Iz povijesti razvoja iteracijskih postupaka

Fresl, Krešimir; Gidak, Petra; Hak, Sanja

UDK 624.071.3.001.3 Primljeno 19. 7. 2010.

Iz povijesti razvoja iteracijskih postupaka

Krešimir Fresl, Petra Gidak, Sanja Hak

Ključne riječi

iteracijski postupak, štapna statika, inženjerska metoda pomaka, Čališev, Kani, Werner

K. Fresl, P. Gidak, S. Hak *Pregledni rad*

Iz povijesti razvoja iteracijskih postupaka

U članku su opisani doprinosi koje su članovi Zavoda za tehničku mehaniku zagrebačkoga Građevinskog fakulteta dali razvoju iteracijskih postupaka za rješavanje sustava jednadžbi inženjerske metode pomaka u štapnoj statici: Čališevljev postupak dvostruke iteracije za okvirne sisteme s translacijski pomičnim čvorovima, Kanijev postupak jednostruke iteracije, Wernerov postupak ubrzavanja drugog dijela Crossova postupka i njegove inačice te Kuševićeva usporedna analiza postupaka.

Key words

iterative method, rod structure statics, displacement method, Čališev, Kani, Werner

K. Fresl, P. Gidak, S. Hak *Subject review*

From the history of development of iterative procedures

The authors describe contributions made by members of the Department of Technical Mechanics of the Faculty of Civil Engineering in Zagreb to the development of iterative methods for solving systems of equations of displacement method in rod structure statics: Čališev's double iteration procedure for sway frames, Kani's single iteration procedure, Werner's procedure for acceleration of the second part of Cross method and its variants, and comparative analysis of procedures by Kušević.

Mots clés

procédé itératif, statique des poutres, méthode de déplacement, Čališev, Kani, Werner

K. Fresl, P. Gidak, S. Hak *Ouvrage de syntèse*

De l'histoire du développement des procédés itératifs

Les auteurs décrivent la contribution des membres du Département de mécanique structurale de la Faculté de génie civil de Zagreb au développement des procédures itératives pour la résolution des systèmes d'équations pour les méthodes de déplacement dans la statique des poutres: procédé de Čališev d'itération double pour systèmes-cadres à nœuds mobiles, procédé de Kani pour itération simple, procédé de Werner pour accélération de la deuxième partie du procédé de Cross et ses alternatives, et l'analyse comparative de procédés par Kušević.

Ключевые слова

итерационная процедура, стержневая статика, инженерный метод смещения, Чалышев, Кани, Вернер

К. Фресл, П. Гидак, С. Хак *Обзорная работа*

Из истории развития итерационнных процедур

В статье описывается вклад, внесенный сотрудниками Отдела технической механики Строительного факультета Загребского университета в развитие итерационных процедур для решения системы уравнений инженерного метода смещения в стержневой статике: процедура двойной итерации Чалышева для рамных систем с передвижными узлами, процедура одинарной итерации Кани, процедура Вернера ускорения второй части процедуры Кросса и ее варианта, а также сравнительный анализ процедур Кушевича.

Schlüsselworte

iteratives Verfahren, Stabstatik, Verschiebungsmethode, Čališev, Kani, Werner

K. Fresl, P. Gidak, S. Hak *Übersichtsarbeit*

Aus der Geschichte der Entwicklung iterativer Verfahren

Im Artikel beschreibt man die Beiträge die Mitglieder des Instituts für technische Mechanik der zagreber Fakultät für Bauwesen der Entwicklung iterativer Verfahren für das Lösen von Systemen von Gleichungen der Verschiebungsmethode in der Stabstatik darbrachten: Čališev's Verfahren der doppelten Iteration für Rahmensysteme mit translatorisch beweglichen Knoten, Kani's Verfahren der einfachen Iteration, Werner's Verfahren der Beschleunigung des zweiten Teils des Verfahren von Cross sowie die Vergleichsanalyse von Kušević.

Autori: Prof. dr. sc. **Krešimir Fresl**, dipl. ing. građ.; **Petra Gidak**, dipl. ing. građ.; **Sanja Hak**, dipl. ing. građ., Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet, Zagreb

1 Uvod

Konstantin Čališev započinje članak [4] obrazloženjem motivacije i svrhe primjene iteracijskih postupaka u štapnoj statici: „Da se odrede suvišne nepoznanice statički neodređenih sistema, obično se postavi potreban za to broj linearnih jednadžbi, koje dobivamo na osnovi promatranja deformacije toga sistema. Broj ovih jednadžbi mora da odgovara broju nepoznanica. Često se može desiti, da je ovaj broj tako velik, da je praktički nemoguće direktno riješenje [*sic*] dobivenih jednadžbi. Zgodnim izborom suvišnih nepoznanica na temelju različitih ujednostavnjujućih pretpostavaka, iskorišćenja uvjeta simetrije i t. d. može se znatno umanjiti broj nepoznanica i katkada se dobiva sistem jednadžbi, koji se daje uporabom naročitih načina riješiti razmjerno jednostavno. Ako je nakon sviju ujednostavnenja [*sic*] broj jednadžbi ipak prilično velik, zgodno je da se upotrijebi način postepenih aproksimacija."

Čališev je, čini se, bio prvi koji je, početkom dvadesetih godina, primijenio iteracijski postupak u rješavanju okvirnih konstrukcija [7, 9, 15, 21]. U [22] Timošenko piše: „Tijekom idućega semestra Hardy Cross je prikazao svoju metodu proračuna okvirnih konstrukcija. Nikada nisam čuo o Hardyju Crossu, ali sam odmah uočio da je njegova metoda vrlo blizu Čališevljeve metode, koju sam dobro poznavao, i prikaz koje je bio objavljen u Zagrebu prije gotovo deset godina. Očito se tu nije radilo o plagijatu, jedino o dilemi tko je bio prvi." Čališevljev je rad, naime, prešao granice Kraljevine Jugoslavije tek godine 1936. kada je u njemačkom prijevodu predstavljen na kongresu IABSE-a u Berlinu [32].[1] U [15] autori navode da je Čališev metodom uzastopnih aproksimacija rješavao samo okvire s translacijski nepomičnim čvorovima, no čitajući članak [4] doznat ćemo da je uz to predložio i dva postupka proračuna „pomičnih" okvira opterećenih horizontalnim silama u čvorovima.

Uz Čališeva, još su neki članovi Zavoda za tehničku mehaniku zagrebačkoga Građevinskog fakulteta doprinijeli razvoju iteracijskih postupaka rješavanja sustava jednadžbi inženjerske metode pomaka u linearnoj, ali i u nelinearnoj štapnoj statici. Te ćemo doprinose potanje prikazati u našem članku.

2 Postupak K. Čališeva

U članku [3] Čališev je opisao „kako se jednostavno mogu odrediti sporedna naprezanja kod rešetkastih nosača, koja nastaju uslijed krutosti spojeva u čvorovima, ako primjenimo [*sic*] na njih metodu postepenih aproksimacija", a u [4] je pokazao „kako se može primjeniti isti način kod izračunavanja okvirnih konstrukcija." U prikazu „hoda proračunavanja" slijedit ćemo izlaganje u drugome članku, uz prilagodbu predznakâ te osuvremenjivanje i usuglašavanje oznaka.

Čališev započinje primjerom jednoetažnoga okvira s vertikalnim stupovima i horizontalnom gredom. „Pod djelovanjem vanjskih sila čvorovi nosača zaokrenut će se u općenitom slučaju za neke kutove $\varphi_\diamond$ i uz to pomaknuti za veličinu u, koja je za sve čvorove grede zajednička", jer „promatramo samo deformaciju uslijed savijanja štapova i zato ne uzimamo u obzir pomaknuća uslijed stlačivanja ili rastezanja štapova".

Zadaća se, prema principu superpozicije, može riješiti u dva koraka: „U prvom dijelu odredit ćemo momente na krajevima pojedinih štapova, koji nastaju uslijed djelovanja vanjskih sila, te ćemo uz to pretpostaviti, da je jedan čvor nosača spojen sa čvrstim tlom još pomoću horizontalnog štapa $\mathscr{A}$, te će radi toga pomaknuće u biti jednako nuli. U drugom dijelu odredit ćemo momente, koji nastaju pod djelovanjem same horizontalne sile, koja je jednaka i protusmjerna sili u štapu $\mathscr{A}$." Rastavljanje zadaće u dva dijela odgovara formulaciji inženjerske metode pomaka koju je A. Bendixsen objavio 1914. godine. Danas uvriježeno oblikovanje sustava jednadžbi u kojima se kao nepoznanice pojavljuju i kutovi zaokreta čvorova i (orijentirane) duljine pomaka razradio je A. Ostenfeld „tek" 1921. godine [9].

2.1 Sistemi s translacijski nepomičnim čvorovima

„Pošto su krajevi štapova u čvorovima kruto spojeni i centri čvorova su nepomični, to se deformacija sastoji samo u okretanju čvorova, te će se uslijed toga krajevi štapova, koji pripadaju jednom čvoru, okrenuti za isti kut $\varphi_{m,i} = \varphi_m$." Ti zaokreti uzrokuju savijanje štapova, pa je ukupna vrijednost momenta na kraju m štapa (m,i), ako je prizmatičan, dana poznatim izrazom

$$M_{m,i} = 4k_{m,i}\,\varphi_m + 2k_{m,i}\,\varphi_i + \overline{M}_{m,i}, \tag{1}$$

gdje su $\overline{M}_{m,i}$ momenti upetosti, a $k_{m,i} = E\,I_{m,i}/\ell_{m,i}$.

