

# Određivanje parametara mehanike loma betona

---

**Krolo, Joško**

*Source / Izvornik:* **Građevinar, 2006, 57, 967 - 976**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:794049>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-14**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)



# Određivanje parametara mehanike loma betona

Joško Krolo

## Ključne riječi

beton,  
mehanika loma,  
parametri loma,  
duljina pukotine,  
učinak veličine uzorka,  
Bažantov zakon

## Key words

concrete,  
fracture mechanics,  
fracture parameters,  
crack length,  
size effect model,  
Bažant's law

## Mots clés

béton,  
mécanique de la rupture,  
paramètres de la rupture,  
longueur des fissures,  
effet d'échelle des  
échantillons,  
loi de Bazant

## Ключевые слова

бетон,  
механика перелома,  
параметры перелома,  
толщина трещины,  
эффект величины  
образца,  
Бажаантов закон

## Schlüsselworte

Beton,  
Bruchmechanik,  
Bruchparameter,  
Risslänge,  
Probegrösseneffekt,  
Bažant's Gesetz

J. Krolo

## Određivanje parametara mehanike loma betona

Opisan je postupak određivanja parametara mehanike loma betona primjenom modela učinka veličine uzoraka (Size Effect Model). Obradeni su rezultati ispitivanja do sloma triju veličina geometrijski sličnih uzoraka od betona MB30, MB60 i MB80. Potvrđen je Bažantov zakon učinka veličine (Size Effect Law) i određeni parametri mehanike loma ( $G_f$  – energija loma i  $c_f$  – efektivna duljina pukotine). Istaknuta je vrlo velika osjetljivost dobivenih parametara na rezultate ispitivanja.

J. Krolo

## Determination of parameters for fracture mechanics of concrete

The procedure for the determination of parameters for the fracture mechanics of concrete, as based on the effect of sample size (size effect model), is described. Results obtained by loading to failure three sizes of geometrically similar samples made of concrete type MB30, MB60 and MB80, are analyzed. The Bažant's size effect law is confirmed, and fracture mechanics parameters ( $G_f$  - fracture energy and  $c_f$  - effective crack length) are determined. The very high correspondence of these parameters to test results has been observed.

J. Krolo

## Détermination des paramètres pour la mécanique de rupture de béton

Le procédé de détermination des paramètres pour la mécanique de rupture de béton, basé sur l'effet d'échelle des échantillons (modèle d'effet d'échelle), est décrit. Les résultats obtenus par l'application de la charge de rupture à trois grandeurs des échantillons à géométrie similaire, formés de béton type MB 30, MB60 et MB80, sont analysés. La loi d'effet d'échelle décrite par Bazant est confirmée, et les paramètres de la mécanique de rupture ( $G_f$  - énergie de la rupture, et  $c_f$  - longueur effective de la fissure) sont déterminés. Une correspondance très élevée de ces paramètres aux résultats obtenus par les essais a été établie.

Ї. Кроло

## Определение параметров механики перелома бетона

В работе описывается способ определения параметров механики перелома бетона при применении модели эффекта величины образцов (Size Effect Model). Обработаны результаты испытания до перелома трёх величин геометрически похожих образцов из бетонов MB30, MB60 и MB80. Подтверждён Бажаантов закон действия величины (Size Effect Law) и определены параметры механики перелома ( $G_f$  - энергия разрушения и  $c_f$  - эффективная длина трещины). Подчёркнута очень большая чувствительность полученных параметров на результаты испытания.

J. Krolo

## Bestimmung der Parameter der Betonbruchmechanik

Im Artikel beschreibt man das Verfahren für die Bestimmung der Betonbruchmechanik unter Anwendung des Modells des Probegrösseneffekts (Size Effect Model). Bearbeitet sind die Ergebnisse der Untersuchung bis zum Bruch dreier Grössen von geometrisch ähnlichen Probestücken aus Beton M30, M60 und M80. Bažant's Gesetz des Grösseneffekts (Size Effect Law) ist bestätigt und die Parameter der Bruchmechanik sind bestimmt ( $G_f$  - Bruchenergie und  $c_f$  - effektive Risslänge). Hervorgehoben ist die sehr hohe Empfindlichkeit der erhaltenen Parameter gegen die Untersuchungsergebnisse.

Izvorni znanstveni rad

Original scientific paper

Ouvrage scientifique original

Оригинальная научная работа

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

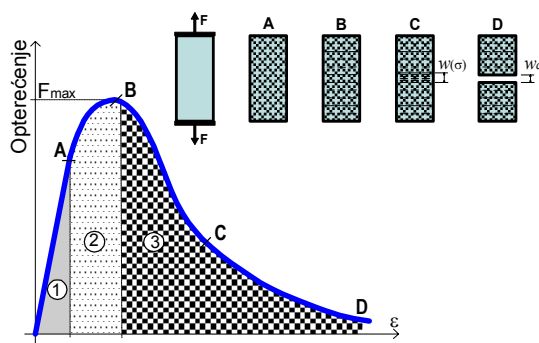
Autor: Doc. dr. sc. **Joško Krolo**, dipl. ing. građ., Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26

## 1 Uvod

Konstrukcije od betona pune su defekata, odnosno oštećenja koja postoje u betonu i prije nego je on mehanički opterećen. Defekti, a pogotovo mikropukotine, stalno rastu pod vanjskim opterećenjem, spajaju se s postojećim sve dok ne nastanu veće pukotine koje mogu uzrokovati rušenje konstrukcije. Konstrukcije se ipak projektiraju ne uzimajući to u obzir, bez obzira na kriterij energije loma, odnosno pri projektiranju betonskih konstrukcija ne koristi se kapacitetom nosivosti betona opterećenog vlačnim naprezanjem.

Teorija linearno elastične mehanike loma (*Linear Elastic Fracture Mechanics* – LEFM) postoji od 1920. godine, temelj joj je postavio A. A. Griffith [1]. Griffithova teorija loma može se primijeniti samo na elastične, homogene i krhke materijale kao što je staklo. Njezina kasnija modifikacija prema Orowanu (1949.) i Irwinu (1957.) [2] bila je primjenjiva jedino na elastoplastične materijale. Svi pokušaji da se LEFM primijeni na beton pokazali su se neuspješnim.

Razlozi za neuspjeh proizlaze iz uloge spomenutih defekata na ponašanje materijala na osnovi cementa koji su opterećeni na vlak i za koje se smatralo da su krhki. Pokazalo se da to nije točno, prije postizanja konačne nosivosti na vlak (točka B na slici 1.) takvi materijali pokazuju umjereno očvršćivanje (područje A-B na dijagramu) što podsjeća na ponašanje materijala od metala. Ali za razliku od njih, beton pokazuje povećanje deformacije poslije postizanja konačne nosivosti (područje B-C-D). Takvo se ponašanje naziva omekšanje pri vlačnom naprezanju. Materijale koji pokazuju umjereno očvršćivanje prije postizanja konačne nosivosti nazivamo kvazikrhkim.



