

# Dinamički proračun međudjelovanja tramvaja i kolosijeka

---

**Lakušić, Stjepan; Lazarević, Damir; Dvornik, Josip**

*Source / Izvornik:* **Građevinar, 2006, 58, 281 - 288**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:664170>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-11**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)



# Dinamički proračun međudjelovanja tramvaja i kolosijeka

Stjepan Lakušić, Damir Lazarević, Josip Dvornik

## Ključne riječi

tramvaj,  
kolosijek,  
međudjelovanje,  
dinamički proračun,  
numerički model,  
metoda  
prediktor-korektor

## Key words

tramcar,  
track,  
interaction,  
dynamic analysis,  
numerical model,  
predictor-corrector  
method

## Mots clés

tramway,  
voie ferrée,  
interaction,  
calcul dynamique,  
modèle numérique,  
méthode  
prédicteur-correcteur

## Ключевые слова

трамвай,  
колея, рельс,  
взаимодействие,  
динамический расчёт,  
числовая модель,  
метод  
предиктор-корректор

## Schlüsselworte

Strassenbahn,  
Geleise,  
gegenseitige Einwirkung,  
dynamische Berechnung,  
numerisches Modell,  
Methode  
Prediktor-Korrektor

S. Lakušić, D. Lazarević, J. Dvornik

Izvorni znanstveni rad

## Dinamički proračun međudjelovanja tramvaja i kolosijeka

Prikazan je numerički model gibanja tramvajskog vozila. Tračnica je modelirana kao Euler-Bernullijev kontinuirani nosač s diskretno raspodijeljenom masom. Vozilo je diskretizirano s tri koncentrirane mase i prijenosom opterećenja preko jednog kotača. Ležajevi nosača i veze među masama modelirane su Kelvinovim reološkim elementima. Sustav diferencijalnih jednažbi gibanja riješen je metodom prediktor-(re)korektor, a kontakt kotača i tračnice proračunan je primjenom metoda sila.

S. Lakušić, D. Lazarević, J. Dvornik

Original scientific paper

## Dynamic analysis of the tramcar & track interaction

The numerical model of tramcar motion is presented. The rail is modelled as an Euler-Bernoulli continuous beam with the discretely distributed mass. The vehicle is discretized with three concentrated masses, and with load transfer via one wheel. Beam bearings and mass links are modelled by means of Kelvin rheological elements. The differential equation system for motion was solved by the predictor-(re)corrector method, and the wheel and rail contact was calculated by means of the force methods.

S. Lakušić, D. Lazarević, J. Dvornik

Ouvrage scientifique original

## Analyse dynamique de l'interaction entre le tramway et la voie ferrée

Le modèle numérique du mouvement de tramway est présenté. Le rail est modélisé comme une poutre continue Euler-Bernoulli, avec la masse discrètement répartie. Le véhicule est discrétisé par trois masses concentrées, et par transfert de la charge à travers une roue. Les appuis de la poutre ainsi que les liaisons entre les masses sont modélisées à l'aide des éléments rhéologiques de Kelvin. Le système des équations différentielles de mouvement a été résolu par la méthode prédicteur - (re) correcteur, tandis que le contact entre les roues et les rails a été calculé à l'aide de la méthode des forces.

С. Лакушич, Д. Лазаревич, Ї. Дворник

Оригинальная научная работа

## Динамический расчёт взаимодействия трамвая и колес

В работе показана числовая модель движения трамвая. Рельс моделирован как Euler-Bernulli-ев континуированная балка с дискретно распределённой массой. Трамвай дискретизирован тремя концентрированными массами и передачей нагрузки через одно колесо. Опоры балок и связи между массами моделированы Кельвиновыми реологическими элементами. Система дифференциальных уравнений движения решена методом предиктор-(ре)корректор, а контакт колеса и рельса рассчитан применением метода сил.

S. Lakušić, D. Lazarević, J. Dvornik

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

## Dynamische Berechnung der gegenseitigen Einwirkung von Strassenbahn und Geleise

Dargestellt ist ein numerisches Modell der Bewegung des Strassenbahnfahrzeugs. Die Schiene modellierte man als Euler-Bernoullischen Durchlaufträger mit diskret verteilter Masse. Das Fahrzeug diskretisierte man mit drei konzentrierten Massen und die Übertragung der Belastung über ein Rad. Die Lager der Träger und Verbindungen zwischen den Massen modellierte man mit Kelvin's rheologischen Elementen. Das System der Differentialgleichungen der Bewegung löste man mit der Methode Prediktor-(re)Korrektor, und den Kontakt zwischen Rad und Schiene berechnete man unter Anwendung des Kraftgrößenverfahrens.

Autori: Doc. dr. sc. **Stjepan Lakušić**, dipl. ing. građ.; doc. dr. sc. **Damir Lazarević**, dipl. ing. građ.; prof. dr. sc. **Josip Dvornik**, dipl. ing. građ., Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, Zagreb

1 Uvod

Tramvajskim kolosijecima, kao posebnoj skupini kolosiječnih konstrukcija, posvećena je manja pažnja nego klasičnim željezničkim kolosijecima. Postojeći propisi iz područja željeznica (UIC, VDV Oberbau-Richtlinien, CEN) vrlo malo ili uopće ne razmatraju tramvajske kolosijeke [1, 2, 3]. Iako je njihovo obilježje manja brzina vozila i opterećenje po kotaču, česta oštećenja upozoravaju da im se mora posvetiti veća pažnja [4].

