i prije dostizanja kritičnog naprezanja koje je definirano za idealno ravan štap i idealno centričnu tlačnu silu. Opterećenje pri kojem će doći do izvijanja štapova s imperfekcijama naziva se granično opterećenje.

Problem izvijanja često se javlja kod čeličnih konstrukcija. Čelični stupovi ili ispuna stabilizacijskih vezova koji su izloženi tlačnom djelovanju mogu izgubiti stabilnost i prije njihovog sloma. U okviru ovog poglavlja promatrat će se kako se čeličnim IPE profilima granično opterećenje mijenja sa povećanjem imperfekcija. Promatrani elementi su od čelika iste kvalitete (tablica 3), zglobno su učvršćeni na oba kraja, imaju istu duljinu izvijanja, te je za nju izračunata kritična sila, a njihovi osnovni podaci dani su u tablici 2:

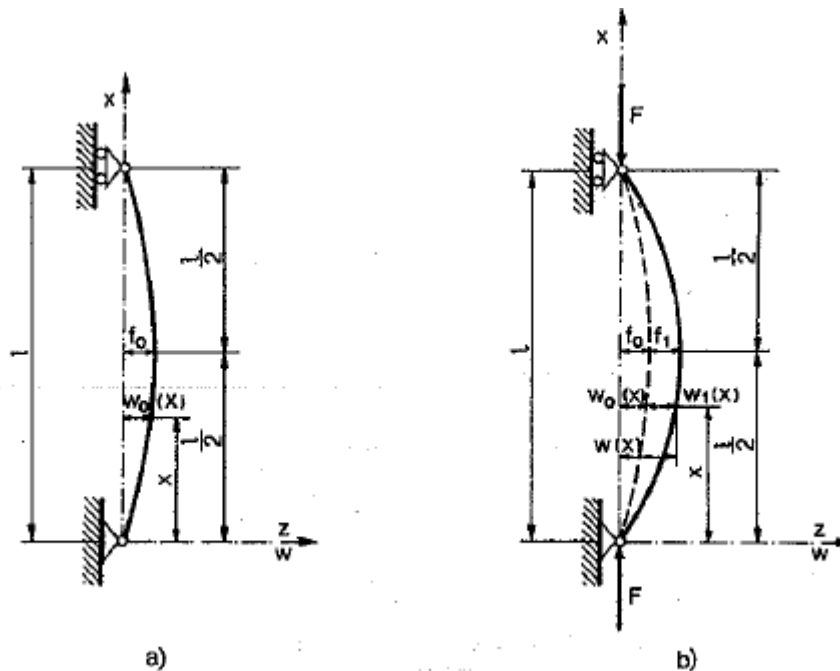
Tablica 2: Kritična sila za različite vruće valjane čelične IPE profile

Profil	L [cm]	σ_t [kN/cm ²]	A [cm ²]	I_{min} [cm ⁴]	$W_{el,min}$ [cm ³]	F_{kr} [kN]
IPE 220	500	23,5	33,4	205	37,3	169,95
IPE 270	500	23,5	45,9	420	62,2	348,20
IPE 330	500	23,5	62,6	788	98,5	653,29

Tablica 3: Kvaliteta čelika i mjerodavne vrijednosti

Kvaliteta čelika	S235
Modul elastičnosti E [kN/cm ²]	21 000
Granica tečenja σ_t [kN/cm ²]	23,5

2.1. Početna zakrivljenost štapa



Slika 10: početno zakrivljen štapa (a); početno zakrivljen, izvijen štapa (b)

Na slici 10a prikazan je početno zakrivljen štapa sa početnim progibom u nekoj proizvoljnoj točki $x - w_0(x)$ te maksimalnim početnim progibom u sredini raspona f_0 . Nakon što se štapa optereti dodatnom tlačnom silom F (slika 10b), u proizvoljnom presjeku x javlja se dodatan progib $w_1(x)$. Ukupni progib štapa u nekom proizvoljnom presjeku x iznosi [1]:

$$w(x) = w_0(x) + w_1(x)$$

Diferencijalna jednačina elastične linije štapa tada glasi:

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} + \alpha^2 w_1 = -\alpha^2 w_0$$

gdje je:

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

To je nehomogena diferencijalna jednačina drugog reda čijim se rješavanjem, pomoću rubnih uvjeta, dobije da je ukupan progib w :

$$w = w_0 + w_1 = f_0 \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{f_0}{\frac{F_{kr}}{F} - 1} \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{f_0}{1 - \frac{F}{F_{kr}}} \sin \frac{\pi x}{l}$$

Progib ima najveću vrijednost u sredini raspona, odnosno u $x = l/2$, pa se uvrštavanjem $l/2$ u $\sin \frac{\pi x}{l}$ dobije $\sin \frac{\pi}{2}$. Kako je $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, maksimalna vrijednost progiba u sredini raspona iznosi:

$$w_{max} = f = \frac{f_0}{1 - \frac{F}{F_{kr}}}$$

Zbog početne zakrivljenosti štapa se pri uzdužnom tlačnom opterećenju u štapu uz aksijalno naprezanje javlja i naprezanje od dodatnog momenta savijanja. Maksimalno naprezanje u štapu može se izračunati po formuli [1]:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{max}}{I_y} z_{max}$$

Maksimalni moment savijanja javiti će se na mjestu najvećeg progiba, odnosno u sredini raspona, pa je M_{max} :

$$M_{max} = F \cdot w_{max} = F \cdot \frac{f_0}{1 - \frac{F}{F_{kr}}}$$

Za materijal čelik (tablica 3), maksimalno dopušteno naprezanje koje se smije javiti jednako je granici tečenja materijala:

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A} \left(1 + \frac{f_0 \cdot A}{W_y} \cdot \frac{1}{1 - \frac{F_T}{F_{kr}}} \right)$$

Tako se za čelični profil određene kvalitete može odrediti granično opterećenje F_T pri kojem za određenu početnu zakrivljenost štapa naprezanje poprima vrijednost granice tečenja.

Karakteristične točke grafova koji pokazuju funkcijsku ovisnost graničnog opterećenja i početne zakrivljenosti elementa odredit će se grafički u programu Geogebra – Graphing calculator [8], u nastavku Geogebra. Detaljno će biti opisan proces određivanja jedne točke, a sve ostale određuju se istim principom. U tablici 4 se nalaze potrebni podaci za određivanje graničnog opterećenja IPE profila ukoliko je početna zakrivljenost elementa 0,75 cm.

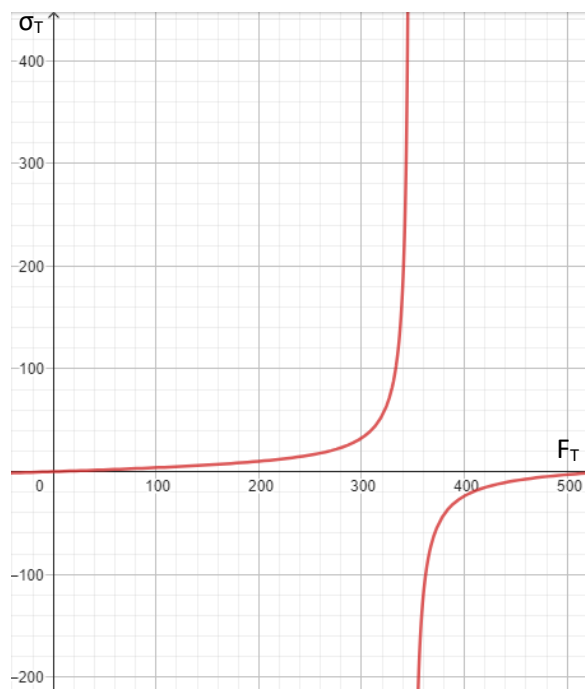
Tablica 4: Podaci za određivanje graničnog opterećenja IPE 270 profila

Profil	f_0 [cm]	W_{\min} [cm ³]	A [cm ²]	F_{kr} [kN]
IPE 270	0,75	62,2	45,9	348,2

Granično opterećenje je nepoznanica te je u programu Geogebra označena sa X. Funkcija koja opisuje granično opterećenje $f(x)$, ukoliko se uvrste svi navedeni podaci glasi:

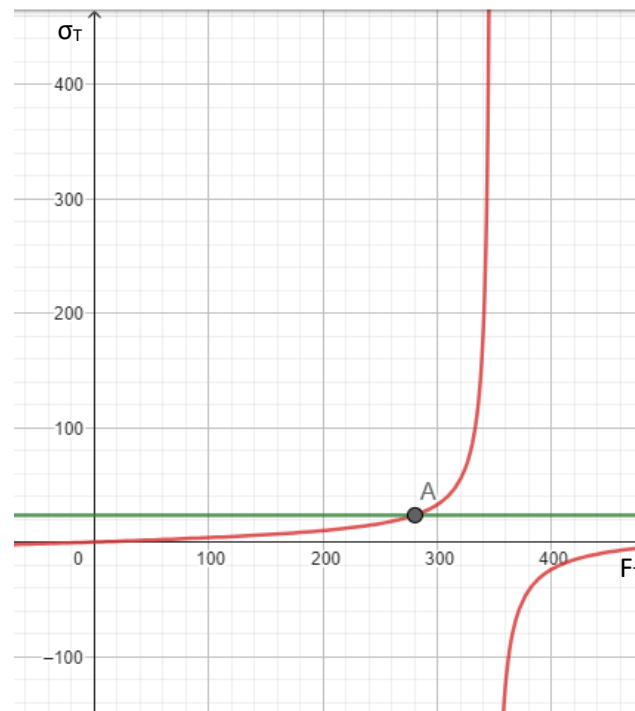
$$f(x) = \frac{X}{45,9} \left(1 + \frac{0,75 \cdot 45,9}{62,2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{X}{348,2}} \right)$$

Graf funkcije prikazan je na slici 11:



