

# Povećanje učinkovitosti iteracijske primjene metode gustoće sila

---

Šamec, Elizabeta; Fresl, Krešimir; Baniček, Maja

Source / Izvornik: **Građevinar, 2018, 69, 1075 - 1084**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

<https://doi.org/10.14256/JCE.2132.2017>

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:237:751746>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-13**

Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)



Primljen / Received: 12.6.2017.

Ispravljen / Corrected: 6.10.2017.

Prihvaćen / Accepted: 15.11.2017.

Dostupno online / Available online: 10.1.2018.

# Povećanje učinkovitosti iteracijske primjene metode gustoće sila

## Autori:



**Elizabeta Šamec**, mag.ing.aedif.  
Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet  
Zavod za tehničku mehaniku  
[esamec@grad.hr](mailto:esamec@grad.hr)



Prof.dr.sc. **Krešimir Fresl**, dipl.ing.grad.  
Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet  
Zavod za tehničku mehaniku  
[fresl@grad.hr](mailto:fresl@grad.hr)



**Maja Baniček**, mag.ing.aedif.  
Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet  
Zavod za tehničku mehaniku  
[mbanicek@grad.hr](mailto:mbanicek@grad.hr)

Prethodno priopćenje

**Elizabeta Šamec, Krešimir Fresl, Maja Baniček**

## Povećanje učinkovitosti iteracijske primjene metode gustoće sila

U radu je opisan postupak skraćivanja trajanja proračuna pri iteracijskoj primjeni metode gustoća sila kojom se u fazi nalaženja oblika prednapete konstrukcije od užadi postižu tražene vrijednosti sila ili duljine odsječaka kabela. U svakom se iteracijskom koraku linearni sustavi jednadžbi rješavaju s točnošću koja u obzir uzima razlike izračunanih i traženih vrijednosti. Predloženo je pravilo koje sprečava prebrzo povećavanje točnosti, održavajući je istodobno dovoljno velikom da se konvergencija ne naruši.

### Ključne riječi:

prednapete konstrukcije od užadi, nalaženje oblika, metoda gustoća sila, iteracijski postupak, točnost

Preliminary report

**Elizabeta Šamec, Krešimir Fresl, Maja Baniček**

## Increasing efficiency of iterative application of the force density method

The method for reducing total computational time in iterative application of the force density method, intended to attain prescribed force values in cables or prescribed lengths of cable segments, is described in the paper. In each step of the iterative procedure, linear systems are solved with the accuracy that takes into account differences between the calculated and required values. The rule that prevents excessively fast increase in accuracy, while maintaining it high enough not to compromise the convergence of the iterative process, is proposed.

### Key words:

cable net structure, form finding, force density method, generalized minimal net, iterative method, accuracy

Vorherige Mitteilung

**Elizabeta Šamec, Krešimir Fresl, Maja Baniček**

## Steigerung der Effizienz der iterativen Anwendung der Kraftdichtemethode

In der Arbeit wird das Verfahren zur Reduzierung der gesamten Berechnungszeit bei der iterativen Anwendung der Kraftdichtemethode beschrieben, mit welcher in der Phase der Formfindung von vorgespannten Seilkonstruktionen die geforderten Kraftwerte oder Kabelabschnittslängen erreicht werden. In jedem Iterationsschritt werden die linearen Gleichungssysteme mit einer Genauigkeit gelöst, welche die Differenz zwischen den errechneten und geforderten Werten berücksichtigt. Es wurde eine Regel vorgeschlagen, die einen zu schnellen Anstieg der Genauigkeit verhindert, sie aber auf einer solchen Ebene aufrechterhält, dass die Konvergenz nicht beeinträchtigt wird.

### Schlüsselwörter:

vorgespannte Seilkonstruktionen, Formfindung, Kraftdichtemethode, Iterationsverfahren, Genauigkeit

## 1. Uvod

Fleksijska je krutost užeta mala, pa se vanjske sile koje djeluju okomito na njegovu os uravnotežuju promjenom oblika pri kojoj se razvijaju unutarnje uzdužne, i to vlačne sile. Održavanje oblika - bolje bi bilo reći: sprečavanje prekomjernih promjena oblika - konstrukcije od užadi može se osigurati tako da se užad slaže u mrežu kojoj čvorovi leže na plohi negativne Gaussove zakrivljenosti. Užad se uz to prednapinje kako bi pri svim kombinacijama opterećenja sile u svim kabelima bile vlačne. Oblik je prednapete mreže, prema tome, određen uvjetima ravnoteže: oblikovanje mreže traženje je sustava sila u ravnoteži [1, 2]. Stoga je prvi korak u projektiranju gipkih konstrukcija nalaženje njihova početnoga oblika (poglavlje 2.1). To je razmjerno nestandardan, inverzan zadatak u kojem se određuje ravnotežna konfiguracija konstrukcije, dok je u standardnim zadacima oblik zadan, a određuje se samo razdioba unutarnjih sila.

Jednadžbe proračunskoga modela za nalaženje oblika izrazito su nelinearne (poglavlje 2.2). Metodom gustoća sila, razvijenom tijekom projektiranja Olimpijskoga kompleksa u Münchenu početkom sedamdesetih godina prošloga stoljeća, nelinearne se jednadžbe lineariziraju [3-5] (poglavlje 3.1). No, pojam gustoće sile, kao omjera statičke i geometrijske veličine, nastao je formalnim manipuliranjem matematičkim izrazima, pa je teško odabrati razdiobu gustoća sila pri kojoj će dobivena ravnotežna konfiguracija mreže zadovoljiti arhitektonske i konstrukcijske zahtjeve.

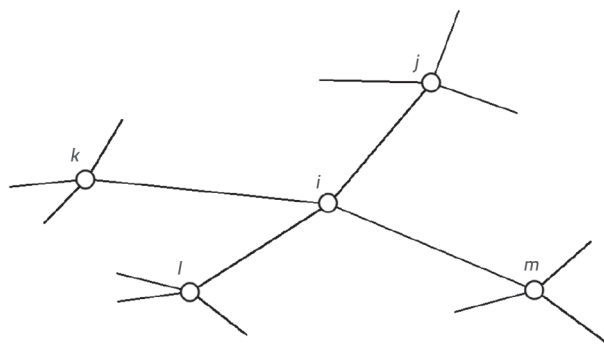
U radu [3] autor je uveo i nelinearnu metodu gustoća sila u podlozi koje je metoda najmanjih kvadrata te je pokazao kako se primjenom nelinearne metode mogu na sustavan način zadovoljiti neki konstrukcijski zahtjevi: postizanje zadanih vrijednosti prednaponskih sila u odabranim kabelima ili u njihovim odsječcima, postizanje zadanih duljina odabranih odsječaka kabelâ u ravnotežnoj konfiguraciji mreže i postizanje zadanih duljina odabranih odsječaka nerastegnutih kabela. Proširenje nelinearne metode koje omogućava ostvarivanje zadanih ležajnih reakcija i time, posredno, zadavanje položaja odabranih (neležajnih) čvorova mreže opisano je u radu [6], a proširenje koje omogućava zadavanje koordinata (sve tri, dvije ili samo jedne) nekih ili svih čvorova prikazano je u [7].

U radovima [1, 2] navedeno je da iteracijska ili višekoračna primjena linearne metode gustoća sila omogućava djelomično ili potpuno postizanje traženih vrijednosti sila, dok je u radu [8] iteracijski postupak proširen na postizanje traženih duljina odsječaka ravnotežne konfiguracije (odjeljci 2.3 i 3.2). Neke druge, posebice nekonstrukcijske zahtjeve projektant može, oslanjajući se na iskustvo, potpuno ili dijelom zadovoljiti interaktivnim radom u nizu pokušaja. Iteracijska primjena metode gustoća sila, međutim, katkada traži dugotrajne proračune, pa može biti neprikladna za interaktivan rad. Cilj je našega istraživanja skraćivanje trajanja iteracijskoga proračuna (poglavlje 3.3, s prikazom programske realizacije u poglavlju 4 i primjerima u poglavlju 5). Prvi su rezultati izloženi na 40<sup>th</sup> *Solid Mechanics Conference* [9].

