

# Oscilacije kabela uslijed indirektne pobude

---

**Demšić, Marija; Raduka, Verica**

*Source / Izvornik:* **Građevinar, 2015, 67, 829 - 841**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

<https://doi.org/10.14256/JCE.1311.2015>

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:727475>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-30**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)



Primljen / Received: 31.3.2015.

Ispravljen / Corrected: 9.7.2015.

Prihvaćen / Accepted: 12.9.2015.

Dostupno online / Available online: 10.10.2015.

# Oscilacije kabela uslijed indirektne pobude

## Autori:



**Marija Demšić**, dipl.ing.građ.

Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet  
mnikolic@grad.hr



Doc.dr.sc. **Verica Raduka**, dipl.ing.građ.

Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet  
verar@grad.hr

Izvorni znanstveni rad

**Marija Demšić, Verica Raduka**

## Oscilacije kabela uslijed indirektne pobude

U radu je formuliran analitički model oscilacija kabela za nehomogene rubne uvjete pri čemu su uzete u obzir kvadratne i kubne nelinearnosti sustava. Oblikovan je reducirani sustav koji je riješen numeričkom integracijom, te za slučaj prisilnih i parametarskih oscilacija perturbacijskom metodom višestrukih skala. Dobivena rješenja uspoređena su s rješenjima numeričkog modela pri čemu je korištena metoda konačnih diferencija i algoritam prediktor-korektor za vremensku integraciju sustava jednadžbi.

### Ključne riječi:

kabeli, nelinearne oscilacije, metoda višestrukih skala

Original scientific paper

**Marija Demšić, Verica Raduka**

## Cable oscillations due indirect excitation

An analytical cable oscillation model is formulated for inhomogeneous boundary conditions taking into account quadratic and cubic nonlinearities of the system. The reduced system is solved by numerical integration and, for the case of external and parametric oscillations, by the multiple scales perturbation method. The comparison of solutions with numerical model results is based on the finite difference model and the predictor-corrector algorithm for time integration of equation systems.

### Key words:

cables, nonlinear oscillations, method of multiple scales

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

**Marija Demšić, Verica Raduka**

## Durch indirekte Anregung bewirkte Kabelschwingungen

In dieser Arbeit wird ein analytisches Model zur Beschreibung von Kabelschwingungen bei nicht homogenen Randbedingungen unter Berücksichtigung quadratischer und kubischer Nichtlinearitäten aufgestellt. Ein reduziertes System wurde aufgestellt und durch numerische Integration gelöst, sowie für den Fall erzwungener und parametrischer Schwingungen mittels der Multi-Skalen-Methode betrachtet. Die Ergebnisse sind den auf einem numerischen Modell beruhenden Resultaten gegenübergestellt, wobei die Finite-Differenzen-Methode und der Prädiktor-Korrektor-Algorithmus zur Zeitintegration des Gleichungssystems angewandt wurden.

### Schlüsselwörter:

Kabel, nichtlineare Schwingungen, Methode mehrfacher Skalen

## 1. Uvod

Zbog vrlo učinkovitog prijenosa opterećenja, kabeli velikih raspona česti su nosivi elementi mnogih suvremenih konstrukcija (ovješeni mostovi, prednapete mreže kabela, jarboli, podvodni kabeli naftnih platformi i sl.). Osim u građevinarstvu, kabeli imaju vrlo raširenu primjenu i u drugim granama inženjerstva kao što je promet, strojarstvo i elektrotehnika (dalekovodi, žičare, užad za brodove itd.). Prijenos opterećenja u kabelima provodi se vlačnim silama uz promjenu geometrije, odnosno oblika kabela, te im je stoga odziv izrazito nelinearan. Dok se ponašanja pri statičkim djelovanjima mogu vrlo dobro odrediti fizikalnim modelima i numeričkom analizom, utjecaje dinamičkih djelovanja mnogo je teže predvidjeti. Vrlo lagana i fleksibilna struktura s jako malim unutarnjim prigušenjem čini kabele vrlo osjetljivima na dinamička djelovanja, te su stoga podložni oscilacijama s visokom amplitudama. Zbog toga može doći do gubitka uporabivosti ili ozbiljnih oštećenja na osloncima (sidrima) i na samim kabelima [1]. Osnovne dinamičke karakteristike kabela prije svega ovise o inicijalnom obliku u položaju statičke ravnoteže, sili prednapona i rasponu. Ovisno o statičkom profilu razlikujemo kabele plitkog i dubokog provjesa, odnosno parabolične kabele i lančanice. Za parabolične kabele postoje analitička rješenja frekvencija i oblika oscilacija, jer je za njih kontinuirana formulacija značajno pojednostavljena paraboličnom aproksimacijom, dok se za kabele dubljeg profila primjenjuju diskretne formulacije i numeričke metode [2].

Osnove dinamike kabela paraboličnog profila, kojem je gibanje popraćeno rastezanjem i neelastičnim promjenama u zakrivljenosti, objasnili su Irvine i Caughey 1974. [3, 4]. Oni su definirali spektar frekvencija i točke prijelaza frekvencija tako da su elastične i geometrijske utjecaje objedinili tzv. parametrom kabela  $\lambda^2 = L(mgL\cos\varphi/H\sec\varphi)^2/(H\sec\varphi L_e/EA)$ , koji se naziva i Irvinov parametar. Uvođenjem geometrijskog parametra  $\nu = d/L = mgL/(8H\sec^2\varphi)$  (omjer strelice i raspona  $L$ ) i parametra elastičnosti kabela  $\eta = AE/(H\sec\varphi)$  može se jednostavnije napisati  $\lambda^2 = 64\nu^2\eta L_e/L_e$ . Za kabele koji imaju vrlo mali omjer težine i sile prednapona veličina  $L_e = L(1+8\nu^2)$  vrlo malo se razlikuje od raspona  $L$ . Općenito, na vrijednost Irvinovog

parametra  $\lambda^2$  geometrija kabela ima veći utjecaj od rastezanja. Budući da omjer strelice i raspona mora biti 1/8 ili manji, kako se ne bi narušila parabolična pretpostavka statičkog profila, veće vrijednosti parametra odnose se na materijale koji imaju velik modul elastičnosti. Većina kabela u tehničkoj primjeni ima vrlo male vrijednosti parametara  $\lambda^2$ . Parametar  $\lambda^2$  značajno utječe na frekvenciju simetričnih oblika oscilacija paraboličnih kabela kojima je bezdimenzijska vrijednost frekvencije  $\bar{\omega}$  definirana transcendentnom jednadžbom [4]:

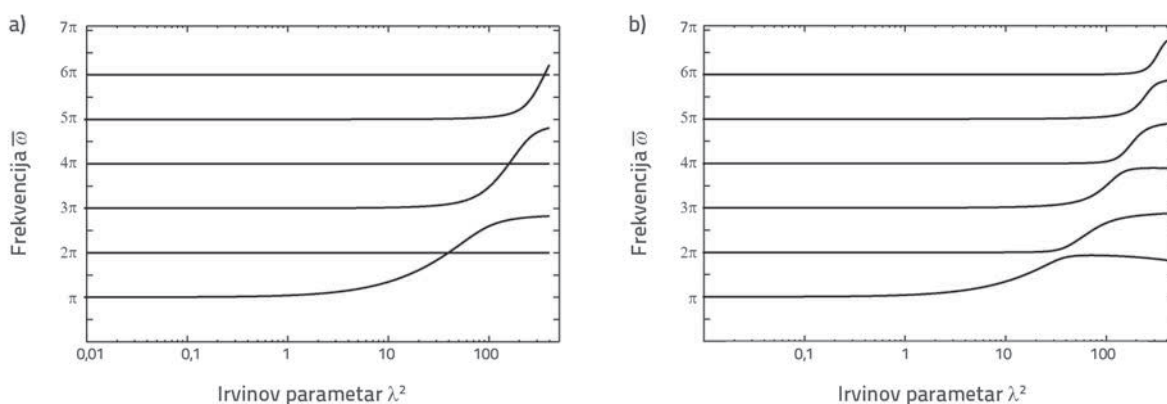
$$\frac{\bar{\omega}}{2} - \tan\left(\frac{\bar{\omega}}{2}\right) = \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\bar{\omega}}{2}\right)^3 \quad (1)$$

Za vrijednosti  $\lambda^2 < 4\pi^2$ , funkcija prvog simetričnog oblika oscilacija nema unutarnjih nul-točaka, dok za vrijednosti  $\lambda^2 > 4\pi^2$  prvi simetrični oblik oscilacija ima dvije unutarnje nul-točke i frekvenciju veću od frekvencije antisimetričnog oblika. Promjena vrijednosti frekvencije simetričnih oblika oscilacija može se vidjeti na slici 1.a, kao i to da se prijelaz frekvencija simetričnih oblika oscilacija analogno događa i u višim oblicima oscilacija. Vrijednosti frekvencija antisimetričnih oblika ne ovise o parametru  $\lambda^2$ , a njihova bezdimenzijska vrijednost je:

$$\bar{\omega} = 2n\pi, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2)$$

Kasnija istraživanja analitičkih modela kosih kabela pokazala su da u blizini točaka prijelaza ne dolazi do zamjene oblika, nego dolazi do mimoilaženja frekvencija, što se može vidjeti na slici 1.b [5, 6]. Kod kosih kabela kojima je omjer težine i sile prednapona manji, veći je utjecaj nesimetrije inicijalnog oblika, što je posebno primjetno u području približavanja frekvencija. U tom području dolazi do formiranja tzv. hibridnih oblika, što je potvrđeno eksperimentalnim i numeričkim istraživanjima [7]. Nakon dodatnog povećanja parametra  $\lambda^2$ , frekvencije se ponovno odvoje, ali do prijelaza nikada ne dolazi. Izvan područja približavanja frekvencija oblici nisu "potpuno" simetrični i antisimetrični, iako su im vrlo slični.