Slika 1. Dijagram opterećenje-deformacija tipičan za ponašanje kvazikrhkih materijala

Teorija mehanike loma primjenjiva na kvazikrhke materijale definirana je početkom 80-ih godina 20. st. Uvođenje ove teorije u projektiranje betonskih i armiranobetonskih konstrukcija dovelo bi do ujednačavanja granica

sigurnosti, poboljšavajući na taj način pouzdanost konstrukcija. Naravno, za to treba mehaniku loma postupno uključivati u nacionalne i međunarodne pravilnike za projektiranje betonskih konstrukcija (ACI, CEB). Najuvjerljiviji argument u korist primjene teorije mehanike loma na betonske konstrukcije jest učinak veličine, tzv. *size effect*. Taj učinak sadašnji pravilnici uglavnom ne uzimaju u obzir.

## 2 Učinak veličine konstrukcije

Kao primjer usporedimo tri betonske grede (slika 2.) koje su geometrijski slične u dvije dimenzije ( $l$  i  $h$ ), ali različitih veličina. Grede imaju istu širinu  $b$  i isti odnos raspona prema visini ( $l/h$ ). Visine  $h$  su različite i to  $h_1 < h_2 < h_3$ . Uzorci se opterećuju savijanjem u tri točke. Nazivno naprezanje pri maksimalnom opterećenju možemo napisati u obliku:

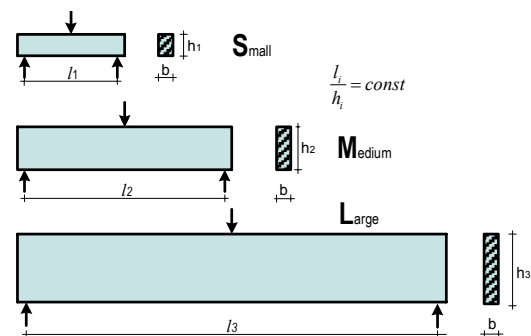
$$\sigma_{Nu} = k \cdot \frac{F_{\max}}{b \cdot h} \quad (1)$$

$k$  – koeficijent koji uključuje odnos  $l$  i  $h$ .

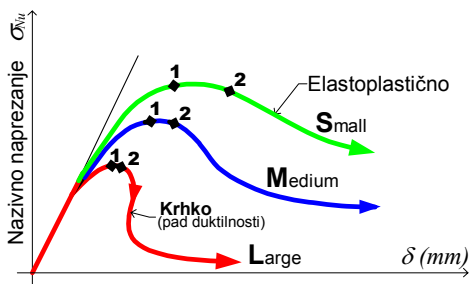
Kako nas zanimaju samo relativne vrijednosti, nije važno koju dimenziju uzimamo pri definiranju  $\sigma_{Nu}$ . Tipični dijagrami dobiveni pri savijanju tih triju greda prikazani su na slici 3. Nazivno naprezanje pri najvećem opterećenju označeno je s **1**, a točka sloma sa **2**. Ovi su dijagrami dobiveni opterećivanjem greda uz kontrolu pomaka. Kad bi se opterećivale uz kontrolu sile, slom bi nastao kad sila dosegne najveće opterećenje. Ispitivanje uz kontrolu pomaka uzima u obzir uvjete u kojima se grede nalaze u stvarnosti kao dio veće konstrukcije.

Iz dijagrama na slici 3. uočavamo dvije osnovne karakteristike:

- krajnje nazivno naprezanje  $\sigma_{Nu}$  povećava se smanjenjem visine grede
- povećanjem visine grede smanjuje se duktilnost (povećava se krhkost).



Slika 2. Tri geometrijski slična uzorka



Slika 3. Dijagram  $\sigma_{Nu} - \delta$  za tri geometrijski slična uzorka

Ako te grede proračunamo prema kriteriju dopuštenog naprezanja ili prema teoriji plastičnosti krajnje nazivno naprezanje trebalo bi biti isto bez obzira na visinu grede. Drugim riječima slom ne bi smio pokazivati ovisnost o veličini. Teorija mehanike loma predviđa učinak veličine konstrukcije na opterećenje pri slomu i na duktilnost. Ovaj učinak veličine gređa ne treba miješati s Weibullovim statističkim učinkom veličine koji izražava činjenicu da što je veći volumen konstrukcije to je veća vjerojatnost za postojanje defekata u konstrukciji koji utječu na slom. Ovdje je taj učinak povezan s energijom koja se oslobađa i rezultira preraspodjelom naprezanja u području loma.

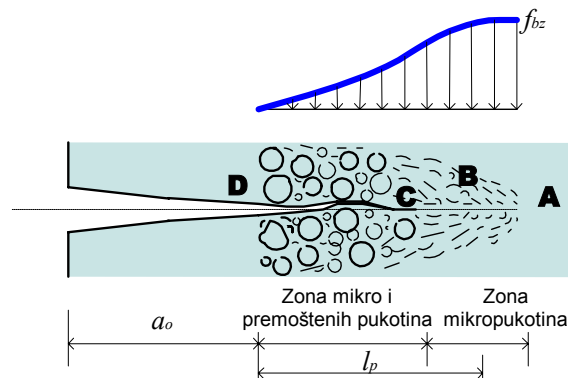
Slom malih konstrukcija je duktilan, pa se njihov proračun može provoditi npr. po teoriji plastičnosti, dok velike konstrukcije pokazuju krhki način sloma. Pri analiza tih konstrukcija može se koristiti LEFM-om (Griffithovom teorijom). Naročito se to odnosi na velike betonske konstrukcije sa minimalnom količinom armature (npr. brane). Za najveći dio armiranobetonskih konstrukcija (koje nisu male ni prevelike) analiza temeljena na mehanici loma jest dosta složenija. Kod njih je potrebno analizu temeljiti na nelinearnoj teoriji mehanike loma koja uzima u obzir ponašanje betona na silaznoj grani dijagrama  $F - \varepsilon$  (slika 1.).

### 3 Nelinearne teorije mehanike loma betona

Kao što se vidjelo u uvodu, ponašanje običnog betona pri lomu značajno odstupa od principa LEFM-a. To se odnosi i na slične materijale kao što su kamen, različite vrste keramike, ali i neke vrste metala. Otpornost na lom takvih materijala raste s porastom žilavosti koja sprječava razvoj pukotine u vrhu gdje su raspoređene mikropukotine. Određivanje energije loma ( $G_F$ ) kod ovakvih materijala zahtijeva više pažnje. Druga bitna karakteristika jest veličina nelinearnog područja loma (područje omekšanja -  $l_p$ ) u korijenu postojećeg zarez ili realne pukotine (slika 4.). Materijal u tom području brzo omekšava i dolazi do razdvajanja čestica materijala. To je područje određeno stupnjem nehomogenosti u mikrostrukтури, kao što je veličina zrna kamena ili najveća veličina zrna agregata u betonu. Kao rezultat toga je dio

dijagrama opterećenje-deformacija na silaznoj grani (B-C-D) nakon najvećega opterećenja (slika 1.). Za grubu procjenu duljine područja loma u betonu može poslužiti Irwinovo korigirano područje plastičnosti za elasto-plastične materijale [3].