## 2. Matematički model za nalaženje oblika

### 2.1. Nalaženje oblika

Pod pojmom nalaženja oblika prednapete konstrukcije od užadi podrazumijevamo određivanje njezine ravnotežne konfiguracije prije nanošenja korisnoga opterećenja i uz zanemarivanje vlastite težine. Pojam konfiguracije pak obuhvaća i geometrijski oblik i razdiobu prednaponskih sila u užadi; autori rada [10] stoga nalaženje oblika nazivaju rješenjem početne ravnoteže. Sustavan pregled postupaka nalaženja oblika mreža kabelâ dan je u radu [11]. Zanimljiva zamisao primjene grafostatike i recipročnih dijagrama, koja pretpostavlja interaktivan rad, opisana je u radu [12].



Slika 1. Proračunski model mreže

Za proračunski se model mreže, uvođenjem nekoliko pojednostavnjujućih pretpostavaka (detajnije obrazloženih u radu [8]), uzima sklop zglobnih štapova [1, 3]: točke u kojima se kabeli križaju i točke u kojima su spojeni s podlogom zglobni su čvorovi, a odsječci kabela između njih zglobni štapovi (slika 1.). Štap između čvorova  $i$  i  $j$  označit ćemo s  $\{i, j\}$ . Čvorove koji nisu ležajni nazvat ćemo slobodnima.

Osnovne su varijable pri nalaženju oblika raspored kabelâ, položaji njihovih križišta u prostoru, razmještaj i položaji ležajeva te vrijednosti prednaponskih sila u užadi ili njihovi omjeri (prilagođeno iz [10] za mreže kabela). Postupci nalaženja oblika ovise o tome koje se varijable zadaju, a koje su nepoznanice. Raspored kabelâ, koji određuje raspored i povezanost njihovih križišta i, time, topologiju sklopa zglobno spojenih štapova proračunskoga modela, gotovo se uvijek zadaje unaprijed. Kako je traženi oblik ravnotežna konfiguracija prednaponskih sila u sistemu zglobnih štapova, koordinate su slobodnih čvorova glavne nepoznanice. Vrijednosti prednaponskih sila mogu biti unaprijed zadane, ali mogu biti i nepoznanice koje se određuju uravnoteženjem čvorova i, možda, zadovoljavanjem dodatnih kinematičkih ograničenja. Promjenama omjera vrijednost sila u različitim kabelima ili u odsječcima kabelâ može se mijenjati oblik mreže. Na oblik mreže može se utjecati i dodavanjem/uklanjanjem ležajeva ili njihovim pomicanjem.

## 2.2. Jednadžbe ravnoteže čvorova

Matematička formulacija nalaženja oblika gipkih konstrukcija od užadi vrlo je jednostavna: svodi se na jednadžbe ravnoteže slobodnih čvorova na koje djeluju samo sile prednapinjanja u priključenim štapovima. Skup štapova priključenih u čvor  $i$  označit ćemo sa  $\beta_i$ . Za svaki slobodan čvor  $i$  možemo napisati tri jednadžbe ravnoteže koje izražavaju iščezavanje zbrojeva projekcija sila na tri koordinatne osi:

$$\sum_{\{i,j\} \in \beta_i} S_{i,j} \frac{x_j - x_i}{\ell_{i,j}} = 0, \quad \sum_{\{i,j\} \in \beta_i} S_{i,j} \frac{y_j - y_i}{\ell_{i,j}} = 0, \quad \sum_{\{i,j\} \in \beta_i} S_{i,j} \frac{z_j - z_i}{\ell_{i,j}} = 0 \quad (1)$$

gdje je  $S_{ij}$  vrijednost sile u štapu  $\{i, j\}$ , a  $\ell_{i,j}$  njegova duljina. Budući da je

$$\ell_{i,j} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (2)$$

te su jednadžbe nelinearne.

Ako mreža ima  $n$  slobodnih čvorova, dobiveni će sustav sadržavati  $3n$  jednadžbi oblika (1). Ako je broj štapova mreže  $b$ , broj će mogućih nepoznanica biti  $3n+b$ , jer svaki skup koji sadrži  $n$  koordinatnih trojki  $(x, y, z)$  i  $b$  vrijednosti sila  $S_{ij}$  a zadovoljava te jednadžbe, tvori ravnotežnu konfiguraciju. Kako jednadžbe ravnoteže ne sadrže koeficijente koji izražavaju konstitucijsku vezu promjena duljina kabela i vrijednosti sila u njima, problem nalaženja oblika statički je problem.

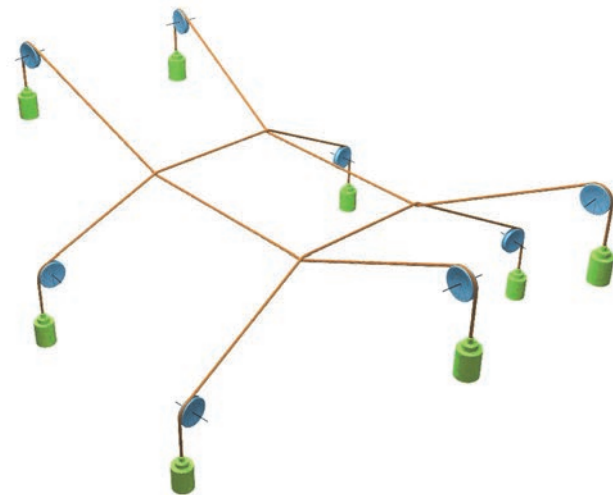
## 2.3. Poopćene minimalne mreže i kinematička ograničenja

Jednadžbe ravnoteže (1) mogu se smatrati uvjetima minimuma funkcije  $\varepsilon$  dane izrazom (3)

$$\varepsilon(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in N}) = \sum_{\{i,j\} \in \beta} S_{i,j} \ell_{i,j} \quad (3)$$

gdje je  $N$  skup slobodnih čvorova, a  $\beta$  skup štapova mreže. Mreže sa zadanim vrijednostima prednaponskih sila, koje zadovoljavaju te uvjete, možemo nazvati poopćenim minimalnim mrežama. Naime, ako su vrijednosti sila u svim štapovima međusobno jednake,  $S_{ij} = S$ , rješenje sustava (1) oblik je mreže za koji je zbroj duljina kabela manji negoli u bilo kojemu drugom obliku koji mreža iste topologije može poprimiti [1, 2, 8, 13].

Mogućnost zadavanja različitih vrijednosti sila u različitim kablama povećava skup oblika ostvarivih u oblikovanju prednapetih konstrukcija od užadi. Primjerice, ako se sile u drugim kablama ne mijenjaju, odabrano se uže povećanjem sile u njemu nateže, pa se prostorna poligonalna linija osi užeta izravna i približava pravocrtnoj spojnici njegovih krajeva, a njegova se duljina smanjuje (primjer u odjeljcima 5.1 i 5.2). Da bi mreža uz zadane sile u kablama mogla doći u (poopćenu) minimalnu konfiguraciju, ne smije se tijekom prednapinjanja spriječiti klizanje kabela jednih po drugima [1, 2] (slika 2.).