Slika 11: Graf funkcije $f(x)$

Traženo granično opterećenje mora dati vrijednost funkcije jednako σ_T , odnosno $f(x) = 23,5$. Ako se postavi pravac koji je paralelan sa osi x i ima vrijednost 23,5, traženo opterećenje biti će ona točka koja se nalazi i na pravcu $Y = 23,5$ i na grafu funkcije $f(x)$. Drugim riječima traži se sjecište ta dva grafa:



Slika 12: Sjecište pravca σ_t i krivulje $f(x)$

Očitana točka A je uređeni par (F_t, σ_t) : (280,4798,23.5)

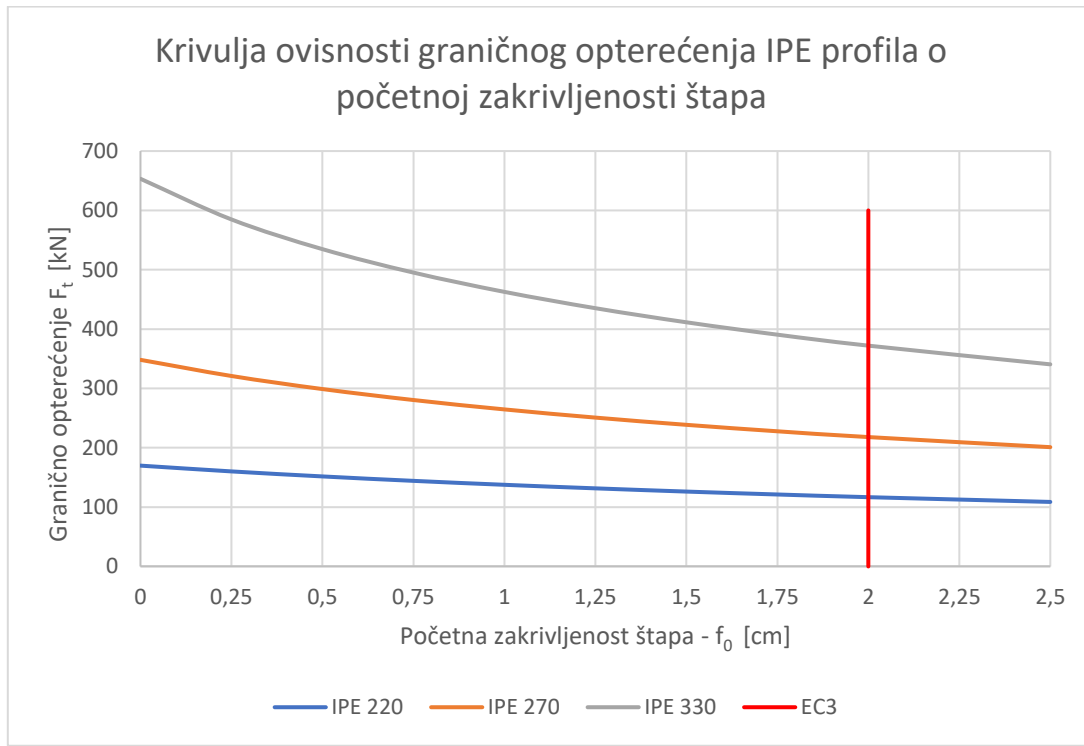
Dakle granično opterećenje elementa IPE 270 profila koji ima početnu zakrivljenost 0,75 cm iznosi $F_t = 280,4798$ kN.

Provjera:

$$\frac{280,4798}{45,9} \left(1 + \frac{0,75 \cdot 45,9}{62,2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{280,4798}{348,2}} \right) = 23,5 \text{ kN/cm}^2$$

Analogno su dobivene i ostale vrijednosti graničnog opterećenja potrebne za konstruiranje krivulja ovisnosti graničnog opterećenja o početnoj zakrivljenosti štapa za IPE profile.

U nastavku su prikazane krivulje ovisnosti štapova IPE profila sa povećanjem početne zakrivljenosti elementa:



Slika 13: Krivulja ovisnosti graničnog opterećenja IPE profila o početnoj zakrivljenosti štapa

Prema normi EN 1993-1-1 [9] maksimalna dozvoljena početna zakrivljenost štapa ovisi o krivuljama izvijanja. Za promatrane profile po normi vrijedi krivulja izvijanja b, pa je za elastičnu analizu:

$$\frac{f_{0,max}}{L} = \frac{1}{250}$$

odnosno:

$$f_{0,max} = \frac{1}{250} \cdot L = \frac{500}{250} = 2 \text{ cm}$$

Dakle maksimalna početna zakrivljenost promatranih IPE profila duljine 5 metara iznosi 2 cm. U grafu je označena vertikalnom crvenom linijom.

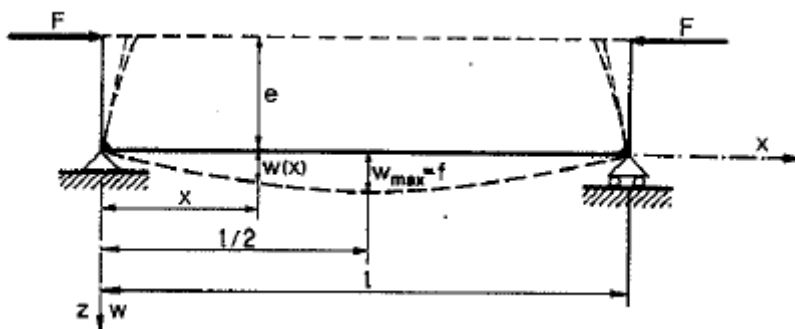
Tablica 5: Smanjenje kritične sile u granicama normom EN 1993-1-1 [9] dopuštenih vrijednosti

Profil	$F_T(f_0 = 0 \text{ cm})$ [kN]	$F_T(f_0 = 2 \text{ cm})$ [kN]	$\frac{F_T(f_0=0 \text{ cm})-F_T(f_0=2 \text{ cm})}{F_T(f_0=0 \text{ cm})}$ [%]
IPE 220	169,95	116,76	31,3
IPE 270	348,20	218,02	37,3
IPE 330	653,29	372,12	43

U tablici 5 prikazana su granična opterećenja za ravan IPE štap ($f_0 = 0$) i za štap maksimalne dozvoljene početne zakrivljenosti prema normi EN 1993 ($f_0 = 2 \text{ cm}$).

Početna zakrivljenost elementa značajno utječe na vrijednost graničnog opterećenja. Iz provedene analize može se zaključiti da iako je granično opterećenje naravno veće za profile većih dimenzija, pad graničnog opterećenja uslijed povećanja početne zakrivljenosti štapa je najmanji za profil IPE 220, malo veći za IPE 270, a najveći za IPE 330, kao što je vidljivo u tablici 5. Drugim riječima, sa većim profilima postižu se veće vrijednosti graničnog opterećenja, ali je rastom početne zakrivljenosti jednako tako pad graničnog opterećenja značajno veći za profile većih dimenzija.

2.2. Ekscentrično opterećenje štapova



Slika 14: ekscentrično opterećen štap

Ukoliko je štap ekscentrično opterećen tlačnim silama F , kao što je prikazano na slici 14, sile F će u proizvoljnom presjeku x uzrokovati moment savijanja koji iznosi [1]:

$$M = F(e + w)$$

Diferencijalna jednačina štapa tad glasi:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{F}{EI_y}w = -\frac{F}{EI_y}e$$

Odnosno uz uvođenje oznake α :

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2w = -\alpha^2e$$

Rješenje te diferencijalne jednačine, uz uzimanje u obzir rubnih uvjeta, glasi:

$$w = e \left[\operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} \cdot \sin \alpha x + \cos \alpha x - 1 \right]$$

Maksimalan progib javit će se u sredini raspona, odnosno u $x = l/2$, pa gornji izraz poprima oblik:

$$f = e \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha l}{2}} - 1 \right) = e \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{F_{kr}}}} - 1 \right)$$

Kada su štapovi izloženi ekscentričnom tlačnom opterećenju, uz aksijalno naprezanje pojavit će se i naprezanje od savijanja zbog dodatnog momenta od djelovanja ekscentrične sile. Maksimalno naprezanje u štapu može se izračunati po izrazu [1]:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{max}}{W_y}$$

Maksimalni moment iznosi [1]:

$$M_{max} = F(f + e) = F \cdot \frac{e}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{F_{kr}}}\right)}$$

Za materijal čelik, maksimalno dopušteno naprezanje koje se smije javiti jednako je granici tečenja materijala:

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A} \cdot \left(1 + \frac{A}{W_Y} \cdot \frac{e}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{F_{kr}}}\right)} \right)$$

Ukoliko se postavi granica tečenja materijala, ekscentricitet i profil elementa, može se odrediti granično opterećenje F_T koje, za zadani ekscentricitet, odgovara granici tečenja materijala. Tako se za čelični profil određene kvalitete može odrediti granično opterećenje F_T pri kojem za određeni ekscentricitet opterećenja naprezanje poprima vrijednost granice tečenja.

Karakteristične točke grafa koji pokazuje funkcijsku ovisnost graničnog opterećenja i ekscentriciteta djelovanja odredit će se grafički u programu Geogebra – Graphing calculator [8], kao i kod određivanja funkcijske ovisnosti u poglavlju 2.1. Detaljno će biti opisan proces određivanja jedne točke krivulje, a sve ostale određuju se istim principom. U tablici 6 se nalaze potrebni podaci za određivanje graničnog opterećenja IPE profila duljine elementa 5 metara ukoliko sila djeluje sa ekscentricitetom 1,75 cm.