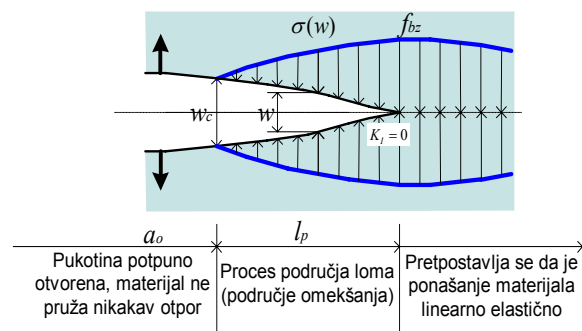
Pretpostavljajući da je po cijeloj duljini područja loma naprezanje u betonu jednako vlačnoj čvrstoći ( $f_{bz}$ ) dobije se približno duljina područja loma (*fracture process zone*)  $l_p \approx (E' \cdot G_F) / f_{bz}^2$ , gdje je:  $E' = E / (1 - \nu^2)$  za ravninsko naprezanje, a  $E' = E$  za ravninsku deformaciju.



Slika 4. Nastajanje područja odvijanja loma (*fracture process zone*)

#### 3.1 Model proračunske pukotine (Fictitious Crack Model – FCM)

Prvu nelinearnu teoriju mehanike loma betona predložili su Hilleborg [4] i Petersson [5] 1976. godine i nazvali je modelom fiktivne pukotine (*Fictitious Crack Model – FCM*) (slika 5.). Ovaj je model sličan Dugdaleovu [6] i Barenblattovu [7] modelu za elasto-plastične materijale, a koristi se eksperimentalnim podacima dobivenim ispitivanjem uzoraka direktnim razvlačenjem. U ovom se modelu rabe dva parametra materijala: naprezanje kao funkcija otvaranja pukotine  $\sigma(w)$  u zoni omekšanja i energija loma ( $G_F$ ) kao ploština ispod krivulje u zoni omekšanja.



Slika 5. Model proračunske pukotine (FCM)

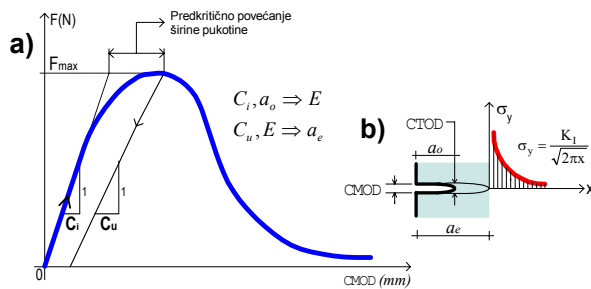
3.2 Model trakastih pukotina (Crack Band Model – CBM)

Ovaj su model predložili Bažant & Oh (1983.) [8] i nazivali ga Crack Band Model – CBM, odnosno model trakastih («razmazanih») pukotina. Za dovođenje u vezu neelastične deformacije  $\varepsilon$  sa širinom pukotine  $w$  i  $G_F$  potrebno je uvesti širinu trake  $h$  u kojoj su se koncentrirale pukotine.

3.3 Približni nelinearni modeli loma

3.3.1 Dvoparametarski model loma (Two-Parameter Fracture Model – TPFM)

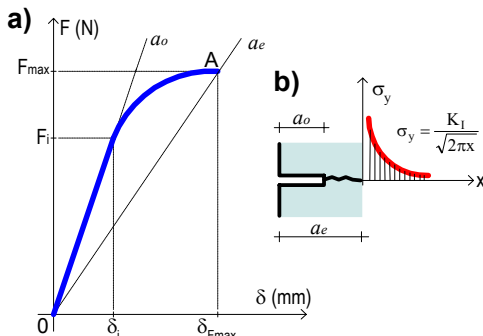
TPFM model loma betona predložili su Jenq & Shah 1985. god. [9]. Ovaj model uzima u obzir nelinearno ponašanje betonskog uzorka s početnim zarezom koje se izjednačava s ponašanjem uzorka koji sadrži efektivnu pukotinu  $a_e > a_o$  u elastičnom području. Efektivna se duljina pukotine  $a_e$  (ekvivalentna elastičnoj) proračuna iz veličine  $C_u$  nakon rasterećenja (slika 6.).



Slika 6. Tipičan dijagram F – CMOD

3.3.2 Model proračunske pukotine (Effective Crack Model – ECM)

Model efektivne pukotine koji su predložili Nallathambi & Karihaloo 1986. godine [10] sličan je TPFM modelu. Efektivna duljina pukotine  $a_e$  odredi se sekantom 0-A iz dijagrama  $F-\delta$  (slika 7.a). Krutost u linearnom području je proporcionalna modulu elastičnosti  $E$  koji se može proračunati iz bilo kojeg para  $F_i - \delta_i$  uzetog iz tog područja.



Slika 7. Dijagram opterećenje – progib

3.3.3 Model učinka veličine uzoraka (Size Effect Model – SEM)

Proračunska duljina pukotine  $a_e$  spominjana u prethodna dva modela približava se realnoj duljini pukotine  $a_o$  kada veličina uzorka koji se ispituje postaje vrlo velika. Bažant (1984.) dokazao je da je najlogičniji put primjene LEFM u analizi betonskih konstrukcija, definiranje energije loma i duljine područja loma (fracture process zone) kod beskonačno velikih uzoraka ( $h \rightarrow \infty$ ). Ta dva parametra loma označit će se sa  $G_f$  i  $c_f$  kako bi se razlikovala od prijašnjih oznaka  $G_F$  i  $l_p$ . Za određivanje  $G_f$  i  $c_f$  ispitivanjem uzoraka srednje veličine u laboratoriju Bažant je preporučio jednostavan zakon učinaka veličine. Primjenom tog zakona  $G_f$  i  $c_f$  mogu se odrediti mjerenjem samo maksimalnog opterećenja ( $F_{max}$ ) pri slomu dovoljnog broja geometrijski sličnih uzoraka različite veličine (slika 2.). Za opisivanje učinka veličine na slom geometrijski sličnih uzoraka rabi se izraz (1) za nazivno naprezanje. Pretpostavljajući da je energija koja se troši na slom glatka funkcija veličine uzoraka i širine područja loma, a pri samom lomu konstantna, Bažant je dimenzionalnom analizom pokazao da se nazivno naprezanje može napisati u obliku:

$$\sigma_{Nu} = B_o \cdot f_{bz} \cdot [\beta \cdot (1 + \beta^{-1} + A_1 \cdot \beta^{-2} + A_2 \cdot \beta^{-3} + \dots)]^{-1/2} \quad (2)$$

gdje su:

- $B_o, h_o, A_1, A_2, \dots$  – empirijski koeficijenti
- $\beta$  – relativna veličina uzorka ( $\beta = h / h_o$ )
- $f_{bz}$  – vlačna čvrstoća betona.