Parcijalne diferencijalne jednadžbe gibanja kabela uključuju kvadratne i kubne nelinearnosti koje su rezultat zakrivljenosti i rastezanja kabela. Rješenja jednadžbi mogu se odrediti



Slika 1. Spektar frekvencija kabela: a) horizontalni / jako prednapeti kabeli; b) kosi kabeli

približnim numeričkim ili približnim analitičkim metodama. U analitičkoj analizi obično se pretpostavlja separacija funkcije pomaka u obliku  $w(x,t) = \sum q_n(t) \phi_n(x)$ , pri čemu se polje pomaka unaprijed pretpostavlja s takozvanim koordinatnim funkcijama  $\phi_n(x)$  (eng. *trial functions*), te se primjenjuje metoda težinskog reziduala. Na taj način osnovna diferencijalna jednadžba i rubni uvjeti reduciraju se na sustav običnih diferencijalnih jednadžbi vremenski nezavisne funkcije  $q_n(t)$ . Jedna od čestih implementacija metode težinskog reziduala za analizu dinamike kabela je Galerkinova metoda. Pri odabiru težinskih funkcija mora biti zadovoljen osnovni kriterij da pripadaju potpunom skupu funkcija, pa se stoga obično odabiru linearni oblici oscilacija. Tako oblikovana matematička formulacija gibanja kabela u dinamičkim nelinearnim sustava odgovara Helmholtz-Duffingovom oscilatoru [2]. Funkcije  $q_n(t)$  mogu se odrediti nekom od numeričkih metoda ili se mogu primijeniti perturbacijski postupci. Perturbacijski postupci kao što su metode Poincare-Lindstedt, Krylov-Bogoliubov-Mitropolskii, metoda višestrukih skala ili mjera (eng. *Method of Multiple Scales - MMS*), omogućavaju određivanje asimptotskih rješenja u određenom području vrijednosti parametara uz analitičku formulaciju rezultata. Analitičko rješenje može se odrediti i tzv. metodom ravnoteže harmonika (eng. *Harmonic Balance Method - HBM*), pri čemu se funkcija  $q_n(t)$  prikazuje superpozicijom harmonijskih funkcija s nepoznatim koeficijentima. Osim što ovisi o geometrijskim nelinearnostima, dinamički odziv u određenom području parametara ovisi i o početnim uvjetima. Područje parametara za koje su moguća višestruka realna rješenja odziva naziva se histerezo područje odziva. Unutar histereznog područja može doći do naglih promjena u dinamičkoj ravnoteži - tzv. skokova, uslijed čega dolazi do povećanja ili smanjenja amplitude oscilacija [14].

Dinamičko opterećenje na kabel može djelovati direktno ili indirektno zbog nehomogenih rubnih uvjeta, odnosno gibanja drugih dijelova konstrukcije. Djelovanje uporabnog opterećenja, vjetrova ili potresa na ovješeni most izazvat će vrlo male učestale pomake na spojnim mjestima kabela s kolničkom konstrukcijom, odnosno pilonom. Iako se u stručnoj i znanstvenoj literaturi ovaj oblik dinamičkog opterećenja vrlo često naziva parametarska pobuda, primjerenije je govoriti o indirektnoj pobudi budući da pomaci na osloncima mogu generirati prisilnu i/ili parametarsku pobudu kabela.

Prisilne oscilacije vrlo često se i kod analize kabela tretiraju kao linearan fenomen, iako zbog vrlo malog prigušenja tako određene amplitude oscilacija mogu imati vrlo velike vrijednosti. Pojednostavljenim analitičkim modelima u kojima su kabeli aproksimirani modelom napete žice (samo kubne nelinearnosti), i modelima formuliranim pomoću konačnih elementa, pokazano je da pri vrlo malim prigušenjima vrlo brzo dolazi do aktiviranja nelinearnosti koje značajno ograničavaju veličinu amplitude oscilacija [8].

Fenomen parametarskih oscilacija danas je sve više poznat u inženjerskoj praksi, pa se stoga u preporukama za projektiranje daju osnovne smjernice za određivanje područja parametarske

rezonancije i veličinu amplituda kabela velikih raspona (npr. vješaljke mostova [1]). Općenito, do parametarskih oscilacija dolazi ako neki parametar sustava, npr. krutost, mijenja svoju vrijednost tijekom oscilacija, te se pobuda u diferencijalnoj jednadžbi gibanja javlja kao koeficijent nepoznate funkcije [14]. Parametarske oscilacije kabela nastaju zbog promjene uzdužne sile koja je posljedica uzdužnih pomaka oslonaca [1]. U radu [9] određeni su analitički izrazi za veličinu amplituda parametarskih oscilacija uslijed uzdužnih pomaka oslonaca. Primijenjen je HBM postupak na reduciranom modelu u kojem je zanemarena zakrivljenost kabela, te su rezultati pokazali dobro slaganje s numeričkim modelima. Utjecaj vertikalnog pomaka na parametarsku i prisilnu rezonanciju u [10] analiziran je na nelinearnim modelima vertikalnog i horizontalnog kabela, te su numerički određeni odzivi kosih kabela. U radu [11] primijenjen HBM izvedeni su analitički izrazi za područja prisilne rezonancije drugog oblika uslijed poprečnih pomaka na osloncu, i za područje parametarske rezonancije koju uzrokuju uzdužni pomaci oslonca. U matematičkom modelu također je zanemaren utjecaj inicijalnog oblika, a time i utjecaj kvadratnih nelinearnosti. Iako su numerička istraživanja na modelima konačnih elemenata pokazala da i uzdužna komponenta gibanja oslonca uzrokuje primarnu rezonanciju [10], to nije obuhvaćeno analitičkim formulacijama u navedenim istraživanjima.

U ovom radu matematički model oscilacija kabela s kvadratnim i kubnim nelinearnostima reduciran je na konačan broj koordinata Galerkinovom metodom. Perturbacijskim MMS postupkom određeno je asimptotsko rješenje sustava s jednim stupnjem slobode, izvedeni su analitički izrazi za rezonancijska područja i amplitude oscilacija, te je provedena lokalna analiza stabilnosti ravnotežnih stanja. Jednadžba reduciranog sustava riješena je i direktnom numeričkom integracijom u programu Wolfram *Mathematica*. Kako bi se provjerila točnost formulacije dinamičkog opterećenja od poprečnog gibanja oslonca i kontrola redukcije s unaprijed pretpostavljenim oblikom oscilacija, oblikovan je numerički model s diskretizacijom konačnim diferencijama. Za vremensku integraciju tako formiranog sustava običnih diferencijalnih jednadžbi implementiran je algoritam prediktor-korektor u programu Wolfram *Mathematica*.

## 2. Jednadžbe gibanja

Kabel se modelira kao jednodimenzionalan linearnoelastičan kontinuum bez fleksijske, torzijske i poprečne krutosti. Uzimajući u obzir paraboličnu pretpostavku jako prednapetog kabela, slijedi da je  $ds \approx dx$  te se profil kabela prikazanog na slici 2.a u položaju statičke ravnoteže može aproksimirati funkcijom:

$$z(x) = \frac{mgL^2}{2H \sec^2 \varphi} \left( \frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \right) \quad (3)$$

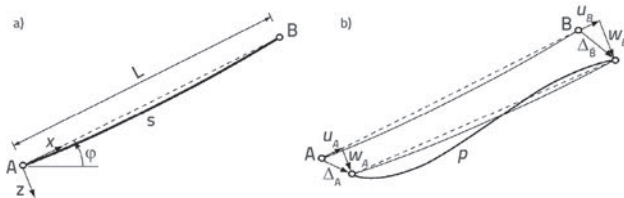
u kojoj je  $L$  raspon kabela,  $m$  masa po jedinici duljine,  $\varphi$  nagib kabela prema horizontalnoj osi, a  $H$  horizontalna komponenta sile [4].

Dinamički položaj kabela odredit će se superpozicijom gibanja krutog statičkog profila kabela i relativnog gibanja uslijed deformacije kabela. Za određivanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi gibanja kabela prikazanog na slici 2.b primijenjen je princip virtualnih pomaka. Koristit će se uobičajene oznake za parcijalne derivacije funkcija po prostornoj i vremenskoj koordinati, odnosno  $P = \partial f(x,t)/\partial x$  i  $\dot{f} = \partial f(x,t)/\partial t$ . Rad unutarnjih elastičnih sila na virtualnim pomacima jednak je potencijalnoj energiji deformacije kabela, a prirast energije deformacije uzima se samo od rastezanja kabela:

$$\delta U = \int_0^L EA \bar{\varepsilon} \delta \bar{\varepsilon} dx \tag{4}$$

U navedenom izrazu  $EA\bar{\varepsilon}$  je elastična sila diferencijalnog segmenta prema Hookovom zakonu, a  $\bar{\varepsilon}$  ukupna deformacija u položaju dinamičke ravnoteže  $p$ :

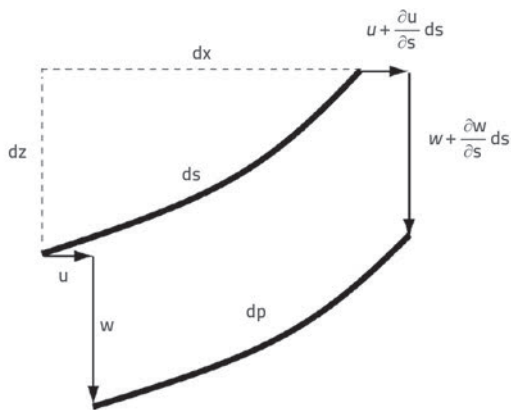
$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_s + \frac{dp - ds}{ds} = \varepsilon_s + \left( (1+u')^2 + (z'+w')^2 \right)^{1/2} - 1 \tag{5}$$



Slika 2. Model kabela: a) statički položaj; b) dinamički položaj

gdje su  $\varepsilon_s$  statička deformacija,  $u(x,t)$  uzdužna i  $w(x,t)$  poprečna komponenta relativnog pomaka kabela (slika 3.). Slijedi da je prirast ukupne deformacije:

$$\delta \bar{\varepsilon} = \frac{(1+u')\delta u' + (z'+w')\delta w'}{\left( (1+u')^2 + (z'+w')^2 \right)^{1/2}} \tag{6}$$



Slika 3. Diferencijalni segment kabela u lokalnom koordinatnom sustavu

Uz pretpostavku da su uzdužni pomaci i statička deformacija kabela u odnosu na poprečne pomake vrlo mali, te su njihovi utjecaji višeg reda zanemareni, virtualni rad unutarnjih sila je:

$$\delta U = -\int_0^L \left[ EA\varepsilon_s + EA(u' + z'w' + \frac{1}{2}w'^2) \right] \delta u dx - \int_0^L \left[ EA\varepsilon_s z' + EA\varepsilon_s w' + EA(z' + w')(u' + z'w' + \frac{1}{2}w'^2) \right] \delta w dx \tag{7}$$

Virtualni rad sila težine je:

$$\delta W_G = \int_0^L (-mg \sin \varphi \delta u + mg \cos \varphi \delta w) dx \tag{8}$$

Virtualni rad sila inercije je:

$$\delta W_I = -\int_0^L (m\ddot{u}_o \delta u + m\ddot{w}_o \delta w) dx - \int_0^L (m\ddot{u} \delta u + m\ddot{w} \delta w) dx \tag{9}$$