Nadzorom nad rekonstrukcijama različitih tipova kolosijeka u Zagrebu (od 1994. do 2005. rekonstruirano je oko 80 km tramvajskih pruga), ustanovljeno je da najveći postotak oštećenja nastaje u području zavora, gdje su često prisutne neravnine na voznoj površini tračnice [5, 6]. Sanacije su uvijek skupe i zahtijevaju obustavljanje tramvajskog, a često i cestovnog prometa. Nakon višegodišnjeg iskustva s različitim tipovima kolosijeka, eksperimentalnim i numeričkim postupcima dokazano je da se na tim mjestima pojavljuje nepovoljan odnos dinamičkih i statičkih opterećenja, zbog čega može nastati veliki dinamički faktor [5, 7]. Tome je razlog velika masa u gibanju u odnosu na masu koja miruje. Za približnu usporedbu, masa punoga tramvaja tipa KT 4 jest 33,15 t, dok je masa kolosijeka (tračnice i betonska podloga u duljini tramvaja) iznosi svega 13,75 t.

2 Matematički model

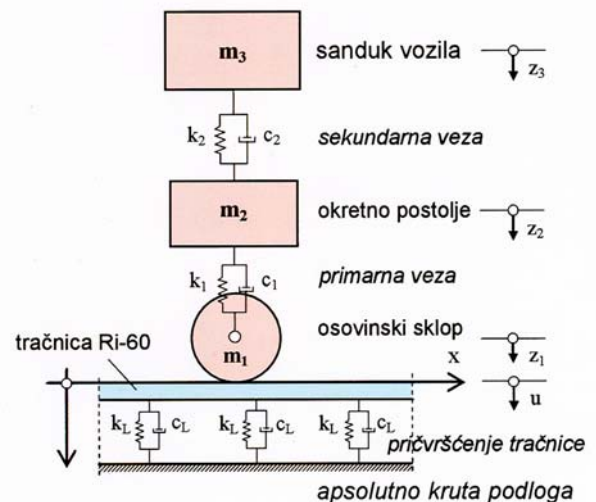
Matematički pristup ovome problemu temelji se na sustavu diferencijalnih jednačbi gibanja kojima je opisano dinamičko ponašanje vozila, kolosijeka i njihova međudjelovanja. Postoje brojne inačice ovoga pristupa koje, ovisno o modelu vozila, možemo podijeliti u četiri grupe:

1. primjenom utjecajnih linija
2. s pokretnom silom
3. s pokretnom masom i
4. s pokretnim modelom vozila.

Prvim se modelom uzima u obzir samo najnepovoljnije statičko opterećenje vozilom, a dinamički se utjecaji dodaju množenjem statičkih vrijednosti propisanim dinamičkim faktorima. Prema drugome modelu unutarnje sile ovise i o brzini vozila. Horizontalna komponenta brzine je najčešće konstantna, a vertikalna uzrokuje dodatne dinamičke utjecaje. Oba su pristupa dovoljno dobra ako visoke frekvencije osciliranja sustava konstrukcija – vozilo nemaju znatnog utjecaja na globalnu raspodjelu unutarnjih sila (primjerice kod mostova). Lokalni se efekti, koje pobuđuju ti oblici, često riješe posebno ili odrede primjenom propisanih faktora. Ipak, ovim se pristupima ne uzima u obzir inercijalni doprinos (masa) vozila pri vertikalnim oscilacijama konstrukcije, što je

obuhvaćeno trećim pristupom. On može biti mjerodavan ako je masa vozila znatna u odnosu na masu konstrukcije. Lokalni se dinamički doprinosi mogu djelomično obuhvatiti, ali samo uz uvjet da krutosti i prigušenja vozila nemaju većeg utjecaja na frekvencije osciliranja. Konačno, ako su utjecaji krutosti i prigušenja vozila veliki u odnosu na vrijednosti koje pripadaju konstrukciji, potreban je i četvrti model. Tada su lokalni efekti uvijek znatni, a često i mjerodavni za dimenzioniranje nosivih elemenata i spojeva. Zbog toga treba uzeti u obzir utjecaje viših vlastitih vektora.

Ako se radi o jednostavnijim statičkim sustavima, prva tri modela možemo riješiti analitičkim i poluanalitičkim pristupima, dok se četvrti model rješava isključivo numeričkim putem. Pri tome se često uzimaju u obzir i utjecaji poput kočenja, promjene putanje vozila i slično. Zbog velike mase, krutosti i prigušenja tramvaja u odnosu na kolosijek i visokih frekvencija osciliranja sustava (prve četiri frekvencije nalaze se između 400 i 1400 Hz) u ovome je radu odabran četvrti pristup (slika 1.).



