

# Analiza relativnih deformacija pri savijanju ravnih nosača

---

Lauš, Antonija

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:653518>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-20**

Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Antonija Lauš

**ANALIZA RELATIVNIH DEFORMACIJA  
PRI SAVIJANJU RAVNIH NOSAČA**

ZAVRŠNI ISPIT

Zagreb, 2024



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Antonija Lauš

**ANALIZA RELATIVNIH DEFORMACIJA  
PRI SAVIJANJU RAVNIH NOSAČA**

ZAVRŠNI ISPIT

Mentor: Doc.dr.sc. Marina Frančić Smrkić

Komentor: Izv. Prof. dr. sc. Ivan Duvnjak

Zagreb, 2024



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Antonija Lauš

**SHEAR CENTER OF THIN-WALLED OPEN  
CROSS-SECTIONS**

FINAL EXAM

Supervisor: Doc.dr.sc. Marina Frančić Smrkić

Deputy supervisor: Izv. Prof. dr. sc. Ivan  
Duvnjak

Zagreb, 2024



OBRAZAC 3

POTVRDA O POZITIVNOJ OCJENI PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Student/ica :

(Ime i prezime)

(JMBAG)

zadovoljio/la je na pisanom dijelu završnog ispita pod naslovom:

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

(Naslov teme završnog ispita na engleskom jeziku)

i predlaže se provođenje daljnjeg postupka u skladu s Pravilnikom o završnom ispitu i diplomskom radu Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta.

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu znanstvenog projekta: (upisati ako je primjenjivo)

(Naziv projekta, šifra projekta, voditelj projekta)

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu stručne prakse na Fakultetu: (upisati ako je primjenjivo)

(Ime poslodavca, datum početka i kraja stručne prakse)

Datum:

Mentor:

Potpis mentora:

Komentor:



OBRAZAC 5

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja :

(Ime i prezime, JMBAG)

student/ica Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta ovim putem izjavljujem da je moj pisani dio završnog ispita pod naslovom:

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

izvorni rezultat mojega rada te da se u izradi istoga nisam koristio/la drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

Datum:

Potpis:



OBRAZAC 6

IZJAVA O ODOBRENJU ZA POHRANU I OBJAVU PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Ja :

(Ime i prezime, OIB)

ovom izjavom potvrđujem da sam autor/ica predanog pisanog dijela završnog ispita i da sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti odgovara sadržaju dovršenog i obranjenog pisanog dijela završnog ispita pod naslovom:

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

koji je izrađen na sveučilišnom prijediplomskom studiju Građevinarstvo Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta pod mentorstvom:

(Ime i prezime mentora)

i obranjen dana:

(Datum obrane)

Suglasan/suglasna sam da pisani dio završnog ispita bude javno dostupan, te da se trajno pohrani u digitalnom repozitoriju Građevinskog fakulteta, repozitoriju Sveučilišta u Zagrebu te nacionalnom repozitoriju.

Datum:

Potpis:

## SAŽETAK

U završnom radu obrađena je tema naprezanja i deformacije ravnih štapova u jednoj ravnini koja se zove ravninom opterećenja.

Promatrat ćemo čisto savijanje i savijanje silama. Razvit će se odnos deformacija-zakrivljenost iz razmatranja uzdužnih deformacija koje su se razvile u štapu tijekom savijanja; ove deformacije variraju linearno s udaljenošću od neutralne površine štapa.

Promatrati ćemo položaj neutralne osi za različite poprečne presjeke.

Analizirati ćemo rezultate pomaka pri ispitivanju nosača

Također ćemo se dotaknuti kompozitnih nosača te njihovim razlikama u odnosu na obične nosače izgrađene od jednog materijala

Ključne riječi-: deformacije, naprezanja, moment savijanja, poprečna sila, kompozitni nosači



## SUMMARY

This thesis deals the topic of stress and deformation of straight rods in a plane known as the plane of loading is analyzed. We will observe pure bending and bending by forces. The relationship between deformation and curvature will be developed from the consideration of longitudinal deformations that developed in the rod during bending; these deformations vary linearly with the distance from the neutral surface of the rod. We will observe the position of the neutral axis for different cross-sections. We will analyze the displacement results in beam testing. We will also address composite beams and their differences compared to ordinary beams made of a single material.

Key words: deformations, stresses, bending moment, transverse force, composite supports

## SADRŽAJ

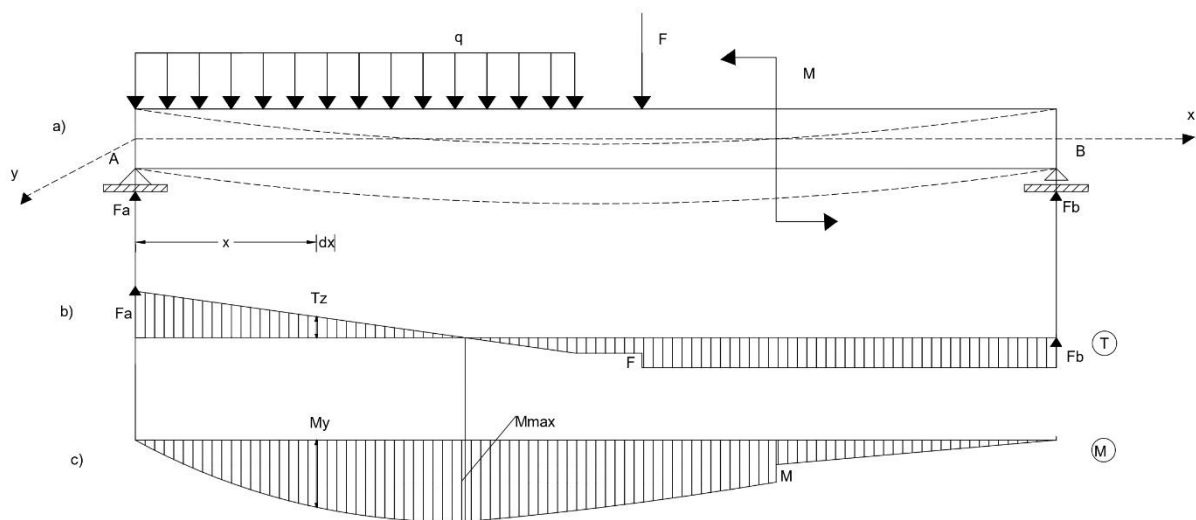
Sažetak .....	i
sadržaj .....	iii
1. UVOD .....	1
2. Opće teorijske postavke pri savijanju nosača .....	2
3. Naprezanje I deformacije pri čistom savijanju .....	8
4. Savijanje silama .....	13
5. Položaj neutrane osi za različite poprečne presjeke .....	17
6. Analiza rezultata pomaka pri ispitivanju nosača .....	22
7. Kompozitni nosači .....	27
8. Numerički zadatak .....	30
8.1. Osnovni podatci o nosaču .....	30
8.2. Podatci o probnom opterećenju .....	30
8.3. Proračun opterećenja za probno opterećenje .....	31
8.4. Faze ispitivanja i efikasnost probnog opterećenja .....	32
8.5. Opis mjernih mjesta .....	33
8.6. Rezultati mjerenja relativnih deformacija .....	34
8.7. Fotodokumentacija .....	36
8.8. Proračun nosača .....	37
9. Zaključak .....	43
10. Literatura .....	44
11. Popis slika .....	45