Funkcije  $\ddot{u}_o(x,t)$  i  $\ddot{w}_o(x,t)$  predstavljaju doprinos ukupnom ubrzanju od gibanja apsolutno krutog tijela, a  $\ddot{u}(x,t)$  i  $\ddot{w}(x,t)$  komponente su ubrzanja relativnog gibanja. Uz pretpostavku viskozno prigušenja, rad sila prigušenja je:

$$\delta W_P = -\int_0^L (c\dot{u} \delta u + c\dot{w} \delta w) dx \tag{10}$$

Prema principu virtualnih pomaka ukupni rad svih sila mora iščezavati:

$$\delta \Pi = \delta U - (\delta W_G + \delta W_I + \delta W_P) \tag{11}$$

Nakon uvrštavanja izraza (7), (8), (9), (10) u (11), uzimajući u obzir uvjet statičke ravnoteže, razdvajanje jednadžbi po komponentama pomaka, i uz statičku vrijednost sile  $EA\varepsilon_s \approx H \sec \varphi$ , dolazimo do Eulerovih jednadžbi gibanja:

$$\left[ EA(u' + z'w' + \frac{1}{2}w'^2) \right]' = m\ddot{u}_o + m\ddot{u} + c\dot{u} \tag{12}$$

$$\left[ H \sec \varphi w' + EA(z' + w')(u' + z'w' + \frac{1}{2}w'^2) \right]' = m\ddot{w}_o + m\ddot{w} + c\dot{w} \tag{13}$$

Uvođenjem sljedećih supstitucija, pri čemu je  $\xi$  koeficijent relativnog prigušenja, a  $\bar{\omega}$  bezdimenzijska kružna frekvencija linearnog oblika oscilacija:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{L}, \quad \bar{w} = \frac{w}{L}, \quad \bar{u} = \frac{u}{L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{L}, \quad \bar{w}_o = \frac{w_o}{L}, \quad \bar{u}_o = \frac{u_o}{L}, \\ \bar{t} &= \frac{t}{L} \sqrt{\frac{H \sec \varphi}{m}}, \quad \omega = \frac{\bar{\omega}}{L} \sqrt{\frac{H \sec \varphi}{m}}, \\ \eta &= \frac{AE}{H \sec \varphi}, \quad \mu = \xi \bar{\omega}, \quad \nu = \frac{mgL}{8H \sec^2 \varphi}, \end{aligned}$$

parcijalne diferencijalne jednadžbe (12) i (13) i jednadžba (3) prevedene su u bezdimenzijski oblik:

$$\left[ \eta(\bar{u}' + \bar{z}'\bar{w}' + \frac{1}{2}\bar{w}'^2) \right]' = \bar{\ddot{u}}_o + \bar{\ddot{u}} + 2\mu\bar{\dot{u}}, \tag{14}$$

$$\left[ \bar{w}' + \eta(\bar{z}' + \bar{w}')(\bar{u}' + \bar{z}'\bar{w}' + \frac{1}{2}\bar{w}'^2) \right]' = \bar{\ddot{w}}_o + \bar{\ddot{w}} + 2\mu\bar{\dot{w}} \tag{15}$$

$$\bar{z}(\bar{x}) = 4\nu(\bar{x} - \bar{x}^2) \tag{16}$$

Radi jednostavnosti izraza, u nastavku analize zanemarit će se oznake "~" i "-".

U čeličnim prednapetim kabelima brzina širenja uzdužnih valova puno je veća od brzine poprečnih valova, iz čega slijedi da se gibanje u uzdužnom smjeru odvija praktički trenutačno ili kvazistatički [1, 2]. Ovo je uobičajena pretpostavka u dinamičkoj analizi paraboličnih kabela na temelju koje se zanemaruje inercija u uzdužnom smjeru, te se uzdužni pomaci određeni jednadžbom (14) mogu kondenzirati. Pretpostavka da rastezanje ovisi samo o trenutačnom položaju u skladu je i s paraboličnom aproksimacijom početne geometrije. Pretpostavka kvazistatičkog rastezanja prestaje vrijediti ako se dinamičkim djelovanjem pobuđuju elastični oblici oscilacija koji ujedno imaju i značajne veličine uzdužnih pomaka. Stoga, prema pretpostavci kvazistatičkog rastezanja kabela, u jednadžbi (14) možemo zanemariti inerciju i prigušenje:

$$\left[ \eta \left( u' + z'w' + \frac{1}{2}w'^2 \right) \right]' = 0 \quad (17)$$

Jednadžba (17) može se direktno integrirati, pa slijedi da je:

$$u' + z'w' + \frac{1}{2}w'^2 = e \quad (18)$$

Prema tome, rastezanje kabela  $e = e(t)$  samo je funkcija vremena. Sada jednadžba gibanja u poprečnom smjeru glasi:

$$\left[ w' + \eta (z' + w')e \right]' = \ddot{w}_o + \ddot{w} + 2\mu\dot{w} \quad (19)$$

## 2.1. Formulacija jednadžbi za indirektnu dinamičku pobudu

Funkcija pomaka oslonaca harmonijska je funkcija s frekvencijom  $\Omega$  i amplitudama  $\Delta_A$  i  $\Delta_B$ . Pretpostavljaju se vrlo male veličine amplituda koje će za odgovarajuće frekvencije prouzročiti značajne amplitude odziva kabela. Zbog pretpostavke da se neće pobuditi elastični oblici oscilacija, zanemareni su svi inercijalni utjecaji u uzdužnom smjeru. Uzdužnim pomacima oslonaca generira se dodatno rastezanje kabela koje će se uzeti u obzir. Rubni uvjeti u uzdužnom smjeru su:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u_A \cos \Omega t \\ u(1,t) &= u_B \cos \Omega t \end{aligned} \quad (20)$$

Uzimajući u obzir te rubne uvjete, integriramo izraz (18) pa slijedi da je rastezanje određeno jednadžbom

$$e = (u_B - u_A) \cos \Omega t + \int_0^1 \left( z'w' + \frac{1}{2}w'^2 \right) dx \quad (21)$$

Zbog vrlo malih veličina provjesa prednapetih kabela, može se pretpostaviti da je funkcija distribucije poprečnog ubrzanja  $\ddot{w}_o(x,t)$  po duljini kabela linearna, te slijedi da je

$$\ddot{w}_o(x,t) = -(1-x)\Omega^2 w_A \cos \Omega t - x\Omega^2 w_B \cos \Omega t \quad (22)$$

Radi pojednostavljenja izraza, pretpostavit će se da je oslonac B nepomičan, odnosno  $\Delta_B = 0$ , a amplituda pomaka oslonca

A ( $\Delta_A = \Delta$ ) rastavit će se na uzdužnu  $u_A = \Delta_u$  i poprečnu  $w_A = \Delta_p$  komponentu. Nakon uvedenih uvjeta pomaka oslonaca jednadžba poprečnih oscilacija (19) glasi:

$$\begin{aligned} w'' + \eta (z'' + w'') \left( -\Delta_u \cos \Omega t + \int_0^1 \left( z'w' + \frac{1}{2}w'^2 \right) dx \right) = \\ = \ddot{w} + 2\mu\dot{w} - (1-x)\Omega^2 \Delta_p \cos \Omega t \end{aligned} \quad (23)$$

U izrazu (23) može se uočiti da će uzdužno gibanje oslonca u ravnini generirati parametarsku i prisilnu pobudu poprečnih oscilacija kabela. Generiranje prisilne pobude posljedica je zakrivljenosti sustava u ravnotežnom položaju, tako da u graničnom slučaju napete žice, uzdužno gibanje uzrokuje samo parametarske oscilacije kabela. Za razliku od modela napete žice, u ovom modelu nije potreban mali početni poremećaj da bi došlo do parametarskih oscilacija. Poprečno gibanje oslonca uzrokuje samo prisilnu dinamičku pobudu.

## 3. Analitički model

U analitičkom modelu primijenjena je Galerkinova metoda za redukciju sustava. Jednostavni reducirani modeli s jednom diskretnom koordinatom vrlo su pogodni za određivanje rješenja kojim se iskazuju osnovna dinamička svojstva nelinearnog problema [2]. Funkcija  $w(x,t)$  napisat će se u sljedećem obliku

$$w(x,t) = \sum_n q_n(t) \phi_n(x) \quad (24)$$

gdje je  $\phi_n(x)$  funkcija  $n$ -tog linearnog oblika poprečnih oscilacija [4], uz normiranje maksimalnom amplitudom

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\omega_n x}{2}\right) \left(1 - \tan\left(\frac{\omega_n}{2}\right) \sin(\omega_n x) - \cos(\omega_n x)\right), & n = 1, 3, 5, \dots \\ \cos\left(\frac{\omega_n x}{2}\right) - 1 \\ \sin(\omega_n x), & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (25)$$

Prva funkcija određuje simetrične, a druga antimetrične oblike oscilacija. Pripadne frekvencije dane su izrazima (1) i (2). Nakon supstitucije izraza (24) u jednadžbu (23), iz uvjeta minimizacije reziduala, slijedi da je jednadžba poprečnih oscilacija:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n + 2\mu\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n + \sum_{i,j} \Lambda_{n_{ij}} q_i q_j + \sum_{i,j,k} \Gamma_{n_{ijk}} q_i q_j q_k - K_n \Delta_u q_n \cos \Omega t = \\ = p_n \Omega^2 \Delta_p \cos \Omega t + h_n \Delta_u \cos \Omega t \end{aligned} \quad (26)$$

Koeficijenti u jednadžbi (26) određeni su sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned} m_n &= \int_0^1 \phi_n^2 dx, \\ \omega_n^2 &= \frac{1}{m_n} \left( \int_0^1 \phi_n'^2 dx + \eta \left( \int_0^1 z' \phi_n' dx \right)^2 \right), \\ \Lambda_{n_{ij}} &= \frac{\eta}{m_n} \left( \frac{1}{2} \int_0^1 \phi_i' \phi_j' dx + \int_0^1 z' \phi_i' dx + \int_0^1 z' \phi_j' dx + \int_0^1 \phi_i' \phi_j' dx \right), \\ \Gamma_{n_{ijk}} &= \frac{\eta}{2m_n} \int_0^1 \phi_i' \phi_j' dx + \int_0^1 \phi_k' \phi_n' dx, \\ K_n &= \frac{\eta}{m_n} \int_0^1 \phi_n'^2 dx, \quad h_n = \frac{8\eta v}{m_n} \int_0^1 \phi_n dx, \quad p_n = \frac{1}{m_n} \int_0^1 (1-x) \phi_n dx. \end{aligned} \quad (27)$$