Slika 1. Matematički model vozila i kolosijeka

2.1 Model vozila

Razmatran je model vozila s tri vertikalna stupnja slobode ( $z_1, z_2$  i  $z_3$ ). Svakome pripada odgovarajuća masa: osovinskog sklopa ( $m_1$ ), okretnog postolja ( $m_2$ ) i sanduka vozila ( $m_3$ ), koje su međusobno povezane oprugama krutosti  $k_1$  i  $k_2$  te linearno viskozno prigušivačima s konstantama  $c_1$  i  $c_2$  (slika 2.a). S obzirom na dinamičko međudjelovanje vozila i kolosijeka, kotač je opterećen i kontaktnom silom  $n(x, t)$ . Sile koje djeluju na vozilo prikazane su na slici 2.b. Opisanome modelu vozila pripada diferencijalna jednačba gibanja u obliku:

$$M_v \ddot{z}(x, t) + C_v \dot{z}(x, t) + K_v z(x, t) = f_v - n(x, t) \quad (1)$$

gdje su  $\mathbf{M}_v$ ,  $\mathbf{C}_v$  i  $\mathbf{K}_v$  konstantne matrice masa, prigušenja i krutosti, a  $\ddot{\mathbf{z}}(x,t)$ ,  $\dot{\mathbf{z}}(x,t)$  i  $\mathbf{z}(x,t)$  vektori ubrzanja, brzine i pomaka modela. Spomenute matrice imaju oblik:

$$\mathbf{M}_v = \begin{bmatrix} m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_v = \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_1 + c_2 & -c_1 \\ 0 & -c_1 & c_1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K}_v = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_1 + k_2 & -k_1 \\ 0 & -k_1 & k_1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

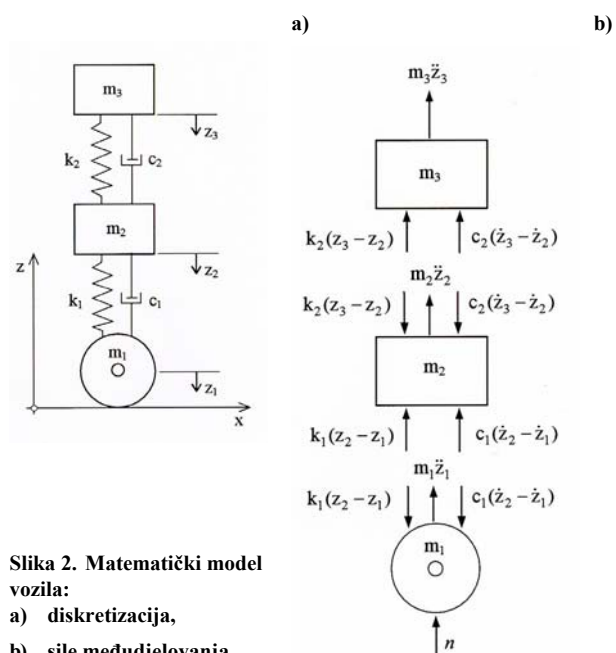
a pripadajuće vektore (uz izostavljanje  $x$  i  $t$ ) možemo napisati u obliku:

$$\ddot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \ddot{z}_3 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_1 \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{z}_3 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}_v = \mathbf{g} \begin{bmatrix} m_3 \\ m_2 \\ m_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{bmatrix}, \quad (3)$$

gdje  $\mathbf{f}_v$  sadrži težine komponenta vozila. Statička komponenta  $n_v$  kontaktne sile  $n$  jest ukupna težina vozila:

$$n_v = g \cdot m_v = g(m_1 + m_2 + m_3) \quad (4)$$



Slika 2. Matematički model vozila:

a) diskretizacija,

b) sile međudjelovanja

## 2.2 Model kolosijeka

Budući da se razmatra tip tramvajskog kolosijeka izvedenog na betonskoj ploči, položenoj na tlu dobre nosivosti, uvedena je pretpostavka apsolutno krutih oslonaca reoloških elemenata koji pridržavaju kontinuirani nosač. Za

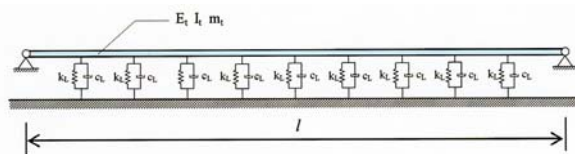
homogeni model tračnice ( $E=const.$ ), konstantnog poprečnog presjeka ( $I=const.$ ) i mase po jedinici duljine  $m_t$ , opterećene dinamičkim opterećenjem  $f(x,t)$  i težinom vozila  $n_v$  (slika 3.), može se napisati diferencijalna jednadžba dinamičke ravnoteže u obliku:

$$E I u^{IV}(x,t) + m_t \ddot{u}(x,t) = f(x,t) + n_v, \quad (5)$$

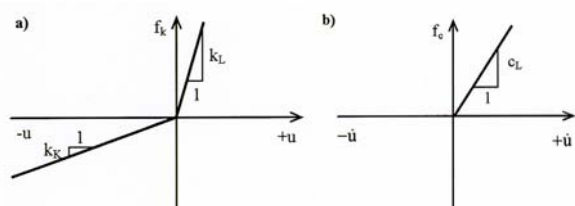
gdje je  $u^{IV}(x,t)$  četvrta derivacija progibne linije nosača po  $x$ , a  $\ddot{u}(x,t)$  ubrzanje, pri čemu je zanemarena masa ležajnog mjesta, prigušenje tračnice i progib od težine tračnice. Dinamička se sila može odrediti kao:

$$f(x,t) = \begin{cases} c_L \dot{u}(x,t) + k_L u(x,t) + n(x,t), & u(x_1,t) > 0, \\ c_L \dot{u}(x,t) + k_K u(x,t) + n(x,t), & u(x_1,t) < 0, \\ c_L \dot{u}(x,t) + n(x,t), & u(x_1,t) = 0, \\ n(x,t), & \text{inače,} \end{cases} \quad (6)$$