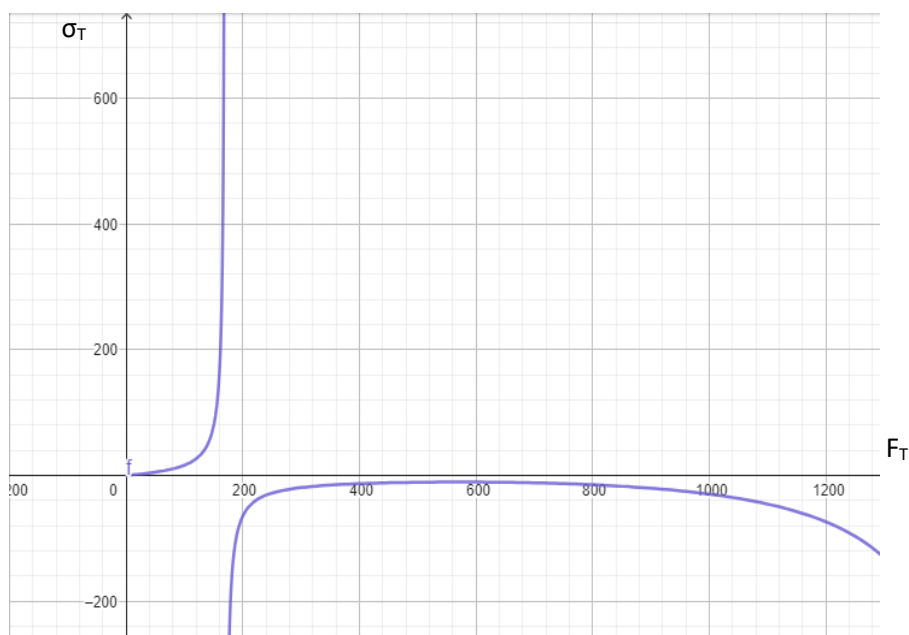
Tablica 6: Ulazni podaci za određivanje kritične sile profila IPE 220 uz zadani ekscentricitet

Profil	e [cm]	W_{min} [cm ³]	A [cm ²]	F_{kr} [kN]
IPE 220	1,75	37,3	33,4	169,95

Grafično opterećenje je nepoznanica te je u programu označena sa X. Funkcija koja opisuje grafično opterećenje $g(x)$, ukoliko se uvrste svi navedeni podaci glasi:

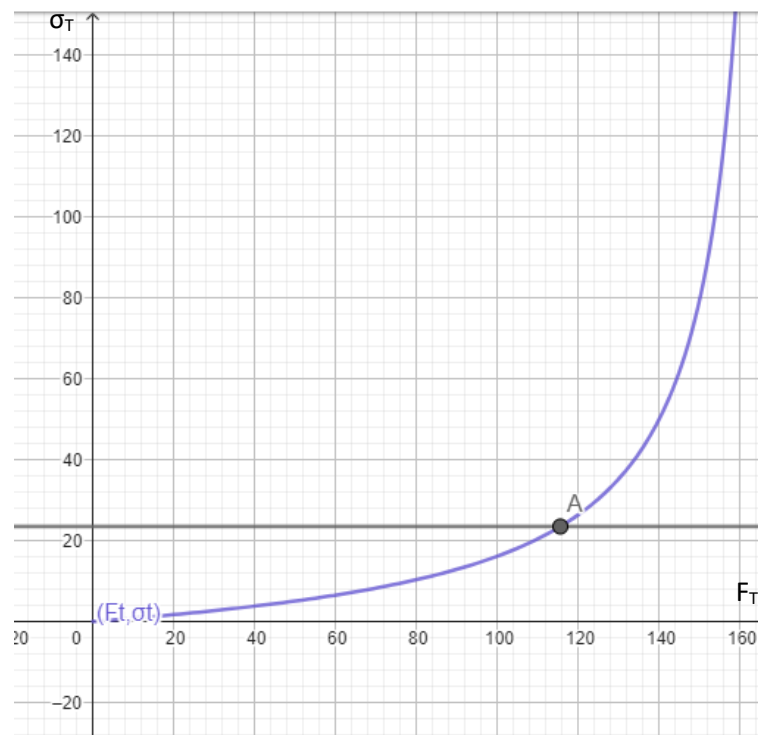
$$g(x) = \frac{X}{33,4} \cdot \left(1 + \frac{33,4}{37,3} \cdot \frac{1,75}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{X}{169,95}}\right)} \right)$$

Graf funkcije prikazan je na slici 15:



Slika 15: graf funkcije $g(x)$

Traženo grafično opterećenje mora dati vrijednost funkcije jednako σ_t , odnosno $g(x) = 23,5$. Ako postavimo pravac koji je paralelan sa osi x i ima vrijednost 23,5, traženo opterećenje biti će ona točka koja se nalazi i na pravcu $Y = 23,5$ i na grafu funkcije $g(x)$. Drugim riječima traži se sjecište ta dva grafa:



Slika 16: Sjecište pravca σ_t i krivulje $g(x)$

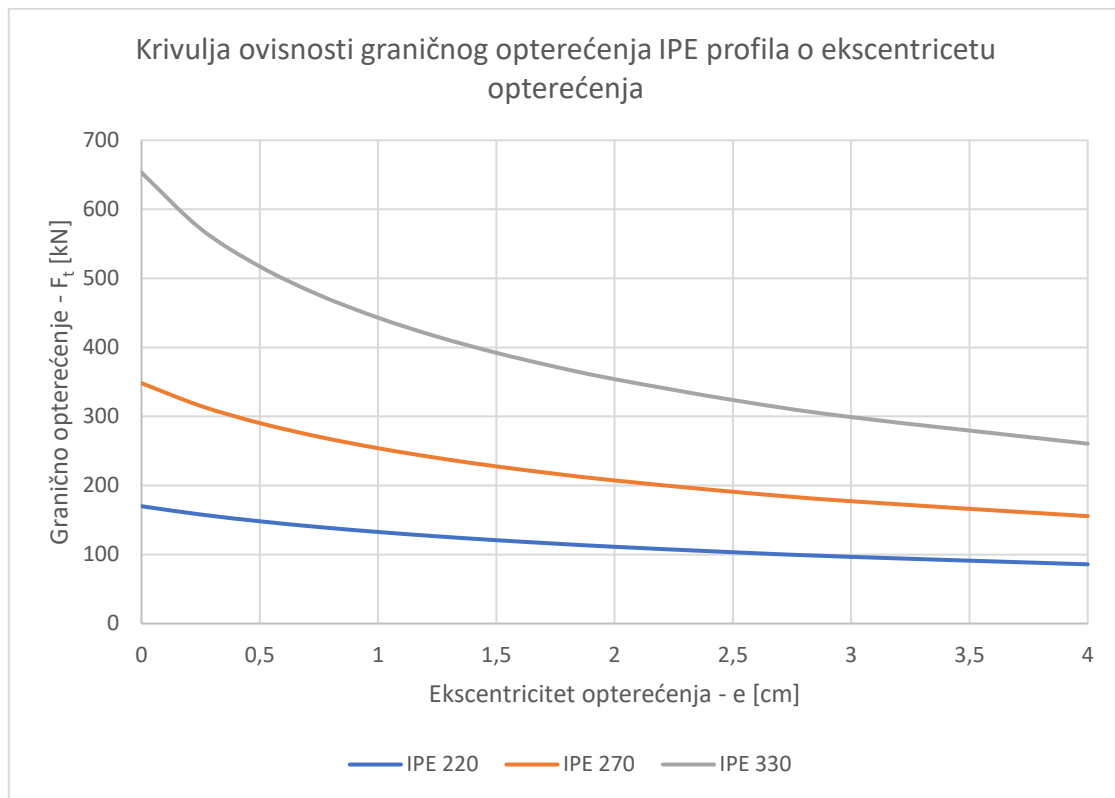
Očitana točka A je uređeni par (F_t, σ_t) : A (115.744,23.5)

Dakle granično opterećenje za profil IPE 220 duljine 5 metara za ekscentricitet 1,75 cm je $F_t = 115,744$ kN

Provjera:

$$\frac{115,744}{33,4} \cdot \left(1 + \frac{33,4}{37,3} \cdot \frac{1,75}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{115,744}{169,95}}\right)} \right) = 23,4997 \approx 23,5 \text{ kN/cm}^2$$

Analogno su dobivene i ostale vrijednosti graničnog opterećenja potrebne za konstruiranje grafa ovisnosti graničnog opterećenja o ekscentricitetu, a krivulje ovisnosti prikazane su u nastavku:



Slika 17: Krivulja ovisnosti graničnog opterećenja IPE profila o ekscentricitetu opterećenja

Tablica 7: Smanjenje kritične sile za ekscentricitet $e = 3 \text{ cm}$

Profil	$F_T(e = 0 \text{ cm})$ [kN]	$F_T(e = 3 \text{ cm})$ [kN]	$\frac{F_T(e = 0 \text{ cm}) - F_T(e = 3 \text{ cm})}{F_T(e = 0 \text{ cm})}$ [%]
IPE 220	169,95	96,6	43,2
IPE 270	348,20	177,2	49,1
IPE 330	653,29	299,05	54,2

U tablici 7 prikazana su granična opterećenja za idealno centrično opterećen tlačni štap ($e = 0$) i za opterećenje sa ekscentricitetom od 3 centimetra ($e = 3 \text{ cm}$). Može se uočiti da ekscentrična sila značajno smanjuje granično opterećenje štapa. Može se uočiti sličan trend kao i kod početno zakrivljenih štapova – profili većih dimenzija imaju veće granično opterećenje, međutim pad graničnog opterećenja povećanjem ekscentriciteta je u relativnim vrijednostima veći kod profila većih dimenzija.