### 3.1. Asimptotsko rješenje

Opća diferencijalna jednadžba (26) za samo jedan stupanj slobode, uvođenjem oznake kvadratnih nelinearnosti  $\alpha_n$  i kubnih nelinearnosti  $\delta_n$ , može se kompaktnije napisati na sljedeći način:

$$\ddot{q}_n + 2\mu_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n + \alpha_n q_n^2 + \delta_n q_n^3 - K_n q_n \cos \Omega t = P_n \cos \Omega t \quad (28)$$

Koeficijenti amplitude prisilne i parametarske pobude su:

$$\begin{aligned} P_n &= \rho_n \Omega^2 \Delta_p + h_n \Delta_u \\ K_n &= k_n \Delta_u \end{aligned} \quad (29)$$

Za određivanje asimptotskog rješenja jednadžbe (28) primijenit će se MMS postupak. Perturbacijske metode temelje se na formiranju rješenja u obliku razvoja funkcija, u kojem članovi razvoja predstavljaju korekciju osnovnog neperturbiranog rješenja. Razvoj funkcija formira se prema malom perturbacijskom parametru  $\varepsilon$ . Korekcije rješenja određuju se tako da je prva korekcija mala u odnosu na osnovno neperturbirano rješenje, zatim je druga korekcija mala u odnosu na prvu itd. Rangiranje (eng. *ordering*) je osnovno pravilo koje strogo vrijedi pri provedbi perturbacijskog postupka i konstrukciji asimptotskog rješenja [12]. Perturbacijskom hijerarhijom formira se sustav jednadžbi koji je pogodan za sukcesivno rješavanje. Za provedbu postupka potrebno je jednadžbe gibanja napisati u bezdimenzijskom obliku, nakon čega se odabire mali parametar  $\varepsilon$  na temelju kojeg se oblikuje asimptotsko rješenje. Ako se u jednadžbama eksplicitno ne pojavljuje mali parametar koji bi bio pogodan za rangiranje, potrebno je pristupiti postupku modeliranja fizikalnog sustava. Razumijevanje fizikalne prirode nelinearnog problema u postupku modeliranja ključno je za njegovu ispravnu matematičku formulaciju. Rangiranje članova diferencijalne jednadžbe može imati presudan utjecaj na strukturu konačnog asimptotskog rješenja s jasnim konotacijama na točnost i fizikalno značenje [13]. U tom slučaju možemo govoriti o "umjetnom" parametru popularno nazvanog "*bookkeeping parameter*" [14, 15]. Takvim parametrom uvodi se implicitna pretpostavka o utjecaju nelinearnih koeficijenata, prigušenja i pobude u odzivu sustava [13]. Ako u diferencijalnu jednadžbu (28) uvedemo supstituciju  $q = \varepsilon \hat{q}$ , nelinearnosti će generirati članove reda  $O(\varepsilon^3)$ . Kako bismo omogućili da prigušenje, pobuda i nelinearnosti interferiraju na istoj razini perturbacijske hijerarhije, potrebno je skalirati prigušenje na  $\mu_n = \varepsilon^2 \hat{\mu}_n$  i amplitude pobude na  $K_n = \varepsilon^2 \hat{K}_n$  i  $P_n = \varepsilon^3 \hat{P}_n$ . Napomenimo i to da je ovo skaliranje dosljedno notaciji rezonancije [14]. Nakon skaliranja koeficijenata, jednadžba sustava s malim prigušenjem i malim amplitudama pobude ima oblik:

$$\ddot{q}_n + 2\varepsilon^2 \hat{\mu}_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n + \alpha_n q_n^2 + \delta_n q_n^3 - \varepsilon^2 \hat{K}_n q_n \cos \Omega t = \varepsilon^3 \hat{P}_n \cos \Omega t \quad (30)$$

Nakon uvođenja malog parametra  $\varepsilon$  kojim se skaliraju prostorne i vremenske koordinate, rješenje diferencijalne jednadžbe (30) tražit će se u obliku reda funkcija višestrukih varijabli:

$$q_n(t; \varepsilon) = \varepsilon q_{n,1}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 q_{n,2}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 q_{n,3}(T_0, T_1, T_2) \quad (31)$$

Parametrom  $\varepsilon$  dodatno se rangiraju gibanja koja se provode po "brzoj" vremenskoj skali  $T_0 = t$  i gibanja koja se provode po "sporijim" vremenskim skalama  $T_1 = \varepsilon t$ ,  $T_2 = \varepsilon^2 t$  itd. Promjene po višim vremenskim skalama predstavljaju male korekcije odziva sustava nastale uslijed nelinearnosti, prigušenja, prisilne i parametarske pobude. Slijedi da derivacije po nezavisnoj varijabli  $t$  postaju parcijalne derivacije varijabli  $T_i$ :

$$\frac{d}{dt} = \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots$$

Pretpostavljeni oblik rješenja (31) uvrštavamo u jednadžbu (30) i zadržavamo samo članove do  $\varepsilon^3$ , te zatim izjednačavamo članove izraza za iste potencije parametra  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon^1: D_0^2 q_{n,1} + \omega_n^2 q_{n,1} = 0 \quad (32a)$$

$$\varepsilon^2: D_0^2 q_{n,2} + \omega_n^2 q_{n,2} = -2D_0 D_1 q_{n,1} - \alpha_n q_{n,1}^2 \quad (32b)$$

$$\varepsilon^3: D_0^2 q_{n,3} + \omega_n^2 q_{n,3} = \hat{P}_n \cos(\Omega T_0) + \hat{K}_n q_{n,1} \cos \Omega t - 2\hat{\mu}_n D_0 q_{n,1} - 2D_0 D_1 q_{n,2} - D_1^2 q_{n,1} - 2D_0 D_2 q_{n,1} - 2\alpha_n q_{n,1} q_{n,2} - \delta_n q_{n,1}^3 \quad (32c)$$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe (32a) napisat će se na sljedeći način:

$$q_{n,1} = A_n(T_1, T_2) e^{i\omega_n T_0} + \bar{A}_n(T_1, T_2) e^{-i\omega_n T_0} \quad (33)$$

gdje je  $A$  nepoznata kompleksna funkcija i  $\bar{A}$  njen kompleksno konjugirani par. Funkcije  $A_n(T_1, T_2)$  i  $\bar{A}_n(T_1, T_2)$  određuju se iz uvjeta da rješenja  $q_{n,2}$  i  $q_{n,3}$  moraju biti periodične funkcije varijable  $T_0$ . Nakon uvrštavanja rješenja (33) u jednadžbu (32b) dobiva se:

$$D_0^2 q_{n,2} + \omega_n^2 q_{n,2} = -2i \omega_n D_1 A_n e^{i\omega_n T_0} - \alpha_n A_n^2 e^{i2\omega_n T_0} - 2\alpha_n A_n \bar{A}_n + c.c. \quad (34)$$

gdje  $c.c.$  predstavlja kompleksno konjugirane parove. Članovi koji sadrže faktor  $e^{i\omega_n T_0}$ , odnosno  $e^{-i\omega_n T_0}$ , nazivaju se sekularni članovi. Zbog postojanja sekularnih članova, pretpostavljeno rješenje (31) ne može biti periodično, odnosno amplituda nakon određenog vremena postaje beskonačno velika. Prihvaćanje perturbacijske hijerarhije, prema kojoj rješenje  $q_{n,2}$  predstavlja malu korekciju prvog rješenja, nalaže eliminaciju sekularnih članova. Prema tome, koeficijenti sekularnih članova u jednadžbi (34) moraju iščezavati:

$$-2i \omega_n D_1 A_n = 0$$

odnosno:

$$D_1 A_n = 0 \quad (35)$$

Slijedi da funkcija  $A_n$  ne ovisi o varijabli  $T_1$ , odnosno  $A_n = A_n(T_2)$ . Analogno slijedi i za kompleksno konjugirani par,  $\bar{A}_n = \bar{A}_n(T_2)$ . Nakon

eliminacije sekularnih članova, partikularno rješenje jednadžbe drugog reda je:

$$q_{n,2} = \frac{\alpha_n}{3\omega_n^2} A_n^2 e^{i2\omega_n T_0} - \frac{2\alpha_n}{\omega_n^2} A_n \bar{A}_n + c.c. \quad (36)$$

Budući da rezonancija ovisi o blizini frekvencije sustava  $\omega_n$  i frekvencije pobude  $\Omega$ , uvodi se parametar  $\sigma_n$  koji ih kvantitativno povezuje. Parametar blizine frekvencija uvodi se kako bismo jednostavnije prepoznali sekularne članove u jednadžbi trećeg reda. Prislina ili primarna rezonancija javlja se kad je frekvencija pobude jednaka nekoj od vlastitih frekvencija sustava, dok se primarna parametarska rezonancija javlja ako je frekvencija pobude jednaka dvostrukoj vrijednosti frekvencije sustava. Prema tome, ovisno o frekvenciji pobude razmatramo dva slučaja rezonancije.

### 3.1.1. Rezonancija prisilnih oscilacija $\Omega \approx \omega_n$

Na trećoj razini perturbacijske hijerarhije analiziraju se promjene po vremenskoj skali  $T_2 = \varepsilon^2 t$  te, radi dosljednosti, skaliramo parametar  $\sigma_n$  kojim je definirana razlika frekvencije pobude i frekvencije kabela:

$$\Omega = \omega_n + \varepsilon^2 \sigma_n \quad (37)$$

Izraz (37) te rješenja (33) i (36) uvrštavamo u jednadžbu trećeg reda (32c) i zajedno s uvjetom (35) dobiva se:

$$\begin{aligned} D_0^2 q_{n,3} + \omega_n^2 q_{n,3} &= \frac{1}{2} \hat{P}_n e^{i\omega_n T_0 + i\sigma_n T_2} + \frac{1}{2} \hat{K}_n \bar{A}_n e^{i\sigma_n T_2} + \frac{1}{2} \hat{K}_n A_n e^{i2\omega_n T_0 + i\sigma_n T_2} \\ -2i \hat{\mu}_n \omega_n A_n e^{i\omega_n T_0} &- \frac{2\alpha_n^2 A_n^3}{3\omega_n^2} e^{i3\omega_n T_0} + \frac{10\alpha_n^2 A_n^2 \bar{A}_n}{3\omega_n^2} e^{i\omega_n T_0} \\ -2i \omega_n D_2 A_n e^{i\omega_n T_0} &- \delta_n A_n^3 e^{i3\omega_n T_0} - 3\delta_n A_n^2 \bar{A}_n e^{i\omega_n T_0} + c.c. \end{aligned} \quad (38)$$

Uvjet za periodično rješenje jest iščezavanje sekularnih članova na desnoj strani izraza (38):

$$\frac{1}{2} \hat{P}_n e^{i\sigma_n T_2} - 2i \hat{\mu}_n \omega_n A_n + \frac{10\alpha_n^2 A_n^2 \bar{A}_n}{3\omega_n^2} - 2i \omega_n D_2 A_n - 3\delta_n A_n^2 \bar{A}_n = 0 \quad (39)$$