„Ako izlučimo iz naše konstrukcije jedan čvor, n. pr. m, onda na njega djeluju [...] momenti, koji su jednaki i protusmjerni momentima na krajevima štapova, t. j. momenti $-M_{m,n}$, $-M_{m,o}$ i t. d." Uvjet je „ravnotežja izlučenog čvora"

$$\textstyle\sum_i (-M_{m,i}) = 0, \quad \text{odnosno} \quad \sum_i M_{m,i} = 0. \tag{2}$$

„Znak $\sum$ proteže se na sve krajeve štapova, koji pripadaju jednom čvoru." Uvrstimo li u tu jednadžbu desnu stranu izraza (1), bit će

$$\Big(\textstyle\sum_i 4k_{m,i}\Big)\,\varphi_m + \sum_i 2k_{m,i}\,\varphi_i + \sum_i \overline{M}_{m,i} = 0. \tag{3}$$

„Kuteve $\varphi_\diamond$ moramo odabrati tako, da zadovoljavaju jednadžbu (3) za svaki čvor konstrukcije. Ovu zadaću riješavamo [*sic*] putem postepenih aproksimacija": umje-

[1] O dubini jezičnoga jaza ponešto govori i navod naslova rada [4] u [9]: *Izračunavanje višestruko statici neodredenik sistemy pomoču postepenik aproksimacija*.

sto da istodobno zadovoljimo sve jednadžbe tako da sve čvorove istodobno zaokrenemo za „prave" kutove, zaokretat ćemo čvor po čvor zadovoljavajući time u svakom od njih zasebice uvjet ravnoteže momenata.[2]

„Počinjemo sa onim čvorom, gdje očekujemo najveću, po apsolutnoj vrijednosti, veličinu $\varphi_\diamond$." Neka je to čvor m. Ako je zaokretanje svih ostalih čvorova spriječeno, to jest, ako su $\varphi_i = 0$ za $i \neq m$, iz jednadžbe (3) slijedi

$$\varphi_m = -\frac{1}{\sum_i 4k_{m,i}} \sum_i \overline{M}_{m,i}. \tag{4}$$

Zaokret čvora m, osim na pripadnom kraju štapa (l,m), uzrokuje moment i na kraju l, s vrijednošću $2k_{l,m}\varphi_m$. Isto će se tako pri zaokretanju čvora l pojaviti moment na kraju m štapa (l,m), što znači da će uravnoteženje čvora l narušiti ravnotežu koju smo već ostvarili u čvoru m. Morat ćemo se stoga vraćati u čvorove koje smo već jednom, dvaput, triput, … uravnotežili. Postupak je iteracijski: ravnotežnoj konfiguraciji okvira približavamo se postupno, a φ_m prema (4) tek je prva približna vrijednost, pa ćemo je označiti sa $\varphi_m^{(1)}$.

Neka su $\varphi_i^{(\beta_i)}$ približne vrijednosti kutova zaokreta čvorova i pri ponovnom dolasku u čvor m u nekom kasnijem koraku proračuna; gornji indeks označava da je riječ o vrijednosti kuta φ_i dobivenoj nakon β_i uravnoteženja čvora i. Kako smo uravnoteženjem susjednih čvorova narušili prethodno ostvarenu ravnotežu u čvoru m, zbroj vrijednosti momenata koji na nj djeluju neće biti jednak nuli:

$$\Big(\sum_i 4k_{m,i}\Big)\varphi_m^{(\beta_m)} + \sum_i 2k_{m,i}\varphi_i^{(\beta_i)} + \sum_i \overline{M}_{m,i} = \mathfrak{M}_m^{(\beta_m)}. \tag{5}$$

Jednadžba (3) bit će zadovoljena samo s pravim vrijednostima koje se od $\varphi_i^{(\beta_i)}$ razlikuju za priraste $\Delta\varphi_i$. Iz (3), uz (5) i $\varphi_i = \varphi_i^{(\beta_i)} + \Delta\varphi_i$, dobivamo

$$\Big(4\sum k_{m,i}\Big)\Delta\varphi_m + \sum_i 2k_{m,i}\Delta\varphi_i + \mathfrak{M}_m^{(\beta_m)} = 0. \tag{6}$$

Da čvor m ponovno uravnotežimo, spriječit ćemo dalje zaokretanje svih ostalih čvorova, a njega dodatno zaokrenuti, pa je prirast kuta potreban za uravnoteženje

$$\Delta\varphi_m^{(\beta_m+1)} = -\frac{1}{\sum_i 4k_{m,i}}\mathfrak{M}_m^{(\beta_m)}, \tag{7}$$

tako da je približna vrijednost kuta zaokreta čvora m nakon $\beta_m + 1$ uravnoteženja

$$\varphi_m^{(\beta_m+1)} = \varphi_m^{(\beta_m)} + \Delta\varphi_m^{(\beta_m+1)} = \varphi_m^{(1)} + \sum_{k=1}^{\beta_m} \Delta\varphi_m^{(k+1)}. \tag{8}$$

[2] Kutovi zaokreta vrlo su mali brojevi, dok su, s druge strane, vrijednosti koeficijenata krutosti razmjerno velike. Za „ručni" su proračun ili za proračun pomoću logaritamskoga računala — u našim krajevima poznatijeg pod njemačkim nazivom *Rechenschieber* — takvi odnosi veličina neprikladni, pa Čališev umjesto kutova izračunava „njima razmjerne veličine" $N_\diamond = 2E\,\varphi_\diamond$.

Izraz (4) poseban je slučaj izraza (7): na početku su proračuna svi $\varphi_i^{(0)} = 0$, pa iz (8) i (5) slijedi $\varphi_m^{(1)} = \Delta\varphi_m^{(1)}$ i $\mathfrak{M}_m^{(0)} = \sum_i \overline{M}_{m,i}$. Jednadžbu (6), koja je istoga oblika kao (3), nazivamo rezidualnom jednadžbom. Indukcijom je, pomoću izraza (5), (8) i (7), lako pokazati da je

$$\mathfrak{M}_m^{(\beta_m)} = \sum_i 2k_{m,i}\Delta\varphi_i^{(\beta_i)}, \tag{9}$$

pri čemu zbrajamo priraste kutova zaokreta čvorova koji su uravnoteženi nakon posljednjega uravnoteženja čvora m. Iteracijski postupak u kojemu izračunavamo priraste nepoznanica naziva se diferencijskom iteracijom.

Poredamo li jednadžbe (3) redoslijedom kojim smo numerirali čvorove te uvedemo oznake $a_{m,m} = \sum_i 4k_{m,i}$, $a_{m,i} = a_{i,m} = 2k_{m,i}$ i $b_m = \sum_i \overline{M}_{m,i}$, u Čališevljevu ćemo postupku lako prepoznati Gauss–Seidelov iteracijski postupak rješavanja sustava linearnih jednadžbi. Prema matematičkoj teoriji iteracijskih postupaka [14], taj postupak konvergira ako je sustav strogo dijagonalno dominantan $\big(|a_{m,m}| > |\sum_{i\,(i\neq m)} a_{m,i}|$ za sve $m\big)$ ili ako je barem nesvodivo dijagonalno dominantan $\big($ne može se rastaviti na dva neovisna sustava i $|a_{m,m}| \geq |\sum_{i\,(i\neq m)} a_{m,i}|$ za sve m, uz ‚>' za barem jedan $m\big)$. U jednadžbi (3) koeficijent uz φ_m dva je puta veći od zbroja ostalih, pa je očito da je sustav jednadžbi ravnoteže momenata u čvorovima strogo dijagonalno dominantan. Štoviše, može se pokazati da brzina konvergencije ovisi o omjeru $|a_{m,m}|/|\sum_{i\,(i\neq m)} a_{m,i}|$; omjer 2 može se smatrati vrlo povoljnim, tako da „[v]eć druga aproksimacija daje obično za praktičnu svrhu dovoljnu točnost".

U uvodu članka Čališev ističe: „Kao glavnu zadaću kod proračunavanja okvirnih konstrukcija smatrat ćemo određivanje momenata, koji djeluju na krajevima pojedinih štapova." A ipak, u njegovu su postupku nepoznanice kutovi zaokreta čvorova, dok se vrijednosti momenata izračunavaju naknadno, posredno. Da se vrijednosti momenata na krajevima štapova mogu izravno izračuna(va)ti nekoliko je godina kasnije uočio Hardy Cross [29,30,2].[3] Vezu s Crossovim postupkom Čališev je izveo u udžbeniku [5]: „Određivanje kutova $\varphi_\diamond$ ima zapravo prolazno značenje. Svakoj promjeni $\varphi_\diamond$ odgovara promjena momenata koji djeluju na krajeve štapova. Iz osnovne formule (1) za momente koji djeluju na krajeve štapa vidimo da promjena kuta φ_m zaokreta čvora m ima za posljedicu promjenu momenata, koji djeluju na krajeve štapova, koji pripadaju tom čvoru za veličinu

$$\Delta M_{m,i} = 4k_{m,i}\Delta\varphi_m = -\frac{4k_{m,i}}{\sum_j 4k_{m,j}}\mathfrak{M}_m \tag{10}$$

i da se na protivnim krajevima tih štapova moment promijeni za veličinu

$$\Delta M_{i,m} = 2k_{m,i}\Delta\varphi_m = \tfrac{1}{2}\Delta M_{m,i}\,.\text{"} \tag{11}$$

[3] Prema pregledanim izvorima čini se da je [12] prvi prikaz Crossova postupka na našem jeziku.

Kao što je poznato, koeficijent $\mu_{m,i} = 4k_{m,i}/\sum_j 4k_{m,j}$ u izrazu (10) naziva se razdjelnim koeficijentom, dok je $^1/_2$ u (11) prijenosni koeficijent.

„Ovim je riješen prvi dio zadaće."

2.2 *Djelovanje horizontalne sile u čvoru jednoetažnoga okvira*

„Silu u štapu $\mathscr{A}$ dobivamo iz uvjeta ravnoteže grede, koja je izlučena presjekom položenim kroz sve stupove" neposredno ispod grede. „Projicirajući sve sile na horizontalnu os dobivamo" da je vrijednost sile koja je „jednaka i protusmjerna sili u štapu $\mathscr{A}$"

$$A = H - \sum_{(i,\underline{i})} T_{i,\underline{i}}\,, \tag{12}$$

gdje je H vrijednost rezultante svih zadanih horizontalnih sila, koncentriranih i distribuiranih, koje djeluju na gredu, dok su $T_{i,\underline{i}}$ vrijednosti poprečnih sila u presjecima stupova $(i,\underline{i})$, a zbroj obuhvaća sve presječene stupove. Vrijednost poprečne sile izračunavamo iz uvjeta ravnoteže momenata oko podnožja stupa, tako da je

$$T_{i,\underline{i}} = \frac{1}{h_{i,\underline{i}}}\left(M_{i,\underline{i}} + M_{\underline{i},i}\right) + T^0_{i,\underline{i}}\,, \tag{13}$$

gdje je $T^0_{i,\underline{i}}$ vrijednost poprečne sile na odgovarajućem kraju jednostavno oslonjene grede jednakoga raspona i s istim opterećenjem.

„Pod djelovanjem" sile A „pomaknut će se čvorovi u horizontalnom smjeru za neku veličinu u. Uslijed toga mijenjaju se kutevi, koje zatvaraju smjerovi horizontalnih štapova sa smjerovima stupova.." Smjerom štapa nazvan je smjer pravocrtne spojnice njegovih krajeva; promjenu smjera štapa zvat ćemo zaokretom štapa. Budući da su štapovi u čvoru međusobni kruto spojeni, kutovi između tangenata na njihove elastične linije ne mogu se promijeniti, pa se štapovi savijaju.