Broj članova u izrazu (2) povećava se povećanjem veličine uzorka ( $h \rightarrow \infty$ ). Kasnije je Bažant pokazao da se taj izraz može skratiti samo na linearne članove ako se radi o uzorcima srednje veličine. Tako skraćeni zakon učinaka veličine (size effect law) prema Bažantu glasi:

$$\sigma_{Nu} = B_o \cdot f_{bz} \cdot \left(1 + \frac{h}{h_o}\right)^{-1/2} \quad (3)$$

Iz izraza (3) vidi se da za  $h \gg h_o$  dobijemo

$$\log(\sigma_{Nu}) = -1/2 \cdot \log h + const,$$

odnosno vrijedi LEFM, a za  $h \ll h_o \rightarrow \sigma_{Nu} = B_o \cdot f_{bz}$  primjenjuje se kriterij čvrstoće (popuštanja). Zakon učinka veličine u nelinearnom području u usporedbi s kriterijem čvrstoće i kriterijem LEFM-a shematski je prikazan na slici 8. Zakon učinka veličine (3) može se napisati i u linearnom obliku:

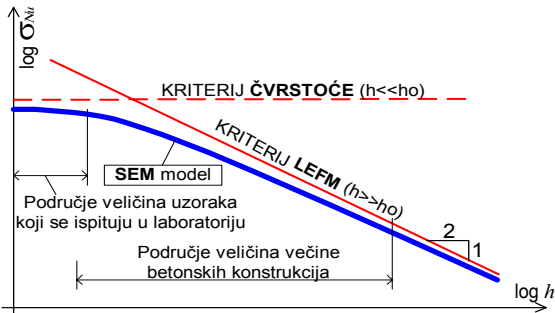
$$\left(\frac{f_{bz}}{\sigma_{Nu}}\right)^2 = \frac{1}{B_o^2 \cdot h_o} \cdot h + \frac{1}{B_o^2}, \quad (4)$$

pa se iz izmjenenog najvećeg opterećenja  $F_{\max}$  može nacrtati pravac linearne regresije (5) (slika 9.):

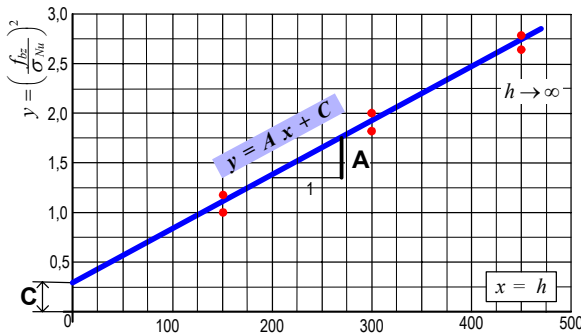
$$y_j = A \cdot x_j + C \quad (5)$$

gdje je:  $x_j = h_j$   $y_j = \left(\frac{f_{bz}}{\sigma_{Nu}}\right)^2$

$$A = \frac{1}{B_o^2 \cdot h_o} = \frac{C}{h_o} \Rightarrow h_o = \frac{C}{A}, \quad B_o = \frac{1}{\sqrt{C}} \quad (6)$$



Slika 8. Zakon učinka veličine (size effect law)



Slika 9. Pravac linearne regresije

Empirijski koeficijenti  $B_o$  i  $h_o$  u izrazima (2) i (3) dobiju se direktno iz pravca linearne regresije.

#### 4 Određivanje energije loma $G_f$ i proračunske duljine pukotine $c_f$ prema SEM modelu

Ukupna potencijalna energija deformacije konstrukcije s pukotinom duljine  $a$  može se napisati kao [11]:

$$U = V_n \cdot \frac{\sigma_{Nu}^2}{2 \cdot E'} \cdot f(\alpha) \quad (7)$$

gdje je  $V_n = c_o \cdot b \cdot h^2$  nazivni volumen konstrukcije ( $c_o$  - neka konstanta), a  $f(\alpha)$  funkcija relativne duljine pukotine ( $\alpha = a/h$ ). Oslobođena energija po jedinici širine i po jediničnom produžetku pukotine može se proračunati kao  $G = -(\partial U / a) / b = -(\partial U / \alpha) / b \cdot h$ , pa uzimajući u obzir (7)  $G = -c_o \cdot h \cdot (\sigma_{Nu}^2 / 2 \cdot E') \cdot f'(\alpha)$  dobivamo:

$$G = \frac{F_{\max}^2}{E' \cdot b^2 \cdot h} \cdot g(\alpha) \quad (8)$$

gdje je:  $g(\alpha) = -(c_o \cdot k \cdot f'(\alpha)) / 2$  i  $f'(\alpha) = df(\alpha) / d\alpha$ .

U LEFM vrijedi  $G = K_I / E'$ , gdje je  $K_I$  koeficijent intenziteta naprezanja za I oblik otvaranja pukotine, pa se izraz (8) može napisati u obliku:

$$K_I = \frac{F_{\max}}{b \cdot \sqrt{h}} \cdot F(\alpha) \quad (9)$$

gdje je  $F(\alpha) = \sqrt{g(\alpha)}$  funkcija geometrije (faktor oblika) [12].

Do razvoja pukotine dolazi kada  $K_I$  postigne kritičnu vrijednost  $K_{IC}$  - žilavost loma. Veličina  $K_{IC}$  za heterogene materijale, s velikim područjem loma, znatno ovisi o veličini uzorka ako se duljina stvarne pukotine  $a$  približava duljini početnog zarez  $a_o$ . Ta se ovisnost može smanjiti mjerenjem stvarne duljine pukotine  $a$ , što nije jednostavno zato što pukotina nije ravna, ne razvija se po jednoj liniji ili raste diskontinuirano. Koristeći se drugim indirektnim metodama (TPFM ili ECM) može se proračunati duljina pukotine, ali se kod tih eksperimenata pojavljuju pogreške iz različitih razloga. Zbog svega toga, određivanje energije loma mjerenjem samo najvećega opterećenja neposredno pred početak otvaranja pukotine ( $g'(\alpha) > 0$ ) uporabom SEM modela je vrlo jednostavno. Ako maksimalnu veličinu sile iz zakona učinka veličine (3):

$$F_{\max} = \frac{B_o \cdot f_{bz} \cdot b \cdot h}{k} \cdot \left(1 + \frac{h}{h_o}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

kvadriramo i uvrstimo u (8):

$$G_f = \frac{B_o^2 \cdot f_{bz}^2}{k^2 \cdot E'} \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{h}{1 + h/h_o} \lim_{h \rightarrow \infty} g(\alpha) \quad (11)$$

dobivamo:

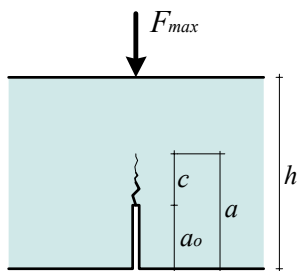
$$G_f = \frac{B_o^2 \cdot f_{bz}^2}{k^2 \cdot E'} \cdot h_o \cdot g(\alpha) = \frac{f_{bz}^2}{k^2 \cdot A \cdot E'} g(\alpha_o) \quad (12)$$

Prema tomu energiju loma određujemo izravno iz koeficijenta smjera  $A$  pravca linearne regresije (5).