## 1. UVOD

Otpornost materijala se bavi analizom čvrstoće, krutosti i stabilnosti konstrukcija. Čvrstoća se definira kao sposobnost materijala da prenosi opterećenja bez nastanka loma ili trajnih deformacija. Krutost se odnosi na otpornost konstrukcije prema deformiranju pod djelovanjem sila, dok je stabilnost sposobnost konstrukcije i njenih elemenata da zadrže svoj prvobitni oblik i ravnotežno stanje unatoč djelovanju vanjskih sila. Za razumijevanje i procjenu ovih ključnih svojstava, znanost o materijalima pruža osnovna načela i postupke proračuna. Ovi postupci uključuju analizu naprezanja i deformacija unutar materijala kada su izloženi različitim vrstama opterećenja. Proračun čvrstoće, krutosti i stabilnosti ključan je za osiguranje sigurnosti i pouzdanosti konstrukcija. Jedan od osnovnih modela korištenih u proračunu složenih konstrukcija je štap. Štap se karakterizira malim poprečnim presjekom u odnosu na njegovu duljinu i najčešće podnosi samo uzdužna opterećenja, kao što su sila zatezanja ili pritiska. Zbog jednostavnosti i praktičnosti, štapovi se često koriste kao osnovni elementi u analizi i dizajnu većih i složenijih struktura. U inženjerskim proračunima, naprezanje i deformacija štapova detaljno se analiziraju kako bi se razumjele njihove performanse pod različitim uvjetima opterećenja. Naprezanje se odnosi na unutarnje sile koje djeluju unutar materijala, dok deformacija predstavlja promjenu oblika ili veličine materijala pod utjecajem tih sila. U ovom radu, fokusirat ćemo se na analizu naprezanja i deformacija štapova. Detaljno ćemo istražiti kako različite vrste opterećenja utječu na ponašanje štapova, te ćemo primijeniti osnovna načela otpornosti materijala za proračun njihovih ključnih karakteristika. Ova analiza pružit će nam dublje razumijevanje mehaničkih svojstava štapova i njihovu primjenu u inženjerskoj praksi.

## 2. OPĆE TEORIJSKE POSTAVKE PRI SAVIJANJU NOSAČA

Odabrat ćemo ravni nosač koji će poslužiti za analizu ponašanja koje proučavamo. Štap je izložen opterećenju smještenom u ravnini opterećenja, koja prolazi uzdužnom osi štapa I podudara se s ravninom crteža (slika 1)



Slika 1. a) ravni štap izložen opterećenju b) dijagram poprečnih sila c) dijagram momenta savijanja

Kada se nosač izloži zadanim opterećenjima, dolazi do iskrivljenja uzdužne osi nosača. To znači da se zakrivljenost osi nosača mijenja. Vlakna koja su paralelna s uzdužnom osi nosača skraćuju se na konkavnoj strani (unutarnjoj strani za krivljenje), dok se na konveksnoj strani (vanjskoj strani zakrivljena) produljuju. Ova promjena u duljini vlakana rezultira savijanjem nosača. Savijanje je osnovni oblik deformacije koji se javlja kada nosač prenosi opterećenje koje nije ravnomjerno raspoređeno duž njegove osi. Štap koji se podvrgava ovakvom obliku deformacije naziva se nosačem.

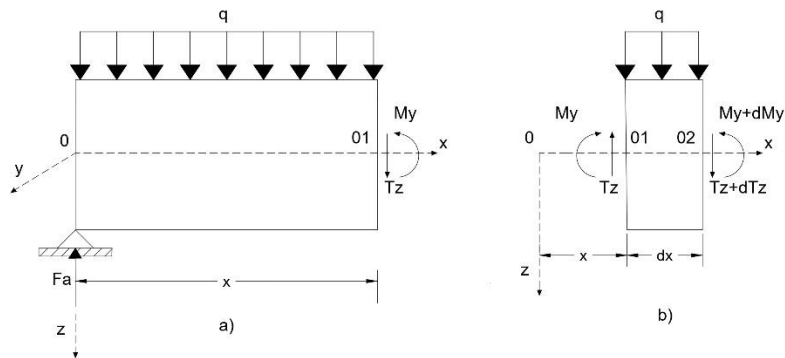
Unutar nosača, pod djelovanjem vanjskih opterećenja, javljaju se unutarnje sile. Najvažnije unutarnje sile su poprečna sila  $T_z$  i moment savijanja  $M_y$ . Poprečna sila  $T_z$  djeluje okomito na uzdužnu os nosača, dok moment savijanja  $M_y$  djeluje okomito na ravninu poprečnog presjeka nosača. Ove unutarnje sile ključne su za razumijevanje kako se nosač deformira pod opterećenjem. Da bismo precizno odredili vrijednosti unutarnjih sila i momenata u nosaču, koristimo metodu prereza. Ova metoda uključuje prerezivanje nosača na određenoj udaljenosti  $x$  od jednog kraja nosača. Na primjer, prerezat ćemo nosač na udaljenosti  $x$  od lijevog kraja. Nakon prerezivanja, zanemarujemo desni dio nosača i promatramo samo lijevu stranu. Djelovanje desnog dijela nosača na lijevu stranu zamjenjujemo unutarnjim silama, momentom savijanja i poprečnom silom. Ovaj pristup nam omogućava da analiziramo unutarnje reakcije unutar nosača i razumijemo kako one doprinose ukupnoj stabilnosti i čvrstoći konstrukcije.