gdje su  $k_L$  i  $k_K$  konstantne vrijednosti krutosti ležajnog mjesta u tlaku i vlaku (slika 4.a), a  $c_L$  viskoznost ležajnog mjesta (slika 4.b). Koordinata  $x_l$  označava položaj ležajnog mjesta. Prema izrazu (6) i slici 4.a, aktiviranje krutosti  $k_L$  ili  $k_K$  ovisi o položaju tračnice. Ako se tračnica progiba, tada se aktivira krutost ležaja u tlaku ( $k_L > 0$ ), a krutost ležaja u vlaku je  $k_K = 0$ . Nasuprot tome, pri izdizanju tračnice, aktivira se krutost ležaja u vlaku ( $k_K > 0$ ), a krutost ležaja u tlaku je  $k_L = 0$ .



Slika 3. Matematički model kolosijeka (tračnica i ležaji)



Slika 4. Model ponašanja ležaja: a) krutosti, b) prigušenje

## 2.3 Međudjelovanje modela vozila i kolosijeka

Povezivanje modela vozila i kolosijeka izvedeno je na temelju pretpostavke jednakih vertikalnih pomaka u točki kontakta kotača i tračnice. Navedeni uvjet kompatibilnosti može se izraziti kao:

$$u(x,t) = z_1(x,t), \quad (7)$$

gdje je  $u(x,t)$  pomak tračnice, a  $z_1(x,t)$  pomak kotača. Naglasimo da uvjet (7) ne dopušta odvajanje kotača od tračnice. Sustav jednadžbi (1), (5) i (7) jest matematički model gibanja vozila po kolosijeku.

2.4 Početni i rubni uvjeti

Za dobivanje jedinstvenog rješenja potrebno je poznavati početne i rubne uvjete. Za kolosijek se početni uvjeti definiraju u obliku:

$$\dot{u}(x,0) = 0, \quad u(x,0) = 0 \tag{8}$$

dok se rubni uvjeti za dovoljnu duljinu tračnice  $l$ , mogu izraziti kao:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \tag{9}$$

Zbog utjecaja Saint-Venantova principa i moguće refleksije dinamičkih valova od ležajeva modela potrebno je odrediti dovoljnu duljinu tračnice kako bi se rubni poremećaji što manje odrazili na rezultate proračuna. Nakon parametarske analize većeg broja modela, ustanovljena je referencijska duljina od  $l = 10 \text{ m}$ , kao najmanja vrijednost kod koje postoji zanemarivi utjecaj rubnih uvjeta [5].

Za vozilo u statičkoj ravnoteži koje kreće iz stanja mirovanja, početni su uvjeti:

$$\dot{z}(0,0) = \mathbf{0}, \quad z(0,0) = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}_v \text{ i } v_x(x,t) = v = \text{const.} \tag{10}$$

Drugi je uvjet statički slučaj jednadžbe (1), a to je istodobno i rubni uvjet po pomacima. Posljednjim je uvjetom definirana početna brzina vozila koja ostaje konstantnom za vrijeme proračuna.

Rubni uvjet po silama za vozilo i kolosijek određen je statičkom komponentom kontaktne sile prema (4).

2.5 Numerički model gibanja sustava vozilo-kolosijek

2.5.1 Prostorna diskretizacija

Matematički model vozila (1) prikazan je u diskretnom obliku, pa istovremeno predstavlja i numerički model.

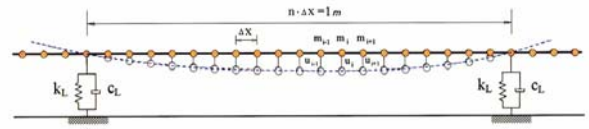
Diferencijalna jednadžba tračnice (5) može se drugačije zapisati kao:

$$\ddot{u}(x,t) = \frac{1}{m_t} \left[ f(x,t) + n_v - E I u^{IV}(x,t) \right] \tag{11}$$

Primjenom metode konačnih razlika ova se jednadžba može diskretizirati pa dobivamo:

$$\ddot{u}_i(t) = \frac{1}{m_{t,i}} \left( f_i(t) + n_v - \frac{EI}{\Delta x^4} [u_{i-2}(t) - 4u_{i-1}(t) + 6u_i(t) - 4u_{i+1}(t) + u_{i+2}(t)] \right) \tag{12}$$

gdje je  $\Delta x$  korak mreže s čvorovima  $i = -1, \dots, n+1$ . Pripadajuća masa u čvoru  $i$  označena je s  $m_{t,i} = \Delta x \cdot m_t$ . Diskretizacija tračnice između dvaju ležajnih mjesta prikazana je na slici 5.