Slika 2. Nastanak minimalne mreže

Pritom se, međutim, može dogoditi da po nekom kabelu dva čvorova ili više njih otkližu u jednu točku, neovisno o vrijednostima sila; neograničeno se približavanje čvorova ne može spriječiti ni znatnim povećanjem vrijednosti u nekim kablomima u odnosu na vrijednost u drugima. Zbog toga ćemo umjesto sila u nekim kablomima zadati duljine njegovih odsječaka između križišta, što zapravo znači da ćemo spriječiti klizanje drugih kabela po njima. No, zadamo li duljine odsječaka (štapova proračunskoga modela), vrijednosti sila u njima, potrebne za postizanje traženih duljina, postaju nepoznanicama [8]. Zadane se duljine mogu pomoću Lagrangeovih multiplikatora  $\lambda_{ij}$  izraziti kao kinematička ograničenja, pa funkcija  $\varepsilon$  prelazi u

$$\varepsilon_c(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in N}, \{\lambda_{i,j}\}_{\{i,j\} \in \beta_c}) = \sum_{\{i,j\} \in \beta} S_{i,j} \ell_{i,j} + \sum_{\{i,j\} \in \beta_c} \lambda_{i,j} (\ell_{i,j} - \bar{\ell}_{i,j}) \quad (4)$$

gdje je  $\beta_c$  skup štapova duljine  $\bar{\ell}_{i,j}$  kojih su zadane. Kako je broj Lagrangeovih multiplikatora  $\lambda_{ij}$  jednak broju nepoznatih sila, izjednačavanje s nulom derivacija funkcije  $\varepsilon_c$  po koordinatama i po multiplikatorima daje sustav s odgovarajućim brojem jednadžbi. Te su jednadžbe uvjeti stacionarnosti funkcije  $\varepsilon_c$ .

U radu [8] analizirana je primjena Newton-Krilovljevič postupaka u rješavanju sustava jednadžbi (1) (uvjetâ minimuma funkcije  $\varepsilon$ ) i sustava uvjetâ stacionarnosti funkcije  $\varepsilon_c$ . U prvome je slučaju analiza potvrdila poznatu činjenicu, detaljnije opisanu u radovima [2, 14, 15], da je trajanje proračuna ovisno o pretpostavljenu početnom obliku i da je područje konvergencije izrazito nepravilnoga, možemo čak reći fraktalnog, oblika. Problem pak stacionarnosti funkcije  $\varepsilon_c$  problem je sedlaste točke, pa se trajanje proračuna osjetno produljuje, a područje konvergencije smanjuje. Štoviše, za razliku od minimuma konveksne funkcije  $\varepsilon$ , sedlasta točka nije jedinstvena, pa proračun, ako konvergira, može konvergirati prema fizički neostvarivu rješenju.

### 3. Metoda gustoće sile

#### 3.1. Izvorna linearna inačica metode

Zadavanjem omjerâ

$$q_{i,j} = \frac{S_{i,j}}{\ell_{i,j}} \quad (5)$$

nelinearne se jednačbe (1) lineariziraju:

$$\sum_{\{i,j\} \in \beta} q_{i,j}(x_j - x_i) = 0, \quad \sum_{\{i,j\} \in \beta} q_{i,j}(y_j - y_i) = 0, \quad \sum_{\{i,j\} \in \beta} q_{i,j}(z_j - z_i) = 0 \quad (6)$$

Omjeri  $q_{ij}$  sile i duljina štapova nazivaju se gustoćama sile [3-5].

Zadamo li umjesto vrijednost  $S_{ij}$  sile u štapovima gustoće sile  $q_{ij}$  nepoznanice će biti i vrijednosti sile i koordinate slobodnih čvorova, ukupno  $b+3n$  nepoznanica. Te dvije skupine nepoznanica povezuje dodatnih  $b$  jednačbi (5). No, zadane vrijednosti  $q_{ij}$  konstantni su koeficijenti u jednačbama (6), pa se sustav koji sadrži  $3n$  jednačbi ravnoteže raspada u tri međusobno neovisna sustava s po  $n$  nepoznanica; nepoznanice su prvoga sustava  $\{x_k\}_{k \in N'}$ , drugog  $\{y_k\}_{k \in N'}$  a trećeg  $\{z_k\}_{k \in N'}$ . Sva tri imaju istu matricu sustava, a razlikuju im se vektori slobodnih članova, jer su im komponente  $q_{i,s}x_s$ ,  $q_{i,s}y_s$  i  $q_{i,s}z_s$  za  $s \in S$ , gdje je  $S$  skup ležajnih čvorova. S poznatim se koordinatama slobodnih čvorova mogu izračunati duljine  $\ell_{ij}$  štapova, a potom i vrijednosti sile u njima, jer su, iz (5),  $S_{ij} = q_{ij}\ell_{ij}$ .

#### 3.2. Iterirana metoda gustoće sile

Svako rješenje sustavâ (6), za bilo kako odabranu razdiobu gustoća sile po štapovima mreže zadane topologije, ravnotežna je konfiguracija. Međutim, teško je predvidjeti razdiobu gustoća sile koja će dati zamišljeni oblik mreže ili zamišljenu razdiobu prednaponskih sile.

Iteracijsku primjenu metode gustoća sile nazvat ćemo *iteriranom metodom gustoća sile (IMGS)*. U tom se postupku u svakom koraku primjenjuje linearna metoda gustoća sile, pri čemu se gustoće sile u nekom koraku određuju na temelju zadanih uvjeta i rezultata prethodnoga koraka.

Tražimo li postizanje vrijednosti sile  $\bar{S}_{i,j}$  u štapu  $\{i,j\}$ , gustoću sile u njemu u  $k$ -tomu koraku iteracije računat ćemo prema izrazima

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \frac{\bar{S}_{i,j}}{S_{i,j}^{(k-1)}} \quad \text{ili} \quad q_{i,j}^{(k)} = \frac{\bar{S}_{i,j}}{\ell_{i,j}^{(k-1)}} \quad (7)$$

gdje je  $S_{i,j}^{(k-1)}$  vrijednost sile izračunana u prethodnom koraku. Tražene se vrijednosti sile u štapovima mogu međusobno razlikovati [1, 2]. Poseban su slučaj minimalne ili geodetske mreže u kojima su vrijednosti sile jednoliko raspodijeljene [13]:  $\bar{S}_{i,j} = \bar{S}$ .

Analogno, propisanu duljinu  $\bar{\ell}_{i,j}$  štapa  $\{i,j\}$ , odnosno propisanu udaljenost  $\bar{\ell}_{i,j}$  čvorova  $i$  i  $j$  mreže u ravnotežnoj konfiguraciji možemo ostvariti tako da gustoću sile u njemu u  $k$ -tomu koraku računamo prema izrazima

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \frac{\ell_{i,j}^{(k-1)}}{\bar{\ell}_{i,j}} \quad \text{ili} \quad q_{i,j}^{(k)} = \frac{S_{i,j}^{(k-1)}}{\bar{\ell}_{i,j}} \quad (8)$$

gdje je  $\ell_{i,j}^{(k-1)}$  duljina štapa / udaljenost čvorova izračunana u prethodnom koraku [8].

Vrijednost sile u štapu i njegova duljina ne mogu se istodobno propisati, ali se može zadati približna vrijednost sile, a potom, nakon nekoliko koraka iteracije, preći na postizanje duljine. Iteracijski se postupak prekida kada su

$$e_s^{(k)} = \max_{\{i,j\} \in \beta} (|S_{i,j}^{(k)} - \bar{S}_{i,j}|) < \tau_s \quad \text{i} \quad e_\ell^{(k)} = \max_{\{i,j\} \in \beta} (|\ell_{i,j}^{(k)} - \bar{\ell}_{i,j}|) < \tau_\ell \quad (9)$$

gdje su  $\tau_s$  i  $\tau_\ell$  propisane točnosti. U različitim štapovima točnosti mogu biti različite.