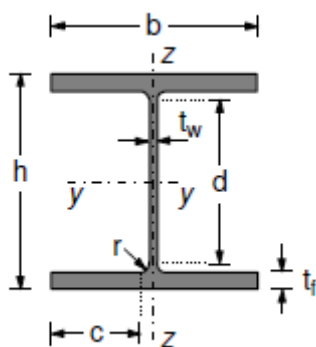
U grafu se također može uočiti da je za manje ekscentricitete pad graničnog opterećenja (primjer IPE 330, do ekscentriciteta $e = 1$ cm) značajniji nego kod većih ekscentriciteta. Drugim riječima, povećanje ekscentriciteta dok je on manjih veličina će imati značajno veći utjecaj na granično opterećenje, nego kada je ekscentricitet većih dimenzija. U tablici 8, na primjeru IPE 330 profila, može se vidjeti pad u postotcima ako se ekscentricitet poveća sa 0,5 na 1 cm, i kad se isti poveća sa 2 na 2,5 cm. Iako je porast ekscentriciteta jednak, pad graničnog opterećenja će biti drastičniji kod manjih ekscentriciteta.

Tablica 8: Pad graničnog opterećenja profila IPE 330 ovisnosti o intervalu promjene ekscentriciteta

Granično opterećenje F_t [kN]	Pad graničnog opterećenja [%]
$F_t(e = 0,5 \text{ cm}) = 517,20 \text{ kN}$	$\frac{517,20 - 442,96}{517,20} = 14,35 \%$
$F_t(e = 1 \text{ cm}) = 442,96 \text{ kN}$	
$F_t(e = 2 \text{ cm}) = 353,98 \text{ kN}$	$\frac{353,98 - 323,78}{353,98} = 8,53 \%$
$F_t(e = 2,5 \text{ cm}) = 323,78 \text{ kN}$	

3. DULJINA IZVIJANJA IPE PROFILA

Jedna od glavnih karakteristika IPE profila su različite krutosti u glavnim ravninama. Ako je os elementa u ravni x , a os z vertikalna, tada će momenti tromosti i otpora IPE profila oko osi y biti značajno veće nego oko osi z .



Slika 18: Prikaz osi IPE profila [10]

Primjer različitih momenata tromosti i otpora u različitim ravninama profila IPE 120 i IPE 160 prikazan je u tablici 9.

Tablica 9: Momenti tromosti i otpora u glavnim ravninama profila IPE 120 i IPE 160

	IPE 120	IPE 160
I_y [cm ⁴]	318	869
I_z [cm ⁴]	27,7	68,3
W_y [cm ³]	53	109
W_z [cm ³]	8,65	16,7

Tablica 10: Kritične sile IPE profila za izvijanje u glavnim osima

Profil	$F_{kr,y}$ [kN] ($l_i = 8$ m)	$F_{kr,z}$ [kN] ($l_i = 8$ m)
IPE 120	102,98	8,97
IPE 140	175,20	14,54
IPE 160	281,42	22,12

Kao što se vidi iz prikazanih podataka, momenti tromosti i kritične sile u jačoj glavnoj ravnini su višestruko puta veći od onih u slabijoj ravnini. Kako je za stabilnost elementa najbitnija najslabija ravnina, odnosno element je stabilan onoliko koliko je stabilan u svojoj najslabijoj ravnini, kod dimenzioniranja IPE profila na izvijanje prvenstveno će se dokazivati da je element stabilan na izvijanje oko svoje najslabije ravnine, odnosno dopušteno opterećenje na element morat će biti manje od graničnog opterećenja u najslabijoj ravnini.

Cilj kod projektiranja elemenata koji će biti izloženi izvijanju je da su im kritične sile u glavnim ravninama jednake, ili ako to nije moguće, barem približnih vrijednosti. To se može postići smanjivanjem duljine izvijanja u slabijoj ravnini odnosno ugradnjom bočnih pridržanja. Tada mjesta pridržanja u slabijoj ravnini postaju nepomične točke, a kako je duljina izvijanja udaljenost između točaka infleksije elastične linije nosača, ugradnjom bočnih pridržanja može se značajno smanjiti duljina izvijanja oko slabije osi i time povećati kritična sila pri kojoj dolazi do izvijanja elementa.

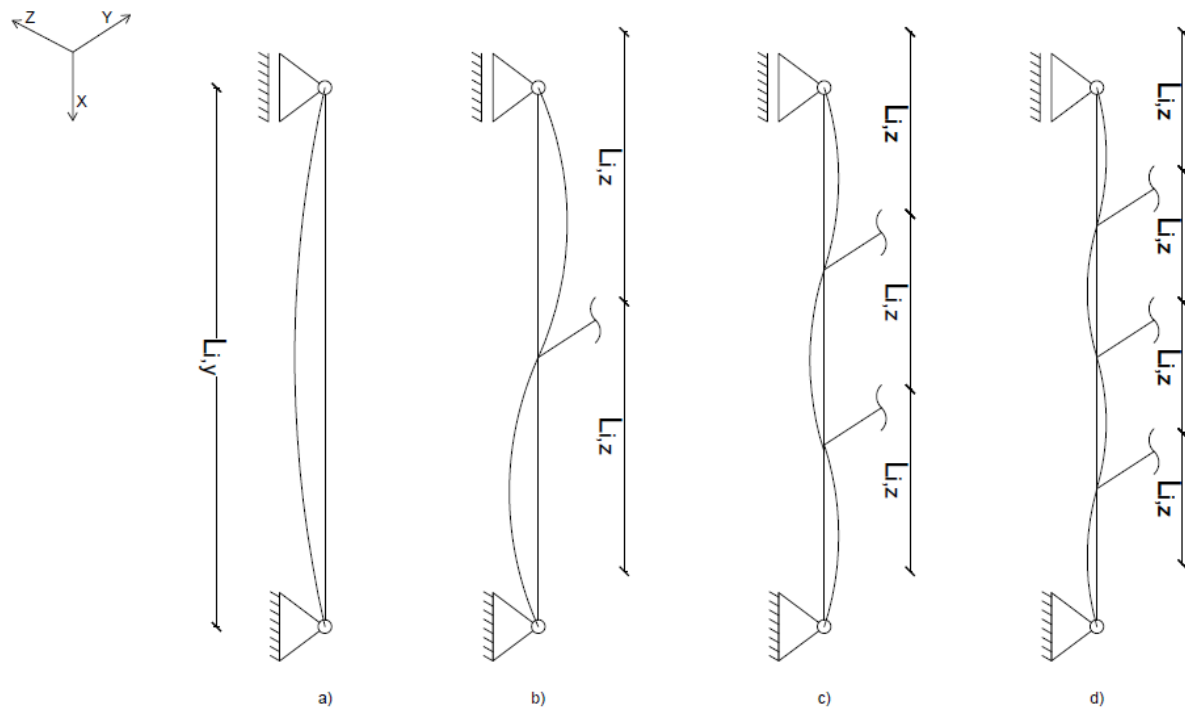
U okviru ovog poglavlja analizirati će se promjena kritične sile u slabijoj glavnoj ravnini elementa ugradnjom bočnih pridržanja te će se ista usporediti sa kritičnom silom u jačoj glavnoj ravnini, koja ostaje nepromijenjena. Promatrati će se tri različita IPE profila sa 5 različitih duljina izvijanja, a bočna stabilizacija biti će ugrađena u polovini, trećini ili četvrtini elementa.

Podaci o promatranim elementima dani su u tablici 11:

Tablica 11: Podaci za analizu različite otpornosti na izvijanje u glavnim ravninama IPE profila

Profil	E [kN/cm ²]	A [cm ²]	I _y [cm ⁴]	I _z [cm ⁴]
IPE 120	21 000	13,2	318	27,7
IPE 140	21 000	16,4	541	44,9
IPE 160	21 000	20,1	869	68,3

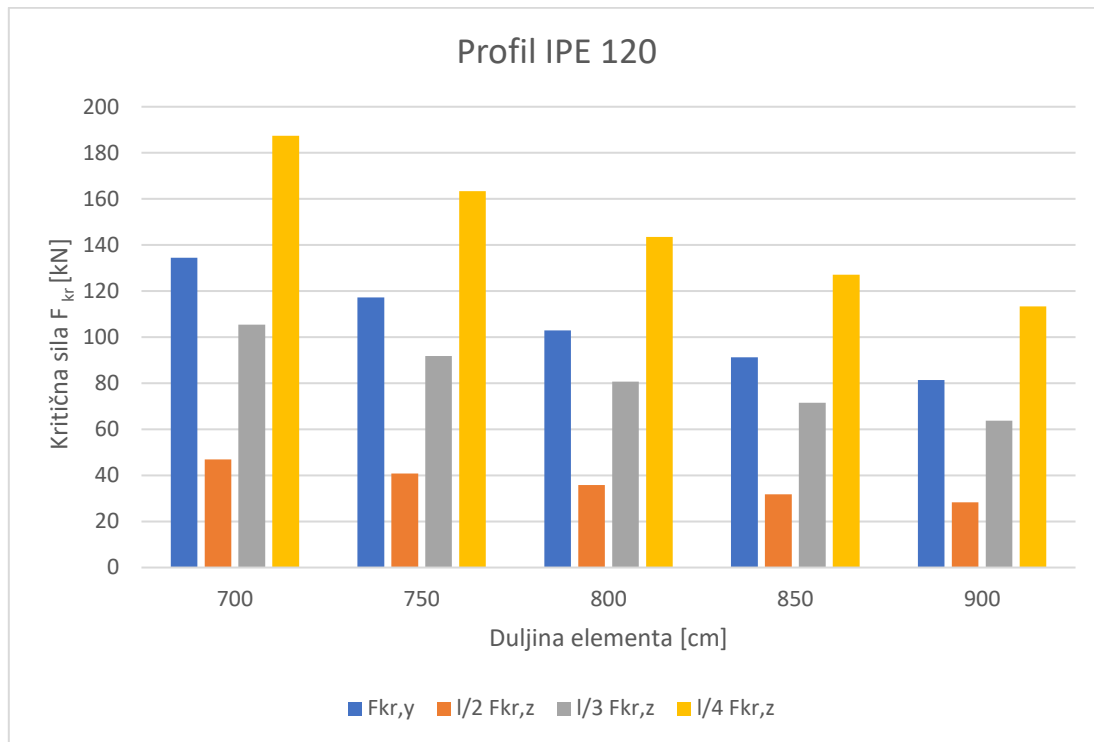
Na slici 19 prikazani su promatrani elementi sa pripadajućim duljinama izvijanja. Slika 19a prikazuje izvijanje elementa oko jače osi (y) sa pripadajućom duljinom izvijanja. Slike 19b, 19c i 19d prikazuju izvijanje elementa oko slabije osi (z) za ugrađenu bočnu stabilizaciju u polovini, trećini i četvrtini raspona.