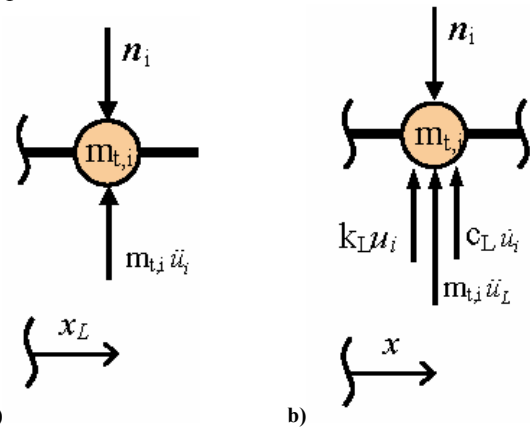


Slika 5. Numerički model kolosijeka među osloncima

Dinamičko je opterećenje prema (6):

$$f_i(t) = \begin{cases} c_L \dot{u}_i(t) + k_L u_i(t) + n_i(t), & u_i(t) > 0, \\ c_L \dot{u}_i(t) + k_K u_i(t) + n_i(t), & u_i(t) < 0, \\ c_L \dot{u}_i(t) + n_i(t), & u_i(t) = 0, \\ n_i(t), & \text{inače,} \end{cases} \tag{13}$$

gdje je  $n_i(t)$  kontaktna sila u čvoru  $i$ , a  $l$  broj ležajnog čvora. Prema (12) i (13), ravnoteža čvora unutar raspona prikazana je na slici 6.a, dok je ravnoteža ležajnoga čvora prikazana na slici 6.b.



Slika 6. Ravnoteža čvora modela tračnice: a) unutar raspona, b) na mjestu ležaja

Prema uvedenim oznakama diskretizirani oblik uvjeta kompatibilnosti jest:

$$u_i(t) = z_l(t). \tag{14}$$

2.5.2 Vremenska diskretizacija

Opisani je model geometrijski i materijalno nelinearan. Geometrijska nelinearnost nastaje zbog promjene matrica mase, krutosti i viskoznosti sustava jer se model vozila giba po modelu kolosijeka. (Možemo govoriti i o promjeni statičkog sustava u vremenu.) Materijalna se nelinearnost pojavljuje zbog modela ležaja koji ima različite krutosti u tlaku i vlaku, pa se može govoriti o nelinearno elastičnom (preciznije, po dijelovima linearnom) modelu opruge. Zbog ovih svojstava ne vrijedi princip superpozicije, pa se problem mora riješiti nekom od metoda korak po korak. U ovome istraživanju odabran je postupak izravne integracije prediktor-korektor (engl. *predictor-corrector*). Upotrijebljena je inačica prvog reda s konstantnim ubrzanjem u fazi prediktora i linearnim ubrzanjem (popravlkom) u fazi korektora, s mogućnošću iteriranja

korektora (tzv. rekorektor). Zbog toga govorimo o implicitnoj inačici metode. Iscrpan opis ovoga postupka može se vidjeti u [10] i [11].

### 2.5.3 Postupak rješavanja

Postupak rješavanja diskretiziranog sustava u nekom vremenskom odsječku  $\Delta t$  može se podijeliti u tri cjeline:

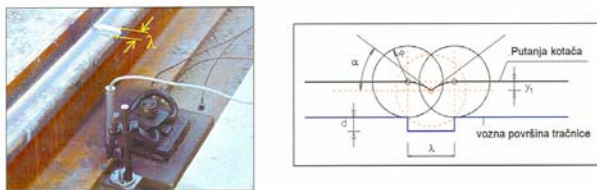
- Odvojeno rješavanje jednadžbi vozila (1) i kolosijeka (12) za slučaj kada je kontaktna sila  $n_i(t) = 0$
- Rješavanje istih jednadžbi za slučaj kada kontaktna sila ima jediničnu vrijednost, odnosno  $n_i(t) = 1$
- Iz uvjeta kompatibilnosti (14) treba pronaći stvarnu veličinu kontaktne sile između kotača i tračnice.

Opisani se postupak može shvatiti kao primjena metode sila na zadani sustav (u svakom vremenskom odsječku) čija je statička neodređenost uzrokovana nepoznatom kontaktnom silom  $n_i$  na spoju kotača i tračnice [9]. Metoda pretpostavlja da u svakom koraku vremena problem možemo linearizirati, što je za male korake razumno pretpostaviti, pa vrijedi princip superpozicije.

### 3 Provjera numeričkog modela

Ulazni parametri za vozilo i kolosijek dobiveni su od proizvođača i mjerenjima u laboratoriju i na terenu. Usporedba

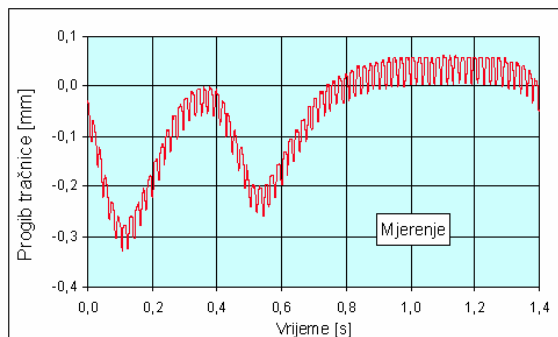
između eksperimenta i numeričke simulacije izvršena je za progib i vertikalno ubrzanje idealno ravne, a zatim i urezane tračnice (slika 7.).