Budući da je svako rješenje jednačbi (6) ravnotežna konfiguracija, opisani iteracijski postupak konvergira prema traženu rješenju kroz niz ravnotežnih konfiguracija. Prekine li se iteracijski postupak prije no što su postavljeni uvjeti zadovoljeni uz zahtijevanu točnost, pa čak i ako se ti uvjeti ne mogu zadovoljiti, dobivena je mreža u ravnoteži. Prednost je iteracijskoga postupka i to što se i tražene duljine štapova, a ne samo tražene vrijednosti sile, mogu ostvariti bez uvođenja Lagrangeovih multiplikatora. Numerički su eksperimenti doduše pokazali da primjeri u kojima se zadaju i vrijednosti sile i duljine štapova zahtijevaju više koraka iteracije od primjerâ s približno jednakim brojem štapova u kojima se zadaju samo vrijednosti sile, ali razlike nisu tako velike kao pri primjeni Newton-Krilovljevihi postupaka.

U radu [8] rečeno je da je opisani postupak vrlo brz. Tu tvrdnju treba malo pobliže odrediti i ponešto preinačiti i prilagoditi. Postupak jest brži od Newton-Krilovljevihi, ali je u izvornomu obliku za oblikovanje mreža s velikim brojem štapova u stvarnom vremenu, traži li se razmjerno velika točnost, ipak predugotrajan. U sljedećem ćemo odjeljku prikazati mogući način njegova ubrzanja.

#### 3.3. Skraćivanje trajanja proračuna

U svakom se koraku iteracijskoga postupka rješavaju tri sustava linearnih jednačbi s istom matricom sustava. Primjena LU dekompozicije, koja omogućava istodobno uvrštavanje unazad više vektora desnih strana, stoga je posebno pogodna [16]. Budući da je matrica sustava rijetko popunjena, za rješavanje većih sustava treba primijeniti inačicu LU dekompozicije prilagođenu takvim matricama [17]. Pritom će do ograničenoga popunjavanja matrice ipak doći; naši su numerički eksperimenti pokazali da popunjavanje može biti značajno.

Iteracijski postupci rješavanja linearnih sustava ne traže popunjavanje matrice sustava, a skupina je Krilovljevih postupaka vrlo učinkovita [18], iako pri njihovoj primjeni svaki od tri sustava treba zasebice riješiti. Cjelokupan postupak iteracijske primjene metode gustoća sila nazvat ćemo vanjskom, a iteracijski postupak rješavanja linearnih sustava unutarnjom petljom.

Za iteracijsko rješavanje linearnih sustava treba zadati točnost  $\tau_{eq}$ , ovisnu o vrijednostima  $\tau_\ell$  i  $\tau_S$  kojima su u uvjetima (9) za prekid vanjske petlje određene točnosti postizanja traženih duljina štapova i vrijednosti sila u njima. Duljine i, posredno, vrijednosti sila funkcije su koordinata čvorova. Točnost kojom su te koordinate određene bit će manja od  $\tau_{eq}$ . Naime, u uvjetu za prekid iteracijskoga postupka rješavanja linearnoga sustava sa zadanom se točnošću  $\tau_{eq}$  uspoređuje norma reziduala,  $\|r^{(k)}\| < \tau_{eq}$ , gdje je  $\kappa$  korak unutarnje petlje. Kako su veličina pogreške rješenja i norma reziduala povezane izrazom

$\|e^{(k)}\| = \|A^{-1}r^{(k)}\| \leq \|A^{-1}\| \|r^{(k)}\|$ , pogreška rješenja može biti do  $\|A^{-1}\|$  puta veća od reziduala. (Uz to pogreška izračunavanja duljine može biti do  $2\sqrt{3}$  puta veća od pogreške kojom su određene koordinate točaka.) Sustave (6) treba stoga rješavati barem s točnošću

$$\tau_{eq} = \min(\tau_S / \alpha, \tau_\ell / \alpha) \quad (10)$$

gdje je  $\alpha$  ocjena norme matrice  $A^{-1}$  (a može uključivati i faktor  $2\sqrt{3}$ ).

Primjena Krilovljevih postupaka omogućava ubrzanje izvođenja vanjske petlje. Ponajprije, u nekom ćemo koraku kao početne aproksimacije rješenja uzeti rješenja dobivena u prethodnom koraku. I, što je svakako važnije, posudit ćemo zamisao Newton-Krilovljevih ili, slikovitije nazvanih, netočnih Newtonovih postupaka koji pružaju kompromis između točnosti rješavanja linearnih sustava i količine računanja u jednom koraku vanjske petlje [19]. Naime, ako su izračunane vrijednosti sila ili duljine štapova daleko od traženih, smisljeno je riješiti sustave (6) samo približno, i to s to manjom točnošću što smo dalje od traženih vrijednosti. Time doduše žrtvujemo spomenutu prednost iteracijske primjene metode gustoća sila: kako se u gotovo svim koracima sustavi rješavaju s razmjerno malenom točnošću, dobivene konfiguracije, osim onih pri kraju postupka, nisu uravnotežene.

Točnost rješenja sustava (6) postupno, dakle, povećavamo od razmjerno male početne točnosti  $\tau_{max}$  do točnosti  $\tau_{eq}$  kojom mora biti određena konačna ravnotežna konfiguracija. Ako u k-tom koraku vanjske petlje želimo sustav rješavati s točnošću koja odražava udaljenosti izračunanih vrijednosti sila i duljina štapova od traženih,  $\tau^{(k)}$  mora ovisiti o pogreškama  $e_S^{(k)}$  i  $e_\ell^{(k)}$ , no kako te vrijednosti nisu poznate prije rješavanja sustava, upotrijebit ćemo vrijednosti iz prethodnoga koraka,  $e_S^{(k-1)}$  i  $e_\ell^{(k-1)}$ . Ovisnosti ćemo izraziti u obliku

$$\bar{\tau}_{e_S}^{(k)} = f_S(e_S^{(k-1)}) \quad \text{i} \quad \bar{\tau}_{e_\ell}^{(k)} = f_\ell(e_\ell^{(k-1)}) \quad (11)$$

Pretpostavit ćemo, za početak, da su funkcije  $f_S$  i  $f_\ell$  linearne:

$$\bar{\tau}_{e_S}^{(k)} = \beta_S e_S^{(k-1)} \quad \text{i} \quad \bar{\tau}_{e_\ell}^{(k)} = \beta_\ell e_\ell^{(k-1)} \quad (12)$$

Uz to, uzet ćemo da je odnos između  $\bar{\tau}_{e_S}^{(k)}$  i  $e_S^{(k-1)}$  jednak odnosu između  $\tau_{eq}$  i  $e_S^{(n)}$  u posljednjem koraku vanjske petlje i da je odnos između  $\bar{\tau}_{e_\ell}^{(k)}$  i  $e_\ell^{(k-1)}$  jednak odnosu između  $\tau_{eq}$  i  $e_\ell^{(n)}$ :

$$\frac{\bar{\tau}_{e_S}^{(k)}}{e_S^{(k-1)}} = \frac{\tau_{eq}}{e_S^{(n)}} \quad \text{i} \quad \frac{\bar{\tau}_{e_\ell}^{(k)}}{e_\ell^{(k-1)}} = \frac{\tau_{eq}}{e_\ell^{(n)}} \quad (13)$$

Kako su  $e_S^{(n)} \approx \tau_S$  i  $e_\ell^{(n)} \approx \tau_\ell$ , možemo uzeti da su

$$\bar{\tau}_{e_S}^{(k)} = \frac{\tau_{eq}}{\tau_S} e_S^{(k-1)} \quad \text{i} \quad \bar{\tau}_{e_\ell}^{(k)} = \frac{\tau_{eq}}{\tau_\ell} e_\ell^{(k-1)} \quad (14)$$