$M_y$  i  $T_z$  ćemo dobiti iz idućeg izraza:

$$\begin{aligned} \sum F_z &= 0 \\ F_A - qx - T_z &= 0 \\ T_z &= F_A - qx = \sum F_z \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \sum M_{01} &= 0 \\ F_A x - q \frac{x^2}{2} - M_y &= 0 \\ M_y &= F_A x - q \frac{x^2}{2} = \sum M_{01} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ostali uvjeti ravnoteže su zadovoljeni automatski.

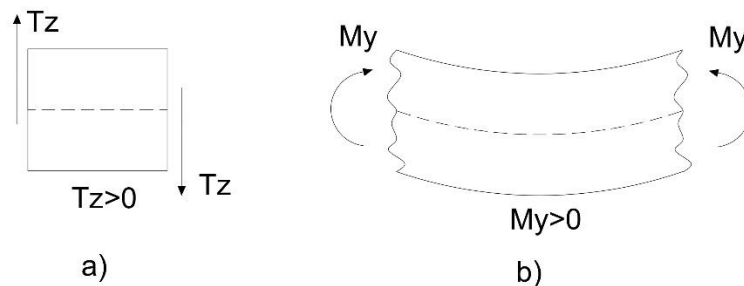


*Slika 1.2. Dio štapa zamijenjen unutarnjim silama, momentom savijanja i poprečnom silom*

Poprečna sila  $T_z$  se definira kao algebarski zbroj svih sila koje djeluju okomito na uzdužnu os nosača, s obje strane promatranog presjeka. To znači da kada analiziramo određeni presjek nosača, uzimamo u obzir sve sile koje djeluju okomito na os nosača s obje strane tog presjeka i zbrajamo ih uzimajući u obzir njihove smjerove.

Moment savijanja  $M_y$  predstavlja algebarski zbroj momenata svih tih sila u odnosu na težište poprečnog presjeka nosača. Drugim riječima, izračunavamo momente svih sila koje djeluju s obje strane promatranog presjeka u odnosu na težište presjeka i zbrajamo ih, uzimajući u obzir njihove smjerove.

Kada prikazujemo vrijednosti poprečnih sila i momenata savijanja duž osi nosača, dobivamo T-dijagram (za poprečne sile) i M-dijagram (za momente savijanja). Na T-dijagramu, vertikalna osa (ordinata) predstavlja veličinu poprečne sile u određenom presjeku nosača, dok horizontalna osa (apscisa) prikazuje poziciju duž nosača. Slično tome, na M-dijagramu, ordinata označava veličinu momenta savijanja u određenom presjeku nosača, dok apscisa prikazuje poziciju duž nosača (vidi sliku 1.3).



Slika 1.3. Dijagrami poprečne sile i momenta

Poprečna sila  $T_z$  i moment savijanja  $M_y$  su pozitivni ako su njihovi vektori okrenuti prema pozitivnom smjeru koordinatnih osi u presjeku s vanjskom normalom koja je usmjerena u pozitivnom smjeru. Ili možemo drugačije opisati:

Sila u presjeku štapa je pozitivna ukoliko se dio štapa koji gledamo okreće u smjeru kretanja kazaljke na satu (slika 3a). Dok je moment savijanja pozitivan ukoliko se dio štapa ide konkavno dolje (slika 3b). Vlakna koja su dolje se produljuju, a ona gore se skraćuju. Dijagram uvijek crtamo na strani rastegnutih vlaknaca.

Poprečna sila  $T_z$  i moment savijanja  $M_y$  smatraju se pozitivnima kada su njihovi vektori usmjereni prema pozitivnom smjeru koordinatnih osi u presjeku nosača, a vanjska normala je usmjerena u pozitivnom smjeru. Ovo znači da je sila u presjeku nosača pozitivna ako se dio nosača koji promatramo okreće u smjeru kretanja kazaljke na satu (vidi sliku 3a).

Moment savijanja je pozitivan kada se dio nosača zakreće konkavno prema dolje (vidi sliku 3b). Konkretno, to znači da se na donjoj strani nosača vlakna produžuju, dok se na gornjoj strani skraćuju. Ova pojava nastaje zbog savijanja nosača, gdje se materijal proteže duž donjeg ruba (konkavne strane zakrivljenosti) i stišće uz gornji rub (konveksna strana zakrivljenosti).

Prilikom crtanja dijagrama poprečnih sila i momenata savijanja, važno je prikazati ih na strani vlakana koja su pod rastezanjem. To nam pomaže da vizualiziramo kako se sile i momenti raspoređuju duž presjeka nosača te da precizno interpretiramo njihov utjecaj na strukturu nosača pod opterećenjem.