„Umjesto da tražimo pomaknuće u, koje odgovara djelovanju dobivene sile A, postupat ćemo obratno t. j. odabrat ćemo isprva pomicanje u po volji, te ćemo zatim odrediti momente na krajevima štapova, koji odgovaraju odabranoj deformaciji sistema. Iz ovih momenata izračunat ćemo odgovarajuću horizontalnu silu. Uzmimo da je to sila B. Pošto su sile linearne funkcije deformacije, momenti su srazmjerni silama. Prave momente, koji nastaju pod djelovanjem sile A dobivamo tako, da pomnožimo dobivene momente sa razlomkom $^A/_B$. [...] To će biti momenti, koji odgovaraju drugom dijelu postavljene zadaće. Potpune momente dobit ćemo tako, da zbrojimo rezultate obih dijelova zadaće."

„Zadaća određivanja momenata, koji odgovaraju horizontalnom pomaknuću u, sasma je slična zadaći o određivanju sporednih momenata, koji nastaju kod rešetkastih nosača uslijed krutosti spojeva u čvorovima." Vratit ćemo se, stoga, na nešto više od godinu i pol stariji članak [3].

2.3 *„O dopunitbenim naprezanjima rešetkastih nosača"*

„[K]od proračunavanja rešetkastih nosača željeznih mostova obično [se] pretpostavlja, da su štapovi spojeni u čvorovima idealnim zglobovima." Pretpostavi li se k tomu još i da vanjske sile djeluju u čvorovima, u štapovima će postojati samo uzdužne sile, te će se štapovi produljiti ili skratiti, ali će pritom ostati ravni. Zbog promjena duljina štapova čvorovi će se pomaknuti, a kutovi, koje štapovi u nekom čvoru međusobno zatvaraju, promijeniti; promjenu kuta između štapova (m,n) i (m,i) priključenih u čvor m označit ćemo sa $\psi_{n,m,i}$. No, „[u] zbilji su" u čvorovima štapovi „čvrsto zakovani", pa se kutovi između štapova ne mogu promijeniti, nego se čvorovi zaokreću kao cjeline, zbog čega se štapovi moraju saviti, tako da će se u njima pojaviti i momenti savijanja.

Rješenje problema naprezanja zbog savijanja u štapovima rešetkastih nosača jedan je od ključnih koraka u razvoju metode pomaka [21, 9]. Prvo je rješenje dao H. Manderla 1878./79. godine. No, kako je u obzir uzeo utjecaj uzdužnih sila na momente savijanja, njegove su jednadžbe nelinearne, pa su stoga bile neprimjerene za primjenu u ondašnjoj inženjerskoj praksi. Rješenje s linearnim jednadžbama objavio je O. Mohr 1892./93. godine. Taj se „način izračunavanja dopunitbenih naprezanja osniva na pretpostavci, da su ugibi čvorova nosača sa čvrstim spojevima isti kao i ugibi čvorova zglobnih nosača." Kut što ga zatvara tangenta na elastičnu liniju štapa (m,n) na kraju m s ravnom osi pomaknutoga štapa u idealiziranom nosaču sa zglobnim čvorovima, označit ćemo sa $\alpha_{m,n}$. Kutove $\alpha_{m,n}$ i $\alpha_{m,i}$ na krajevima m bilo kojih dvaju štapova (m,n) i (m,i) priključenih u čvor m povezuje izraz

$$\alpha_{m,i} = \alpha_{m,n} - \psi_{n,m,i}. \tag{14}$$

Slijedi da u svakom čvoru treba samo jedan kut $\alpha_{\diamond,\diamond}$ smatrati nepoznanicom, a ostale izraziti u ovisnosti o njemu i o poznatim kutovima $\psi_{\diamond,\diamond,\diamond}$. Broj je nepoznanica, prema tome, jednak broju čvorova, a za svaki se čvor može napisati jednadžba ravnoteže momenata.

Još treba izraziti vrijednosti momenata na krajevima štapova u ovisnosti o kutovima $\alpha_{\diamond,\diamond}$. Čališev pritom u obzir uzima „da su krajevi štapova uslijed čvornih lamela apsolutno čvrsti". No, postupak rješavanja sustava jednadžbi ne ovisi o složenosti izraza za momente: „pokazat ću, da uzimanje u obzir skraćivanja slobodne du[lj]ine štapova ne smeta primjeni jednostavnog i zgodnog rješenja zadaće putem postepenog približenja" „po istoj šemi [*sic*], koju upotrebljava prof. Waddell[4] kod rješavanja slične zadaće" primjenom „klasičnoga" izraza

$$M_{m,i} = 4k_{m,i}\,\alpha_{m,i} + 2k_{m,i}\,\alpha_{i,m}. \tag{15}$$

[4] Tôk proračuna podrobno je opisan u [23], uz napomenu da „postupak nipošto nije izvoran auktorov, budući da su stanovita njegova obilježja u većoj ili manjoj mjeri već rabili razni istraživači". I Manderla (prema [15]) i Mohr (prema [21]) predložili su jednostavne iteracijske postupke rješavanja jednadžbi koje su izveli.

Prvo se određuju promjene kutova $\psi_{\diamondsuit,\diamondsuit,\diamondsuit}$ između štapova u pojedinim čvorovima uz pretpostavku zglobnih spojeva. „U tu svrhu upotrijebit ćemo poznatu konstrukciju Williotta." Potom se prelazi na izračunavanje neovisnih kutova $\alpha_{\diamondsuit,\diamondsuit}$ „putem postepenog približenja". „Za prvu aproksimaciju mogu se uzeti vrijednosti po volji. Ipak je zgodnije, ako odredimo prve aproksimacije tako, da podijelimo promjenu kuta skretanja između dvaju najčvršćih štapova motrenog čvora u obrnutom razmjeru prema čvrstoći ovih štapova." S tim se vrijednostima izračunavaju vrijednosti momenata kojima štapovi djeluju na čvorove. No, kako su pretpostavljeni kutovi tek približni, zbrojevi dobivenih vrijednosti momenata u pojedinim čvorovima „izlaze različnima od nule. Naredna će se zadaća sastojati u određivanju takovih [*sic*] ispravaka [za kutove] da bi ti zbrojevi momenata za svaki čvor postali po mogućnosti jednaki nuli." Proglasimo li kut $\alpha_{m,n}$ odabranoga štapa (m,n) kutom zaokreta čvora m, $\alpha_{m,n} = \varphi_m$, za ostale kutove možemo, uz $\psi_{n,m,i} = \psi_{m,i}$, pisati $\alpha_{m,i} = \varphi_m - \psi_{m,i}$. Uvrštavanjem u izraz (15) dobivamo poznati izraz

$$M_{m,i} = 4k_{m,i}\varphi_m + 2k_{m,i}\varphi_i - 6k_{m,i}\psi_{m,i}; \qquad (16)$$

ako su dijelovi krajeva štapova „negipki", izraz će biti nešto složeniji. Kako su kutovi $\psi_{\diamondsuit,\diamondsuit}$ poznati, vrijednost $-6k_{m,i}\psi_{m,i}$ možemo smatrati vrijednošću $\overline{M}_{m,i}$ momenta upetosti. Budući da se proračun „osniva na pretpostavci, da su ugibi čvorova nosača sa čvrstim spojevima isti kao i ugibi čvorova zglobnih nosača", čvorovi su translacijski nepomični, pa dalji „hod proračunavanja" „putem postepenog približenja" može biti kao u pododjeljku 2.1. Time smo, naizgled, zatvorili začarani krug. S današnjega je gledišta opisani postupak izračunavanja „dopunitbenih naprezanja" tek poseban slučaj iteracijskoga rješavanja jednadžbi metode pomaka za sisteme s translacijski nepomičnim čvorovima, u kojem su momenti upetosti određeni poznatim zaokretima štapova. Povijesni je tijek, međutim, bio „protusmjeran": postupak, koji su Manderla, Mohr, Waddell, pa i sâm Čališev razvili za proračun „dopunitbenih" naprezanja u štapovima rešetkastih nosača, Čališev je u [4] proširio na rješavanje okvirnih konstrukcija s translacijski nepomičnim i s (horizontalno) pomičnim čvorovima. Tako razvoj iteracijskih postupaka slijedi razvoj inženjerske metode pomaka: Bendixsenova je formulacija proširenje područja primjene Mohrova postupka s rešetkastih na okvirne nosače [9].

2.4 Višeetažni okviri

Krenemo li od najviše etaže nadolje vrijednost sile koja je „jednaka i protusmjerna" reakciji u pridržajnom štapu u etaži r okvira s vertikalnim stupovima i horizontalnim gredama dobivamo, uz promjenu predznaka, iz uvjeta ravnoteže dijela okvira iznad presjeka kroz sve stupove te etaže, neposredno ispod njezine „stropne" grede:

$$A_r = H_{r,\mathrm{g}} + \sum\nolimits_{e>r} H_e - \sum\nolimits_{(i,\underline{i})\in r} T_{i,\underline{i}} - \sum\nolimits_{e>r} A_e. \qquad (17)$$

Pritom je $H_{r,\mathrm{g}}$ vrijednost rezultante zadanih horizontalnih sila koje djeluju na gredu etaže r, dok su H_e vrijednosti rezultanata zadanih horizontalnih sila koje djeluju na stupove i grede etaže e, pa se zbroj u drugom pribrojniku proteže po svim etažama iznad etaže r. Treći je pribrojnik zbroj vrijednosti poprečnih sila u presjecima stupova etaže r; te se vrijednosti izračunavaju prema izrazu (13).

„Imademo li n redova, to je deformacija određena sa n koordinata, a to su pomaknuća $u_\diamondsuit$ odgovarajućih redova. [...] Pomoću postepenih aproksimacija možemo najprije da izračunamo za svaku deformaciju $u_i = 1$ momente na krajevima štapova, uzevši, da su ostala pomaknuća $u_\diamondsuit = 0$. Dobiveni momenti daju nam odgovarajuće horizontalne sile $A_{1,i}$, $A_{2,i}$ i $A_{n,i}$. Da odredimo n nepoznanica u_i sastavit ćemo sistem n linearnih jednadžbi" oblika

$$A_e = A_{e,1}u_1 + A_{e,2}u_2 + +A_{e,3}u_3 + \cdots + A_{e,n}u_n. \qquad (18)$$

Jasno je da je pri većem broju „redova" takav postupak dugotrajan i zamoran. Uz to, ponovno se pojavljuje problem rješavanja sustava jednadžbi (taj je sustav, doduše, znatno manji no što bi bio da su i kutovi $\varphi_\diamondsuit$ nepoznanice).