Funkcija  $A_n$  napisat će se u polarnom obliku:  $A_n = \frac{1}{2} a_n e^{i\beta_n}$ , odnosno  $\bar{A}_n = \frac{1}{2} a_n e^{-i\beta_n}$ , gdje su  $a_n$  i  $\beta_n$  realne funkcije varijable  $T_2$ . Nakon razdvajanja realnog i imaginarnog dijela i uz  $\alpha_n^* = \delta_n - \frac{10\alpha_n^2}{9\omega_n^2}$ , rješavanjem sustava jednadžbi dobivaju se modulationske jednadžbe za promjenu amplitude  $a_n$  i faznog kuta  $\beta_n$ :

$$\begin{aligned} a_n' &= -\hat{\mu}_n a_n + \frac{\hat{P}_n}{2\omega_n} \sin(\sigma_n T_2 - \beta_n) \\ \beta_n' &= -\frac{\hat{P}_n}{2\omega_n a_n} \cos(\sigma_n T_2 - \beta_n) + \frac{3}{8\omega_n} \alpha_n^* a_n^2 \end{aligned} \quad (40)$$

Jednadžbe (40) pomoću supstitucije  $\beta_n = \sigma_n T_2 - \gamma_n$  mogu se transformirati u autonomni sustav:

$$\begin{aligned} a_n' &= -\hat{\mu}_n a_n + \frac{\hat{P}_n}{2\omega_n} \sin \gamma_n \\ \gamma_n' &= \sigma_n + \frac{\hat{P}_n}{2\omega_n a_n} \cos \gamma_n - \frac{3}{8\omega_n} \alpha_n^* a_n^2 \end{aligned} \quad (41)$$

te je definirana promjena amplitude i faze nelinearnog odziva sustava pri prisilnoj rezonanciji. Vrijednosti amplitude i faze ustaljenog gibanja sustava određuje se tako da u izraze (41) uvrstimo  $a_n' = \gamma_n' = 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= -\hat{\mu}_n a_n + \frac{\hat{P}_n}{2\omega_n} \sin \gamma_n \\ 0 &= \sigma_n + \frac{\hat{P}_n}{2\omega_n a_n} \cos \gamma_n - \frac{3}{8\omega_n} \alpha_n^* a_n^2 \end{aligned} \quad (42)$$

Eliminacijom faznog kuta  $\gamma_n$  definirana je frekvencijsko-amplitudna jednadžba prisilnih oscilacija:

$$a_n^2 \left[ 64 \hat{\mu}_n^2 \omega_n^2 + (8\sigma_n \omega_n - 3\alpha_n^* a_n^2)^2 \right] = 16 \hat{P}_n^2 \quad (43)$$

Kada se izraz (43) raspiše, imamo:

$$9\alpha_n^{*2} a_n^6 - 48\alpha_n^* \sigma_n \omega_n a_n^4 + 64\omega_n^2 (\hat{\mu}_n^2 + \sigma_n^2) a_n^2 - 16\hat{P}_n^2 = 0 \quad (44)$$

Broj realnih rješenja ove bikubne jednadžbe ovisi o vrijednostima njene diskriminante. Ako je diskriminanta sustava manja od nule, postoji samo jedno realno rješenje za  $a_n^2$ , dok za pozitivne vrijednosti diskriminante postoje tri realna rješenja za  $a_n^2$ . Područje parametara za koje postoje višestruka realna rješenja predstavlja histerezno područje rezonancije prisilnih oscilacija. Granične krivulje histereznog područja određene su uvjetom iščezavanja diskriminante, odnosno implicitnim jednadžbama:

$$\hat{P}_n^2 = \frac{64}{81} \left( \frac{\sigma_n \omega_n^3 (9\hat{\mu}_n^2 + \sigma_n^2) \pm \omega_n^3 \sqrt{(\sigma_n^2 - 3\hat{\mu}_n^2)^3}}{\alpha_n^*} \right) \quad (45)$$

Točka presjeka graničnih krivulja određena je vrijednostima:

$$\sigma_{kr} = \sqrt{3} \hat{\mu}_n \quad (46)$$

$$\hat{P}_{kr} = \pm \frac{16}{3} \sqrt{\frac{\hat{\mu}_n^3 \omega_n^3}{\sqrt{3} \alpha_n^*}} \quad (47)$$

Karakter rješenja jednadžbi (42) može se jednostavno ispitati pomoću lokalne analize stabilnosti zadavanjem malog poremećaja u okolini ravnotežnog stanja, odnosno tako da se zadaju male promjene  $a_i$  i  $\gamma_i$  varijabli  $a_n$  i  $\gamma_n$  u okolini točke  $(a_\sigma, \gamma_\sigma)$ :

$$a_n = a_0 + a_i \quad (48)$$

$$\gamma_n = \gamma_0 + \gamma_i$$

Supstitucijom u modulationske jednadžbe (41), uz zadržavanje samo linearnih članova, slijedi:

$$\begin{aligned} a_i' &= -\hat{\mu}_n a_i + \left( \frac{\hat{P}_n}{2\omega_n} \cos \gamma_0 \right) \gamma_i, \\ \gamma_i' &= -\left( \frac{3}{4\omega_n} \alpha_n^* a_0 + \frac{\hat{P}_n}{2\omega_n a_0^2} \cos \gamma_0 \right) a_i - \left( \frac{\hat{P}_n}{2\omega_n a_0} \sin \gamma_0 \right) \gamma_i \end{aligned} \quad (49)$$



Stabilnost gibanja ovisi o svojstvenim vrijednostima matrice koeficijentata na desnoj strani izraza (49), te slijedi da je gibanje nestabilno za:

$$\mu_n^2 + \left( \sigma_n - \frac{3}{8\omega_n} \alpha_n^e a_0^2 \right) \left( \sigma_n - \frac{9}{8\omega_n} \alpha_n^e a_0^2 \right) < 0, \tag{50}$$

a u suprotnom je stabilno. Konačno rješenje funkcije ustaljenog odziva za drugu aproksimaciju je:

$$q(t) = \varepsilon a_n \cos(\Omega t - \gamma_n) + \varepsilon^2 a_n^2 \frac{\alpha_n}{6\omega_n^2} (\cos(2\Omega t - 2\gamma_n) - 3) + O(\varepsilon^3) \tag{51}$$

To rješenje ovisi o potencijama koeficijentata  $(\varepsilon a_n)^i$ , pa malu amplitudu  $a_n$  možemo smatrati perturbacijskim parametrom i odabrati  $\varepsilon = 1$  [15], te se u tom slučaju skalirane veličine ne mijenjaju.

### 3.1.2. Rezonancija parametarskih oscilacija $\Omega \approx 2\omega_n$

Da bi se pojavila primarna parametarska rezonancija u sustavu, frekvencija pobude  $\Omega$  treba biti bliska dvostrukoj vrijednosti frekvencije sustava  $\omega_n$ , te uvodimo sljedeću relaciju:

$$\Omega = 2\omega_n + \varepsilon^2 \sigma_n \tag{52}$$

Izraz (52) te rješenja (33) i (36) uvrštavamo u jednadžbu trećeg reda (32c) i zajedno s uvjetom (35) dobiva se:

$$D_0^3 q_{n,3} + \omega_n^2 q_{n,3} = \frac{1}{2} \hat{p}_n e^{i2\omega_n T_0 + i\sigma_n T_2} + \frac{1}{2} \hat{K}_n \bar{A}_n e^{i\omega_n T_0 + i\sigma_n T_2} + \frac{1}{2} K_n A_n e^{i3\omega_n T_0 + i\sigma_n T_2} - 2i \hat{\mu}_n \omega_n A_n e^{i\omega_n T_0} - \frac{2\alpha_n^2 A_n^3}{3\omega_n^2} e^{i3\omega_n T_0} + \frac{10\alpha_n^2 A_n^2 \bar{A}_n}{3\omega_n^2} e^{i\omega_n T_0} - 2i \omega_n D_2 A_n e^{i\omega_n T_0} - \delta_n A_n^3 e^{i3\omega_n T_0} - 3\delta_n A_n^2 \bar{A}_n e^{i\omega_n T_0} + c.c. \tag{53}$$

Uvjet za regularno periodično rješenje jest iščezavanje koeficijentata koji uzrokuju sekularne članove:

$$\frac{1}{2} \hat{K}_n e^{i\sigma_n T_2} - 2i \hat{\mu}_n \omega_n A_n + \frac{10\alpha_n^2 A_n^2 \bar{A}_n}{3\omega_n^2} - 2i \omega_n D_2 A_n - 3\delta_n A_n^2 \bar{A}_n = 0 \tag{54}$$

Uz prikaz funkcija  $A_n$  i  $\bar{A}_n$  u polarnom obliku, slijede modulacijske jednadžbe parametarskih oscilacija promjene amplitude  $a_n$  i faznog kuta  $\beta_n$ :

$$a_n' = -\hat{\mu}_n a_n + \frac{\hat{K}_n a_n}{4\omega_n} \sin(\sigma_n T_2 - 2\beta_n) \tag{55}$$

$$\beta_n' = -\frac{\hat{K}_n}{4\omega_n} \cos(\sigma_n T_2 - 2\beta_n) + \frac{3}{8\omega_n} \alpha_n^e a_n^2$$

Jednadžbe transformiramo u autonomni sustav pomoću supstitucije  $2\beta_n = \sigma_n T_2 - \gamma_n$ :

$$a_n' = -\hat{\mu}_n a_n + \frac{\hat{K}_n a_n}{4\omega_n} \sin \gamma_n \tag{56}$$

$$\gamma_n' = \sigma_n + \frac{\hat{K}_n}{2\omega_n} \cos \gamma_n - \frac{3}{4\omega_n} \alpha_n^e a_n^2$$

Ravnotežna stanja sustava za  $a_n' = \gamma_n' = 0$ , definirana su jednadžbama:

$$0 = -\hat{\mu}_n a_n + \frac{\hat{K}_n a_n}{4\omega_n} \sin \gamma_n \tag{57}$$

$$0 = \sigma_n + \frac{\hat{K}_n}{2\omega_n} \cos \gamma_n - \frac{3}{4\omega_n} \alpha_n^e a_n^2$$

te slijedi eksplicitni izraz za amplitudu parametarskih oscilacija:

$$a_n^2 = \frac{4\sigma_n \omega_n}{3\alpha_n^e} \pm \frac{2}{3\alpha_n^e} \left( \hat{K}_n^2 - 16\hat{\mu}_n^2 \omega_n^2 \right)^{1/2} \tag{58}$$