Polje naprezanja i pomaka oko nelinearnog područja loma podudara se s efektivnom duljinom pukotine  $a$  (slika 10.). Efektivna duljina pukotine ovdje znači: duljina pukotine ekvivalentna elastičnoj. Prema slici 10, za maksimalnu veličinu sile može se napisati:

$$a = a_o + c, \quad \alpha = \frac{a}{h} \Rightarrow \alpha = \alpha_o + \frac{c}{h} \quad (13)$$





Slika 10. Proračunska duljina pukotine ( $a$ )

Ako u linearno elastičnom području postoji pukotina duljine  $a$ , lom pod konstantnim opterećenjem je nestabilan,  $c$  je ekvivalentna duljina nelinearnog područja loma. To se može dogoditi samo kod beskonačno velikih uzoraka kad  $h \rightarrow \infty$ . Konačna proračunska duljina nelinearnog područja loma  $c_f$  karakteristika je materijala i može se definirati kao:

$$c_f = \lim_{h \rightarrow \infty} (a - a_0). \tag{14}$$

Iz izraza (5.22) i (5.27) u koje  $F$  zamijenimo sa  $F_{max}$  iz zakona učinaka veličine (5.16) dobivamo:

$$G_f - G = \frac{f_{bz}^2}{k^2 \cdot A \cdot E} \left[ g(\alpha_0) - \frac{h}{h_0 + h} \cdot g(\alpha) \right] \tag{15}$$

ko  $G \rightarrow G_f$  i  $h \rightarrow \infty$  slijedi  $g(\alpha_0) \cdot (h + h_0) = g(\alpha) \cdot h$ . Funkcija  $g(\alpha)$  kontinuirana je i glatka i ako  $\alpha$  završi sa  $\alpha_0$  može se napisati:

$$g(\alpha) = g(\alpha_0) + g'(\alpha_0) \cdot c_f / h \tag{16}$$

U izraz (16) je uvršten (13) kad  $c \rightarrow c_f$ .

Iz (16) se konačno dobije proračunska (ekvivalentna elastičnoj) duljina područja loma (*effective fracture process zone length*):

$$c_f = \frac{g(\alpha_0)}{g'(\alpha_0)} \cdot h_0. \tag{17}$$

Veličina  $c_f$  je puno osjetljivija na eksperimentalne ili numeričke pogreške nego  $G_f$ , zato što se za njezino određivanje osim funkcije  $g(\alpha_0)$  rabi i njezina derivacija  $g'(\alpha_0)$ , a za određivanje  $G_f$  samo  $g(\alpha_0)$ .

Za određivanje  $G_f$  i  $c_f$  prema SEM modelu preporučuje se ispitivanje uzoraka opterećenih u tri točke sa zarezom na sredini raspona. Postupak prema [15] je sljedeći:

Ispituju se najmanje tri različite dimenzije uzoraka s visinama  $h = h_1, h_2, \dots, h_n$  i rasponima  $l = l_1, l_2, \dots, l_n$  (slika 2.). Uzorci koji se ispituju su slični u dvije

dimenzije sa širinom ( $b$ ) koja je jednaka. Znači odnosi  $l/h$ ,  $a_0/h$  i  $L/h$  su isti. Preša za ispitivanje ne mora imati hidraulični servouređaj s kontrolom pomaka. Dovoljno je zabilježiti maksimalnu silu ( $F_{max}$ ). Znači za određivanje  $G_f$  i  $c_f$  ispitivanjem je potrebno odrediti  $F_{1max}, F_{2max}, \dots, F_{nmax}$  za svaku veličinu  $h = h_1, h_2, \dots, h_n$ , Youngov modul elastičnosti  $E$  i volumensku masu betona.

Izmjereno maksimalno opterećenje treba korigirati zbog težine uzorka između oslonaca:

$$F_{jmax}^* = F_{jmax} + \frac{2 \cdot l_j - L_j}{2 \cdot l_j} \cdot G_{vt}^j \tag{18}$$

gdje je  $G_{vt}^j$  težina cijelog uzorka.

Iz poglavlja 3.3.3 vidjeli smo da se zakon učinaka veličine (*size effect law*) prema Bažantu (3) može napisati u linearnom obliku (4), pa se iz izmjerenoga i korigiranoga maksimalnog opterećenja  $F_{jmax}^*$  može nacrtati pravac linearne regresije (slika 9.).  $\sigma_{Nu}^j$  je nazivno naprezanje pri slomu koje služi za opisivanje učinaka veličine slova geometrijski sličnih uzoraka ili konstrukcija različitih veličina (1). Iz koeficijenta smjera  $A$  i odsjeka  $C$  dobije se energija loma  $G_f$  (12) i proračunska duljina pukotine  $c_f$  (17). Iz određene energije loma može se izračunati faktor intenziteta kritičnog naprezanja prema SEM modelu:

$$G_f = \frac{(K_{IC}^{SEM})^2}{E'} \Rightarrow K_{IC}^{SEM} = \sqrt{G_f \cdot E'} \text{ (MPa}\sqrt{\text{m}}) \tag{19}$$

Funkcija  $g(\alpha_0)$  u izrazima (12) i (17) dobije se tako da se iz maksimalne sile (18) proračuna naprezanje od momenta savijanja u trenutku sloma, uzimajući u obzir (1) dobije se:

$$\sigma_{sav}^j = \frac{6 \cdot F_{jmax} \cdot l_j}{4 \cdot b \cdot h_j^2} = \frac{1,5 \cdot \sigma_{Nu}^j \cdot l_j}{k \cdot h_j} \tag{20}$$

Za ispitivanje uzoraka sa zarezom  $a_0$  savijanjem u tri točke u LEFM vrijedi [13]:

$$K_{IC} = \sigma_{sav}^j \cdot \sqrt{a_0} \cdot F(\alpha_0) = 1,5 \cdot \sigma_{Nu}^j \cdot \frac{l_j}{h_j} \cdot \sqrt{a_0} \cdot F(\alpha_0) \tag{21}$$

$$G_f = \frac{K_{IC}^2}{E} = \frac{(\sigma_{Nu}^j)^2 \cdot h_j}{k^2 \cdot E} \cdot \left(\frac{l_j}{h_j}\right)^2 \cdot \alpha_0 \cdot [1,5 \cdot F(\alpha_0)]^2 \tag{22}$$

Iz pravca linearne regresije (5) vrijedi  $(\sigma_{Nu}^j)^2 \cdot h_j = f_{bz}^2 / A$  pa se gornji izraz može napisati kao:

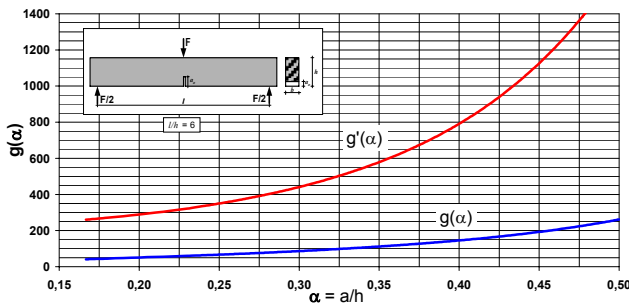
$$G_f = \frac{f_{bz}^2}{k^2 \cdot A \cdot E} \cdot \left(\frac{l_j}{h_j}\right)^2 \cdot \alpha_0 \cdot [1,5 \cdot F(\alpha_0)]^2 \tag{23}$$

Usporedbom ovog izraza sa (12) dobije se funkcija  $g(\alpha_o)$ :

$$g(\alpha_o) = (l_j / h_j)^2 \cdot \alpha_o \cdot [1,5 \cdot F(\alpha_o)]^2 \quad (24)$$

Funkcija  $g(\alpha_o)$  i njezina derivacija za odnos  $l_j / h_j = 6$  prikazane su grafički na slici 11.