„Radi toga ćemo i u tom slučaju primijeniti način postepenih aproksimacija. Odabrat ćemo u početku horizontalna pomaknuća $u_\diamondsuit$ tako, da se ona makar i grubo približuju deformaciji sistema. Pošto u praksi najčešće dolaze slučajevi, u kojima su krutosti horizontalnih štapova mnogo veće nego li krutosti vertikalnih, zgodno je da uzmemo kao prvo približenje deformaciju, koja odgovara apsolutnoj krutosti horizontalnih štapova"; to, zapravo, znači da će se čvorovi horizontalno pomaknuti, ali da se pritom neće zaokrenuti. Ako su svi stupovi etaže r iste duljine h_r, zaokrenut će se za kut

$$\psi_r = -\frac{u_r - u_{r-1}}{h_r}. \qquad (19)$$

Izrazimo li u jednadžbi ravnoteže horizontalnih sila na dijelu okvira iznad presjeka kroz te stupove,

$$\sum\nolimits_{e\geq r} A_e - \sum\nolimits_{(i,\underline{i})\in r} T_{i,\underline{i}} = 0, \qquad (20)$$

vrijednosti $T_{i,\underline{i}}$ u ovisnosti o $M_{i,\underline{i}}$ i $M_{\underline{i},i}$ prema izrazu (13), uz $T^0_{i,\underline{i}} = 0$ (jer sile A_e djeluju u čvorovima), uz

$$M_{i,\underline{i}} = M_{\underline{i},i} = -6k_{i,\underline{i}}\psi_r, \qquad (21)$$

dobit ćemo

$$\psi_r = -\frac{1}{12\sum_{(i,\underline{i})\in r} k_{i,\underline{i}}}\, h_r \sum\nolimits_{e\geq r} A_e. \qquad (22)$$

Uvrštavanje tih kutova u (21) daje vrijednosti momenata upetosti u stupovima. Grede su apsolutno krute, pa u njima momenata upetosti nema. Sada možemo dodati zamišljene pridržajne štapove i „putem postepenog približenja" izračunati vrijednosti momenata koji odgovaraju odabranim „pomaknućima" i stvarnim krutostima greda. Potom ćemo za te vrijednosti izračunati vrijednosti $B_\diamondsuit$ pridržajnim reakcijama „jednakih i protusmjernih" sila. Drugim riječima, dobili smo ravnotežnu konfiguraciju za djelovanje sila vrijednosti kojih su $B_\diamondsuit$ umjesto zadanih $A_\diamondsuit$.

Što je omjer krutosti greda i stupova veći, to će biti manja razlika između vrijednosti A_i i B_i u pojedinim „redovima”. Čališev predlaže da se za približno rješenje umjesto vrijednostî $B_\diamondsuit$ uzmu vrijednosti $\eta B_\diamondsuit$, pri čemu iz uvjeta da je zbroj kvadrata razlika između A_i i ηB_i minimalan dobiva $\eta = \sum_i A_i B_i / \sum_i b_i^2$. Prema [5] već to rješenje „u mnogim slučajevima prakse potpuno zadovoljava”. No, ako su razlike između vrijednosti A_i i ηB_i prevelike, proračun treba ponoviti sa silama vrijednosti kojih su $\Delta A_i = A_i - \eta B_i$ pa rezultate pribrojiti prethodnima.

Oba je postupka — postupak koji vodi na sustav jednadžbi i „način postepenih aproksimacija” — ponovno otkrio Cross nakoliko godina kasnije [2]. Naravno, za razliku od Čališeva, Cross u provedbi postupka razdjeljuje vrijednosti neuravnoteženih momenata.

3 Kanijev postupak

Iteracijski postupak rješavanja okvira s translacijski pomičnim čvorovima u dva koraka — rješavanjem pridržanoga okvira i poništavanjem pridržajnih sila — naziva se dvostrukom iteracijom. Postupak jednostruke iteracije, koji odgovara Ostenfeldovoj formulaciji inženjerske metode pomaka, uveo je Gašpar Kani [8].

Izraz za ukupnu vrijednost momenta na kraju i štapa (i, j) Kani piše u obliku

$$M_{i,j} = 2M'_{i,j} + M'_{j,i} + M''_{i,j} + \overline{M}_{i,j}, \tag{23}$$

pri čemu su

$M'_{i,j} = 2k_{i,j}\,\varphi_i$ polovina vrijednosti momenta izazvanoga zaokretom čvora na istom kraju za kut φ_i,

$M'_{j,i} = 2k_{i,j}\,\varphi_j$ vrijednost momenta izazvanog zaokretom čvora na drugom kraju za kut φ_j i

$M''_{i,j} = -6k_{i,j}\,\psi_{i,j}$ vrijednost momenta izazvanog zaokretom štapa za kut $\psi_{i,j}$.

Iz jednadžbe ravnoteže momenata koji djeluju na čvor a nakon sređivanja dobivamo izraz za zbroj $\sum_i 2M'_{a,i}$ vrijednosti momenata na priključenim krajevima štapova zbog zaokreta tog čvora, potreban za njegovo uravnoteženje. Taj ćemo zbroj, kao i u Crossovu postupku, razdijeliti na bliže krajeve priključenih štapova:

$$M'_{a,b} = \mu_{a,b}\left(\sum\nolimits_i M'_{i,a} + \sum\nolimits_i M''_{a,i} + \overline{M}_a\right) \tag{24}$$

uz $\overline{M}_a = \sum_i \overline{M}_{a,i}$. Koeficijent

$$\mu_{a,b} = -\frac{1}{2}\,\frac{k_{a,b}}{\sum_i k_{a,i}} \tag{25}$$

nazivamo rotacijskim razdjelnim koeficijentom. Za razliku od Crossa, koji prije razdiobe mijenja predznak vrijednosti neuravnoteženoga momenta, što se može fizikalno interpretirati kao poništavanje neuravnoteženoga momenta dodavanjem momenta suprotnoga smisla vrtnje, Kani predznak ‚–’ pridružuje razdjelnom koeficijentu. U Kanijevu se postupku uz to izračunavaju i zapisuju polovine vrijednosti momenata na krajevima bližima čvoru, pa je $\sum_i \mu_{a,i} = -1/2$; kod Crossa je $\sum_i \mu_{a,i} = 1$.

Osim što je $M'_{i,j} = 2k_{i,j}\,\varphi_i$ polovina vrijednosti momenta na i-tom kraju štapa zbog zaokreta čvora i za kut φ_i, to je i vrijednost momenta na kraju j zbog istoga uzroka. Kani stoga ne „prenosi momente”, nego pri izračunavanju vrijednosti neuravnoteženoga momenta u nekom čvoru pribraja vrijednosti momenata zapisane na daljim krajevima u taj čvor priključenih štapova.

Najveća je, međutim, razlika u tome što Cross pri uravnoteženju čvora izračunava priraste vrijednosti momenata, koji teže k nuli, pa se konačna vrijednost dobiva zbrajanjem svih prirasta, dok Kani izračunava ukupne vrijednosti koje teže k traženoj vrijednosti. Crossova je iteracija diferencijska, a Kanijevu ćemo nazvati potpunom.

Osim vrijednosti momenata zbog zaokreta čvorova u sistemima s translacijski pomičnim čvorovima nepoznate su i vrijednosti momenata zbog zaokreta štapova, pa uravnoženja momenata u čvorovima nisu dovoljna za izračunavanje svih nepoznatih vrijednosti. Ciklusi uravnoteženja čvorova, u kojima se svaki čvor uravnotežuje po jedanput, izmjenjuju se sa ciklusima uravnoteženja etaža.

Uvjet ravnoteže horizontalnih sila koje djeluju na dio okvira iznad presjeka kroz sve stupove etaže r, neposredno ispod grede, izražavamo jednadžbom

$$H_{r,\mathrm{g}} + \sum\nolimits_{e>r} H_e - \sum\nolimits_{(i,\underline{i})\in r} T_{i,\underline{i}} = 0. \tag{26}$$

Izraz (13) za vrijednost poprečne sile na vrhu stupa, uz $M_{i,\underline{i}}$ i $M_{\underline{i},i}$ prema izrazu (23) i uz $M''_{\underline{i},i} = M''_{i,\underline{i}}$, daje

$$T_{i,\underline{i}} = \frac{1}{h_r}\left(3M'_{i,\underline{i}} + 3M'_{\underline{i},i} + 2M''_{i,\underline{i}}\right) + \overline{T}_{i,\underline{i}}, \tag{27}$$

gdje vrijednost

$$\overline{T}_{i,\underline{i}} = T^0_{i,\underline{i}} + \frac{1}{h_{i,\underline{i}}}\left(\overline{M}_{i,\underline{i}} + \overline{M}_{\underline{i},i}\right) \tag{28}$$

ovisi samo o poznatim vrijednostima zadanih opterećenja. Uvrstimo li izraz (27) u jednadžbu ravnoteže (26), dobit ćemo izraz za zbroj $\sum_{(i,\underline{i})\in r} M''_{i,\underline{i}}$ vrijednosti momenata od zaokreta stupova etaže r potreban za zadovoljenje te jednadžbe, koji potom razdjeljujemo na stupove:

$$M''_{a,\underline{a}} = M''_{\underline{a},a} = \nu_{a,\underline{a}}\left[\sum\nolimits_{(i,\underline{i})\in r}\left(M'_{i,\underline{i}} + M'_{\underline{i},i}\right) + \tfrac{1}{3}\overline{M}_r\right]; \tag{29}$$

pritom je

$$\nu_{a,\underline{a}} = -\frac{3}{2}\,\frac{k_{a,\underline{a}}}{\sum_{(i,\underline{i})\in r} k_{i,j}} \tag{30}$$

translacijski razdjelni koeficijent, dok je

$$\overline{M}_r = -\left(H_{r,\mathrm{g}} + \sum\nolimits_{e>r} H_e - \sum\nolimits_{(i,\underline{i})\in r} \overline{T}_{i,\underline{i}}\right) h_r \tag{31}$$

vrijednost momenta, koji ćemo nazvati momentom zaokretanja etaže r zbog zadanih (horizontalnih) sila. Budući da su $M''_{a,\underline{a}} = M''_{\underline{a},a}$, Kani vrijednost zapisuje jednom, na sredini visine stupa.[5]

Kani, a i Čališev prije njega, dopuštaju stupove različitih visina u nekoj etaži (primjerice, u najdonjoj etaži, ako su ležajevi na različitim razinama). U tom će slučaju kutovi zaokreta tih stupova biti različiti, pa se dobivaju složeniji izrazi. Izrazi će biti složeniji i ako osim upetih postoje i zglobni ležajevi.

Kanijeva je metoda ušla u brojne svjetske udžbenike statike, primjerice [13, 24]. Treba ipak reći da u vrijeme objavljivanja knjižice [8] Kani više nije bio član našega zavoda, jer je iz državne službe otpušten 1945. godine [20].