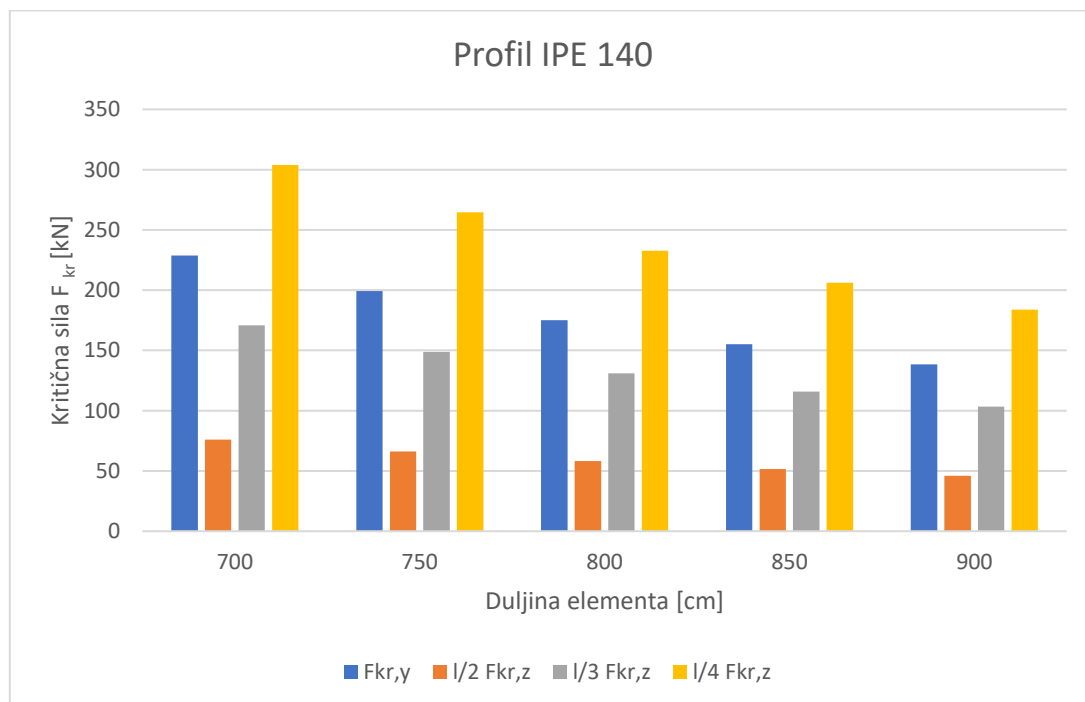
Slika 19: Duljine izvijanja elementa sa različitim bočnim pridržanjima

Rezultati analiza za dane profile prikazani su grafički, u stupcima. Stupac plave boje prikazuje kritičnu silu za izvijanje oko jače osi. Stupac narančaste boje prikazuje kritičnu silu za izvijanje oko slabije osi ako je u polovini duljine nosača ugrađena bočna stabilizacija. Stupac sive boje prikazuje kritičnu silu za izvijanje oko slabije osi ako je u trećinama duljine nosača ugrađena bočna stabilizacija, a stupac žute boje prikazuje kritičnu silu za izvijanje oko slabije osi ako je u četvrtinama duljine nosača ugrađena bočna stabilizacija. Na svakoj slici nalazi se 5 skupina sa 4 navedena stupca, a svaka skupina označava kritične sile za određenu duljinu elementa, kao što na primjer prva skupina stupaca označuje duljinu elementa 7 metara.

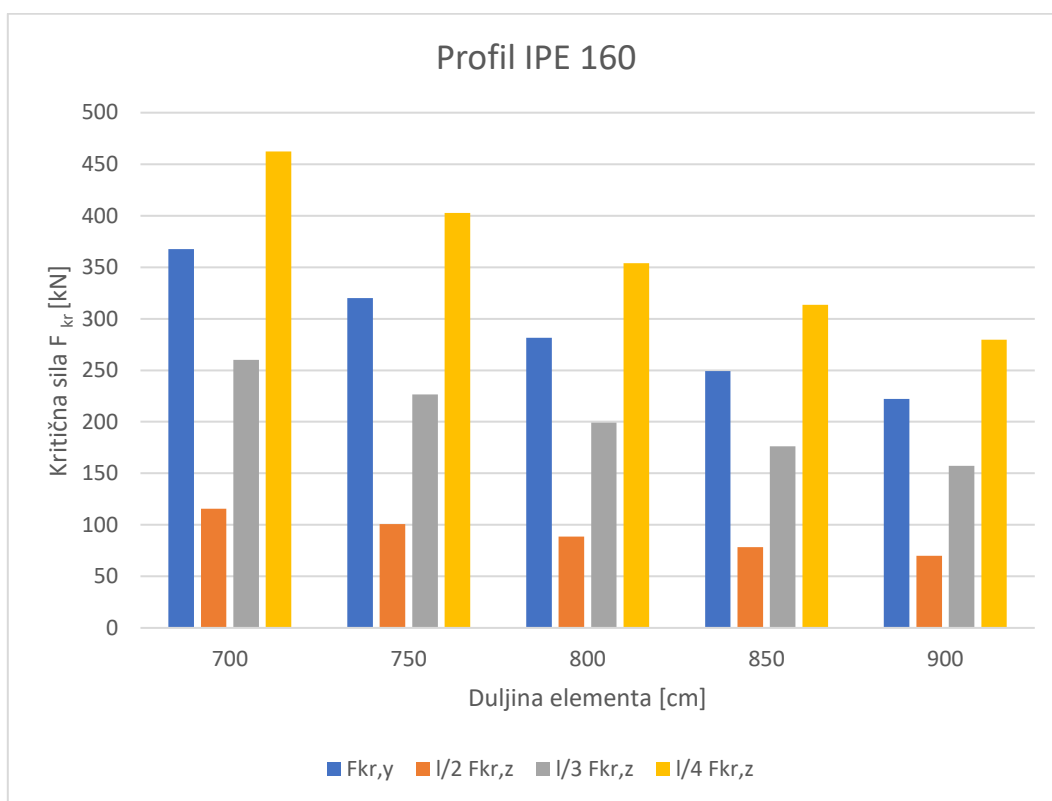
Na idućim slikama prikazani su redom dobiveni rezultati za profile IPE 120, IPE 140 i IPE 160:



Slika 20: Promjena kritične sile u slabijoj osi profila IPE 120 za različito postavljenu bočnu stabilizaciju



Slika 21: Promjena kritične sile u slabijoj osi profila IPE 140 za različito postavljenu bočnu stabilizaciju



Slika 22: Promjena kritične sile u slabijoj osi profila IPE 160 za različito postavljenu bočnu stabilizaciju

Tablica 12: Prikaz omjera kritičnih sila u glavnim osima za bočna pridržanja u trećinama raspona, za duljinu elementa 8 metara

Profil	$F_{kr,y}$ [kN]	$F_{kr,z}(800/3)$ [kN]	$\frac{F_{kr,z}}{F_{kr,y}}$ [%]
IPE 120	102,98	80,73	78,39
IPE 140	175,20	130,87	74,70
IPE 160	281,42	199,07	70,74

U tablici 12 prikazan je omjer kritične sile u slabijoj osi, ukoliko su postavljena 2 bočna pridržanja na trećinama raspona nosača ($F_{kr,z}(800/3 = 266,67)$) i kritične sile u jačoj glavnoj ravnini ($F_{kr,y}$), za raspon nosača 8 metara. Za sva tri profila kritična sila u jačoj ravnini je veća od kritične sile u slabijoj ravnini. Za profil IPE 120 kritična sila u slabijoj ravnini s bočnim pridržanjima iznosi 78,4 % kritične sile u jačoj ravnini, dok za profil IPE 160 kritična sila u slabijoj ravnini s bočnim pridržanjima iznosi 70,7 % kritične sile u jačoj ravnini. Temeljem usporedbe 3 IPE profila može se zaključiti da povećanjem

dimenzija profila, ukoliko su bočna pridržanja u trećinama raspona, postoji trend povećavanja razlika između kritičnih sila u glavnim osima.

Tablica 13: Prikaz omjera kritičnih sila u glavnim osima za bočna pridržanja u četvrtinama raspona, za duljinu elementa 8 metara

Profil	$F_{kr,y}$ [kN]	$F_{kr,z}(800/4)$ [kN]	$\frac{F_{kr,y}}{F_{kr,z}}$ [%]
IPE 120	102,98	143,53	71,75
IPE 140	175,20	232,65	75,31
IPE 160	281,42	353,90	79,52

U tablici 13 prikazan je omjer kritične sile u jačoj glavnoj ravnini ($F_{kr,y}$) i kritične sile u slabijoj glavnoj ravnini, ukoliko su postavljena 3 bočna pridržanja na četvrtinama raspona nosača ($F_{kr,z}(800/4)$), za raspon nosača 8 metara. Za sva tri profila kritična sila u jačoj ravnini je manja od kritične sile u slabijoj ravnini. Za profil IPE 120 kritična sila u jačoj ravnini bez bočnih pridržanja iznosi 71,75% kritične sile u slabijoj osi sa bočnim pridržanjima u četvrtinama raspona. Za profil IPE 160 kritična sila u jačoj ravnini bez bočnih pridržanja iznosi 79,52 % kritične sile u slabijoj osi sa bočnim pridržanjima u četvrtinama raspona. Temeljem usporedbe 3 IPE profila može se zaključiti da povećanjem dimenzija profila, ukoliko su bočna pridržanja u četvrtinama raspona, postoji trend smanjenja razlika između kritičnih sila u glavnim osima.