Na kraju vanjske petlje, kad  $e_S^{(k-1)}$  i  $e_\ell^{(k-1)}$  dosegnu  $\tau_S$  i  $\tau_\ell$ , trebalo bi biti  $\bar{\tau}_{e_S}^{(n)} = \tau_{eq}$  i  $\bar{\tau}_{e_\ell}^{(n)} = \tau_{eq}$ . No, nikad neće biti  $e_S^{(k-1)} = \tau_S$  ni  $e_\ell^{(k-1)} = \tau_\ell$ , nego će pogreške biti nešto veće ili nešto manje od zadanih točnosti. Ako su manje od zadanih točnosti, zadovoljen je uvjet (9) za prekid vanjske petlje, pa sustav (6) neće ni biti rješavan s točnošću  $\tau_{eq}$ . Uzet ćemo stoga da su

$$\bar{\tau}_{e_S}^{(k)} = \frac{\tau_{eq}(1-\sqrt{\tau_S})}{\tau_S} e_S^{(k-1)} \quad \text{i} \quad \bar{\tau}_{e_\ell}^{(k)} = \frac{\tau_{eq}(1-\sqrt{\tau_\ell})}{\tau_\ell} e_\ell^{(k-1)} \quad (15)$$

Analiza je primjerâ pokazala da točnost prebrzo raste. Uzet ćemo stoga kvadratne funkcije

$$\bar{\tau}_{e_S}^{(k)} = \frac{\tau_{eq}(1-\sqrt{\tau_S})}{\tau_S^2} (e_S^{(k-1)})^2 \quad \text{i} \quad \bar{\tau}_{e_\ell}^{(k)} = \frac{\tau_{eq}(1-\sqrt{\tau_\ell})}{\tau_\ell^2} (e_\ell^{(k-1)})^2 \quad (16)$$

U obzir ćemo uzeti i brzinu smanjivanja pogrešaka  $e_S^{(k)}$  i  $e_\ell^{(k)}$  pomoću omjera tih vrijednosti u dva uzastopna koraka [20]:

$$\bar{\bar{\tau}}_{e_S}^{(k)} = \eta \left( \frac{e_S^{(k-1)}}{e_S^{(k-2)}} \right)^2 e_S^{(k-1)} \quad \text{i} \quad \bar{\bar{\tau}}_{e_\ell}^{(k)} = \eta \left( \frac{e_\ell^{(k-1)}}{e_\ell^{(k-2)}} \right)^2 e_\ell^{(k-1)} \quad (17)$$

pri čemu je  $\eta$  prigušenje koje omogućava dodatnu kontrolu. Treba uzeti veću od točnosti  $\bar{\tau}_{e_S}^{(k)}$  i  $\bar{\tau}_{e_\ell}^{(k)}$  odnosno  $\bar{\bar{\tau}}_{e_S}^{(k)}$  i  $\bar{\bar{\tau}}_{e_\ell}^{(k)}$ , pa su

$$\tau_{e_S}^{(k)} = \min \left( \frac{\tau_{eq}(1-\sqrt{\tau_S})}{\tau_S} (e_S^{(k-1)})^2, \eta \frac{(e_S^{(k-1)})^3}{(e_S^{(k-2)})^2} \right) \quad (18)$$

$$\tau_{e_\ell}^{(k)} = \min \left( \frac{\tau_{eq}(1-\sqrt{\tau_\ell})}{\tau_\ell} (e_\ell^{(k-1)})^2, \eta \frac{(e_\ell^{(k-1)})^3}{(e_\ell^{(k-2)})^2} \right)$$

U netočnom postupku točnost koraka određuje veća od pogrešaka  $e_S^{(k-1)}$  i  $e_\ell^{(k-1)}$ . Uz to, točnost koraka ne treba biti veća od točnosti  $\tau_{eq}$ . Stoga uvodimo ograničenje



$$\tau_e^{(k)} = \max(\tau_{e_S}^{(k)}, \tau_{e_\ell}^{(k)}, \tau_{eq}) \tag{19}$$

U nekim primjerima konvergencija vanjske petlje nije uniformna: može se dogoditi da je  $e_S^{(k)} > e_S^{(k-1)}$  ili  $e_\ell^{(k)} > e_\ell^{(k-1)}$ . Zbog toga provjeravamo je li točnost u  $k$ -tom koraku veća od točnosti prethodnog koraka:

$$\tau_e^{(k)} = \min(\tau_e^{(k-1)}, \tau_e^{(k)}) \tag{20}$$

### 4. O računalnom programu

Izvorni računalni program kojim su provedeni proračuni izrađen je u programskom paketu *SageMath* [21]. Dijagram toka programa prikazan je na slici 3. Sustavi linearnih jednadžbi rješavaju se funkcijama **splu()** i **cg()** programske biblioteke *SciPy* [22] koja je uključena u *SageMath*. Rijetko popunjene matrice prikazane su pomoću razreda **csc\_matrix** (Compressed Sparse Column matrix) biblioteke *SciPy*.