4 Postupak O. Wernera

4.1 Proračun „pravilnih" okvira

Postupak Otta Wernera omogućava u nekim, ali u inženjerskoj praksi čestim, slučajevima zamjetno smanjenje opsega proračuna okvira s translacijski pomičnim čvorovima, opterećenih horizontalnim silama u čvorovima. O. Werner je postupak „iznio u predavanju u projektnom zavodu PLAN Zagreb, god. 1951." [28], ali izvornu inačicu sâm nije nikada prikazao u nekoj stručnoj ili znanstvenoj publikaciji. Opis, na koji se naš prikaz oslanja, dan je u [18] i, nešto opširnije, u [19].

Za simetrične višeetažne okvire s jednim rasponom već prva faza postupka daje konačno rješenje.[6] Horizontalne sile u čvorovima rastavljamo na simetrični i antimetrični dio. Promjene duljina greda zbog utjecaja uzdužnih sila ne uzimaju se u obzir, pa za simetrično opterećenje nema momenata savijanja. Pri antimetričnom je pak djelovanju polje pomaka simetrične konstrukcije antimetrično, što znači da su kutovi zaokreta obaju čvorova etaže jednaki, da se polovišta raspona greda ne pomiču po vertikali te da su u tim polovištima točke infleksije progibnih linija greda. Kako u točki infleksije zakrivljenost iščezava, u polovištu je raspona vrijednost momenta savijanja jednaka nuli. Umjesto cijeloga sistema možemo stoga promatrati samo jednu njegovu polovicu, uz odgovarajuće rubne uvjete u osi simetrije — pomične zglobne ležajeve koji sprečavaju vertikalne, a dopuštaju horizontalne pomake i zaokrete. Takav se sistem naziva poluokvirom. Radi lakšega poopćenja postupka na nesimetrične i na višerasponske okvire zamislit ćemo da je poluokvir umjesto „rezanjem" nastao „preklapanjem" dviju polovica okvira oko osi simetrije, a u čvorove poluokvira stavit ćemo sile jednake silama na okviru.

Ako okvir nije simetričan, polje pomaka pod antimetričnim opterećenjem neće biti antimetrično, no u prvoj ćemo fazi proračuna uzeti da su kutovi zaokreta obaju čvorova etaže jednaki. Štoviše, i za višerasponski ćemo okvir uzeti da su kutovi zaokreta svih čvorova etaže jednaki, te će točke infleksije progibnih linija greda biti u polovištima njihovih raspona, tako da okvir, preklapanjem u polovištima raspona greda, možemo i sada zamijeniti poluokvirom koji proračunavamo relaksacijskim postupkom sličnim Crossovu postupku — koraci su analogni, ali su drugačiji razdjelni i prijenosni koeficijenti.

Za razliku od Crossova postupka, pri uravnoteženju pojedinih čvorova zaokretanjem njihove horizontalne pomake ne sprečavamo. Dopustimo li pri zaokretanju vrha stupa njegovo pomicanje, stup će se ponašati kao konzola upeta u podnožju. Da bi se njezin vrh zaokrenuo za kut φ_r, u njemu mora djelovati moment vrijednost kojega je

$$M_{r,r-1} = k_r\,\varphi_r, \tag{32}$$

pri čemu je koeficijent krutosti stupa poluokvira jednak zbroju koeficijenata krutosti stupova odgovarajuće etaže okvira. Na dnu je konzole vrijednost momenta

$$M_{r-1,r} = -M_{r,r-1}, \tag{33}$$

što znači da je prijenosni koeficijent po stupu -1. Analogni se izrazi mogu napisati za zaokret podnožja stupa.

Grede su jednostrano upete, pa za vrijednost momenta na upetome kraju zbog zaokreta čvora vrijedi izraz

$$M_{r,\mathrm{g}} = 3\,k_{r,\mathrm{g}}\,\varphi_r; \tag{34}$$

koeficijent krutosti grede poluokvira jednak je zbroju četverostrukih koeficijenata krutosti greda etaže izvornoga okvira (preklapanjem polovica greda njihovi se momenti tromosti udvostručuju, a rasponi raspolovljuju).

Čvor r na koji djeluje neuravnoteženi moment s vrijednošću $\mathfrak{M}_r^{(\beta_i)}$ uravnotežujemo dodatnim zaokretanjem za kut $\Delta\varphi_i^{(\beta_i+1)}$. Uz izraze (34), (32) i analogni izraz za vrijednost momenta na dnu stupa etaže $r+1$ zbog njegova zaokreta dobivamo

$$\Delta\varphi_r^{(\beta_i+1)} = -\frac{1}{3\,k_{r,\mathrm{g}} + k_r + k_{r+1}}\,\mathfrak{M}_r^{(\beta_r)}, \tag{35}$$

pa „povratak" u te izraze za razdjelne koeficijente daje

$$\mu_{r,\mathrm{g}} = \frac{3\,k_{r,\mathrm{g}}}{K_r}, \quad \mu_{r,r-1} = \frac{k_r}{K_r} \quad \text{i} \quad \mu_{r,r+1} = \frac{k_{r+1}}{K_r}, \tag{36}$$

gdje je $K_r = 3\,k_{r,\mathrm{g}} + k_r + k_{r+1}$.

I vrijednosti se momenata upetosti u stupovima izračunavaju uz slobodne pomake čvorova. Kako su vrijednosti poprečnih sila poznate, $T_r = \sum_{e\geq r} H_e$, iz jednadžbi rav-

[5] I način zapisivanja proračunskih (među)vrijednosti ima svoju povijest. Waddell i Čališev upisivali su ih u tablice. Pregledniji zapis u topološku shemu konstrukcije uveo je Cross. Iako je time možda zamutio fizikalno značenje postupka, Kani je pozornost posvetio i sažetosti zapisa: predznak ‚–' uključuje u razdjelne koeficijente, pri uravnoteženju etaža vrijednosti razdijeljenih momenata zapisuje samo jednom, dok pri uravnoteženju čvorova zapisuje samo polovine vrijednosti, bez prenošenja. Spomenut ćemo da je u [2] opisan i „skraćeni" Crossov postupak u kojem se ne zapisuju razdijeljene, nego samo prenesene vrijednosti momenata „pa na kraju [možemo] naći zbroj izvornih momenata upetosti i prenesenih momenata te razdijeliti taj neuravnoteženi iznos".

[6] Uz to, konačno se rješenje odmah dobiva i za višerasponske okvire ako su krutosti svih greda jedne etaže jednake te ako su krutosti vanjskih stupova upola manje od krutosti unutarnjih.

noteže momenata oko njihovih podnožja dobivamo

$$\overline{M}_{r,r-1} = \overline{M}_{r-1,r} = \tfrac{1}{2}\,T_r\,h_r. \tag{37}$$

V. Simović je u [18, 19] pokazao kako se primjenom statičke kondenzacije „do koeficijenata za proračun po ovoj metodi može doći i indirektno iz jednadžbi metode pomaka”. Statička je kondenzacija postupak uklanjanja kuta zaokreta ili duljine pomaka iz skupa nepoznanica, uz istodobno smanjivanje broja jednadžbi ravnoteže, na temelju poznatoga statičkog uvjeta. Kako su zadane sile u čvorovima jedine vanjske horizontalne sile, vrijednosti $T_r = \sum_{e \geq r} H_e$ poprečnih sila u stupovima ne mijenjaju se tijekom relaksacije. Izrazimo li u jednadžbi

$$M_{r-1,r} + M_{r,r-1} = T_r\,h_r \tag{38}$$

vrijednosti momenata u ovisnosti o kutu zaokreta stupa etaže r i o kutovima zaokreta čvorova u koje je stup priključen, iz dobivene jednadžbe možemo kut zaokreta stupa izraziti u ovisnosti o kutovima zaokreta čvorova

$$\psi_r = \frac{1}{2}\,\varphi_{r-1} + \frac{1}{2}\,\varphi_r + \frac{1}{12\,k_r}\,T_r\,h_r. \tag{39}$$

Uz to, umjesto $T_r\,h_r$ možemo prema (37) pisati $2\overline{M}_{r,r-1}$. Analogni izraz možemo izvesti za kut zaokreta ψ_{r+1} stupa etaže $r+1$. Izrazimo li potom u jednadžbi ravnoteže momenata u čvoru r vrijednosti momenata u ovisnosti o kutovima φ_{r-1}, φ_r, φ_{r+1}, ψ_r i ψ_{r+1} te uvrstimo netom izvedene izraze za ψ_r i ψ_{r+1}, dobit ćemo

$$\begin{aligned} -k_r\,\varphi_{r-1} + \left(k_r + k_{r+1} + 3\,k_{r,\mathrm{g}}\right)\varphi_r& \\ - k_{r+1}\,\varphi_{r+1} = \overline{M}_{r,r-1} + \overline{M}_{r,r+1}&. \end{aligned} \tag{40}$$

Kako smo iz skupa nepoznanica uklonili kutove zaokreta stupova, a time i, prema izrazu (19), duljine horizontalnih pomaka čvorova, H. Werner postupak naziva metodom eliminiranih pomaka [25].

Jednadžba (40) pokazuje da je sustav koji rješavamo strogo dijagonalno dominantan, pri čemu koeficijent uz φ_r nije tek nešto veći, nego je višestruko veći od zbroja koeficijenata uz druge dvije nepoznanice, tako da Wernerov postupak konvergira vrlo brzo.