Zaključak provedene analize je da će većim IPE profilima, za istu duljinu izvijanja, razlika između otpornosti na izvijanje u jačoj i slabijoj ravnini biti manja ukoliko se bočna stabilizacija ugradi na manjim razmacima, odnosno ukoliko se postavi više bočnih stabilizacija. Povećanjem dimenzija profila raste razlika između otpornosti na izvijanje u glavnim osima pa je za postizanje približno sličnih kritičnih sila potrebno ugraditi bočnu stabilizaciju na manjim razmacima. Isto tako će manjim profilima kritične sile biti sličnijih vrijednosti za rjeđe ugrađene bočne stabilizacije, odnosno bočne stabilizacije na većem razmaku.

4. DIMENZIONIRANJE ŠTAPOVA NA IZVIJANJE

Za štap koji je aksijalno opterećen na tlak moraju biti ispunjeni uvjet čvrstoće i uvjet stabilnosti. [1]

Uvjet čvrstoće:

$$F \leq \sigma_{dop} \cdot A_{netto}$$

$$\sigma_{dop} = \frac{\sigma_k}{k}$$

σ_k je naprezanje kod kojeg materijal dolazi u neželjeno stanje te se kod elastoplastičnih materijala, kao što je čelik, uzima da je σ_k jednako granici tečenja σ_t , a k je koeficijent sigurnosti čvrstoće. Za štapove male vitkosti uvjet čvrstoće biti će mjerodavan kod dimenzioniranja.

Uvjet stabilnosti:

$$F \leq \sigma_{i,dop} \cdot A_{brutto} = F_{i,dop}$$

$$\sigma_{i,dop} = \frac{\sigma_{kr}}{k_i}, F_{i,dop} = \frac{F_{kr}}{k_i}$$

$\sigma_{i,dop}$ je dopušteno naprezanje pri izvijanju, a $F_{i,dop}$ dopušteno opterećenje pri izvijanju, dok je k_i koeficijent sigurnosti protiv izvijanja.

Kod dimenzioniranja štapova sa početnom zakrivljenošću ili štapova opterećenih ekscentrično, dopušteno opterećenje F_{dop} iznosi:

$$F_{dop} = \frac{F_T}{k_i}$$

gdje je F_T granično opterećenje koje odgovara granici tečenja materijala. Granično opterećenje F_T je manje od kritične sile F_{kr} zbog utjecaja imperfekcija, a kako je opisano u 2 poglavlju ovog rada.

Kod izvijanja postoje dodatni faktori koji nepovoljno djeluju na sigurnost protiv izvijanja elementa. Neki od njih su početna zakrivljenost elementa (poglavlje 2.1), ekscentričnost tlačne sile (poglavlje 2.2), nehomogenost materijala ili način učvršćivanja elementa. Izvijanje je također iznenadna pojava, za razliku od sloma elementa koji kod duktilnih materijala nastupa s najavom. Zbog svih dodatnih faktora koji nepovoljno utječu na izvijanje, koeficijent sigurnosti protiv izvijanja u praksi se uzima veći nego koeficijent sigurnosti čvrstoće.

Dimenzioniranje štapova na izvijanje može se provoditi na 2 načina.

Ukoliko je zadan poprečni presjek štapa, potrebno je odrediti dopušteno opterećenje. Prvo se iz poprečnog presjeka odredi vitkost štapa λ , te ovisno o vitkosti primjenjujemo izraze za određivanje kritične sile za izvijanje u elastičnom ili plastičnom području. Kada odredimo kritičnu silu F_{kr} računamo dozvoljeno opterećenje, F_{dop} , ili ako štap ima imperfekcije prvo se odredi granično opterećenje F_t te se onda dobije dopušteno opterećenje F_{dop} .

Ako je zadano opterećenje štapa izbor poprečnog presjeka se provodi iterativno, odnosno metodom postupnog približavanja. Prvo se iz Eulerovog izraza odredi minimalni moment tromosti presjeka:

$$I_{min} = \frac{F \cdot k_i \cdot l_i^2}{\pi^2 E}$$

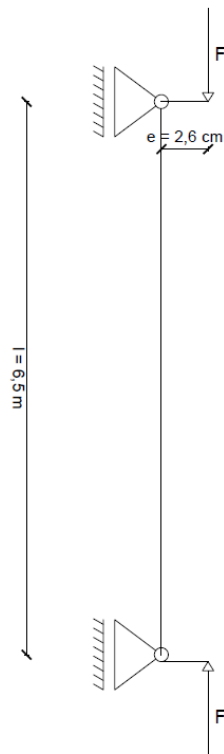
te se zatim odabere profil koji ima momente tromosti veće ili jednake minimalnom potrebnom momentu tromosti za zadano opterećenje. Zatim se izračuna vitkost presjeka te se provjeri da li je za taj presjek Eulerov izraz primjenjiv. Ako je $\lambda > \lambda_p$ Eulerov izraz je ispravno primijenjen te odabrani profil zadovoljava. Ako je $\lambda < \lambda_p$ znači da je Eulerov izraz pogrešno primijenjen i da je potrebno povećati poprečni presjek, osim ako je razlika između izračunatog i zadanog dopuštenog opterećenja manja od 5%. [1]

Pri određivanju profila štapa potrebno je zadovoljiti uvjet minimalnog momenta tromosti. Zato je poželjno odabrati profile koji imaju jednake glavne središnje momente tromosti, kao što su SHS (eng. square hollow section) ili kružni cijevni profili. Međutim ako će element u glavnim ravninama imati različite duljine izvijanja, poželjno je odabrati profil koji ima različite glavne momente tromosti, kao što je slučaj kod IPE profila.

5. PRIMJERI DIMENZIONIRANJA ŠTAPOVA NA IZVIJANJE

5.1 Dimenzioniranje štap IPE u ekscentricitet opterećenja

Za zadani čelični štap profila IPE 330 na slici potrebno je odrediti dopušteno ekscentrično opterećenje F_{dop} . Čelik je kvalitete S235. Koeficijent sigurnosti protiv izvijanja iznosi 1,1.



Karakteristike materijala:

$$E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_t = 23,5 \text{ kN/cm}^2$$

Karakteristike profila:

$$b/h = 160/330 \text{ [mm]}$$

$$A = 62,6 \text{ cm}^2$$

$$I_{\min} = 788 \text{ cm}^4$$

$$W_{el,\min} = 98,5 \text{ cm}^3$$

$$W_{pl,\min} = 154 \text{ cm}^3$$

$$L = L_i = 6,5 \text{ m} = 650 \text{ cm}$$

$$e = 2,6 \text{ cm}$$

Relativna vitkost štap iznosi:

$$\lambda = \frac{l_i}{\sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}} = \frac{650}{\sqrt{\frac{788}{62,6}}} = 183,21$$

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 21000}{23,5}} = 93,91$$

$\lambda > \lambda_p$ – štap se izvija u elastičnom području

Eulerova kritična sila iznosi:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{l^2} = \frac{\pi^2 21000 \cdot 788}{650^2}$$

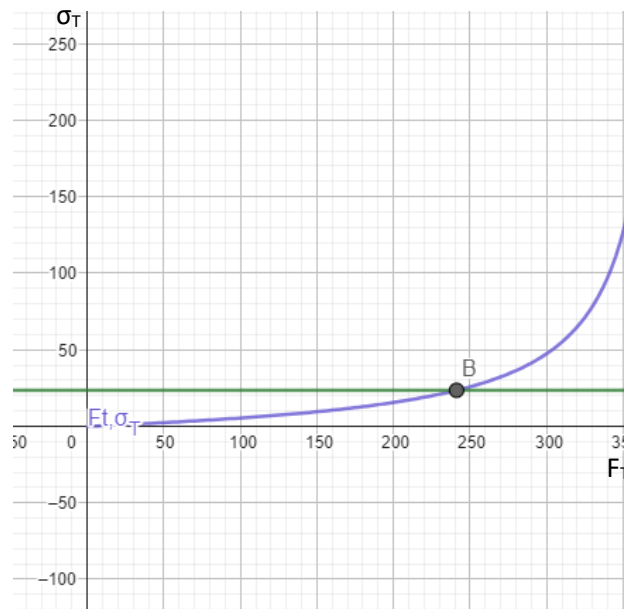
$$F_{kr} = 386,56 \text{ kN}$$

Grafično opterećenje određuje se po formuli:

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A} \cdot \left(1 + \frac{A}{W_{el,min}} \cdot \frac{e}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{F_{kr}}}\right)} \right)$$

$$23,5 = \frac{F_T}{62,6} \cdot \left(1 + \frac{62,6}{98,5} \cdot \frac{2,6}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{F_t}{386,56}}\right)} \right)$$

Grafičkim putem u programu Geogebra očitano je:



$$F_T = 241,20 \text{ kN}$$

Provjera:

$$\frac{241,2}{62,6} \cdot \left(1 + \frac{62,6}{98,5} \cdot \frac{2,6}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{241,2}{386,56}}\right)} \right) = 23,5 \text{ kN/cm}^2$$

Grafično opterećenje iznosi : $F_T = 241,20 \text{ kN}$

Dopušteno opterećenje dobit ćemo dijeljenjem graničnog opterećenja sa faktorom sigurnosti k :