$T_z$  i  $M_y$  se mijenjaju duž osi štapa (slika 2), tako u presjeku  $O_1$  djelujuju  $T_z(x)$  i  $M_y(x)$ , a u  $O_2$   $T_z(x) + dT_z(x)$  i  $M_y(x) + dM_y(x)$ , stoga imamo:

$$\begin{aligned}\sum F_z &= -T_z + (T_z + dT_z) + qdx = 0 \\ \sum M_{O_2} &= M_y + T_z dx - q dx \frac{dx}{2} - (M_y + dM_y) = 0 \\ \frac{dT_z}{dx} &= -q\end{aligned}\tag{1.3}$$

Veličina  $q dx \frac{dx}{2}$  se zanemaruje pa dobivamo:

$$\frac{dM_y}{dx} = T_z\tag{1.4}$$

Nakon što deriviramo i sredimo izraz dobivamo:

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = -q\tag{1.5}$$

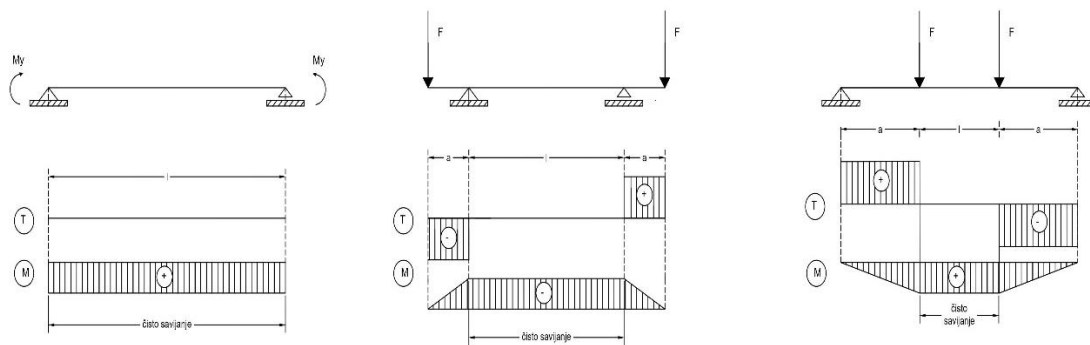
Iz jednadžbe (1.4) slijedi da moment savijanja  $M_y$  je najveći u presjeku u kojem je  $T_z = 0$

Savijanje je slučaj gdje se u poprečnom presjeku strukture javljaju poprečna sila i moment savijanja. Ovaj oblik deformacije poznat je kao poprečno savijanje ili savijanje silama.

Čisto savijanje se događa kada se u poprečnim presjecima strukture javlja samo moment savijanja, bez prisustva poprečne sile.

Obično savijanje se naziva kada je jedna od glavnih središnjih osi tromosti strukture usklađena s ravninom u kojoj se javlja moment savijanja.



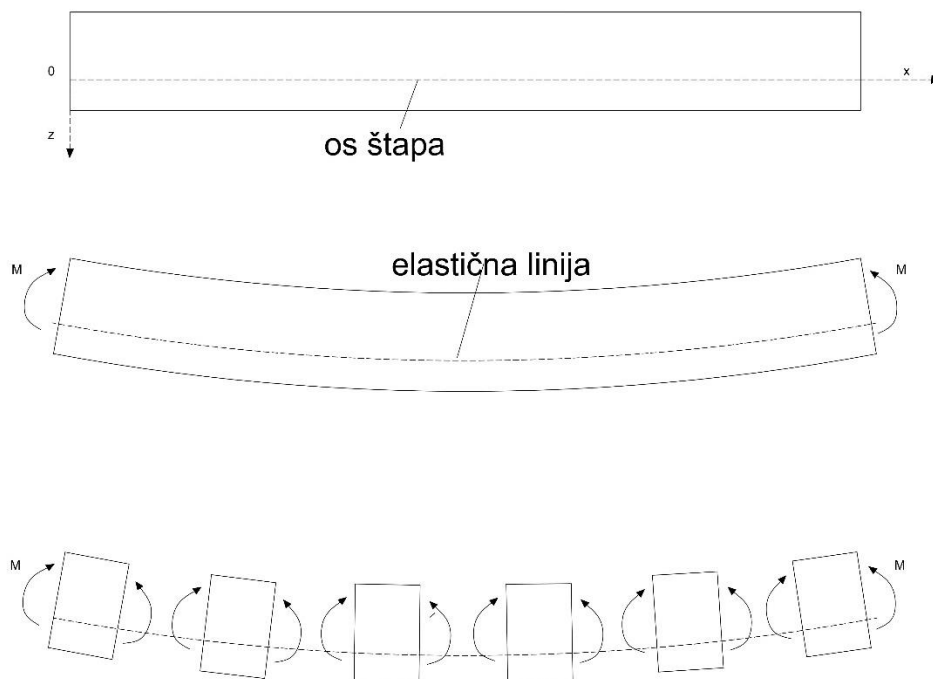


Slika 1.4. Čisto savijanje

Koso savijanje je savijanje kod kojeg se ni jedna glava središnja os tromosti presjeka ne poklopi s ravninom djelovanja momenta savijana

### 3. NAPREZANJE I DEFORMACIJE PRI ČISTOM SAVIJANJU

Čisto savijanje je vezano za ravninu u kojoj se nalazi os nosača  $x$  i os simetrije. Uzdužna os se mijenja i dobiva oblik zakrivljene linije koju zovemo elastična linija slika(3). Kod čistog savijanja elastična je linija dio kružnice. Ako zamislimo štap presječen u puno malih dijelova. Neka svaki dio bude geometrijski identičan, istog opterećenja  $I$  s istim elastičnim svojstvima, pa će onda zakrivljenost za svaki dio biti ista. Stoga, elastična linija je dio krivulje s konstantnom zakrivljenosti, a to je kružnica.



Slika 3. Elastična linija pri čistom savijanju kao dio kružnice

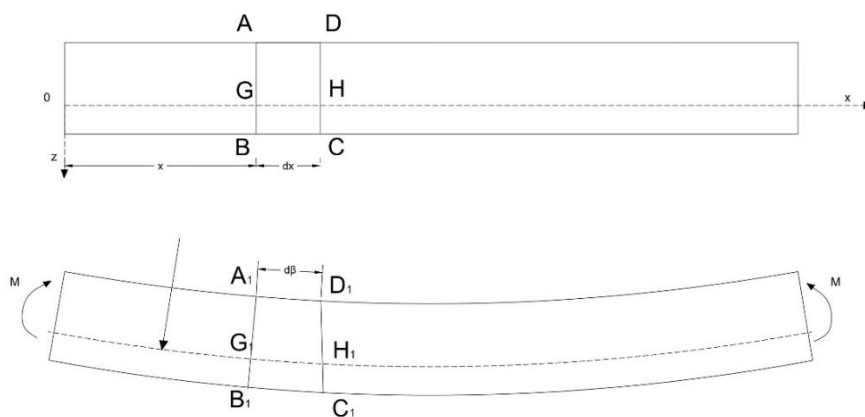
Uvodimo sljedeće pretpostavke o rasporedu naprezanja