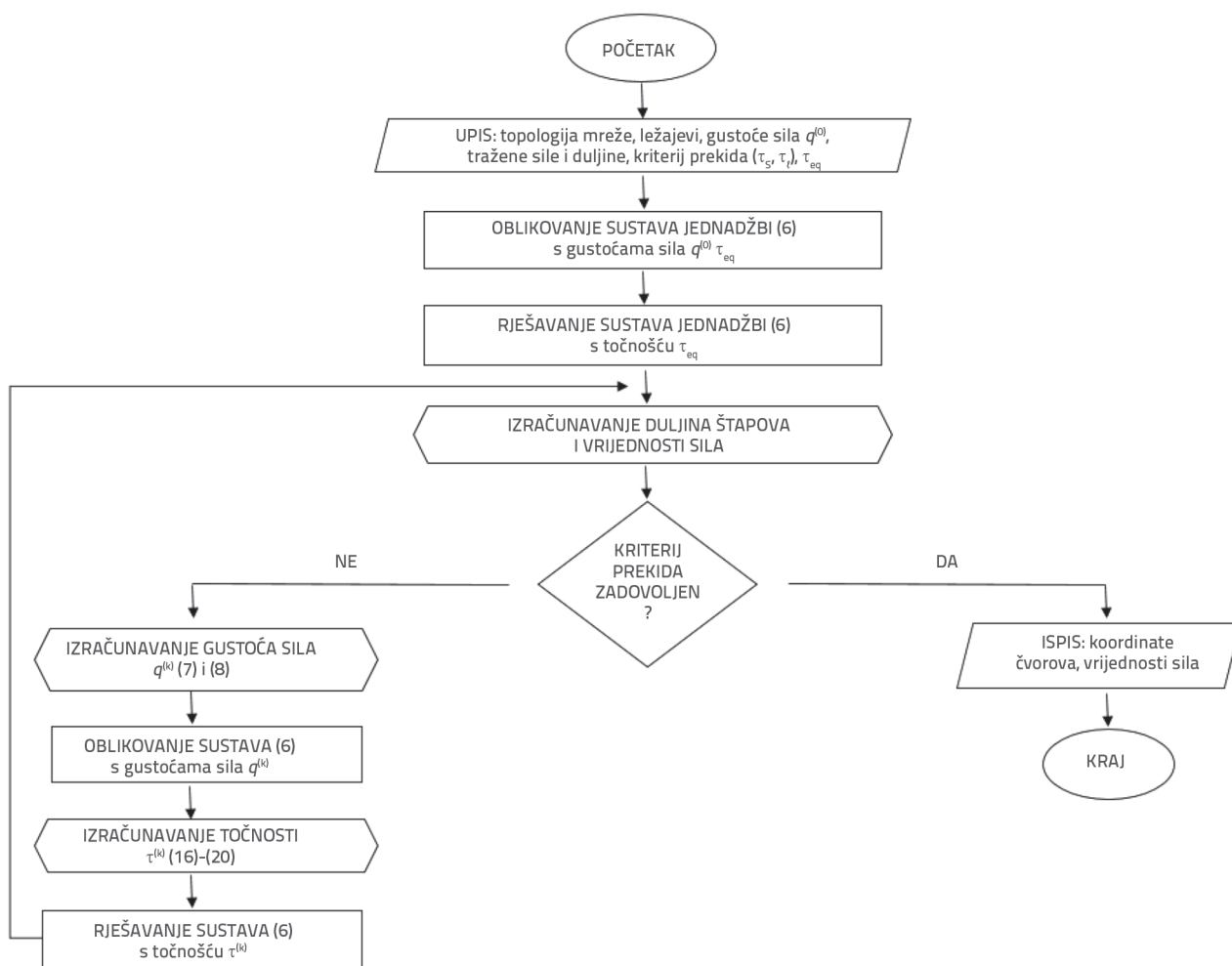
## 5. Primjeri

### 5.1. Minimalna mreža s krutim rubovima

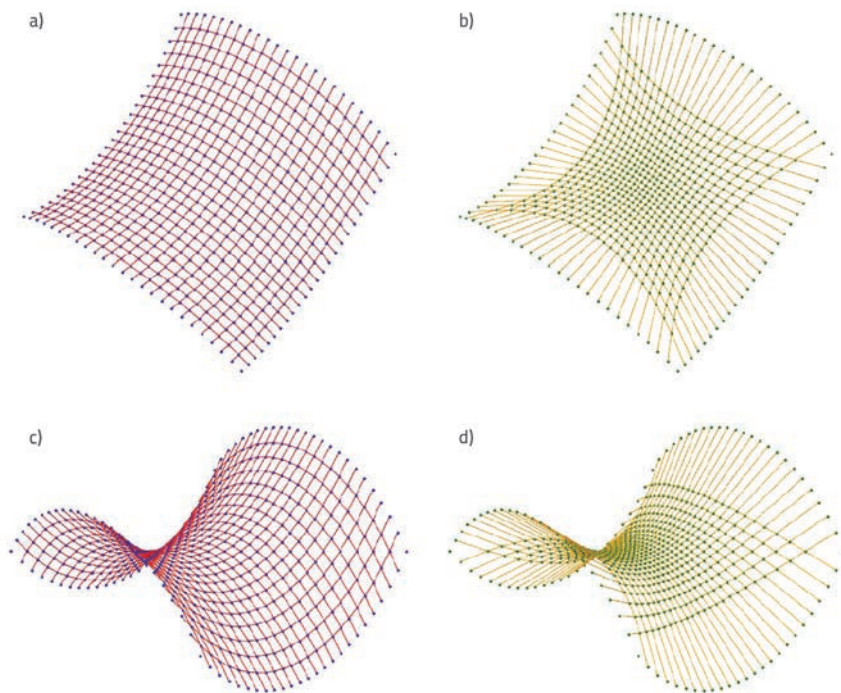
Prvi je primjer mreža s krutim rubovima: svi kabeli na oba kraja imaju ležajne čvorove. Mreža je razapeta nad tlocrtnim područjem  $[-a, a]^2$ . Koordinate zležajnih čvorova dane su izrazom

$$z = a \ln \frac{\cos(x/a)}{\cos(y/a)} \tag{21}$$

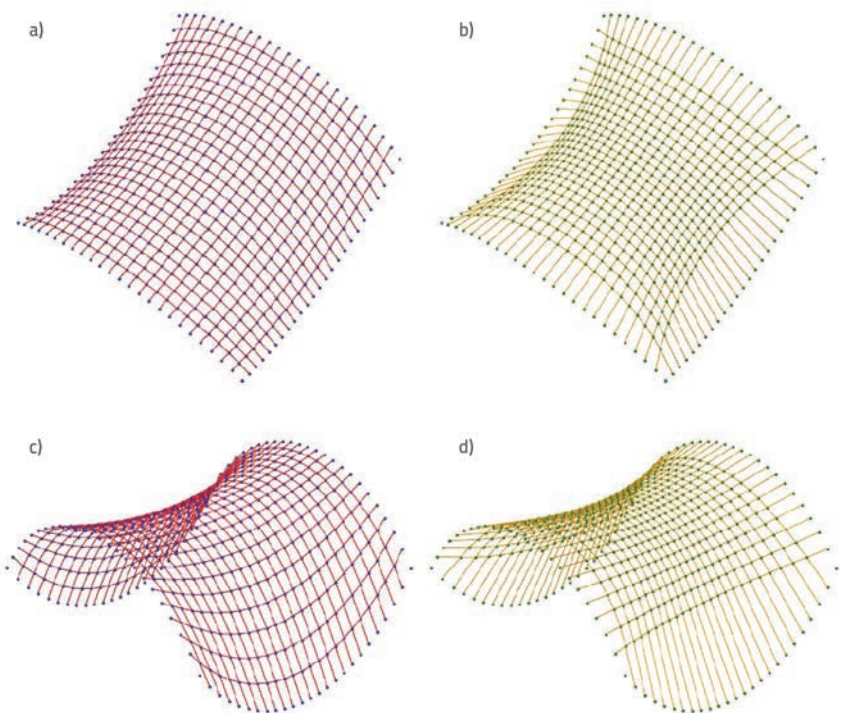
Mreža ima dvije familije po 23 kabela, što znači da ima  $23 \cdot 23 = 529$  unutarnjih čvorova,  $4 \cdot 23 = 92$  rubna čvora te  $46 \cdot 24 = 1104$  štapa. Unutarnji su čvorovi slobodni, pa treba riješiti tri sustava koji sadrže po 529 jednadžbi s 529 nepoznanica. U prvom su koraku u svim štapovima zadane jedinične gustoće sila. Dobivena je mreža prikazana na slikama 4.a i 4.c. Vrijednosti sila u štapovima u rasponu su od 1,668 do 2,903.



Slika 3. Dijagram toka predloženoga iteracijskog postupka



Slika 4. Mreža s krutim rubovima: a) i c) jednake gustoće sila u svim štapovima; b) i d) minimalna mreža



Slika 5. Mreža s krutim rubovima: a) i c) jednake gustoće sila uzduž pojedinih kabela; b) i d) poopćena minimalna mreža

Minimalna je mreža, određena iteracijskom primjenom metode gustoća sila, prikazana na slikama 4.b i 4.d. Gustoće sila u pojedinim koracima iteracijskoga postupka računane su prema

drugomu podizrazu izraza (7), pri čemu je uzeto  $\bar{S}_{i,j}^{(k-1)} = \bar{S} = 1$  (oblik mreže ne ovisi o vrijednostima sila, nego samo o njihovim omjerima, tako da se isti oblik dobiva za bilo koji  $\bar{S}$ ). Konačne su gustoće sila u rasponu od 0,090 do 1,197.

Pri rješavanju sustava jednadžbi LU dekompozicijom prilagođenom rijetko popunjenim matricama, točnost  $\tau_s = 10^{-4}$  postignuta je nakon 576 koraka. Isti je broj koraka vanjske petlje bio potreban pri rješavanju sustava metodom konjugiranih gradijenata (CG). Za točnost rješavanja sustava uzeto je  $\tau_{eq} = 5 \times 10^{-7}$ .