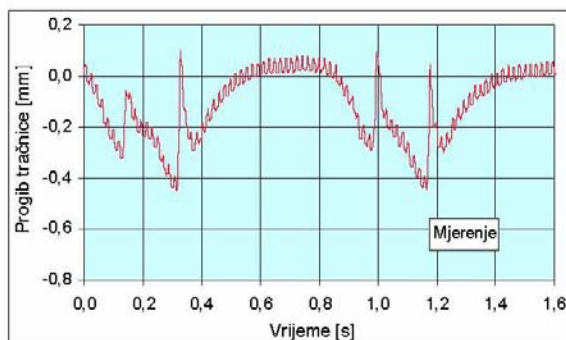
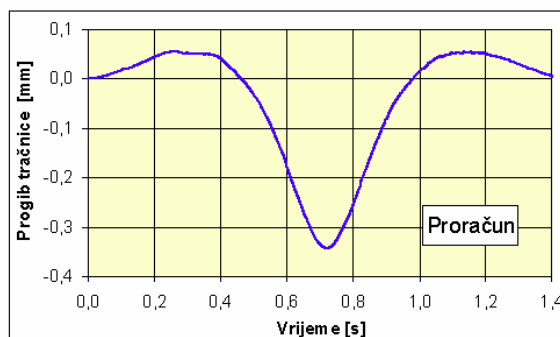
Slika 7. Ležajno mjesto i putanja kotača po urezanoj tračnici

Progibi tračnice mjereni su induktivnim senzorima osjetljivosti  $700 \text{ mV/1mm}$ , dok su ubrzanja tračnice mjerena akcelerometrima osjetljivosti  $10 \text{ mV/1m/s}^2$  (područje 0,1-20 kHz). Pri mjerenju je uporabljen ADC-216 (16 bitni) pretvarač tvrtke PICO Technology i pripadajući programski paket PicoScope. Mjerenja su provedena na novom tramvajskom kolosijeku (starosti 10 dana).

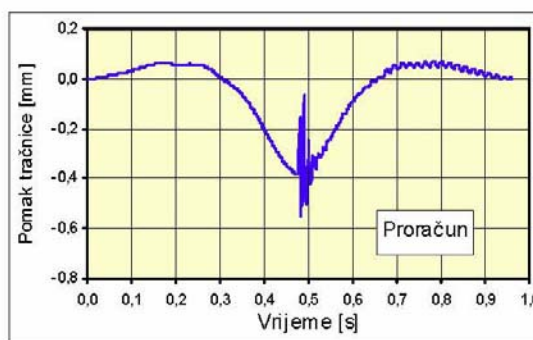
Na ovaj su način uklonjeni utjecaji dotrajalih elemenata pričvršćenja tračnice na podlogu i geometrijskih nepravilnosti koji se pojavljuju na tračnicama nakon dulje uporabe kolosijeka. Mjerenja na terenu izvršio je Laboratorij za ispitivanje konstrukcija u Zavodu za Tehničku mehaniku Građevinskog fakulteta u Zagrebu.



Slika 8. Progib tračnice na mjestu ležaja (glatka vozna površina)



Slika 9. Progib tračnice na mjestu ležaja (neravnina na voznoj površini)





3.1 Usporedba progiba tračnice

Progib tračnice s glatkom voznom površinom dobiven mjerenjem i proračunom prikazan je na slici 8. Dijagrami prikazuju usporedbu za tramvajsko vozilo tipa TMK 101, brzinu 25 km/h i opterećenje po kotaču od 41 kN. Progib u slučaju neravnine na voznj površini priložen je na slici 9. Dijagrami prikazuju usporedbu za tramvaj tipa KT 4, brzinu 37 km/h i opterećenje po kotaču od 36 kN. Detaljnijom analizom dijagrama pomaka dobivenog mjerenjem, uočen je poremećaj oscilatornom krivuljom frekvencije 50 Hz. Tome je razlog napajanje mjerne opreme električnom energijom dobivenom s pomoću prijenosnog agregata, a ne kao što je uobičajeno baterijom. Mjerenjem progiba tračnice zabilježen je prolaz svakog kotača, dok je proračunom dobiven progib samo jednog kotača, prema modelu opisanom u točki 2.1.

3.2 Usporedba ubrzanja tračnice

Podaci dobiveni mjerenjem i proračunom ubrzanja tračnice s glatkom voznom površinom zbog kretanja vozila tipa TMK 101, brzinom 25 km/h i opterećenjem po kotaču od 41 kN, prikazani su na slikama 10. i 11. Slika 10. prikazuje usporedbu rezultata u vremenskom području, dok je na slici 11. prikazana usporedba u frekvencijskom području.

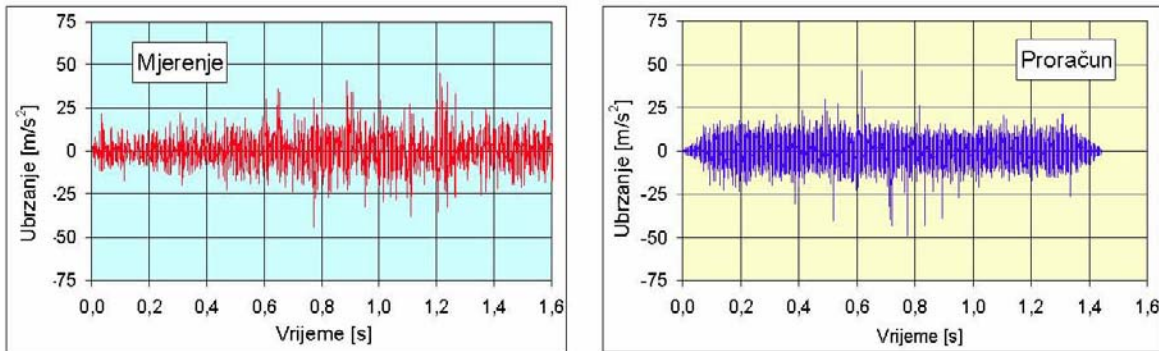
Na isti je način razmatrana i neravnina na voznj površini. Na slikama 12. i 13. prikazana je usporedba rezultata mjerenja i proračuna zbog kretanja vozila tipa TMK 101, brzinom 10 km/h i opterećenjem po kotaču od 46 kN. Iz dijagrama se jasno uočava da je veličina ubrzanja tračnice u slučaju neravnine na voznj površini i nekoliko puta veća od one s glatkom površinom. Rezultati pokazuju da se veličine ubrzanja povećavaju i do 8 puta (ovisno o brzini kretanja tramvaja i širini ureza).