- Nakon deformacija poprečni presjeci ostaju ravni i okomiti na liniju nosača
- Postoji samo normalno naprezanje  $\sigma_x$

Moraju postojati sljedeća ograničenja

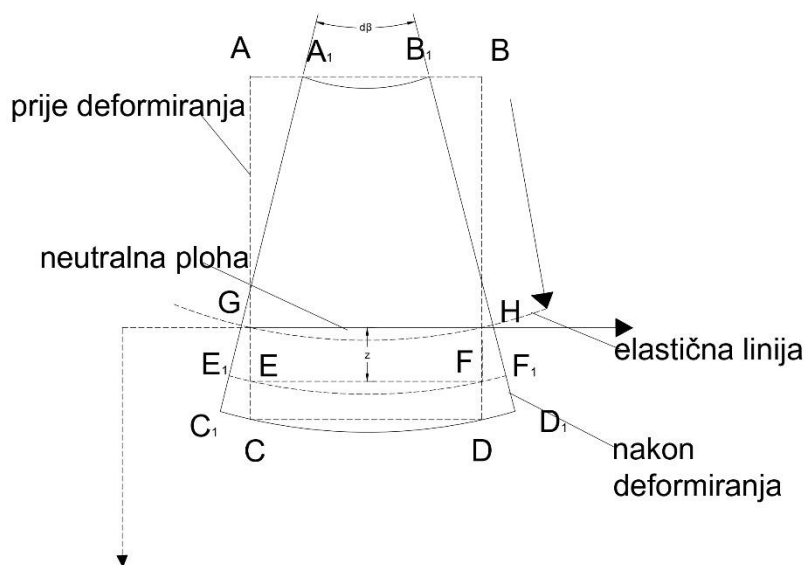
- Visina poprečnog presjeka  $h$  je mala ako usporedimo s rasponom  $l$ .
- Najveći kut zaokreta tangente na elastičnu liniju je malen i najčešće u granicama  $0,05 \leq \beta \leq 0,1$ .
- Uzimaju se naprezanja u presjecima koji su dovoljno udaljeni (misli se na visinu poprečnog presjeka  $h$ ) od mjesta gdje djeluje koncentrirano opterećenje.

Na slici je zadan štap s označenim pravokutnikom ABCD na njegovoj površini između dvaju presjeka



*Slika 3.1 Geometrijska analiza deformiranja štapa pri čistom savijanju*

Kad opteretimo nosač linije AD i BC prelaze u dijelove kružnice, a linije AB i CD ostaju okomite na te kružnice. Pravokutni elementi na površini štapa i element ABCD, deformiraju se, ali ostaju okomiti. Uzdužna vlakna na donjoj strani se produljuju, a na gornjoj strani skraćuju. Dok vlakna u sredini grede ne mijenjaju duljinu i tvore neutralnu površinu štapa. Ishodište koordinatnog sustava se nalazi na neutralnoj površini.



Slika 3.2 Pravokutni element štapa prije deformiranja i nakon njega

$$\epsilon = \frac{E_1F_1 - EF}{EF} \quad (2,1)$$

$EF = GH = dx = \rho * d\beta$  duljina vlakna prije deformacije, a  $E_1F_1 = (\rho + z) * d\beta$  duljina nakon deformacije

$$\epsilon_x = \frac{(\rho + z) * d\beta - \rho * d\beta}{\rho * d\beta} \quad (2,2)$$

Deformacija  $\epsilon_x$  linearno se mijenja po visini poprečnog presjeka nosača. U neutralnoj površini jednaka je nuli; s jedne strane neutralne površine je pozitivna, a s druge strane negativna. Za izračunavanje deformacije potrebno je doći do polumjera zakrivljenosti  $\rho$  elastične linije i položaja neutralne površine.

Hookeovim zakonom dobije se:

$$\sigma_x = E * \epsilon_x = \frac{E}{\rho} * z \quad (2,3)$$

$$N = \int_A \sigma_x * dA = 0 \quad (2,4)$$

$$M_y = \int_A \sigma_x * z * dA \quad (2,5)$$

$$M_z = - \int_A \sigma_x * y * dA = 0 \quad (2,6)$$

Daljnjim uvrštavanjem (2,3) u (2.4) dobivamo:

$$\int_A \frac{E}{\rho} * z * dA = 0$$

Modul elastičnosti E i polumjer zakrivljenosti  $\rho$  su konstante pa se izvuku ispred integrala

$$\frac{E}{\rho} \int_A z * dA = \frac{E}{\rho} * S_y = 0 \quad (2.7)$$

$S_y$  mora biti jednak nuli a to se događa ako os y prolazi težištem poprečnog presjeka.

Uvrstimo (2.3) u (2.5)

$$M_y = \int_A \frac{E}{\rho} * z * z * dA = \frac{E}{\rho} \int_A z^2 * dA = \frac{E}{\rho} I_y,$$

$$\frac{1}{\rho} = \kappa = \frac{M_y}{E * I_y} \quad (2.8)$$

K je zakrivljenost elastične linije, a E I y fleksijska krutost.