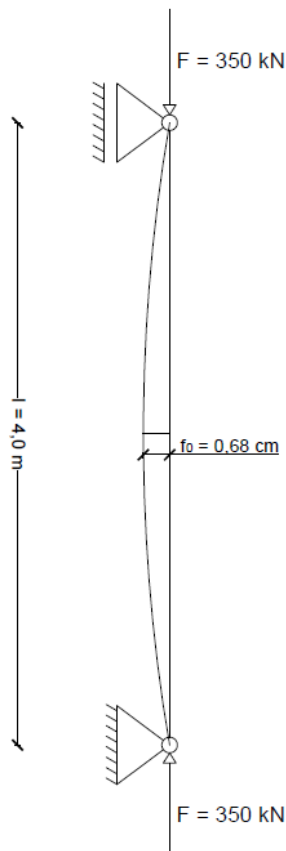
$$F_{dop} = \frac{F_T}{k_i}$$

$$F_{dop} = \frac{241,2}{1,1} = 219,27 \text{ kN}$$

Za zadani čelični štap profila IPE 330 dopušteno ekscentrično opterećenje iznosi $F_{dop} = 219,27 \text{ kN}$

5.2 Određivanje poprečnog presjeka štapa uz početnu zakrivljenost

Čelični štap kvalitete čelika S355 zglobno je učvršćen na oba kraja i opterećen tlačnom silom od 350 kN. U ravnini najmanje krutosti štap ima početnu zakrivljenost 0,68 cm. Duljina štapa je 4 metra. Potrebno je odrediti poprečni presjek štapa, tako da štap zadovolji na izvijanje uz koeficijent sigurnosti od barem 1,5.



Karakteristike materijala:

$$E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_t = 35,5 \text{ kN/cm}^2$$

Početni podaci:

$$L = L_i = 4 \text{ m} = 400 \text{ cm}$$

$$f_0 = 0,68 \text{ cm}$$

$$F = 350 \text{ kN} = F_t$$

$$k_{i,\min} = 1,5$$

Minimalni moment tromosti presjeka iznosi:

$$I_{min} = \frac{F \cdot k_i \cdot l_i^2}{\pi^2 E} = \frac{350 \cdot 1,5 \cdot 400^2}{\pi^2 21000}$$
$$I_{min} = 405,28 \text{ cm}^4$$

Odabrani poprečni presjek je IPE 270 sa momentom tromosti $I_{min} = 420 \text{ cm}^4$

$$A = 45,9 \text{ cm}^2$$

$$I_{min} = 420 \text{ cm}^4$$

$$W_{el,min} = 62,2 \text{ cm}^3$$

Relativna vitkost štapa iznosi:

$$\lambda = \frac{l_i}{\sqrt{\frac{I_{min}}{A}}} = \frac{400}{\sqrt{\frac{420}{45,9}}} = 132,23$$

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 21000}{35,5}} = 76,41$$

$\lambda > \lambda_p$ – štap se izvija u elastičnom području

Kritična sila iznosi:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2} = \frac{\pi^2 21000 \cdot 420}{400^2} = 544,06 \text{ kN}$$

Naprezanje u štapu iznosi:

$$\sigma = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{f_0 \cdot A}{W_y} \cdot \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{kr}}} \right)$$

$$\sigma = \frac{350}{45,9} \left(1 + \frac{0,68 \cdot 45,9}{62,2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{350}{544,06}} \right)$$

$$\sigma = 18,35 \text{ kN}$$

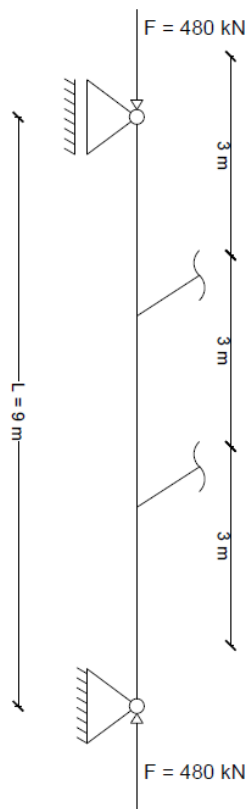
Koeficijent sigurnosti za odabrani profil iznosi:

$$\frac{\sigma_t}{\sigma} = \frac{35,5}{18,35} = 1,93 > 1.5$$

Odabrani profil IPE 270 zadovoljava na izvijanje.

5.3 Dimenzioniranje štapa IPE profila sa bočnim pridržanjima

Čelični štap profila IPE 300 kvalitete čelika zglobno je učvršćen na oba kraja. Duljina štapa je 9 metara. Štap je bočno pridrжан u ravnini najmanje krutosti u trećinama raspona. Opterećen je centričnom tlačnom silom $F = 480$ kN. Potrebno je odrediti iskoristivost štapa, ako je koeficijent sigurnosti na izvijanje 1,4.



Karakteristike materijala:

$$E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_t = 35,5 \text{ kN/cm}^2$$

Početni podaci:

$$L_{i,y} = L = 9 \text{ m} = 900 \text{ cm}$$

$$L_{i,z} = L/3 = 9/3 \text{ m} = 300 \text{ cm}$$

$$k_i = 1,4$$

Karakteristike presjeka:

$$A = 53,8 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 8356 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 604 \text{ cm}^4$$

$$W_{el,y} = 557 \text{ cm}^3$$

$$W_{el,z} = 80,5 \text{ cm}^3$$

Relativna vitkost štapa za os y iznosi:

$$\lambda_y = \frac{l_{i,y}}{\sqrt{\frac{I_y}{A}}} = \frac{900}{\sqrt{\frac{8356}{84,5}}} = 90,5$$

Relativna vitkost štapa za os z iznosi:

$$\lambda_z = \frac{l_{i,z}}{\sqrt{\frac{I_z}{A}}} = \frac{300}{\sqrt{\frac{604}{84,5}}} = 112,21$$

Granična vitkost štapa iznosi:

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 21000}{27,5}} = 86,81$$

$\lambda_y > \lambda_p$ i $\lambda_z > \lambda_p$ – štap se izvija u elastičnom području

Kritična sila $F_{kr,y}$:

$$F_{kr,y} = \frac{\pi^2 E I_y}{l_{i,y}^2} = \frac{\pi^2 21000 \cdot 8356}{900^2} = 2138,12 \text{ kN}$$

Kritična sila $F_{kr,z}$:

$$F_{kr,z} = \frac{\pi^2 E I_z}{l_{i,z}^2} = \frac{\pi^2 21000 \cdot 604}{300^2} = 1390,96 \text{ kN}$$

Do izvijanja će najprije doći oko osi z.

Dopušteno opterećenje iznosi:

$$F_{dop} = \frac{F_{kr,z}}{k_i} = \frac{1390,96}{1,4} = 993,54 \text{ kN}$$

Iskoristivost štapa jednake je omjeru sile kojom je štap opterećen i dopuštene sile:

$$\frac{F}{F_{dop}} = \frac{480}{993,54} = 48,31 \%$$

Štap zadovoljava na izvijanje uz iskoristivost od 48,31 %.



6. ZAKLJUČAK

Izvijanje je pojava koju posebno treba uzeti u obzir kod projektiranja vitkih metalnih konstrukcija. Čelični elementi su zbog svojih dobrih mehaničkih svojstava često velike vitkosti i posljedično osjetljivi na izvijanje. Temeljem provedenih analiza IPE profila sa imperfekcijama u drugom poglavlju ovog rada te interpretacije dobivenih krivulja ovisnosti, zaključeno je da imperfekcije značajno smanjuju granično opterećenje pri kojem dolazi do izvijanja. Veće vrijednosti početne zakrivljenosti štapa i ekscentričnosti opterećenja mogu smanjiti kritično opterećenje i za 50% (Tablice 5 i 7). Iz dobivenih krivulja se također zaključuje da imperfekcije imaju veći utjecaj na profile većih dimenzija, odnosno da će postotak smanjenja graničnog opterećenja, za iste vrijednosti imperfekcija, biti veći kod profila većih dimenzija, kao što je pokazano u Tablicama 5 i 7, gdje se vidi da je za veće IPE profile postotak smanjenja graničnog opterećenja veći.

Dobivene krivulje daju i podatke o brzini pada graničnog opterećenja sa prirastom imperfekcija. Iz slika 13 i 17 može se primijetiti da je pad graničnog opterećenja znatno veći ukoliko su imperfekcije manjih vrijednosti, a rastu, što je i prikazano u tablici 8. Povećanje ekscentriciteta sa 0,5 cm na 1 cm će uzrokovati smanjenje graničnog opterećenja za 14,35%, dok će isto povećanje ekscentriciteta sa 2 na 2,5 cm uzrokovati pad graničnog opterećenja za 8,53%. Dakle, iz tog trenda ponašanja IPE profila se može zaključiti da ukoliko dođe do porasta imperfekcija, potrebno je, uz vrijednost povećanja imperfekcije, uzeti u obzir i početnu vrijednost imperfekcije, koja također utječe na pad graničnog opterećenja.

Imperfekcije koje se javljaju kod elemenata opterećenih na izvijanje potrebno je uzeti u obzir. Imperfekcije se prema normi EN 1993 za projektiranje čeličnih konstrukcija, uzimaju u obzir preko krivulja izvijanja koje daju faktor kojim se Eulerova kritična sila reducira, a on još ovisi i o vitkosti elementa. Postoji 5 krivulja izvijanja, a_0 , a, b, c, i d, a ovisno o profilu, osi izvijanja i kvaliteti čelika se određuje mjerodavna. Krivulje izvijanja su dobivene brojnim eksperimentalnim istraživanjima te se kod dimenzioniranja elemenata na izvijanje imperfekcije elementa i opterećenja preko njih uzimaju u obzir. [9]

Parametar koji također utječe na kritičnu silu je duljina izvijanja. Kako su otpornosti IPE profila u jačoj i slabijoj ravnini značajno različite, ugradnjom bočnih stabilizacija u ravnini manjeg otpora može se smanjiti duljina izvijanja i time povećati kritična sila u toj ravnini. Analizom IPE profila u 3. poglavlju ovog rada promatralo se povećanje kritične sile u slabijoj ravnini ugradnjom bočnih stabilizacija na manjim razmacima. Zaključeno je da se ugradnjom bočne stabilizacije kritična sila u slabijoj ravnini može povećati do (ili preko) vrijednosti kritične sile u jačoj ravnini. Analizom dobivenih rezultata

također je uočeno da je profilima većih dimenzija, ukoliko se žele postići približno jednake kritične sile u obje ravnine, bočnu stabilizaciju potrebno postaviti na gušćem razmaku nego profilima manjih dimenzija. Ovaj trend ipak je potrebno uzeti s razumnim oprezom, obzirom da je broj promatranih profila mali (promatrana su samo 3 IPE profila).