Po završetku relaksacijskoga postupka na poluokviru vraćamo se na okvir tako da vrijednosti momenata koje smo izračunali na poluokviru razdijelimo na odgovarajuće elemente okvira u omjerima njihovih krutosti. U nesimetričnim jednorasponskim i u višerasponskim okvirima pretpostavka o jednakosti kutova zaokreta svih čvorova jedne etaže nije ispunjena, pa uvjeti ravnoteže momenata u čvorovima neće biti zadovoljeni. U nastavku proračuna Crossovim postupkom (za sisteme s translacijski nepomičnim čvorovima) uravnotežujemo čvorove okvira. Izračunamo li nakon toga vrijednosti poprečnih sila u stupovima, ustanovit ćemo da te sile nisu u ravnoteži sa zadanim horizontalnim silama, što znači da smo uravnoteženjem momenata narušili ravnotežu horizontalnih sila ostvarenu proračunom na poluokviru. Naime, u različitim fazama proračuna neovisno zadovoljavamo različite uvjete ravnoteže. U prvoj smo fazi relaksacijom na poluokviru zadovoljili uvjete ravnoteže horizontalnih sila. Ti uvjeti ostaju zadovoljeni neposredno nakon vraćanja momenata na okvir razdiobom u omjerima krutosti, ali u tom trenutku ne postoji ravnoteža momenata u čvorovima. U drugoj fazi Crossovim postupkom uravnotežujemo momente, ali se pritom mijenjaju vrijednosti poprečnih sila u stupovima, a time i ukupne vrijednosti horizontalnih sila u pojedinim etažama. Želimo li točnije rezultate, cijeli bismo ciklus — obje faze proračuna — mogli ponoviti opterećujući poluokvir neuravnoteženim dijelom horizontalnih sila. Daljnjim se ponavljanjem ciklusâ može postići bilo koju točnost. Iako su ciklusi, nakon prvoga, razmjerno kratkotrajni, ponavljanje je ciklusa ipak mukotrpno i oduzima vrijeme. Uvođenje popravnoga koeficijenta omogućava prekid postupka, uz točnost dovoljnu „za sve praktične potrebe”, već nakon prvoga ili, u najgorem slučaju, nakon drugog ciklusa. Neka, neovisno o tome o kojem je ciklusu riječ, $\mathcal{T}_r$ označava vrijednost poprečne sile u r-tom stupu poluokvira, a $\mathcal{T}_r'$ zbroj vrijednosti poprečnih sila u stupovima r-te etaže okvira nakon uravnoteženja momenata. Razlike $|\mathcal{T}_r| - |\mathcal{T}_r'|$ mogu imati isti predznak za sve r. To znači da treba intenzitete svih sila povećati (predznak ‚+’) ili smanjiti (predznak ‚–’). S dovoljnom se točnošću to može napraviti množenjem vrijednosti uravnoteženih momenata koeficijentom $\alpha = \sum_e |\mathcal{T}_e|\,h_e / \sum_e |\mathcal{T}_e'|\,h_e$. Druga je, nepovoljnija, mogućnost: razlike $|\mathcal{T}_r| - |\mathcal{T}_r'|$ različitih su predznaka. Tada intenzitete nekih sila treba povećati, a nekih smanjiti, pa se popravni koeficijent ne može upotrijebiti; ciklus treba ponoviti.

4.2 Postupak Werner / Naylor / Csonka kao primjer „istodobnoga otkrića”

Opisani se postupak u Arhitektonskom projektnom zavodu PLAN u Zagrebu počeo primjenjivati 1951. godine. „Ta je metoda”, prema [16], „razrađena za internu upotrebu u projektnom zavodu PLAN. U tu svrhu je uprava zavoda dala razraditi jedan uzorni primjerak takovoga [*sic*] načina računanja kao uputu za upotrebu projektantima zavoda. [...] Po tako razrađenoj metodi dr. ing. Wernera proračunat je niz okvira u projektnom zavodu PLAN, kao na primjer: Istovarna stanica žičare tvornice cementa u Beočinu (br. 01–003 od 25. I, 1952.), Istovarna stanica žičare tvornice cementa u Podsusedu (br. 981/28 od 28. XII. 1951.) i t. d. Nažalost saradnici [*sic*] PLANa propustili su da pravovremeno objave svoju metodu.”

Gotovo u isto to vrijeme dvojica su autora, N. Naylor i P. Csonka, objavili članke [34] i [31] u kojima su opisali postupke utemeljene na istoj zamisli: „promatranj[u] stupova sistema kod horizontalnih pomaka kao konzola” [16]. Postoje, međutim, razlike u načinima izvođenja osnovnih izraza i provedbi proračuna. Uz to, Naylor se (barem prema prikazu u [11]) ograničio na proračun simetričnoga okvira s jednim rasponom.

Naylor izdvaja podsistem sastavljen od dva stupa AB i BC, jednoga iznad drugog, i grede BD, u zajedničkom čvoru B kruto spojenih. Donji je stup upet u podnožju A, a gornji ima na vrhu C klizni spoj koji dopušta horizontalni pomak, ali ne i zaokret; greda na kraju D ima horizontalno pomični zglobni ležaj. I Naylor je uočio da se pri uravnoteženju momenata zaokretanjem čvora B, ako su dopušteni pomaci čvorova B, D i C po horizontalnim pravcima, stupovi ponašaju kao konzole, a da greda odgovara polovini grede u simetričnom okviru, te iz toga izvodi razdjelne i prijenosne koeficijente (prema [11]).

Csonka, prema [16], okvir dijeli „na toliko odsječaka, koliko ima etaža u toj konstrukciji tako, da svaki odsječak sadrži gredu etaže sa stupovima, koji su vezani sa tom gredom iznad i ispod grede. Dna i vrhovi pripadajućih stupova se smatraju potpuno uklješteni. [. . .] Treba naći, kako se raspodjele momenti u gredi i stupovima, kad se svi čvorovi tog odsječka zaokrenu za jednaki kut φ i kad nastane takav horizontalni pomak gornjeg i donjeg kraja (Δ' i Δ'') tog odsječka, da bude suma poprečnih sila jednaka nuli. [. . .] Uz uslov, da su svi stupovi jednake visine i da njihovi krajevi u promatranoj etaži imaju jednake uvjete pričvršćenja i uz uslov, da su momenti tako raspodijeljeni, da zakrenu kraj stupa za kut φ, a pomak da je toliki (Δ' ili Δ''), da je poprečna sila na kraju stupa jednaka nuli, možemo promatrati stupove kao niz konzola," pa je razdjelni koeficijent $\gamma_{m,i} = C_{m,i}\,k_{i,m}/\sum_j C_{m,j}\,k_{m,j}$, gdje su vrijednosti koeficijenta $C_{m,i}$ za krajeve greda 6, a za krajeve stupova uz gredu 1. Dok je Wernerov postupak namijenjen rješavanju „drugoga dijela" Čališevljeve zadaće, Csonkina je iteracija jednostruka.

4.3 Proračun po teoriji drugoga reda

Početkom šezdesetih godina O. Werner je zamisli postupka primijenio za geometrijski nelinearan proračun simetričnih okvira s jednim rasponom [28]. „Kod vitkih visokih konstrukcija sa velikim vertikalnim opterećenjem postaje utjecaj uslijed promjene oblika sistema tako velik, da se više ne bi smio zanemariti. Takve konstrukcije, u prvom redu visoke okvire sa dva stupa, treba proračunavati po teoriji drugog reda," to jest, jednadžbe ravnoteže treba postavljati na deformiranom sistemu. „Izvodi su razrađeni uz pretpostavku da će se okvir" na koji djeluju horizontalne sile „deformirati antimetrično i da su dodatne sile u presjecima koje nastaju uslijed deformacije male prema silama koje se dobivaju bez utjecaja deformacije, tj. da povećanje momenata savijanja ne iznosi više od 30%, što se može smatrati ekstremnim povećanjem kod konstrukcija sa dovoljnim stabilitetom."

Vrijednosti momenata upetosti u stupu poluokvira etaže r izračunavamo, kao i prije, iz uvjeta ravnoteže momenata u odnosu na njegovo podnožje. Sada, međutim, u obzir uzimamo i moment koji uzdužna sila vrijednosti N_r uzrokuje zbog razlike duljina horizontalnih pomaka čvorova r na vrhu stupa i $r-1$ na njegovu dnu: $\Delta u_r = u_r - u_{r-1}$. Uz $Q_r = \sum_{e\geq r} H_e$ jednadžba je ravnoteže momenata

$$\overline{M}_{r,r-1} + \overline{M}_{r-1,r} - Q_r\,h_r - N_r\,\Delta u_r = 0. \tag{41}$$

Kako su $\overline{M}_{r,r-1} = \overline{M}_{r-1,r} = -6\,k_r\,\psi_r$ i $\Delta u_r = -\psi_r\,h_r$, bit će

$$\psi_r = -\frac{1}{1-\frac{1}{2}\gamma_r}\,\frac{Q_r\,h_r}{12\,k_r}, \tag{42}$$

gdje je

$$\gamma_r = \frac{N_r\,h_r}{6\,k_r}, \tag{43}$$

pa „povratak" u izraz za momente upetosti daje

$$\overline{M}_{r,r-1} = \overline{M}_{r-1,r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\gamma_r}\,\frac{Q_r\,h_r}{2}. \tag{44}$$

Pri zaokretu čvora r za kut φ_r on će se, pretpostavimo li da je progibna linija stupa parabola drugoga stupnja (s vertikalnom tangentom na dnu, jer je zaokret čvora $r-1$ još uvijek spriječen), dodatno pomaknuti za

$$\delta\Delta u_r = -\tfrac{1}{2}\,\varphi_r\,h_r. \tag{45}$$

Pritom će se zbog djelovanja uzdužne sile intenzitet momenta na dnu stupa povećati u odnosu na intenzitet na vrhu za $|N_r\,\delta\Delta u_r|$. Po visini stupa vrijednosti momenata mijenjaju se po paraboli drugog stupnja, pa primjenom metode jedinične sile dobivamo

$$\varphi_r = \frac{1}{k_r}\Big(M_{r,r-1} + \tfrac{1}{3}\,N_r\,\varphi_r\,h_r\Big), \tag{46}$$

odnosno,

$$M_{r,r-1} = k_r\,\big(1-2\gamma_r\big)\,\varphi_r, \tag{47}$$

tako da će pri razdiobi momenata u čvoru r stup etaže r sudjelovati s „koeficijentom krutosti"

$$k'_r = k_r\,(1-2\gamma_r). \tag{48}$$

Za vrijednost momenta u podnožju stupa dobivamo

$$M_{r-1,r} = -M_{r,r-1} + N_r\,\delta\Delta u_r = -k_r\,\big(1+\gamma_r\big)\,\varphi_r, \tag{49}$$

pa slijedi da je prijenosni koeficijent

$$\frac{M_{r-1,r}}{M_{r,r-1}} = -\frac{1+\gamma_r}{1-2\gamma_r}. \tag{50}$$

4.4 Još neka poopćenja

Izrazi za vrijednosti momenata upetosti te za prijenosni i za razdjelne koeficijente u izvornoj su inačici postupka (pododjeljak 4.1) izvedeni za okvire s horizontalnim gredama i vertikalnim stupovima, pri čemu su ležajevi stupova najdonje etaže istoga tipa i u istoj razini. U habilitacijskom je radu [17] Veselin Simović izveo odgovarajuće izraze za jednorasponski okvir s kosim stupovima u najdonjoj etaži. „Rješavanje ovog sistema komplicira činjenica da ovdje osim horizontalnih pomaka čvorova imamo i vertikalni pomak koji utiče na momente u čitavom sistemu." Vertikalna se komponenta pomaka pojavljuje zato što se čvor na vrhu kosoga stupa giba po okomici na njegovu os. Zbog vertikalnoga pomaka čvorova zaokreću se i grede, pa i u njima postoje momenti upetosti. Nadalje, na momente upetosti u kosom stupu osim horizontalnih sila u čvorovima utjecat će i rezultanta vertikalnih reakcija poluokvira. U usporedbi s izvornom inačicom složeniji su, naravno, i izrazi za razdjelne koeficijente u čvoru na vrhu kosoga stupa te izraz za prijenosni koeficijent po tom stupu.