Iz izraza (58) slijedi nužan uvjet za veličinu amplitude parametarske pobude:

$$\hat{K}_n \geq 4\hat{\mu}_n \omega_n \tag{59}$$

Područja parametarske rezonancije određuju se iz uvjeta  $a_n^2 > 0$ , te slijedi:

$$\sigma_n > \pm \frac{1}{2\omega_n} \left( \hat{K}_n^2 - 16\hat{\mu}_n^2 \omega_n^2 \right)^{1/2} \tag{60}$$

U svrhu analize stabilnosti rješenja sustava (57), zadaju se mali poremećaji  $(a_n, \gamma_n)$  u okolini ravnotežnog stanja  $(a_n, \gamma_n)$ . Nakon uvrštavanja u modulacijske jednadžbe (56) i zadržavanja samo linearnih članova varijabli  $a_n$  i  $\gamma_n$  dobiva se:

$$a_n' = \left( \frac{K_n a_0}{4\omega_n} \cos \gamma_0 \right) \gamma_1 \tag{61}$$

$$\gamma_1' = -\left( \frac{3\alpha_n^e}{2\omega_n} a_0 \right) a_1 - 2\mu_n \gamma_1$$

Gibanje je nestabilno za:

$$\sigma_n - \frac{3\alpha_n^e}{4\omega_n} a_n^2 > 0 \tag{62}$$

Konačno rješenje funkcije ustaljenog odziva parametarskih oscilacija za drugu aproksimaciju je:

$$q = \varepsilon a_n \cos\left(\frac{1}{2}(\Omega t - \gamma_n)\right) + \varepsilon^2 a_n^2 \frac{\alpha_n}{6\omega_n^2} (\cos(\Omega t - \gamma_n) - 3) + O(\varepsilon^3) \tag{63}$$

## 4. Numerički model

Za određivanje rješenja numeričkim postupkom izvedene su jednadžbe u kojima su prostorne derivacije aproksimirane centralnim diferencijama. Napravljena je prostorna diskretizacija sustava na  $N-1$  segmenata duljine  $\Delta x$ , gdje je  $N$  broj diskretnih čvorova sustava. Centralne diferencije funkcije  $w$  za prostorne derivacije su:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \approx \frac{W_{i+1} - W_{i-1}}{2\Delta x} = W_{D1,i} \tag{64}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \approx \frac{W_{i+1} - 2W_i + W_{i-1}}{\Delta x^2} = W_{D2,i}$$

gdje se indeks  $i$  odnosi na prostorni čvor ( $i = 1, 2, 3, \dots, M$ ), a indeksi  $D1$  i  $D2$  na prvu i drugu aproksimaciju prostornih derivacija funkcije  $w$  u čvoru  $i$ . Za aproksimaciju integrala u izrazu (21) koristi se Simpsonovo pravilo:

$$S = \int_0^1 (z'w' + \frac{1}{2}w'^2) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left( s_1 + 4 \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} s_{2i} + 2 \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}-1} s_{2i+1} + s_N \right) \quad (65)$$

gdje je:

$$s_i = 4v(1-2(i-1)\Delta x)W_{D1,i} + \frac{1}{2}W_{D1,i}^2 \quad (66)$$

Nakon diskretizacije konačnim diferencijama, sustav jednačbi glasi:

$$W_{D2,i} + \eta(W_{D2,i} - 8v)(S - \Delta_u \cos(\Omega j \Delta t)) = \ddot{W}_i + 2\mu \dot{W}_i \quad (67)$$

Vremenska integracija jednačbi provedena je iterativnim algoritmom prediktor-korektor uz vremenski korak  $\Delta t = 0,002$  [16]. Kabel je diskretiziran na  $N = 53$  čvora, čvorovi su numerirani po redu, pa je za čvor prvog oslonca  $i = 1$ , a suprotnog oslonca  $i = 53$ . Poprečni pomak oslonca zadan je direktno na prvom čvoru funkcijom  $W_i = \Delta_p \cos(\Omega j \Delta t)$ , gdje  $j$  predstavlja broj iteracije za vremensku integraciju.

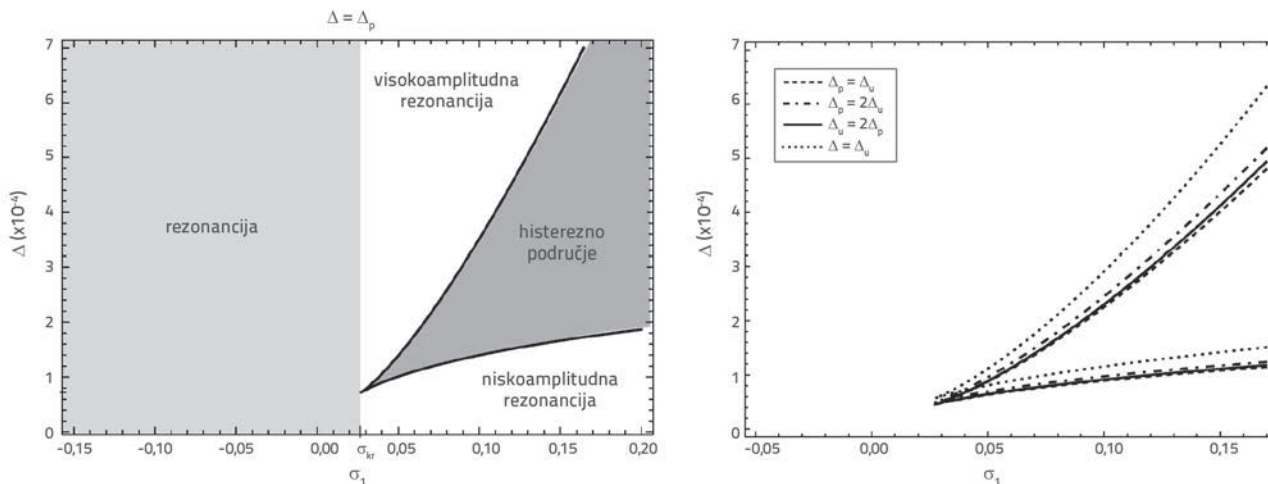
### 5. Primjeri

Odabrani su bezdimenzijski parametri  $\eta$  i  $v$  u području vrijednosti kabela ovješanih mostova kojima okvirne vrijednosti statičke deformacije iznose 0,2–0,4 %, a omjer strelice i raspona je u intervalu 0,01–0,5 % [17]. Ti kabeli imaju vrlo veliku silu prednapona, pa se za njih s dovoljnom točnošću može usvojiti pretpostavka paraboličnog profila koju smo koristili pri izvodu analitičkih izraza. Parametar rastezanja uzet je  $\eta = 400$ , a omjer strelice i raspona  $v = 0,002$ , tako da je vrijednost Irvinovog parametara  $\lambda^2 = 0,1024$ . Za sve oblike oscilacija zadan je koeficijent relativnog prigušenja  $\xi = 0,5$  %. Analizirat će se samo oscilacije nižih oblika, odnosno prisilna rezonancija prvog i drugog oblika te primarna parametarska rezonancija prvog oblika, za slučaj kada nema interakcije među oblicima.

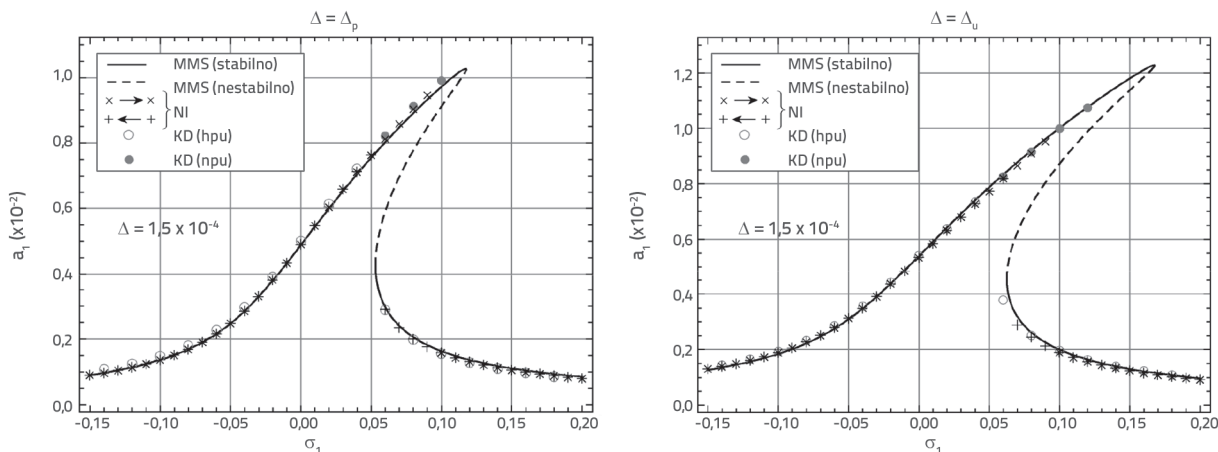
### 5.1. Prisilne oscilacije

Najprije je za redukciju sustava korišten prvi simetrični oblik oscilacija  $\phi_1(x)$ . Obje komponente pomaka uzrokuju prisilne oscilacije kabela jer su koeficijenti  $h_1$  i  $p_1$  različiti od nule. Na slici 4. prikazana su rezonancijska područja prisilnih oscilacija za različite omjere poprečnog i uzdužnog pomaka oslonca ( $\Delta_p$  i  $\Delta_u$ ). Lijevo su označena različita rezonancijska područja karakteristična za nelinearni sustav. Za vrijednosti  $\sigma_1 < \sigma_{kr}$  odziv sustava je ovisan isključivo o parametrima pobude, dakle što je veća amplituda i frekvencija to su veće i amplitude odziva. Za  $\sigma_1 > \sigma_{kr}$  postoje tri područja rezonancije, a izrazom (45) određene su granične krivulje histerezne i linearne područja. U području niskoamplitudne rezonancije i linearan sustav dat će dobru aproksimaciju odziva [11]. Iznad histerezne područja nalazi se područje s velikim amplitudama oscilacija. Ako parametri odgovaraju histereznom području moguć je odziv s malim ili velikim amplitudama. Koje će se rješenje realizirati, ovisi o početnim uvjetima, odnosno povijesti odziva.