Zbog pogreške koja se može pojaviti pri određivanju koeficijenta smjera  $A$ , a time i utjecati na točnost određivanja  $G_f$  i  $c_f$  potrebno je proračunati određene statističke parametre:  $\omega_x$  - koeficijent varijacije izabranih veličina uzoraka,  $\omega_A$  - koeficijent varijacije nagiba pravca  $A$  i  $m$  - relativnu širina rasipanja, koji moraju biti u granicama preporučenih.



Slika 11. Funkcije  $g(\alpha)$  i  $g'(\alpha)$  izvedene iz funkcije geometrije  $F(\alpha)$  za  $l/h=6$

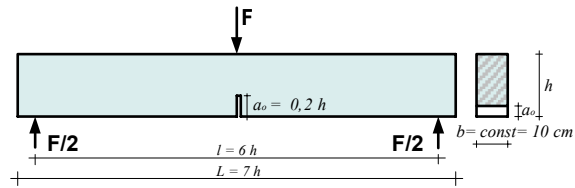
## 5 Eksperimentalni dio rada

### 5.1 Priprema i izrada uzoraka

Za ispitivanje i analizu prethodnog, odabrane su dvije vrste betona prema njegovoj kvaliteti, i to MB30 i MB60. Naknadno su izrađeni i uzorci od betona MB80. Beton MB30 pripremljen je od prirodnoga (riječnog) agregata (šljunka), a MB60 i MB80 od drobljenog agregata. Sljedeći parametar bila je maksimalna veličina zrna agregata ( $d_a$ ). Izabrane su tri karakteristične veličine koje se najčešće rabe za pripremanje mješavina betona:  $d_a = 8$  mm, 16 mm i 32 mm. Uzorci od MB80 izrađeni su samo od maksimalnog zrna agregata  $d_a = 16$  mm. Tako je dobiveno sedam različitih mješavina betona. Za analizu učinaka nehomogenosti betona na osnovne parametre mehanike loma izrađene su tri veličina gređa za ispitivanje savijanjem u tri točke (*three-point bend* - TPB). Uzorci su geometrijski slični u dvije dimenzije  $h$  i  $L$ :

- male gređe (small) oznake **S**:  
 $b \times h \times L = 100/150/1050$  mm
- gređe srednje veličine (medium) oznake **M**:  
 $b \times h \times L = 100/300/2100$  mm
- velike gređe (large) oznake **L**:  
 $b \times h \times L = 100/450/3150$  mm.

Širina uzorka bila je ista za sve veličine ( $b = 100$  mm), odnos duljine i visine:  $L/h = \text{const} = 7$ , a odnos raspona opterećivanja i visine:  $l/h = \text{const} = 6$  (slika 12.).



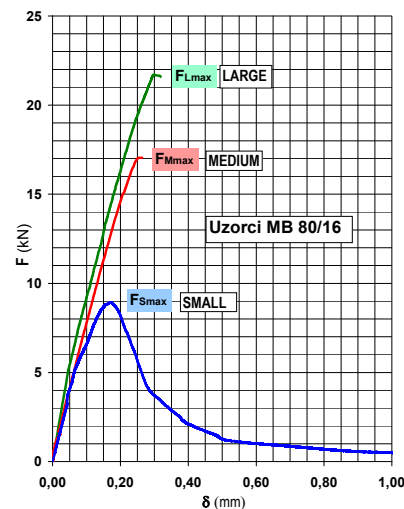
Slika 12. Dimenzije izrađenih uzoraka

### 5.2 Rezultati ispitivanja i određivanje $G_f$ i $c_f$ prema SEM modelu

Prema postupku opisanom u poglavlju 3.3.3 za određivanje energije loma  $G_f$  prema SEM modelu (*Size Effect Model*) dovoljno je zabilježiti samo maksimalnu silu  $F_{max}$  pri ispitivanju najmanje triju različitih dimenzija geometrijski sličnih uzoraka (slika 2.). Pri tome preša za ispitivanje ne mora imati hidraulični servouređaj sa kontrolom pomaka. Na slici 13. prikazani su rezultati ispitivanja uzoraka od betona MB80 i maksimalnom veličinom zrna agregata  $d_a = 16$  mm.

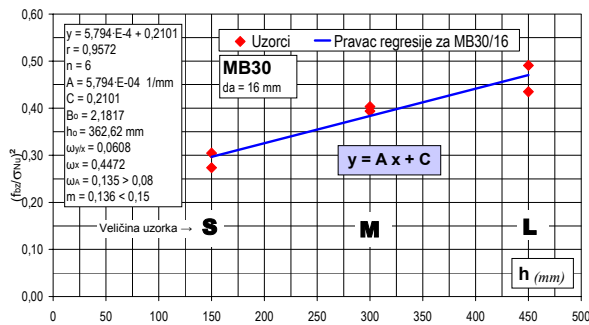
Iz korigirane maksimalne sile (18) proračuna se nazivno naprezanje  $\sigma_{Nu}$  (1) i crta pravac linearne regresije (5) koji proizlazi iz zakona učinka veličine prema Bažantu napisanom u linearnom obliku (4).

Iz koeficijenta smjera pravca **A** i odsjeka na osi  $y$  **C** (slika 14.) dobiju se empirijski koeficijenti (parametri materijala)  $B_o$  i  $h_o$  (16) iz kojih se onda proračuna energija loma  $G_f$  (12) i proračunska duljina pukotine  $c_f$  (17). Uz to je naravno potrebno poznavati vlačnu čvrstoću betona ( $f_{bz}$ ), modul elastičnosti ( $E$ ) i koeficijente koji proizlaze iz funkcije geometrije uzoraka ( $g(\alpha_o)$  i  $g'(\alpha_o)$ ) (slika 11.).



Slika 13. Dijagrami  $F - \delta$  dobiveni ispitivanjem uzoraka MB80/16





Slika 14. Pramac linearne regresije za beton MB30 i  $d_a = 16$  mm

Kao primjer određivanja energije loma  $G_f$  i proračunske duljine pukotine  $c_f$  uzet će se rezultati ispitivanja uzoraka izrađenih od betona MB30/16. Koefficient  $k$  koji se primjenjuje pri proračunu nazivnog napreznja, a uzima u obzir odnos raspona grede, visine i početnog zarez iznosi:

$$k = \frac{3 \cdot l}{2 \cdot h \cdot (1 - \alpha_o)^2} = \frac{9}{(1 - 0,2)^2} = 14,06$$

Vlačna čvrstoća i modul elastičnosti betona dobiveni ispitivanjem standardnih uzoraka (prizma):  $f_{bz} = 2,80$  MPa ;  $E = 30,63$  GPa.

Iz dijagrama na slici 14. očitamo koefficiente  $A$  i  $C$ :  $A = 5,794 \cdot 10^{-4} 1/mm$ ;  $C = 0,2101$ .