Heinrich Werner je u članku [25] pokazao „da se metoda može poopćiti za rješavanje svih okvira sa neovisno pomičnim etažama. [...] Pod time podrazumijevamo mogućnost relativnog pomicanja dviju susjednih greda uz zadržavanje njihovog nedeformiranog stanja. Pri tome se deformiraju samo stupovi etaže koja se nalazi između tih greda." Stupovi, dakle, ne moraju biti vertikalni niti grede horizontalne: pomak je etaže neovisan ako se „osi svih stupova te etaže sijeku u jednoj točki" (koja će biti beskrajno daleko ako su stupovi vertikalni). I k tomu još, dopušteni su i različiti ležajni uvjeti.

U članku [26] prikazan je primjer rješavanja prostornog sistema dvostrukom iteracijom. „To je okvirni toranj sa četiri paralelna stupa, čije osi čine bridove pravokutne prizme. [...] [S]istem ima dvije ravnine simetrije." Dvije značajke čine taj razmjerno jednostavan prostorni problem znatno složenijim od ravninskoga. Ponajprije, ako glavne osi tromosti poprečnih presjeka stupova nisu okomite na ravnine stranica prizme u kojima leže okviri, zaokret čvora oko osi koja je okomita na jednu ravninu (pri relaksaciji u toj ravnini) izazvat će momente savijanja ne samo oko nje, nego i oko osi okomite na drugu ravninu (treba ih, stoga, uravnotežiti u toj drugoj ravnini). I drugo, rezultante sila u horizontalnim ravninama kroz čvorove ne moraju sjeći os tornja. Svedemo li ih na os, mogu se pojaviti i momenti oko nje — postojat će, dakle, i torzijsko opterećenje tornja. Ipak, zbog simetrija sistema rezultirajuće sile možemo rastaviti u po dvije komponente u ravninama simetrije i potom neovisno rješavati djelovanja sila u tim ravninama i torzijsko djelovanje. H. Werner je za djelovanje sila „odabrao" poznato „rješenje metodom eliminiranih pomaka," uzevši, naravno, u obzir pojavu kosoga savijanja u stupovima, dok je za „slučaj direktnog opterećenja čvornih ploča momentima oko osi" tornja „formulirao analogno rješenje."

Iako u njemu nije riječ o iteracijskom postupku, spomenut ćemo i članak [27]. H. Werner je u njemu uveo „nov postupak za točno rješavanje pravilnih ravnih štapnih sistema izveden iz standardne metode pomaka pogodnim grupiranjem osnovnih stanja," koji vodi „na matricu krutosti, koja je za većinu praktičnih zadataka bitno bolje uvjetovana od matrice standardne formulacije," uvjetovanost koje se „pogoršava s brojem kinematskih parametara i s porastom omjera krutosti greda i stupova." Postupak O. Wernera bio je polazište: „Uvedena osnovna stanja sadrže i sva stanja koja se u metodi P. Csonka–O. Werner primjenjuju za rješavanje zamjenjujućeg poluokvira, pa uvedeni postupak predstavlja proširenje te metode na točno rješavanje u smislu štapne statike, za proizvoljno opterećenje i bez ograničenja na sisteme s vitkim stupovima." U prijedlogu oblikovanja matrice krutosti grupiranjem osnovnih stanja „[p]ojavljuje se sedam tipova osnovnih stanja, koja će se zbog preglednosti svrstati u tri grupe: stanja katnih pomaka, zaokreti svih čvornih elemenata grede i stanja lokalnih pomaka."

Milutin Anđelić i Zorislav Despot su u članku [1] uveli postupak rješavanja poluokvira jednostrukom iteracijom pokazavši da su vrijednosti momenata na krajevima štapova dane istim izrazima, neovisno o tome jesu li momenti upetosti nastali djelovanjem sile ili djelovanjem momenta u čvoru. Za opće se opterećenje najprije izračunaju vrijednosti momenata upetosti $\left(\overline{M}'_{i,j}\right)$, uz pretpostavku da su i translacijski pomaci čvorova spriječeni, a potom, oslobodivši pomake, vrijednosti momenata upetosti $\left(\overline{M}''_{i,j}\right)$ zbog sila „jednakih i protusmjernih" silama u pridržajnim štapovima. Relaksacija se provodi za opterećenje čvorova momentima čije su vrijednosti

$$\overline{M}_i = -\sum_i \left(\overline{M}'_{i,j} + \overline{M}''_{i,j}\right).$$

5 Članak R. Kuševića

Rajko Kušević je u članku [10] izveo izraze za iteracijske postupke rješavanja okvira „posrednim izračunavanjem priključnih momenata štapova iz kutova zaokreta čvorova i štapova" i „neposrednim izračunavanjem priključnih momenata štapova". „Takovo [*sic*] sinoptičko izlaganje oba postupka pokazat će se korisnim, jer time logično dolazimo do podesne sheme za neposredno iteraciono izračunavanje okvirnih sistema s pokretnim čvorovima." Naime, „analogija sa odavna poznatim postupkom iteracionog rješavanja uvjetnih jednadžbi metode deformacije za sisteme okvira sa lateralno pokretnim čvorovima jasno ukazuje na mogućnost, da se osnovna ideja Crossova postupka primijeni na jednostepeno izračunavanje priključnih momenata štapova i u takovim sistemima".

Prvi je dio članka posvećen postupcima proračuna okvira s translacijski nepomičnim čvorovima. Postupak „posrednoga izračunavanja" inačica je Čališevljeva postupka opisanog u pododjeljku 2.1, dok je postupak „neposrednog izračunavanja" Crossov postupak.

U drugom, opsežnijem dijelu obrađeni su postupci jednostruke diferencijske iteracije („jednostepeno izračunavanje") za rješavanje okvira s horizontalno pomičnim čvorovima. Kušević razlikuje slučajeve „isključivo ili pretežno vertikalnih" te „isključivo ili pretežno horizontalnih tereta". U prvom se slučaju „prvo redom uklanjaju i uspostavljaju pričvršćenja protiv zaokretanja pojedinih čvorova", a potom „pričvršćenja protiv relativnog odmicanja čvorova na gredama pojedinih spratova". U našem ćemo se prikazu ograničiti na okvire s jednakim visinama stupova u pojedinim etažama.

5.1 Posredno izračunavanje momenata

U postupku „posrednoga izračunavanja priključnih momenata štapova iz kutova zaokreta čvorova i štapova" prirasti kutova zaokreta čvorova pri „relaksaciji veza protiv okretanja čvorova" izračunavaju se prema izrazu (7). U prvom je ciklusu

$$\mathfrak{M}_m^{(0)} = \sum_i \overline{M}_{m,i} + \sum_i 2\,k_{m,i}\,\Delta\varphi_i^{(1)}, \tag{51}$$

pri čemu drugi zbroj obuhvaća, naravno, samo čvorove uravnotežene prije čvora m. U kasnijim su ciklusima neuravnoteženi momenti posljedica zaokretanja susjednih čvorova u istom ciklusu ili u prethodnom ciklusu uravnoteženja čvorova, ali nakon uravnoteženja čvora m, te zaokretanja stupova iznad i ispod tog čvora u prethodnom ciklusu uravnoteženja etaža:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_m^{(\beta_m)} = &\sum_i 2\,k_{m,i}\,\Delta\varphi_i^{(\beta_i)}\\ &- 6\,k_{m,\underline{m}}\,\Delta\psi_r^{(\eta)} - 6\,k_{m,\overline{m}}\,\Delta\psi_{r+1}^{(\eta)}.\end{aligned} \tag{52}$$

Prije otpuštanja bilo koje veze vrijednost je poprečne sile na vrhu stupa $(i,\underline{i})$ dana izrazom (28), tako da se vrijednost momenta zaokretanja etaže r zbog vanjskih sila može izračunati prema izrazu (31). Nakon prvoga ciklusa uravnoteženja čvorova, a prije početka prvog ciklusa uravnoteženja etaža, vrijednost je ukupnoga neuravnoteženog momenta u etaži r

$$\mathcal{M}_r^{(0)} = \overline{M}_r + \Delta M_r'^{(1)}, \tag{53}$$

dok će po završetku daljnjih ciklusa uravnoteženja čvorova vrijednosti neuravnoteženih momenata biti

$$\mathcal{M}_r^{(\eta)} = \Delta M_r'^{(\eta+1)}, \tag{54}$$

gdje je

$$\Delta M_r'^{(\eta)} = \sum_{(i,\underline{i})\in r} 6\,k_{i,\underline{i}}\left(\varphi_i^{(\eta)} + \varphi_{\underline{i}}^{(\eta)}\right) \tag{55}$$

promjena vrijednosti momenta zaokretanja etaže r zbog promjena vrijednosti poprečnih sila na vrhovima stupova u ciklusu η uravnoteženja čvorova. Pri „relaksaciji veza protiv okretanja stupova", to jest veza koje sprečavaju relativne pomake greda susjednih etaža, prirasti kutova zaokreta stupova etaže r izračunavaju se prema izrazu

$$\Delta\psi_r^{(\eta+1)} = -\frac{1}{12\sum_{(i,\underline{i})\in r} k_{i,\underline{i}}}\,\mathcal{M}_r^{(\eta)}. \tag{56}$$

Opisani je postupak zapravo Gauss–Seidelov postupak u diferencijskom obliku primijenjen na rješavanje sustava jednadžbi inženjerske metode pomaka

$$\begin{aligned}\Big(\sum_i 4\,k_{m,i}\Big)\varphi_m &+ \sum_i 2\,k_{m,i}\,\varphi_i\\ &- 6\,k_{m,\underline{m}}\,\psi_r - 6\,k_{m,\overline{m}}\,\psi_{r+1} + \overline{M}_m = 0\end{aligned} \tag{57}$$

za $m = 1,\ldots,n_{\text{čv.}}$, $r \ni (m,\underline{m})$ i $(r+1) \ni (m,\overline{m})$ te

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{(i,\underline{i})\in r} 12\,k_{i,\underline{i}}\Big)\psi_r &- \sum_{(i,\underline{i})\in r} 6\,k_{i,\underline{i}}\,\varphi_i\\ &- \sum_{(i,\underline{i})\in r} 6\,k_{i,\underline{i}}\,\varphi_j - \overline{M}_r = 0\end{aligned} \tag{58}$$

za $r = 1,\ldots,n_{\text{et.}}$, pri čemu su (57) jednadžbe ravnoteže momenata u čvorovima ($n_{\text{čv.}}$ je broj čvorova), a (58) jednadžbe ravnoteže horizontalnih sila iznad pojedinih etaža ako su u svakoj etaži stupovi jednakih visina ($n_{\text{et.}}$ je broj etaža). Sustav je nesvodivo dijagonalno dominantan, pa postupak konvergira. No, kako su u jednadžbama (58) dijagonalni koeficijenti jednaki apsolutnim vrijednostima zbrojeva ostalih, konvergencija će biti sporija nego u rješavanju sustava (3).