Treba spomenuti da je za vozila koja se kreću brzinama većim od 15 km/h provedena samo frekvencijska analiza, zbog ograničenoga mjernog područja akcelerometra ( $\pm 700 \text{ m/s}^2$ ). Ubrzanja tračnice kod malih brzina nalaze se u navedenom mjernom području, dok se u slučaju većih brzina, ubrzanja kreću i do  $\pm 2000 \text{ m/s}^2$ .

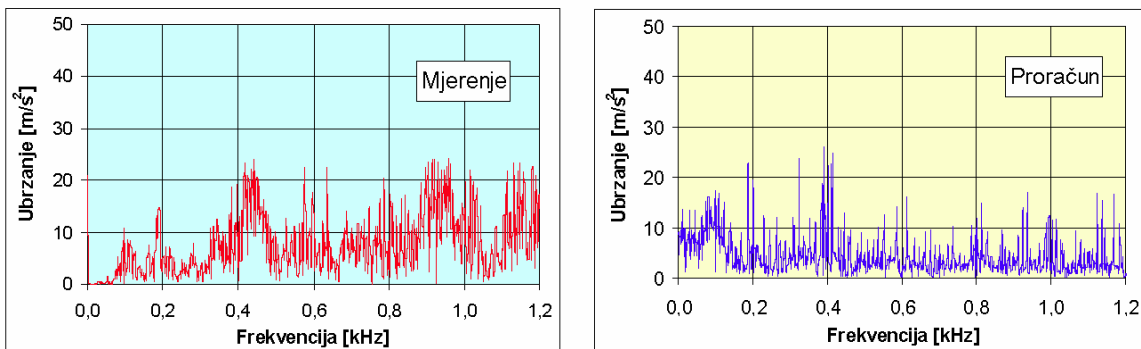
Za frekvencijsku analizu podataka dobivenih proračunom izrađen je poseban postprocesor za brzu Fourierovu transformaciju s pomoću programa *Mathcad* [5]. Frekvencijska analiza napravljena je u području od 0 do 1,2 kHz koje odgovara području obuhvaćenom mjerenjem.

3.3 Analiza rezultata mjerenja i proračuna

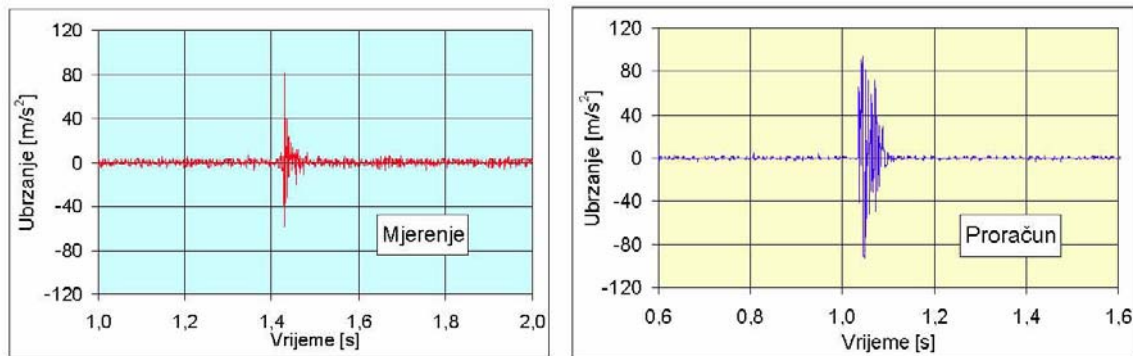
Usporedbom rezultata mjerenja i proračuna vidljivo je da su rezultati proračuna 10% do 15% veći od podataka



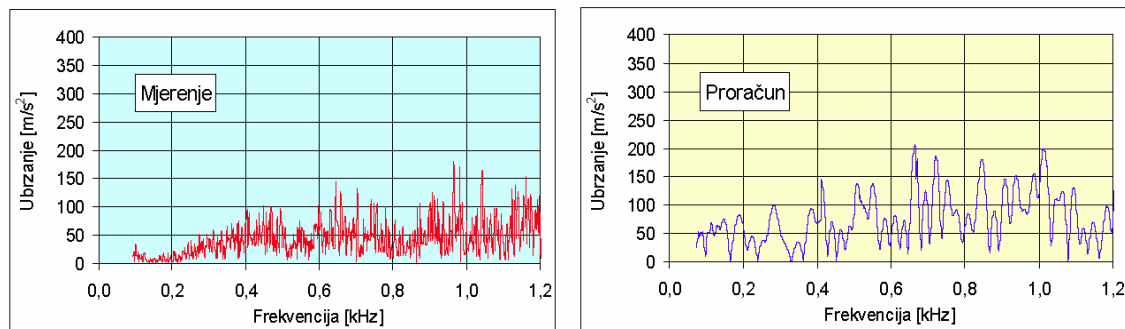
Slika 10. Ubrzanje tračnice na mjestu ležaja (glatka vozna površina)