Iz njih proračunamo parametre materijala:

$$B_o = 1/\sqrt{C} = 2,182 \text{ i } h_o = C/A = 362,616 \text{ mm}$$

Za  $l/h = 6$  i  $\alpha_o = 0,20$  dobijemo funkcije geometrije  $F(\alpha_o)$  i  $F'(\alpha_o)$  [12]:

$$F(\alpha_o) = 1,945 - 2,91 \cdot \alpha_o + 14,095 \cdot \alpha_o^2 - 24,545 \cdot \alpha_o^3 + 25,51 \cdot \alpha_o^4 = 1,77126$$

$$F'(\alpha_o) = -2,91 + 2 \cdot 14,095 \cdot \alpha_o - 3 \cdot 24,545 \cdot \alpha_o^2 + 4 \cdot 25,51 \cdot \alpha_o^3 = 0,5989$$

Prema (24):  $g(\alpha_o) = 50,825$ ;  $g'(\alpha_o) = 273,53$ .

Sada se iz izraza (12) proračuna energija loma  $G_f$ :

$$G_f = \frac{f_{bz}^2}{k^2 \cdot A \cdot E'} \cdot g(\alpha_o) = 111,05 \text{ J/m}^2,$$

a iz energije loma  $K_{IC}$ :

$$G_f = K_{IC}^2 / E' \Rightarrow K_{IC} = \sqrt{G_f \cdot E'} = 1,84 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

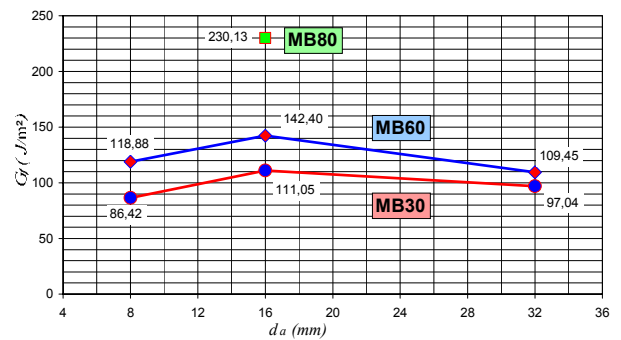
Proračunska se duljina pukotine proračuna iz izraza (17):

$$c_f = \frac{g(\alpha_o)}{g'(\alpha_o)} \cdot h_o = 0,1858 \cdot 362,616 = 67,39 \text{ mm}$$

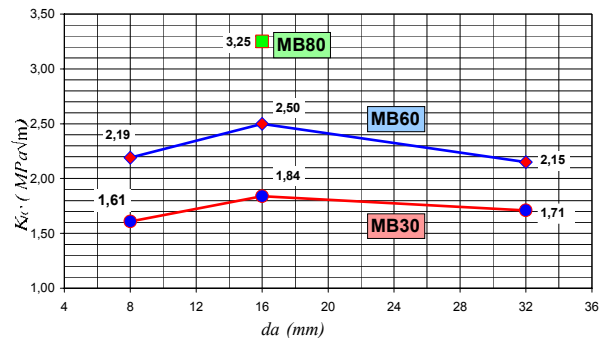
Tablica 1. Rezultati proračuna  $K_{IC}$  prema SEM modelu

Mješavina betona	$B_o$	$h_o$ (mm)	$G_f$ (J/m <sup>2</sup> )	$K_{IC}$ (MPa√m)
MB30/8	2,999	152,33	86,42	1,61
MB30/16	2,182	362,62	111,05	1,84
MB30/32	2,619	245,04	97,04	1,71
MB60/8	4,828	46,20	118,88	2,19
MB60/16	4,564	45,09	142,40	2,50
MB60/32	3,377	89,13	109,45	2,15
MB80/16	3,128	131,36	230,13	3,25

Na slikama 15 i 16 rezultati iz tablice 1 prikazani su grafički.



Slika 15. Dijagram  $G_f$  u funkciji  $d_a$  određen prema SEM modelu



Slika 16. Dijagram  $K_{IC}$  u funkciji  $d_a$  određen prema SEM modelu

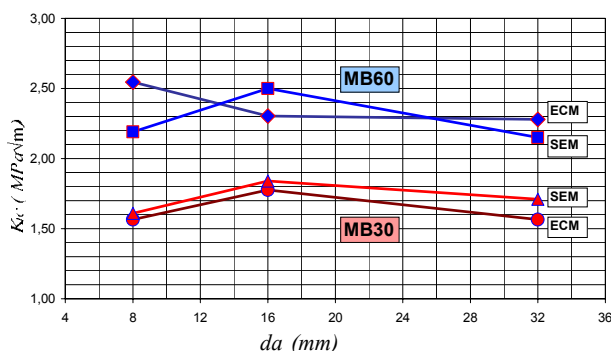
U tablici 2. su rezultati proračunske efektivne duljine pukotine  $c_f$  po SEM modelu.

Tablica 2. Rezultati proračuna  $c_f$  prema SEM modelu

Mješavina betona	$B_o$	$h_o$ (mm)	$\frac{g(\alpha)}{g'(\alpha)}$	$c_f = \frac{g(\alpha)}{g'(\alpha)} \cdot h_o$
MB30/8	2,999	152,33	0,1875	28,56
MB30/16	2,182	362,62	0,1875	67,99
MB30/32	2,619	245,04	0,1875	45,94
MB60/8	4,828	46,20	0,1875	8,66
MB60/16	4,564	45,09	0,1875	8,45
MB60/32	3,377	89,13	0,1875	16,71
MB80/16	3,128	131,36	0,1875	24,63

## 7 Analiza i komentar rezultata ispitivanja

Koristeći se modelom učinaka veličine (SEM model) proračunana je energija loma  $G_f$  i iz nje proračunan kritični faktor intenziteta naprezanja  $K_{IC}$  (žilavost loma). Na slici 17. ti rezultati su uspoređeni s rezultatima dobivenim po ECM modelu. Usporedba je provedena za MB30 i MB60.

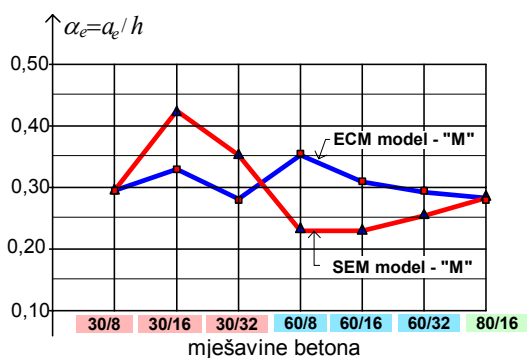


Slika 17. Usporedba rezultata po ECM\* i SEM modelu \*i srednja vrijednost za uzorke M i L

Iz prethodnih se usporedbi vidi relativno dobro slaganje rezultata dobivenih po oba modela. Koristeći se ovim modelom određena je proračunska duljina pukotine (područja loma)  $c_f$ . Ti rezultati (tablica 2.) uspoređeni su s rezultatima efektivne duljine pukotine  $a_e$  određenih po ECM modelu za uzorke veličine M.