U nastavku rada opisan je proces dimenzioniranja profila na izvijanje, te su dane osnovne smjernice i izrazi za dimenzioniranje. Pri dimenzioniranju elemenata na izvijanje zadatak je najčešće ili određivanje dopuštenog opterećenja ili poprečnog presjeka koji ima dovoljnu otpornost da zadrži stabilnost pod nametnutim opterećenjem. Pri dimenzioniranju je također bitno voditi računa o vitkosti elementa jer će elementi male i srednje vitkosti najčešće otkazivati lomom, a ne izvijanjem, pa je kod takvih elemenata mjerodavan kriterij čvrstoće. Proces dimenzioniranja elemenata popraćen je i primjerima dimenzioniranja elementa opterećenog ekscentričnom silom, početno zakrivljenog elementa i elementa koji je u ravnini manje krutosti bočno pridržan.

Provedenim analizama u ovom radu zaključeno je da je izvijanje složen proces gubitka stabilnosti elementa. Ono ovisi o mnogo faktora koje je potrebno uzeti u obzir, a koji mogu nepovoljno djelovati na otpornost elementa na izvijanje. Stoga je dimenzioniranju elemenata osjetljivim na izvijanje potrebno posvetiti značajnu pažnju, te po potrebi dimenzionirati elemente i sa većim koeficijentima sigurnosti, jer posljedice od izvijanja mogu biti jako velike i opasne za nosivost i sigurnost konstrukcije.

U konačnici, nacionalnim dodatkom EN 1993-1-1 prepoznaju ovu činjenicu kroz faktor sigurnosti na razini elementa u iznosu $\gamma = 1,1$, dok je za proračun profila faktor sigurnosti $\gamma = 1,0$.



Popis literature

- [1.] Šimić, V. (1995) Otpornost materijala 2. Prvo izdanje. Zagreb: Školska knjiga
- [2.] Hibbeler, R. C. (2014) Mechanics of materials: Ninth edition. Boston: Pearson
- [3.] Goodno, B. J. i Gere, J. M. (2018) Mechanics of materials: Ninth edition, SI. Boston: Cengage Learning
- [4.] Popov, E. P. (1990) Engineering mechanics of solids. New Jersey: Prentice – Hall
- [5.] CEN (2005): Eurocode 0: basis of structural design. Bruxelles. EN 1990:2002
- [6.] Civil Rack (2023) Column Buckling : Types And Causes Of Buckling. Dostupno na: <https://civilrack.com/structure/column-buckling/> [5. rujna 2023.]
- [7.] Grzeszykowski, B. i Szimigiera, E. D. (2022) Experimental Investigation on the Vertical Ductility of Rectangular CFST Columns Loaded Axially. Faculty of Civil Engineering, Warsaw University of Technology. Dostupno na: <https://www.mdpi.com/1996-1944/15/6/2231> [5. rujna 2023.]
- [8.] Geogebra – Graphing calculator. Dostupno na: <https://www.geogebra.org/graphing> [25. kolovoza 2023.]
- [9.] CEN (2005): Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings. EN 1993-1-1
- [10.] Džeba, I. (2013) Otpornost poprečnih presjeka i elemenata u čeličnim konstrukcijama – dimenzioniranje. Zagreb.

Popis simbola:

w – progib elementa

M – moment savijanja

E – modul elastičnosti materijala

I – moment tromosti poprečnog presjeka

I_{\min} – minimalni moment tromosti poprečnog presjeka

F_{kr} – Eulerova kritična sila

l – duljina elementa

l_i – duljina izvijanja elementa ili efektivna duljina elementa

b – širina poprečnog presjeka

h – visina poprečnog presjeka

A – površina poprečnog presjeka

D – promjer poprečnog presjeka

σ_{kr} – kritično naprezanje koje se javlja u elementu

i_{\min} – minimalni polumjer tromosti presjeka

λ – vitkost štapa

σ_p – granica proporcionalnosti materijala

λ_p – granična vitkost (za vitkosti manje vrijednosti od granične ne vrijede izrazi za Eulerovu kritičnu silu)

E_t – tangentni modul elastičnosti

E_r – Engesser – Kármánov modul materijala ili reducirani modul materijala

$W_{el,\min}$ – minimalni elastični moment otpora poprečnog presjeka

f_0 – početna zakrivljenost elementa

F_t – granično opterećenje za koje se u elementu javlja naprezanje jednako granici tečenja materijala

e – ekscentričnost opterećenja



$l/2 F_{kr,z}$ – Eulerova kritična sila za izvijanje oko osi z ukoliko je bočna stabilizacija postavljena u polovini raspona elementa

$l/3 F_{kr,z}$ – Eulerova kritična sila za izvijanje oko osi z ukoliko je bočna stabilizacija postavljena u trećinama raspona elementa

$l/4 F_{kr,z}$ – Eulerova kritična sila za izvijanje oko osi z ukoliko je bočna stabilizacija postavljena u četvrtinama raspona elementa

σ_{dop} – dopušteno naprezanje koje se može javiti u elementu

k – koeficijent sigurnosti čvrstoće

$\sigma_{i,dop}$ – dopušteno naprezanje koje se pri izvijanju može javiti u elementu

k_i – koeficijent sigurnosti protiv izvijanja

Popis slika i tablica

Popis slika:

Slika 1: Vrste ravnoteže tijela (a) stabilna; (b) labilna; (c) indiferentna [3]

Slika 2: Ravni deformabilni štap aksijalno tlačno opterećen (a) grafički prikaz; (b) vrste ravnoteže štapa u ovisnosti o kritičnoj sili [1]

Slika 3: Štap zglobno oslonjen na oba kraja (a) nedeformiran oblik štapa; (b) deformiran oblik štapa [1]

Slika 4: pravokutni poprečni presjek (a); kružni poprečni presjek (b)

Slika 5: Duljine izvijanja različito oslonjenih štapova: (a) Štap zglobno učvršćen na oba kraja; (b) Štap upet na jednom kraju, slobodan na drugom; (c) Štap upet na jednom kraju, zglobno oslonjen na drugom; (d) Štap upet na oba kraja [4]

Slika 6: Funkcionalna ovisnost između σ_{kr} i λ prikazana Eulerovom hiperbolom [1]

Slika 7: linija rasterećenja u dijagramu $\sigma - \varepsilon$ [1]

Slika 8: područja vitkosti štapova [1]

Slika 9: Problem izvijanja stupova (a) armiranobetonski stup – na terenu [6]; (b) čelični stup u laboratoriju za ispitivanje konstrukcija [7]

Slika 10: početno zakrivljen štap (a); početno zakrivljen, izvijen štap (b)

Slika 11: Graf funkcije $f(x)$

Slika 12: Sjecište pravca σ_t i krivulje $f(x)$

Slika 13: Krivulja ovisnosti graničnog opterećenja IPE profila o početnoj zakrivljenosti štapa

Slika 14: ekscentrično opterećen štap

Slika 15: graf funkcije $g(x)$

Slika 16: Sjecište pravca σ_t i krivulje $g(x)$

Slika 17: Krivulja ovisnosti graničnog opterećenja IPE profila o ekscentricetu opterećenja

Slika 18: Prikaz osi IPE profila [10]

Slika 19: Duljine izvijanja elementa sa različitim bočnim pridržanjima

Slika 20: Promjena kritične sile u slabijoj osi profila IPE 120 za različito postavljenu bočnu stabilizaciju

Slika 21: Promjena kritične sile u slabijoj osi profila IPE 140 za različito postavljenu bočnu stabilizaciju

Slika 22: Promjena kritične sile u slabijoj osi profila IPE 160 za različito postavljenu bočnu stabilizaciju

Popis tablica:

Tablica 1: Duljine izvijanja ovisno o različitim uvjetima oslanjanja

Tablica 2: Kritična sila za različite vrućevaljane čelične IPE profile

Tablica 3: Kvaliteta čelika i mjerodavne vrijednosti

Tablica 4: Podaci za određivanje graničnog opterećenja IPE 270 profila

Tablica 5: Smanjenje kritične sile u granicama normom EN 1993-1-1 [9] dopuštenih vrijednosti

Tablica 6: Ulazni podaci za određivanje kritične sile profila IPE 220 uz zadani ekscentricitet

Tablica 7: Smanjenje kritične sile za ekscentricitet $e = 3$ cm

Tablica 8: Pad graničnog opterećenja profila IPE 330 ovisnosti o intervalu promjene ekscentriciteta

Tablica 9: Momenti tromosti i otpora u glavnim ravninama profila IPE 120 i IPE 160

Tablica 10: Kritične sile IPE profila za izvijanje u glavnim osima

Tablica 11: Podaci za analizu različite otpornosti na izvijanje u glavnim ravninama IPE profila

Tablica 12: Prikaz omjera kritičnih sila u glavnim osima za bočna pridržanja u trećinama raspona, za duljinu elementa 8 metara

Tablica 13: Prikaz omjera kritičnih sila u glavnim osima za bočna pridržanja u četvrtinama raspona, za duljinu elementa 8 metara