Slika 11. Spektar ubrzanja tračnice na mjestu ležaja (glatka vozna površina)



Slika 12. Ubrzanje tračnice na mjestu ležaja (neravnina na voznoj površini)



Slika 13. Spektar ubrzanja tračnice na mjestu ležaja (neravnina na voznoj površini)

dobivenih mjerenjem [5]. Razlike možemo djelomično objasniti upotrebom jednostavnijeg modela tramvaja kojim se ne uzima u obzir utjecaj drugoga osovinskog sklopa. Nadalje, sigurno postoje odstupanja svojstava ležajeva tračnice i veza u modelu tramvaja od stvarnih vrijednosti. Procjena sudjelujuće mase temeljnog tla koja utječe na dinamičko ponašanje sustava također je problem. Konačno, razlika se može objasniti i činjenicom da je mjerenje provedeno s vremenskim koracima od  $\Delta t = 0,001$  s, dok je izravna integracija provedena s  $\Delta t_{\min} = 2,0 \cdot 10^{-6}$  s.

Na dijagramima progiba i ubrzanja tračnice jasno se uočava trenutak kada kotač vozila nailazi na neravninu. Ipak, ako se vozilo kreće većim brzinama dolazi do odvajanja, a zatim do ponovnog udara kotača o tračnicu. Posljedica toga je značajno povećanje ubrzanja, progiba i opterećenja tračnice i kolosiječne konstrukcije.

Budući da model pretpostavlja kompatibilnost pomaka u točki kontakta kotača i tračnice, može se primijeniti samo za male brzine vozila jer ne dolazi do njihova odvajanja. Ako se radi o većim brzinama, proračun vrijedi samo do toga trenutka.

## LITERATURA

- [1] UIC CODE 860, *Technical specification for the supply of rails*, 1. 7. 1986.
- [2] VDV Oberbau, *Zusatzrichtlinien OR 3.1 – Z 4*, Ausgabe Juli 1993.

## 4 Zaključak

Usporedbom rezultata mjerenja i proračuna može se zaključiti da je dobiveno vrlo dobro podudaranje progiba i ubrzanja ravne i urezane tračnice, iako se radi o jednostavnijem modelu vrlo složenog dinamičkog problema. Treba priznati da postoje puno složeniji modeli gibanja vozila po kolosijeku [12], ali se većinom temelje na ovdje opisanim principima. Takvi modeli zahtijevaju znatan utrošak vremena za proračun i obradu rezultata jer je potrebna fina prostorna i vremenska diskretizacija. Zbog toga parametarske analize nekoga problema mogu biti dugotrajne. Dio ovdje prikazanih rezultata potvrdio je da u slučaju geometrijskih neravnina na voznoj površini, postoji znatno povećanje progiba i ubrzanja tračnice. Međutim, uočeno je da se pri većoj kontroli geometrije vozne površine i pravovremenom uklanjanju nepravilnosti smanjuju utjecaji opisanih dinamičkih efekata.

Očito je da numerički model može često poslužiti kao zamjena, ali i provjera opsežnih i često skupih eksperimenata, a koristan je i pri iznalaženju novih konstrukcija kolosijeka [13]. Daljnji razvoj ovoga algoritma trebalo bi usmjeriti na slučaj odvajanja kotača od tračnice.

- [3] VDV Oberbau, *Richtlinien OR 8.1 / OR 13.1*, Ausgabe Dezember 1995.
- [4] Esveld, C., *Track Structures in an Urban Environment*,



- Symposium K. U. Leuven, 1997.
- [5] Lakušić, S.: *Dinamički utjecaj vozila na tramvajski kolosijek*, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2003.
- [6] Lakušić, S., Rak, M., Lazarević, D.: *Numerical model of tram-track interaction with and without irregularity on rail running surface*, GESTS International Transaction on Computer Science and Engineering, Volume 17, Number 1, (2005), pp. 97-108.
- [7] Esveld, C.: *Modern Railway Track*, Second edition, MRT-Productions, Delft, 2001.
- [8] Popp, K.; Kruse, H.; Kaiser, I.: *Vehicle-Track Dynamics in the Mid Frequency Range*, Vehicle System Dynamics, 31, pp. 423-464, 1999.
- [9] Lakušić, S., Rak, M., Lazarević, D.: *Numerical and experimental investigation of the tram-track interaction*, 2<sup>nd</sup> Youth Symposium on Experimental Solid Mechanics (2<sup>nd</sup> YSESM), (Ed. A. Freddi), Ravenna, Italy, pp. 121-123, 2003.
- [10] Lazarević, D.; Dvornik, J.; Fresl, K.: *Diskretno numeričko modeliranje opterećenja silosa*, Građevinar 54 (2002) 3, 135-144.
- [11] Lazarevic, D.; Dvornik, J.: *Selective Time Steps in Predictor-Corrector Methods Applied to Discrete Dynamic Models of Granular Assemblies*, 4<sup>th</sup> International Conference on Analysis of Discontinuous deformation, Glasgow, pp. 193-201, 2001.
- [12] <http://www.abaqus.com>
- [13] Knothe, K. L.; Grassie, S. L.: *Modelling of Railway Track and Vehicle/track Interaction at High Frequencies*, Vehicle System Dynamics, 22, pp. 209-262, 1993