5.2 Razdioba momenata

U postupku „neposrednog izračunavanja priključnih momenata štapova", koji je razrađena inačica Grinterova poopćenja Crossova postupka na okvire s pomičnim čvorovima [33, 11], nema međukoraka u kojima se izračunavaju kutovi zaokreta čvorova i štapova. U ciklusima uravnoteženja čvorova vrijednosti se neuravnoteženih momenata koji djeluju na čvorove razdjeljuju na krajeve priključenih štapova prema poznatom Crossovu izrazu

$$\Delta M_{m,i}'^{(\beta_m+1)} = \mu_{m,i}\,\mathfrak{M}_m^{(\beta_m)}, \tag{59}$$

pri čemu su te vrijednosti, umjesto izrazima (51) i (52), dane izrazima

$$\mathfrak{M}_m^{(0)} = \sum_i \overline{M}_{m,i} + \sum_i \tfrac{1}{2}\,\Delta M_{i,m}'^{(1)}, \tag{60}$$

$$\mathfrak{M}_m^{(\beta_m)} = \sum_i \tfrac{1}{2}\,\Delta M_{i,m}'^{(\beta_i)} + \Delta M_{m,\underline{m}}''^{(\eta)} + \Delta M_{m,\overline{m}}''^{(\eta)}; \tag{61}$$

Kušević, kao i Kani, predznak ‚–' uključuje u razdjelne koeficijente.

Na sličan se način u ciklusima uravnoteženja etaža vrijednosti neuravnoteženih momenata pojedinih etaža razdjeljuju na krajeve stupova tih etaža:

$$\Delta M_{m,\underline{m}}''^{(\eta+1)} = \Delta M_{\underline{m},m}''^{(\eta+1)} = \nu_{m,\underline{m}}\left(\tfrac{2}{3}\,\mathcal{M}_r^{(\eta)}\right), \tag{62}$$

gdje je $\nu_{m,\underline{m}} = -\frac{3}{4}\,k_{m,\underline{m}}/\sum_{(i,\underline{i})\in r} k_{i,\underline{i}}$. Vrijednost $\mathcal{M}_r^{(\eta)}$ dana je izrazima (54) i, za $\eta = 0$, (53), pri čemu je vrijednost promjene momenta zaokretanja etaže jednaka zbroju vrijednosti razdijeljenih i prenesenih momenata u podnožjima i na vrhovima njezinih stupova u prethodnom ciklusu uravnoteženja čvorova:

$$\Delta M_r'^{(\eta)} = \sum_{(i,\underline{i})\in r} \tfrac{3}{2}\left(\Delta M_{i,\underline{i}}'^{(\eta)} + \Delta M_{\underline{i},i}'^{(\eta)}\right). \tag{63}$$

Kušević je uz to pokazao i kako se modifikacijom izrazâ može dobiti Kanijev postupak potpune iteracije.

Nadalje, Kušević je popriličnu pozornost posvetio računskim kontrolama navodeći za svaki postupak moguće provjere prije, tijekom i na kraju proračuna, a istaknuo je i načelnu razliku između potpune i diferencijske iteracije: „Što se tiče pouzdanosti dobivenih rezulata," postupci potpune iteracije „imaju veliku prednost … u tome što se u njima automatski ispravljaju greške proračuna. […] Greške učinjene pri samoj iteraciji ne utiču na rezultat; one mogu jedino usporiti konvergenciju … Naprotiv, pri diferencijskoj iteraciji računske greške dovode do krivog rezultata, i tu je stoga neophodno potrebna kontrola završenog računa."

6 Zaključna napomena

U članku smo opisali doprinos članova Zavoda za tehničku mehaniku Građevinskog fakulteta u Zagrebu razvoju iteracijskih postupaka proračuna štapnih konstrukcija. Izvan okvira ovoga opisa ostalo je poopćenje metode konjugiranih gradijenata koje je krajem sedamdesetih godina počeo razvijati Josip Dvornik, namijenjeno rješavanju znatno većih sustava linearnih i nelinearnih jednadžbi metode konačnih elemenata na računalu [6]. Iscrpniji opis te metode, njezine fizikalne interpretacije i veze s drugim iteracijskim postupcima te daljnjih proširenja i poboljšanja, razrađivanih u suradnji s Damirom Lazarevićem (ali zasad neobjavljenih), svakako zaslužuju zaseban članak.

LITERATURA

[1] Anđelić, M.; Despot, Z.: *Statička kondenzacija jednadžbi metode pomaka za slučaj n-etažnog poluokvira*, Građevinar **37** (1985) 9, 365–370.

[2] Cross, H.; Morgan, N. D.: *Continuous Frames of Reinforced Concrete*, John Willey & Sons, New York, 1932.

[3] Čališev, K.: *O dopunitbenim naprezanjima rešetkastih nosača*, Tehnički list Udruženja jugoslavenskih inženjera i arhitekata **4** (1922) 1/2, 1–6.

[4] Čališev, K.: *Izračunavanje višestruko statički neodređenih sistema pomoću postepenih aproksimacija*, Tehnički list Udruženja jugoslavenskih inženjera i arhitekata **5** (1923) 17, 125–127; 18/19, 141–143; 20, 151–154; 21, 157–158.

[5] Čališev, K.: *Primijenjena statika*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1951.

[6] Dvornik, J.: *Generalization of the CG Method Applied to Linear and Nonlinear Problems*, Computers & Structures **10** (1979) 1/2, 217–223.

[7] Dvornik, J.: *Teorijska istraživanja u Zavodu za tehničku mehaniku Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu*, Spomenica u povodu 75. obljetnice Zavoda za tehničku mehaniku 1920–1995. (ur. V. Šimić), Građevinski fakultet i Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1995., 82–104.

[8] Kani, G.: *Die Berechnung Mehrstöckiger Rahmen*, Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart, 1949.

[9] Kurrer, K.–E.: *The History of the Theory of Structures. From Arch Analysis to Computational Mechanics*, Ernst & Sohn Verlag, Berlin, 2008.

[10] Kušević, R.: *Relaksacioni postupci izračunavanja okvirnih sistema nosača*, Naše građevinarstvo **8** (1954) 11, 313–320; 12, 329–343.

[11] Matheson, J. A. L.: *Hyperstatic Structures. An Introduction to the Theory of Statically Indeterminate Structure, Vol. 1*, The English Language Book Society & Butterworths, London, 1959.

[12] Nonveiller, E.: *Cross-ova metoda postepene aproksimacije za rješavanje okvirnih konstrukcija*, Tehnički list **19** (1937) 13/14, 171–174; 21/22, 285–287.

[13] Reddy, C. S.: *Basic Structural Analysis*, McGraw–Hill, New Delhi, 1981.

[14] Saad, Y.: *Iterative methods for sparse linear systems*, 2nd edition, SIAM, Philadelphia, 2003.

[15] Samuelsson, A.; Zienkiewicz, O. C.: *History of the Stiffness Method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **67** (2006) 2, 149–157.

[16] Simić, M.: *Prilog pojednostavljenju Krosove metode od profesora Csonka*, Građevinar **4** (1952) 7/8, 30–47.

[17] Simović, V.: *Rješavanje višeetažnog okvira jednog raspona s kosim stubovima u najdonjoj etaži*, habilitacijski rad, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1965.

[18] Simović, V.: *Proračun horizontalno pomičnih okvira*, Građevinar **18** (1966) 1, 1–14.

[19] Simović, V.: *Zidovi s otvorima i okvirne konstrukcije*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.

[20] Simović, V.: *Kani, Gašpar*, Leksikon građevinarstva (ur. V. Simović), Masmedia, Zagreb, 2002.

[21] Timoshenko, S. P.: *History of Strength of Materials, with a Brief Account of the History of Theory of Elasticity and Theory of Structures*, McGraw–Hill, New York, 1953. (prijevod: *Istorija otpornosti materijala*, Građevinska knjiga, Beograd, 1965.).

[22] Timošenko, S. P.: *Moja sjećanja na Zagreb* (ulomci iz *As I Remember*, Van Nostrand, Princeton, 1968., odabrao i preveo N. Bićanić), Spomenica u povodu 75. obljetnice Zavoda za tehničku mehaniku 1920–1995. (ur. V. Šimić), Građevinski fakultet i Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1995., 175–181.

[23] Waddell, J. A. L.: *Bridge Engineering*, Vol. 1., John Wiley & Sons, New York, 1916.

[24] Wagner, W.; Erlhof, G.: *Praktische Baustatik. Teil 3*, Sechste Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart, 1977. (prijevod: *Praktična građevinska statika. Deo 3*, Građevinska knjiga, Beograd, 1981.).

[25] Werner, H.: *Prilog proračunu okvira sa neovisno pomičnim etažama*, Građevinar **23** (1971) 11, 351–362; **24** (1972) 3, 95–103.

[26] Werner, H.: *Primjer iterativnog proračuna prostornog okvira*, Građevinar **26** (1974) 3, 73–79.

[27] Werner, H.: *Grupiranje osnovnih stanja metode pomaka*, Građevinar **40** (1988) 8, 351–358.

[28] Werner, O.: *Prilog ispitivanju okvira po teoriji drugog reda metodom postepene aproksimacije*, Građevinar **17** (1965) 8, 293–300.

Navedeno prema drugim izvorima

[29] Cross, H.: *Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed–End Moments*, Proceedings of the ASCE **57** (1930), 919–928. (prema [15]).

[30] Cross, H.: *Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed–End Moments*, Transactions of the ASCE **96** (1932), 1–10. (prema [15]).

[31] Csonka, P.: *Une contribution à la simplification de la méthode de Hardy Cross*, La Technique Moderne — Construction, No. 3, 1952. (prema [16]).

[32] Čališev, K.: *Die Methode der sukzessiven Annäherungen bei der Berechnung von vielfach statisch unbestimmtem Systemen*, Proceedings of the IABSE, vol. 4 (eds. L. Karner, M. Ritter), Zurich, 1936., 199–215. (prema [9]).

[33] Grinter, L. E.: *Discussion to Paper by H. Cross*, Transactions of the ASCE **96** (1932), 11–20. (prema [15]).

[34] Naylor, N.: *Side Sway in Symmetrical Building Frames*, The Structural Engineer, **28** (1950) 4, 99–102. (prema [11]).