Ako su za početne aproksimacije rješenja uzimani nul-vektori ( $\mathbf{x}_0^{(k)} = \mathbf{0}$ ), ukupan je broj koraka unutarnjih petlji za sva tri sustava bio 78258. Ako su pak za početne aproksimacije uzimana rješenja iz prethodnih koraka ( $\mathbf{x}_0^{(k)} = \mathbf{x}_n^{(k-1)}$ ), ukupan je broj koraka unutarnjih petlji smanjen na 34505. I u predloženom su netočnom postupku sustavi rješavani metodom konjugiranih gradijenata (ICG). Točnost  $\tau_s = 10^{-4}$  postignuta je nakon 557 koraka vanjske petlje uz ukupno 16201 koraka unutarnje petlje. Podaci o brojevima koraka pregledno su prikazani u tablici 1. na kraju poglavlja, u redcima označenima Prim. 1.

## 5.2. Različite sile u kablama

Na oblik mreže može se utjecati promjenom omjera vrijednosti sila u pojedinim kablama. Na slici 5. prikazana je mreža jednake tlocrtne dispozicije i jednake topologije kao u prethodnom primjeru. U mreži na slikama 5.a i 5.c u svim su štapovima konveksne familije kabela gustoće sila jedinične, dok su u svim štapovima kabela konkavne familije gustoće sila jednake polovini koordinate z njegovih ležajnih čvorova. U poopćenoj su pak minimalnoj mreži na slikama 5.b i 5.d vrijednosti sila u svim štapovima kabela konkavne familije jednake polovini koordinate z njegovih ležajnih čvorova, dok su sile u štapovima konveksne familije jedinične. U iteracijskom postupku nalaženja oblika poopćene minimalne



točnosti  $\tau_s = 10^{-4}$  u različitim postupcima proračuna, pri čemu je točnost u metodi konačnih gradijenata i konačna točnost u netočnom postupku  $\tau_{eq} = 5 \times 10^{-7}$ , navedeni su u redcima Prim. 2 tablice 1.

### 5.3. Mreža s rubnim kabelima

Konstrukcije od užadi najčešće se izvode s rubnom užadi. Unutarnji su kabeli spojeni na rubne kabele, a rubni su kabeli u krajnjim točkama spojeni s krutim konstrukcijskim elementima, tako da su poznate koordinate samo tih, ležajnih čvorova. Nalaženje oblika rubnih kabela postaje dijelom nalaženja oblika cijele mreže.

U primjeru na slici 6. četiri rubna kabela razapeta su između četiri ležajne točke, od kojih su tri u horizontalnoj ravnini, a četvrti je uzdignut iznad nje. Unutarnjih je kabela 78. Mreža ima 837 slobodnih čvorova; 76 ih je na rubnim kabelima. Sustavi sadrže po 837 jednadžbi s po 837 nepoznanica.

U rubnim su kabelima vrijednosti sila znatno veće negoli u unutarnjima. Ipak, ako je dopušteno klizanje krajeva unutarnjih kabela po rubnim kabelima, unutarnji će se kabeli, neovisno o vrijednostima sila u rubnim kabelima, zbiti. Zbijanje kabela spriječit ćemo tako da propišemo duljine štapova u koje su rubni kabeli podijeljeni.

U prvom ćemo koraku zadati jedinične gustoće sila u štapovima unutarnjih i nekoliko puta veće gustoće sila u štapovima rubnih kabela (slike 6.a i 6.c). Kako su vrijednosti sila proporcionalne gustoćama sila, dobivene vrijednosti sila u rubnim kabelima bit će veće od vrijednosti u unutarnjima.

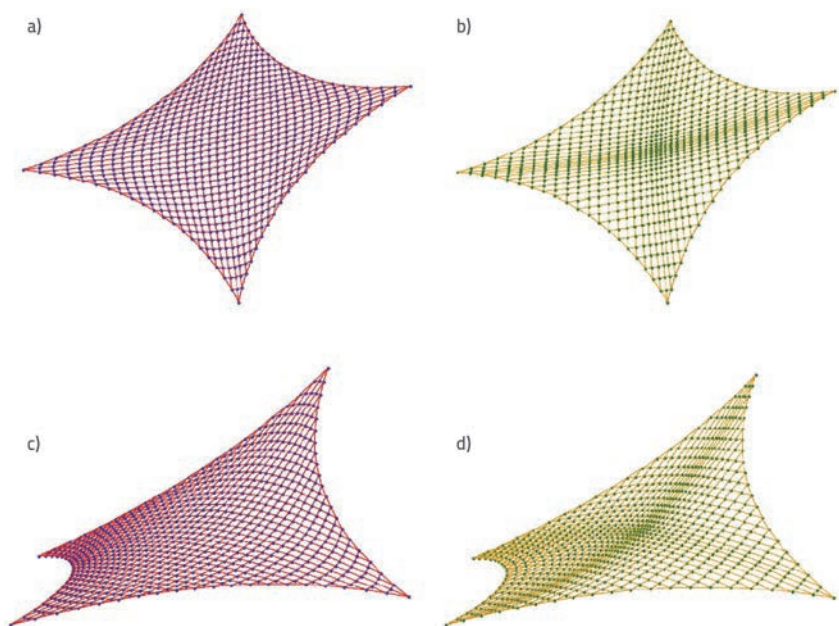
U nastavku provodimo iteracijski proračun sa zadanim jediničnim vrijednostima sila u štapovima unutarnjih kabela i duljinama štapova rubnih kabela, određenima kao srednje vrijednosti duljina dobivenih u prvom koraku. (Zadane su duljine 80 štapova, dok su u 1600 štapova zadane vrijednosti sila.) U unutarnjim se kabelima gustoće sila računaju prema drugome podizrazu izraza (7), dok se gustoće sila u rubnim kabelima računaju prema drugom podizrazu izraza (8). Za prekid vanjske petlje treba sada ispuniti oba uvjeta (9), pri čemu su  $\tau_s = \tau_r = 10^{-4}$ , dok je za točnost iteracijskoga rješavanja sustava

jednadžbi uzeto  $\tau_{eq} = 5 \times 10^{-7}$ . Potrebni brojevi koraka u različitim postupcima proračuna navedeni su u redcima Prim. 3 tablice 1., a dobivena je mreža prikazana na slikama 6. b i 6.d.

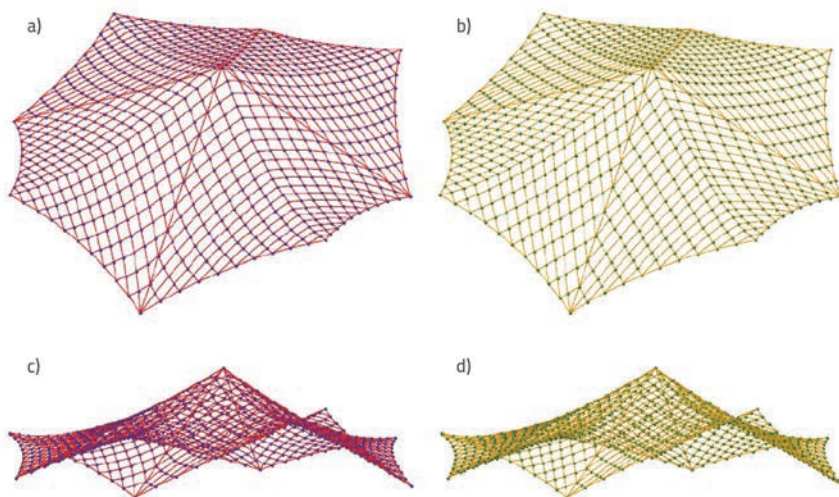
### 5.4. Mreža nad osmerokutom

Mreža u posljednjemu primjeru ima devet ležajeva: 8 rubnih i jednu visoku točku. Između rubnih ležajeva razapeti su rubni kabeli, a između rubnih ležajeva i visoke točke hrpteni i uvalni kabeli. Osim duljina štapova rubnih zadane su i duljine štapova hrptenih i uvalnih kabela. Mreža ima ukupno 90 kabela.