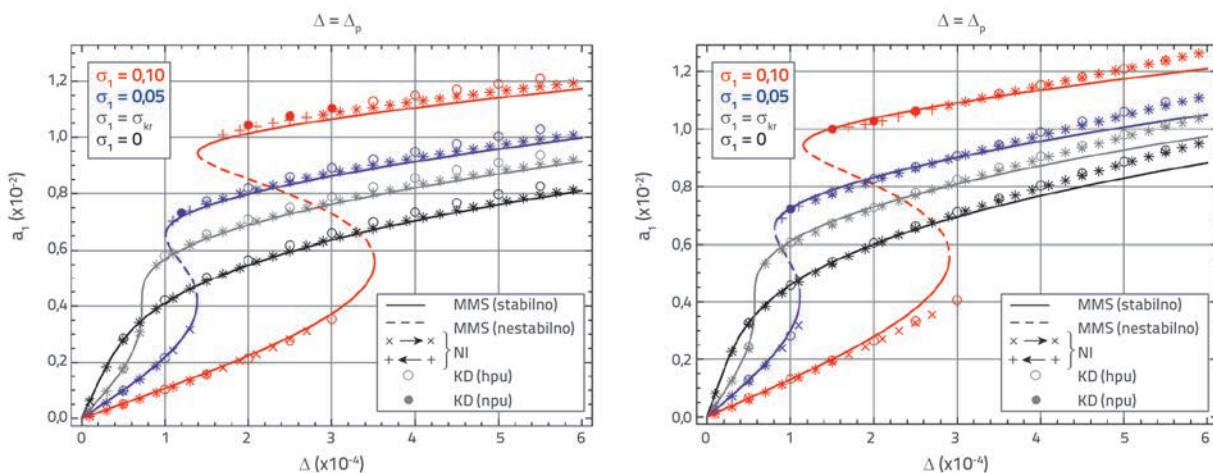
Na slikama 5., 6. i 7. prikazane su krivulje amplitude oscilacija u ovisnosti frekvencije/amplitude pobude. Za provjeru rješenja određenih pomoću MMS postupka, provedena je direktna numerička integracija (NI) jednačbe (28) u programu Wolfram *Mathematica*. Nakon postizanja ustaljenog odziva određena je amplituda, te je zatim promijenjena frekvencija/amplituda pobude. Oznaka  $\times$  pokazuje rezultate za promjenu frekvencije/amplitude pobude od nižih vrijednosti prema višima, a oznaka  $+$  od viših prema nižim vrijednostima. Kod modela koji je formuliran konačnim diferencijama (KD) nakon postizanja ustaljenog odziva, za amplitudu očitana je maksimalna vrijednost pomaka čvora u sredini raspona (čvor 27). Prazni kružići odnose se na rezultate KD za homogene (hpu) a puni na nehomogene (npu) početne uvjete. Početni uvjeti zadani su u okolini ravnotežnog stanja.



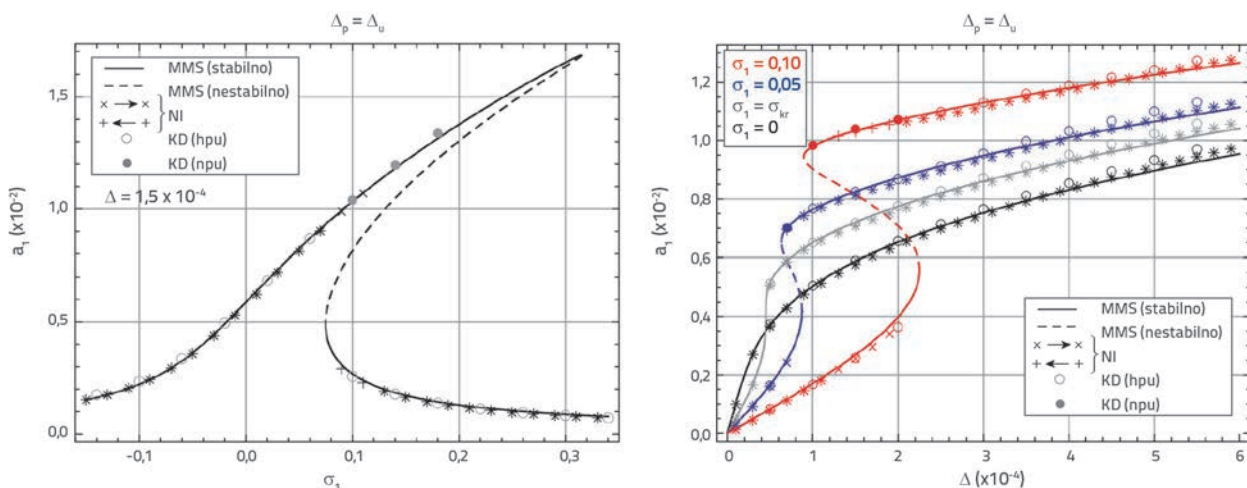
Slika 4. Područja primarne rezonancije prvog oblika



Slika 5. Frekvencijsko-amplitudne krivulje za konstantnu amplitudu pobude (NI - numerička integracija, hpu - homogeni početni uvjeti, npu - nehomogeni početni uvjeti)



Slika 6. Amplitudne krivulje za konstantnu frekvenciju pobude



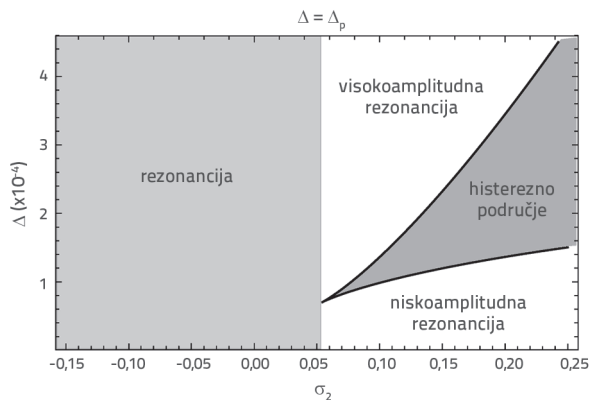
Slika 7. Amplitudne krivulje pri istovremenom djelovanju uzdužnog i poprečnog pomaka oslonca

Za male vrijednosti pomaka na osloncu rezultati numeričkih analiza vrlo se dobro slažu s rezultatima MMS postupka. Na slici 6. može se vidjeti da tek za veće vrijednosti amplitude oscilacija/pobude dolazi do manjeg odstupanja. Prednost primjene

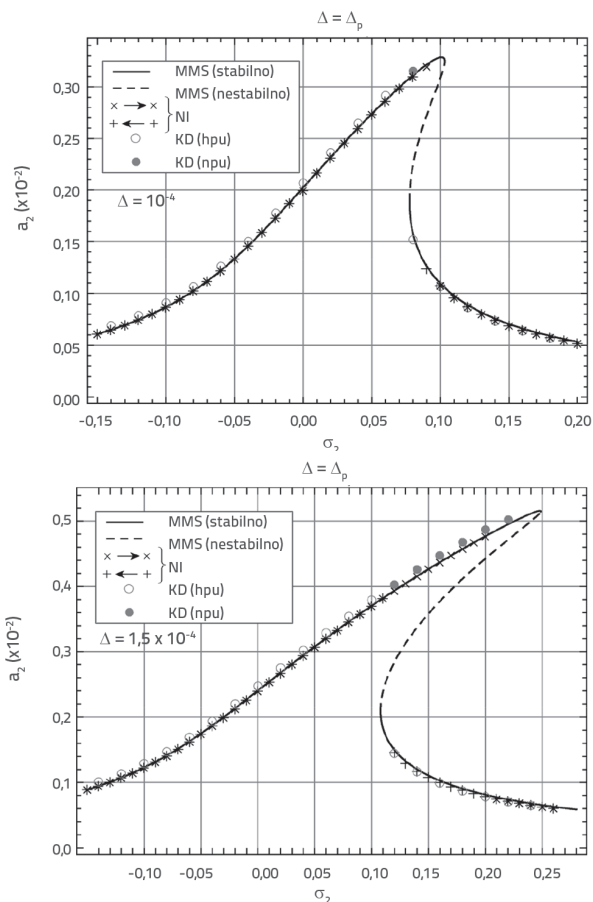
predloženog analitičkog modela je i u tome što nije zanemarena funkcija inicijalnog oblika oscilacija. Na ovom primjeru vidimo da i uzdužna komponenta gibanja oslonca uzrokuje prisilne oscilacije, štoviše, za zadane parametre kabla amplituda

odziva istog je reda veličine kao i za poprečnu komponentu gibanja oslonca.

Na slici 7. prikazane su amplitudne krivulje pri istodobnom uzdužnom i poprečnom pomaku oslonca. Ukupna amplituda pobude definirana izrazom (29) veća je nego u prethodna dva slučaja, i zbog toga histerezo područje pomaknuto je prema nižim amplitudama ukupnog pomaka  $\Delta$ . Iz izraza (29) slijedi da će suprotni predznaci uzdužne i poprečne komponente pomaka na osloncu uzrokovati promjenu amplitude pobude, što će izazvati promjene u rezonancijskom području, slika 8.



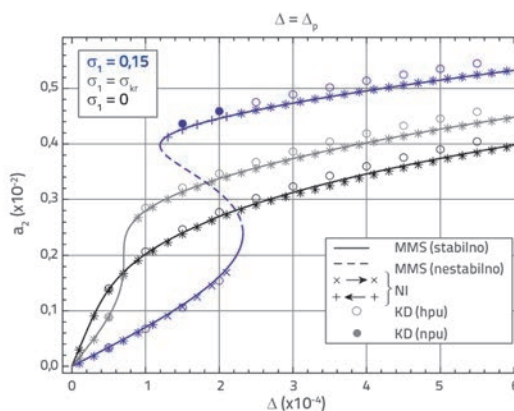
Slika 8. Područja primarne rezonancije za drugi oblik oscilacija



Slika 9. Frekvencijsko-amplitudne krivulje za konstantnu amplitudu pobude

Kod redukcije drugim oblikom oscilacija, koeficijent amplitude pobude  $h_2$  iščezava budući je funkcija vlastitog oblika  $\phi_2(x)$  asimetrična. Prema tome, oscilacije u drugom obliku nastaju samo zbog poprečne komponente pomaka oslonca. Na slici 8. prikazana su područja primarne rezonancije za prisilne oscilacije u drugom obliku.

Za amplitudu pomaka u modelu s konačnim diferencijama (KD), u ovom slučaju odabrana je maksimalna vrijednost pomaka čvora u četvrtini raspona (čvor 14). Pri rezonanciji u drugom obliku, amplitude oscilacija manje su od amplituda u prvom obliku, jer je za deformaciju u drugom obliku potreban veći utrošak energije (slike 9. i 10.). I u ovom slučaju vidimo da je podudaranje analitičkih i numeričkih rezultata vrlo dobro, naročito za manje amplitude odziva.