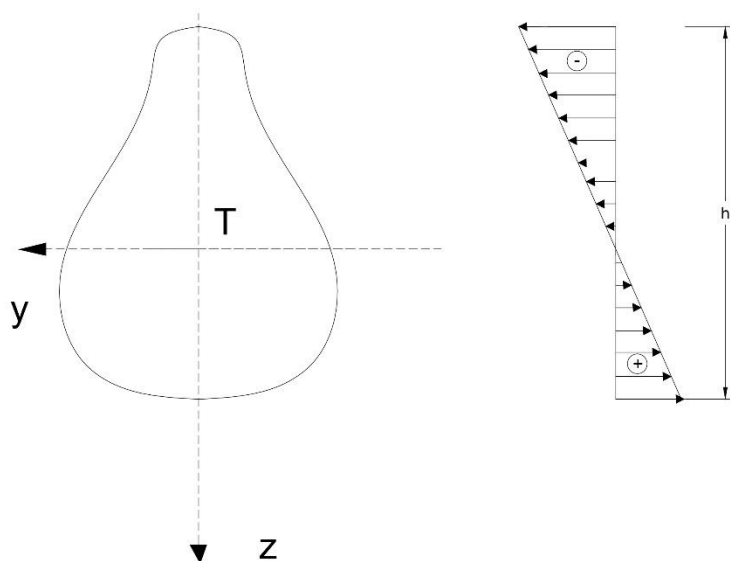
Uvrstimo (2.3) u (2.6):

$$M_z = - \int_A \frac{E}{\rho} * z * y * dA = - \frac{E}{\rho} \int_A \frac{E}{\rho} * z * y * dA = - \frac{E}{\rho} I_{zy} = 0$$

Pošto je  $I_{zy} = 0$ , onda slijedi da su y i z glavne osi tromosti

$$\frac{\sigma_x}{E * z} = \frac{M_y}{E * I_y}$$

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} * z \quad (2.9)$$



*Slika 3.3 Podjela normalnog naprezanja po visini presjeka pri čistom savijanju*

Slika 3.3. pokazuje da je normalno naprezanje linearno raspodijeljeno po visini poprečnog presjeka i u neutralnoj površini je nula. Kod pozitivnog momenta savijanja u donjim vlaknima normalno će naprezanje biti vlačno, a u gornjim tlačno.

#### 4. SAVIJANJE SILAMA

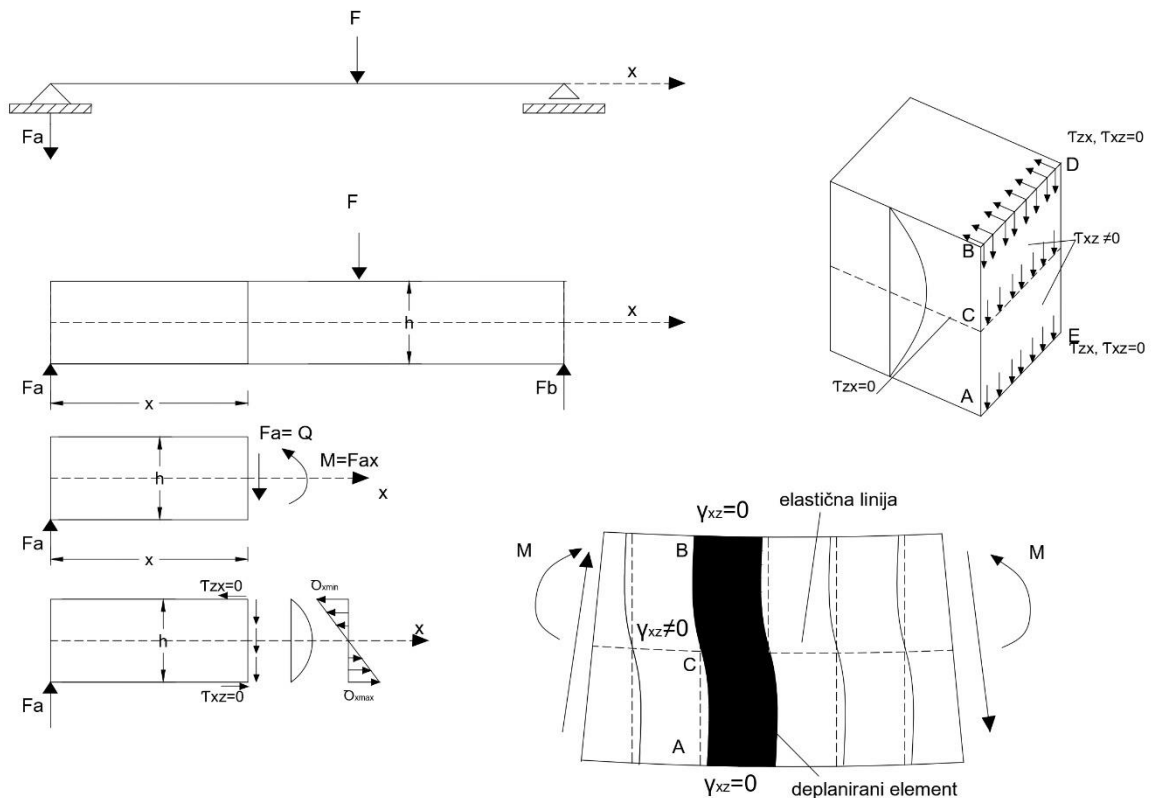
Kod savijanja silama osim momenta savijanja u poprečnom presjeku javlja se i poprečna sila  $T_z$  zbog toga se pored normalnih naprezanja javljaju i posmična naprezanja. Pri tome je:

$$M_y = \int_A \sigma_x * z * dA$$

$$T_z = \int_A \tau_{xz} dA$$

(3.1)

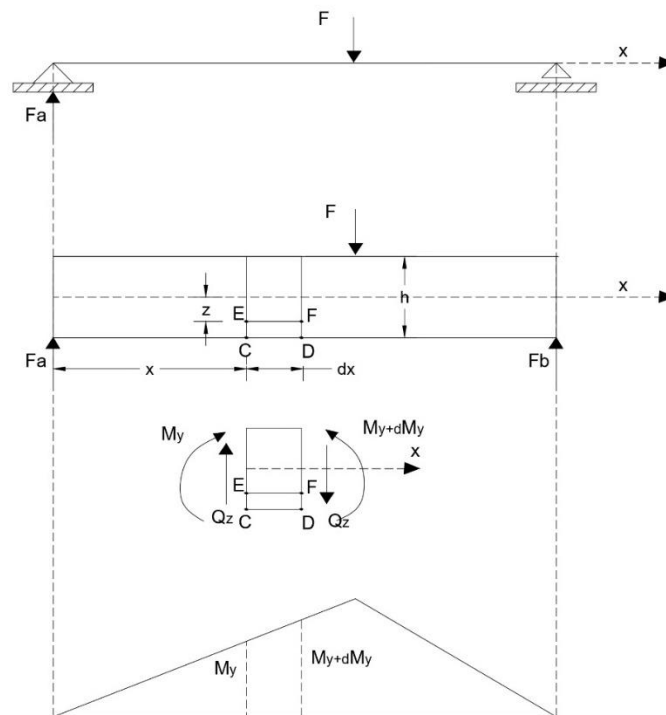
U izrazu  $\tau_{xz}$  prvi indeks je pravac normale, a drugi indeks je smjer posmičnog naprezanja.