Kao u prethodnomu primjeru, zadane su duljine štapova određene kao srednje vrijednosti duljina dobivenih u prvom



Slika 6. Mreža s rubnim kabelima: a) i c) zadane gustoće sila; b) i d) zadane vrijednosti sila u unutarnjim kabelima i duljine odsječaka rubnih kabela



Slika 7. Mreža nad osmerokutom: a) i c) zadane gustoće sila; b) i d) zadane vrijednosti sila u unutarnjim kabelima i duljine odsječaka rubnih, hrptenih i uvalnih kabela

Tablica 1. Brojevi koraka u vanjskim i unutarnjim petljama IMGS

		LU	CG		ICG
			$\mathbf{x}_0^{(k)} = 0$	$\mathbf{x}_0^{(k)} = \mathbf{x}_n^{(k-1)}$	
Primjer 1	Vanjska petlja	576	576	576	557
	Unutarnja petlja		78.240	34 489	16.201
Primjer 2	Vanjska petlja	2923	2920	2923	2768
	Unutarnja petlja		634.607	99.143	26.400
Primjer 3	Vanjska petlja	1081	1114	1078	1137
	Unutarnja petlja		740.449	44.176	17.130
Primjer 4	Vanjska petlja	298	299	300	300
	Unutarnja petlja		146.527	20.982	6793

koraku, u kojem su u tim štapovima zadane gustoće sila višestruko veće negoli u ostalim štapovima (slike 7.a i 7.b). (Zadane su duljine 200 štapova, dok su u ostalih 1520 štapova zadane jedinične vrijednosti sila.) Odabrane su točnosti  $\tau_s = 10^{-4}$  i  $\tau_r = 10^{-3}$ .

Mreža ima 832 slobodna čvora, pa treba riješiti tri sustava koji sadrže po 832 jednadžbe. U iteracijskim je postupcima točnost rješavanja  $\tau_{eq} = 5 \times 10^{-7}$ . Dobivena je mreža prikazana na slikama 7. b i 7.d, a potrebni su brojevi koraka navedeni u redcima Prim. 4 tablice 1.

## 6. Zaključak

Nalaženje oblika prednapetih konstrukcija od užadi provodi se u nizu pokušaja u kojima projektant pokušava zadovoljiti niz estetskih, funkcionalnih i konstrukcijskih zahtjeva.

Opisana iteracijska primjena metode gustoća sila omogućava postizanje zadanih vrijednosti sila u štapovima ili zadanih duljina odabranih štapova. No, iteracijski postupak može

biti dugotrajan. Vjerujemo da će predloženi način smanjenja trajanja proračuna omogućiti uklapanje iteracijske primjene metode gustoća sila u interaktivno programsko okruženje za nalaženje oblika u kojem projektant može mijenjati rubne uvjete i vrijednosti sila u kabelima te označiti kabele čiji odsječci ne smiju mijenjati duljine.

Opsežni numerički eksperimenti pokazuju da je predloženi postupak gotovo uvijek učinkovit i stabilan, iako u nekim slučajevima učinkovitost izrazito ovisi o konstantama u predloženoj pravilu koje sprečava prebrzo povećavanje točnosti, održavajući je istodobno dovoljno velikom da se konvergencija ne naruši. To pravilo nije jedino moguće, pa se tu otvaraju vrata daljnjim istraživanjima.

## Zahvala

Rad je financirala Hrvatska zaklada za znanost projektom IP-2014-09-2899. Romana Vrančić, mag. ing. aedif., izradila je slike 1. i 2.

## LITERATURA

- [1] Dvornik, J., Lazarević, D.: Prednapregnute gipke konstrukcije od užadi i tkanine, *GRAĐEVINAR*, 47 (1995) 4, pp. 185-199.
- [2] Dvornik, J., Lazarević, D.: Viseće konstrukcije od platna i užadi, Građevni godišnjak '97, HDGI, Zagreb, 1997., pp. 239-297.
- [3] Schek, H.J.: The force density method for form finding and computation of computation of general networks, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3 (1974) 1, pp. 115-134.
- [4] Linkwitz, K.: Formfinding by the direct Approach" and pertinent strategies for the conceptual design of prestressed and hanging structures, *International Journal of Space Structures*, 14 (1999) 2, pp. 73-87.
- [5] Linkwitz, K.: About formfinding of double-curved structures, *Engineering Structures*, 21 (1999) 8, pp. 709-718.
- [6] Malerba, P.G., Patelli, M., Quagliaroli, M.: An extended force density method for the form finding of cable systems with new forms, *Structural Engineering and Mechanics*, 42 (2012) 2, pp. 191-200.
- [7] Aboul-Nasr, G., Mourad, S.A.: An extended force density method for form finding of constrained cable nets, *Case Studies in Structural Engineering*, 3 (2015), pp. 19-32, <https://doi.org/10.1016/j.csse.2015.02.001>
- [8] Fresl, K., Gidak, P., Vrančić, R.: Poopćene minimalne mreže u oblikovanju konstrukcija od užadi, *GRAĐEVINAR*, 65 (2013) 8, pp. 707-720.
- [9] Šamec, E., Fresl, K., Baniček, M.: Iterative application of the force density method, 40<sup>th</sup> Solid Mechanics Conference, PO45, Warszawa, 2016., <http://solmech2016.ippt.pan.pl/Abstracts/0045.pdf>, pristupljeno 7. 6. 2017.

- [10] Haber, R.B., Abel, J.F.: Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes. Part I – Formulations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 30 (1982) 3, pp. 263–284.
- [11] Veenendaal, D., Block, P.: An overview and comparison of structural form finding methods for general networks, *International Journal of Solids and Structures*, 49 (2012) 26, pp. 3741–3753.
- [12] Enrique, L., Block, P., Schwartz, J.: Form-finding Method for Prestressed Cable Networks Using Graphic Statics, *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2015, Amsterdam, 2015.*, na CD-u: IASS2015-524506.pdf.
- [13] Maurin, M., Motro, R.: Investigation of minimal forms with conjugate gradient method, *International Journal of Solids and Structures*, 38 (2001) 14, pp. 2387–2399.
- [14] Dvornik, J., Lazarević, D.: Fractals and formfinding - magic with real numbers, *Engineering Modelling*, 16 (2003) 1–2, pp. 1–11.
- [15] Dvornik, J., Lazarević, D., Fresl, K.: The Fractal Nature of the Form Finding Equations, *Computational mechanics in the UK – 11<sup>th</sup> Annual Conference of the Association for Computational Mechanics in Engineering (United Kingdom), Glasgow, 2003.*, pp. 201–204.
- [16] Golub, G.H., Van Loan, C.F.: *Matrix Computations*, Second Edition, The John Hopkins University Press, Baltimore, 1989.
- [17] Duff, I.S., Erisman, A.M., Reid, J.K.: *Direct Methods for Sparse Matrices*, Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [18] Kelley, C.T.: *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1995, <https://doi.org/10.1137/1.9781611970944>
- [19] Dembo, R.S., Eisenstat, S.C., Steihaug, T.: Inexact Newton methods, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19 (1982) 2, pp. 400–408.
- [20] Eisenstat, S.C., Walker, H.F.: Choosing the Forcing Terms in an Inexact Newton Method, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 17 (1996) 1, pp. 16–32.
- [21] SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 7.6), The Sage Developers, 2016, <http://www.sagemath.org>.
- [22] Jones, E., Oliphant, T., Peterson, P. et al.: *SciPy: Open source scientific tools for Python*, 2001, <http://www.scipy.org/>, pristupljeno 7. 6. 2017.