Tablica 3. Usporedbe relativnih duljina efektivne pukotine dobivenih prema ECM i SEM modelu

Mješavina betona	$c_f$ (mm)	$\alpha_e = a_e / h$ prema SEM	$\alpha_e = a_e / h$ prema ECM
MB30/8	28,56	<b>0,295</b>	<b>0,295</b>
MB30/16	67,99	<b>0,426</b>	<b>0,330</b>
MB30/32	45,94	<b>0,353</b>	<b>0,281</b>
MB60/8	8,66	<b>0,229</b>	<b>0,353</b>
MB60/16	8,45	<b>0,228</b>	<b>0,310</b>
MB60/32	16,71	<b>0,256</b>	<b>0,294</b>
MB80/16	24,63	<b>0,282</b>	<b>0,283</b>



Slika 19. Usporedba  $\alpha_e$  određen po SEM i ECM modelu (uzorci M)

Iz usporedbe se vidi da se rezultati ne slažu kao kod usporedbe  $K_{IC}$  na slici 17. S obzirom na relativno mali broj uzoraka, to se moglo i očekivati jer je određivanje  $c_f$  vrlo osjetljivo na rezultate ispitivanja. U prvom redu to se odnosi na osjetljivost koeficijenta smjera  $A$  u pravcima linearne regresije, a drugo, efektivna duljina pukotine određuje se uporabom vrlo osjetljive prve derivacije funkcije geometrije  $g'(\alpha)$ .

## 7 Zaključak

Predmet izučavanja mehanike loma - ML (*Fracture Mechanics* – FM) čvrsto je deformabilno tijelo, ali s naglaskom na učinak pukotina. U znanosti o otpornosti materijala i teoriji elastičnosti do loma dolazi po kriterijima čvrstoće ili popuštanja materijala, a u mehanici loma do zakazivanja materijala dolazi zbog nestabilnosti pukotina. Kao posljedica rasporeda zrna agregata i nesavršene veze agregata i koloidnih čestica cementne osnove beton pripada nehomogenim materijalima. Specifičnost njegove strukture i odstupanje od pretpostavke idealne krhkosti zahtijevaju izradu posebnog modela mehanike loma. Sve je to utjecalo na nemogućnost direktne primjene linearno-elastične mehanike loma (*Linear Elastic Fracture Mechanics* – LEFM) na beton, koji pripada kvazikrhkim materijalima. Od 80-ih godina 20. stoljeća glavna istraživanja u području mehanike loma materijala na osnovi cementa bila je koncentrirana na razvoj metoda i modela za pronalaženje «realnog» mehanizma loma. Osim toga mnogi istraživači pokušavaju objasniti učinak veličine konstrukcije na lom, odnosno na parametre mehanike loma, tzv. *size effect*.

Obrađena rezultata ispitivanja geometrijski sličnih uzoraka (S, M i L) provedena je prema SEM modelu (*size effect model*). Potvrđen je Bažantov zakon učinka veličine (*size effect law*) i određeni parametri mehanike loma  $G_f$  - energija loma i  $c_f$  - proračunska duljina pukotine. Parametri materijala dobiveni po SEM modelu pokazuju vrlo veliku osjetljivost na rezultate ispitivanja. Naročito se to odnosi na koeficijent smjera  $A$  u pravcu linearne regresije.

Eksperimenti u ovome radu su prvi na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu vezani uz određivanje parametara mehanike loma betona. Stoga je u njihovu provođenju bilo dosta teškoća. U prvom redu zato što u laboratoriju nismo imali hidrauličnu prešu sa servouređajem za kontrolu pomaka. Zato se dio uzoraka ispitivao u Institutu za građevinske materijale u Ljubljani. Bez takvih se preša ne može dobiti dijagram koji obuhvaća omekšanje betona ni stabilan razvoj pukotine. U laboratoriju Zavoda za tehničku mehaniku u međuvremenu su nabavljene najmodernije hidrauličke preše koje zadovoljavaju sve zahtjeve u tom smislu. To će omogućiti nastavak istraživanja na razvoju metoda i modela za pronalaženje

«realnog» mehanizma loma, odnosno «realnih» parametara mehanike loma koji će opisati stanje materijala i učinak veličine konstrukcije na parametre mehanike loma, tzv. *size effect*.

Beton je nehomogeni materijal i treba istraživati učinak mnogobrojnih faktora koji povećavaju ili smanjuju tu

nehomogenost. Isto tako zanimljiva su istraživanja betona s dodacima kojima mu se povećava žilavost loma npr. grafitna vlakna, betona ojačanog trakama od polimera armiranih vlaknima, betona visokih čvrstoća koji su sve više u upotrebi itd. Sve to potrebno je za postupno uključivanje parametara mehanike loma u pravilnike i propise, a time i u praktičnu upotrebu.

## LITERATURA

- [1] Griffith, A. A.: *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*, Philosophical Transactions of Royal Society of London, Vol. 221, pp. 163-198, Series A, 1902.
- [2] Irwin, G. R.: *Fracture Mechanics*, Proceeding of the first symposium on naval structural mechanics, Pergamon Press, New York, USA, pp. 557-594, 1960.
- [3] Irwin, G. R.: *Plastic Zone Near a Crack and Fracture Toughness*, Sagamore Research Conference Proceeding, Vol. 4, 1961.
- [4] Hilleborg, A.: *The theoretical basis of a method to determine the fracture energy  $G_F$  of concrete*, RILEM technical Committees
- [5] Petersson, P. E.: *Crack Growth and Formation of Fracture Zones in Plane Concrete and Similar Materials*, Div. of Building Mat., Report TVBM-3005, 1981.
- [6] Dugdale, D. S.: *Yielding of Steel Plates Containing Slits*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 8, pp. 100-108, 1960.
- [7] Barenblatt, G. I.: *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 7, pp. 55-129, 1962.
- [8] Bažant, Z. P.; Oh, B. H.: *Crack Band Theory for Fracture of Concrete*, Materials and Structures, RILEM, Paris, Vol. 16, N° 93, 1983, pp. 155-177.
- [9] Jenq, Y.; Shah, S. P.: *Two Parameter Fracture Model for Concrete*, Journal of Engineering Mechanics, Proc. ASCE, Vol. 111, No. 10, October, 1985, pp. 1227-1241.
- [10] Karihaloo, B. L.; Nallathambi, P.: *An Improved Effective Crack Model for the Determination of Fracture Toughness of Concrete*, Cement and Concrete Research, Vol. 19, pp. 603-610, 1989.
- [11] Bažant, Z. P.; Gettu, R.; Kazemi, M. T.: *Identification of Nonlinear Fracture Properties from Size Effect Tests and Structural Analysis Based on Geometry Dependent R-curve*, Center for Advanced Cement-Based Materials, The Technological Institute, Northwestern University, Evanston, Illinois, March 1989, pp. 1-45.
- [12] Tada, H.; Paris, P. C.; Irwin, G. R.: *The Stress Analysis of Crack Handbook*, 3<sup>rd</sup> ed., The American Society of Mechanical Engineers, New York, 1997.
- [13] Karihaloo, B. L.: *Fracture Mechanics and Structural Concrete*, Longman Scientific & Technical, Sydney, April 1994.
- [14] Krolo, J.: *Učinak nehomogenosti betona na osnovne parametre mehanike loma*, doktorska disertacija, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 23. 12. 2004., 156 str.
- [15] RILEM Draft Recommendations: *Determination of Parameters of Plain Concrete Using Three-Point Bend Tests*, Materials and Structures, 23, pp. 457-460.
- [16] Ožbolt, J.: *Maßstabseffekt und Duktilität von Beton und Stahlbeton Konstruktionen*, Institut für Werkstoffe im Bauwesen der Universität Stuttgart, 1995.