Slika 4. Linijski nosač opterećen savijanjem silama, raspodjela posmičnih naprezanja po poprečnom presjeku nosača, deplanacija poprečnog presjeka

Podjela naprezanja prikazana je na slici 9. Na gornjoj i donjoj površini nosača posmična naprezanja su nula jer te površine nemaju opterećenje. Posmična naprezanja su na gornjem i donjem

rubu  $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$  pa je uz te rubove i kutna deformacija  $\gamma_{xz} = \gamma_{zy} = 0$ . Elementi A i B poprečnog presjeka će ostati nakon deformacije pravokutnog oblika. Dok će element C poprečnog presjeka iz pravokutnog oblika nakon djelovanja opterećenja prijeći u oblik romba, zato što se javljaju kutne deformacije. Kod većih omjera  $l/h$ , pomaci zbog deplanacije zanemarivi su u usporedbi s pomacima koji nastaju zbog rotacije poprečnog presjeka koja bi nastala pri čistom savijanju. Zbog toga se može zadržati pretpostavka da poprečni presjeci ostaju ravni nakon deformiranja štapa i okomiti na elastičnu liniju. Manja je pogreška ukoliko je veći omjer  $l/h$ . Neka je poprečna sila  $T_z$  konstantne veličine, svaki poprečni presjek deplanira se na isti način (slika 6.8.c), tako da ta deplanacija ne utječe na deformaciju ni na normalna naprezanja, a time ni na normalna naprezanja.



*Slika 4.1. Razmatrani nosač s momentnim dijagramom i njegov dio između dvaju bliskih presjeka u području konstantne poprečne sile*

Uvjet ravnoteže svih sila u smjeru osi  $x$  glasi:



$$\sum F_x = - \int_{A_1} \sigma_x * dA_1 - \int_{A_3} \tau_{zx} * dA_3 + \int_{A_2} (\sigma_x + d\sigma_x) dA_2 = 0$$

$$(3.2)$$

Dužina dx je mala veličina, pa se može smatrati da je posmično naprezanje  $\tau_{zx}$  konstantno na površini  $A_2 = b * dx$ , a  $A_1 = A_3$

$$- \int_{A_1} \frac{M_y}{I_y} * z * dA_1 - \tau_{zx} * b * dx + \int_{A_1} \frac{M_y + dM_y}{I_y} * z * dA_1 = 0$$

$$(3.3)$$

$$\tau_{zx} * b * dx = \frac{dM_y}{I_y} \int_{A_1} z * dA_1$$

$$(3.4)$$

Integral predstavlja statički moment  $S_y^*$  dijela presjeka  $A_1$  odnosno  $A_3$  u odnosu na neutralnu os pa slijedi da je:

$$\tau_{zx} = \frac{dM_y}{dx} * \frac{S_y^*}{b * I_y}$$

$$(3.5)$$

s obzirom da je  $\frac{dM_y}{dx} = Q_z$  slijedi da je

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{Q_z * S_y^*}{b * I_y}$$

$$(3.6)$$

Za pravokutni presjek vrijedi ( slika 11)

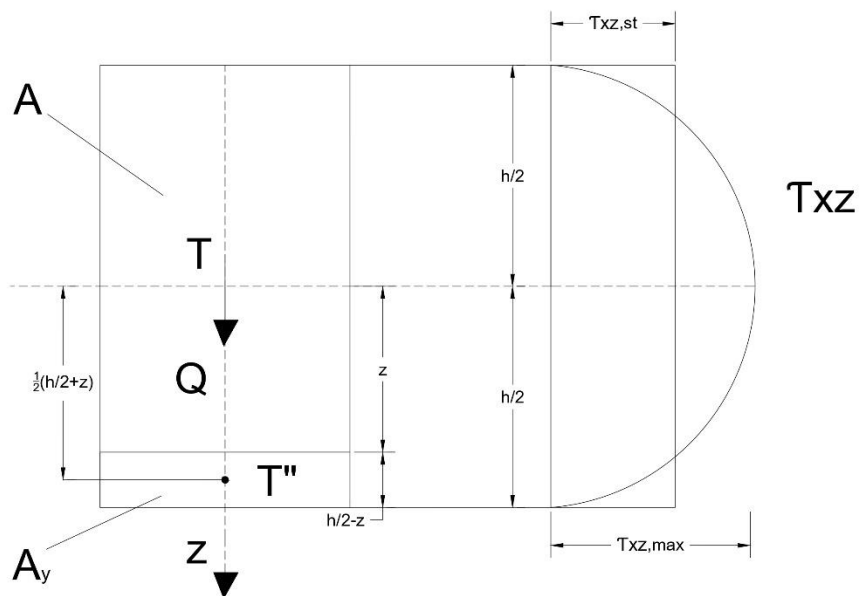
$$A_1 = b * \left(\frac{h}{2} - z\right) \quad z_t = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + z\right)$$

$$(3.7)$$

$$S_y^* = A_1 * z_t = b * \left(\frac{h}{2} - z\right) * \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + z\right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)$$

$$(3.8)$$

Možemo zaključiti da je raspodjela posmičnih naprezanja po visini pravokutnog presjeka biti parabolična, što je prikazano na slici



Slika 4.2. Raspodjela posmičnih napreznja po visini pravokutnoga poprečnog presjeka