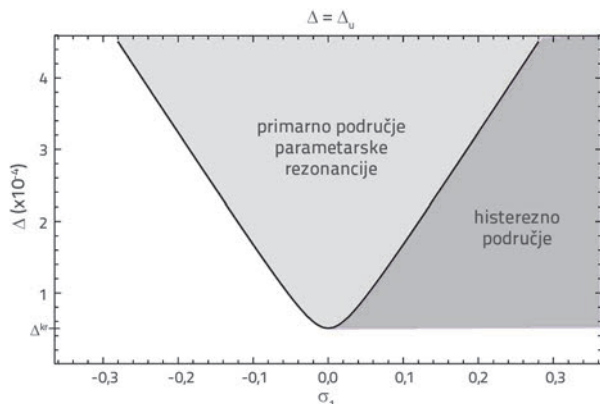
Slika 10. Amplitudne krivulje za konstantnu frekvenciju

### 5.2. Parametarske oscilacije

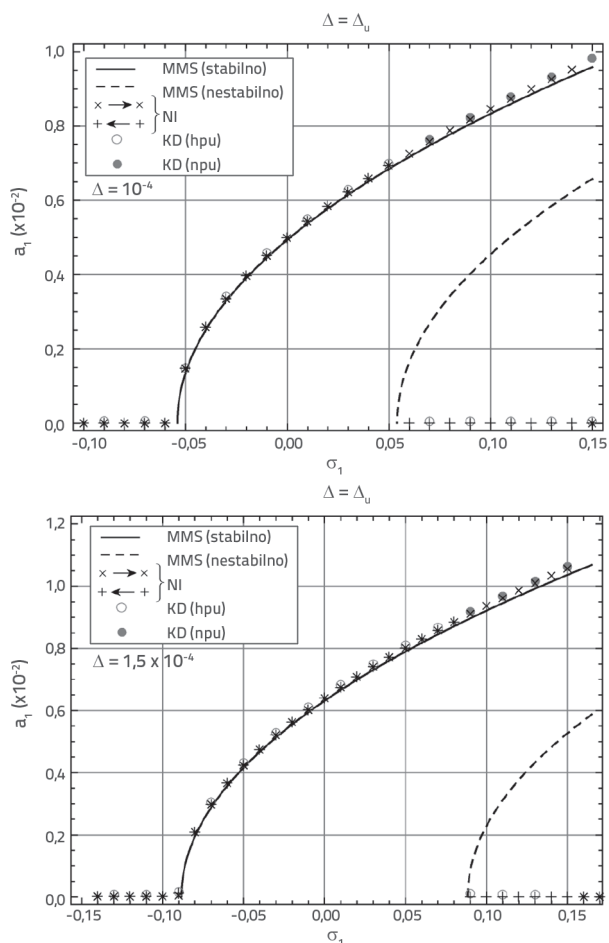
Parametarsku pobudu uzrokuje samo uzdužna komponenta pomaka na osloncu. Područje parametara za koje su moguće parametarske oscilacije definirano je izrazima (59) i (60). Granice tih područja ne ovise o nelinearnim koeficijentima te su analogne izrazima za područja parametarskih oscilacija linearnog sustava koje se određuju iz Mathieuove jednadžbe. Kod nelinearnog sustava oblik rješenja unutar definiranih područja bitno se razlikuje od odziva linearnog sustava.

Uvjeti (59) i (60) dijele područje parametara na tri dijela, što možemo vidjeti na slici 11. U neosjenčanom dijelu ne može doći do parametarskih oscilacija, bez obzira na početne uvjete. Ako parametri sustava odgovaraju primarnom području, dolazi do parametarske rezonancije, ali za razliku od linearnog sustava u kojem amplitude postaju beskonačno velike, amplitude odziva nelinearnog sustava ograničene su s konačnom vrijednosti, odnosno javlja se granični ciklus. Desno od primarnog područja nalazi se histerezo područje parametarskih oscilacija u kojem odziv može biti trivijalan (nema oscilacija), ili je periodičan s visokom amplitudom oscilacija. Početni uvjeti, odnosno povijest odziva, uvjetuju hoće li doći do parametarskih oscilacija. Ako je sustav linearan, za vrijednosti parametara u histereznom području nije moguća pojava parametarskih oscilacija. Ovo je rijedak slučaj

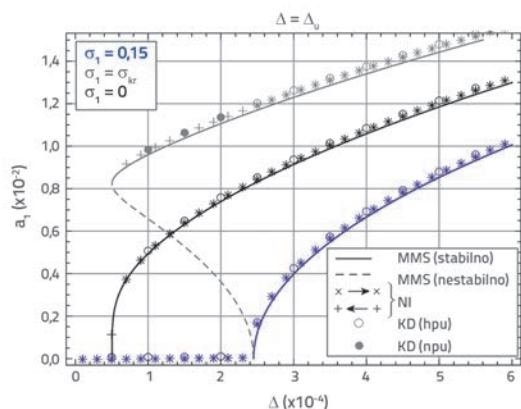
postojanja netrivialnog ustaljenog odziva nelinearnog sustava u području za koje je odziv linearnog sustava trivijalan [14]. Vrijednosti amplituda parametarskih oscilacija kabela, prikazane na slikama 12. i 13., pokazuju vrlo dobro slaganje analitičkog i numeričkih postupaka.



Slika 11. Područja parametarske rezonancije prvog oblika



Slika 12. Frekvencijsko-amplitudne krivulje parametarske rezonancije za konstantnu amplitudu pobude



Slika 13. Amplitudne krivulje parametarske rezonancije za konstantnu frekvenciju pobude

### 6. Zaključak

U ovom radu prikazan je analitički postupak modeliranja problema oscilacija kabela uslijed pomaka oslonca, formuliran uz pretpostavku kvazistatičkog rastezanja i koncepta složenog gibanja. Zbog zadržavanja utjecaja početnog oblika, u jednadžbi gibanja su uz kubne uključene i kvadratne nelinearnosti, koje su u ostalim radovima zanemarene, a nastaju zbog utjecaja geometrije u ravnotežnom položaju. Taj utjecaj je u analitički model uključio i pojavu prisilnih poprečnih oscilacija uslijed uzdužnih pomaka oslonaca. Sustavi u kojima je zanemaren inicijalni oblik sadrže samo kubne nelinearnosti (napeta žica), tako da uzdužni pomaci uzrokuju samo parametarske oscilacije. Analiza reduciranih jednadžbi gibanja pokazala je da koeficijent prisilne dinamičke pobude od uzdužne komponente pomaka na osloncu iščezava za asimetrične koordinatne funkcije, što znači da u tom slučaju oscilacije nastaju samo od poprečne komponente gibanja oslonca.

U odabranom primjeru za vrijednost frekvencije pobude  $\Omega \approx 2\omega_1 \approx \omega_2$  i omjer frekvencija kabela  $2\bar{\omega}_1 / \bar{\omega}_2 = 1,004$ , zasebno su analizirani rezultati prisilnih oscilacija samo u drugom obliku i rezultati parametarskih oscilacija prvog oblika, uz postojanje samo jedne komponente gibanja oslonca. U slučaju djelovanja objiju komponenti, istodobno bi se pobudila oba oblika te bi u nelinearnom modelu, definiranim izrazom (26), trebalo uzeti u obzir sve pobuđene oblike.

Usporedba analitičkih i numeričkih rješenja pokazala je vrlo dobro slaganje i točnost asimptotskih rješenja. Očigledna je prednost analize MMS postupkom, jer analitička rješenja omogućavaju jednostavno određivanje veličine amplitude odziva, dapače i vrlo preglednu kvalitativnu analizu rezultata. Pokazano je da već vrlo mali pomaci oslonca u određenom području vrijednosti parametara pobude i sustava mogu prouzročiti velike amplitude odziva.

## LITERATURA

- [1] SETRA: Cable Stays; Recommendation of French Interministerial Commission on Prestressing, Center des Techniques des Ouvrages d'Art, Bagneux Cedex, France, 2002.
- [2] Rega, G.: Nonlinear vibrations of suspended cables – part I: Modeling and analysis, *Applied Mechanics Review* 57 (2004) 6, pp. 443-478.
- [3] Irvine, H.M., Caughey, T.K.: The Linear Theory of Free Vibrations of a Suspended Cable, *Proceedings of the Royal Society Series A* 341, pp. 299-315, 1974., <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1974.0189>
- [4] Irvine, H.M.: *Cable Structures*, The MIT Press, Cambridge, Mass., 1981.
- [5] Triantafyllou, M.S.: The dynamic of taut inclined cables, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 37 (1984) 3, pp. 421-440.
- [6] Wu, Q., Takahashi, K., Nakamura, S.: Formulae for frequencies and modes of in-plane vibrations of small-sag inclined cables, *Journal of Sound and Vibrations* 279 (2005), pp. 1155-1169, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2004.01.004>
- [7] Rega, G., Srinil, N., Alaggio, R.: Experimental and numerical studies of inclined cables: free and parametrically-forced vibrations, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 46 (2008.) 3, pp. 621-640.
- [8] Caetano, E.: Indirect excitation of stays on cable-stayed bridges, *Fourth International Symposium on Cable Dynamics*, Montreal, Canada, pp. 129-136, 2001.
- [9] Lilien, J.L., Pinto da Costa, A.: Vibration amplitudes caused by parametric excitation of cable stayed structures, *Journal of Sound and Vibration* 174 (1994) 1, pp. 69-90.
- [10] Pinto da Costa, A., Martins, J.A.C., Branco, F., Lilien, J.L.: Oscillations of Bridge Stay Cables Induced by Periodic Motions of Deck and/or Towers, *Journal of Engineering Mechanics* 122 (1996) 7, pp. 613-622.
- [11] Douthe, C.E., Gantes, C.J.: Investigation of coupling between external and parametric resonances in small sagged inclined cables, *III ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, Corfu, 2011.
- [12] Jakobsen, P.: Introduction to the method of multiple scales, Cornell University Library, 2014, URL:<http://arxiv.org/abs/1312.3651v2>
- [13] Marinca, V., Nicolae, H.: *Nonlinear Dynamical Systems in Engineering*, Springer, 2011., <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-22735-6>
- [14] Nayfeh, A.H., Mook, D.T.: *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons Inc., 1995., <http://dx.doi.org/10.1002/9783527617586>
- [15] Nayfeh, A.H.: *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley & Sons Inc., 1993.
- [16] Nikolić, M., Raduka, V.: Numerical investigation of cable parametric vibration, *11<sup>th</sup> International Conference on Vibration Problems*, Lisbon, Paper No. 158, 2013.
- [17] Achkire, Y.: Active Tendon Control of Cable-Stayed Bridges, Université Libre de Bruxelles, Active Structures Laboratory, Dissertation, Belgium, 1997.