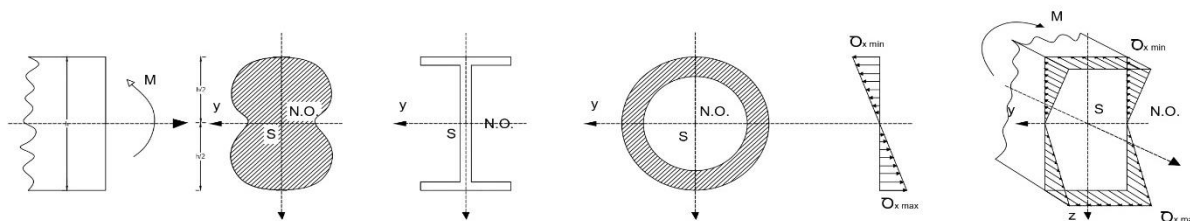
Maksimalna vrijednost pomičnog napreznja iznosi u težištu:

$$\tau_{xz,max} = \frac{3}{2} \frac{Q_z}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \frac{Q_z}{A} = 1.5 * \tau_{xz,st} \quad (3.9)$$

To nam govori da je najveće posmično napreznje 50 % veće od prosječnoga napreznja.

## 5. POLOŽAJ NEUTRALE OSI ZA RAZLIČITE POPREČNE PRESJEKE

Na slici ispod je prikazan dijagram normalnih napreznja  $\sigma_x$  za različite presjeke obzirom na horizontalnu os simetrije.



Slika 5. Poprečni presjeci s dvije osi simetrije

Pod tlakom su opterećena vlakna iznad neutralne osi, a ispod rastezanju. Ako promatramo moment savijanja s pozitivnim predznakom onda bi se gornja vlakanka rastezala, a donja skupljala.

Na mjestima najudaljenijim od neutralne osi, normalna napreznja imaju ekstremne veličine u krajnjim vlaknima dok je na neutralnoj osi  $\sigma_x$  jednako nuli.

$$\sigma_{x,max} = \frac{M}{I_y} \frac{h}{2} \quad (4.1)$$

$$\sigma_{x,min} = - \frac{M}{I_y} \frac{h}{2} \quad (4.2)$$

$$\frac{I_y}{\frac{h}{2}} = W_y \quad (4.3)$$

$$\sigma_{x,max} = \frac{M}{W_y} \quad \sigma_{x,min} = - \frac{M}{W_y} \quad (4.4)$$

$$|\sigma_{x,max}| = |\sigma_{x,min}| = \frac{M}{W_y} \quad (4.5)$$

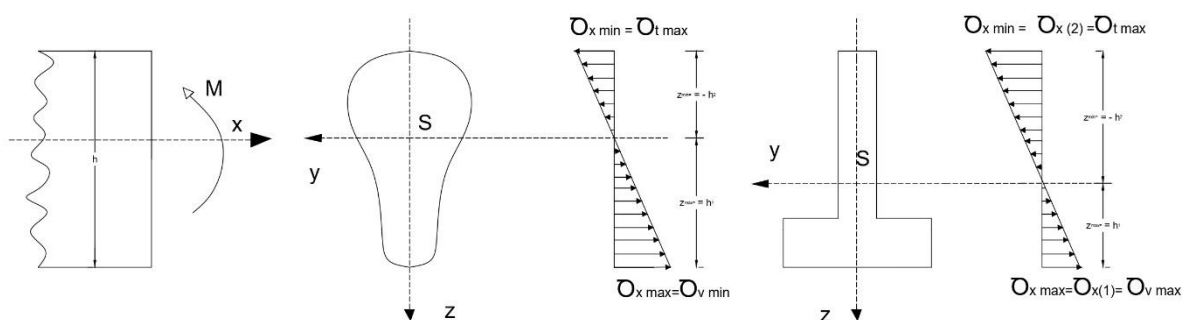
Ako neutralna os ne prolazi središnjim dijelom presjeka gledano po visini nego je udaljena od krajeva  $z_{max} = h_1$  I  $z_{min} = - h_2$  onda dobivamo da je:

$$\sigma_{x,max} = \frac{M}{I_y} * h_1 \quad \sigma_{x,min} = - \frac{M}{I_y} * h_2 \quad (4.6)$$

U konačnici dobivamo da je aksijalni moment opora jednak izrazu:

$$\sigma_{x,max} = \frac{M}{W_{y1}} \quad \sigma_{x,min} = \frac{M}{W_{y2}} \quad (4.7)$$

Slika 13. nam pokazuje da podjela normalnih napreznja je neovisna o obliku presjeka



Slika 5.1 Poprečni presjeci s vertikalnom osi simetrije

Uvjet čvrstoće kod simetričnog presjeka nam govori da normalno napreznje mora biti manje od dopuštenog.

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{dop} \quad (4.8)$$

$$\sigma_{v,max} = \frac{M}{W_y} \leq \sigma_{v,dop} \quad (4.9)$$

$$\sigma_{t,max} = \frac{M}{W_y} \leq \sigma_{t,dop} \quad (4.10)$$

$\sigma_{v,dop}$  je dopušteno tlačno napreznje

$\sigma_{t,dop}$  je dopušteno vlačno napreznje

Tlačno i vlačno napreznje su jednaki ako materijal ima jednaka svojstva na tlak i vlak.

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_y} \leq \sigma_{dop} \quad (4.11)$$

Uvjet čvrstoće za presjeke kod kojih neutralna os nije os simetrije glasi:

$$\sigma_{v,max} = \sigma_{x(1)} = \frac{M}{W_{y1}} \leq \sigma_{v,dop} \quad (4.12)$$

$$\sigma_{t,max} = \sigma_{x(2)} = \frac{M}{W_{y2}} \leq \sigma_{v,dop} \quad (4.13)$$

Uvjet čvrstoće ako materijal ima jednaka svojstva na tlak i vlak

$$\sigma_{max} = \frac{M}{I_y} |z_{max}| = \frac{M}{W_{ymin}} \leq \sigma_{dop} \quad (4.14)$$

$|z_{max}|$  je maksimalna udaljenost krajnjeg vlakna od nesutralne osi dok je  $W_{ymin} = \frac{I_y}{|z_{max}|}$  najmanji moment otpora.

Postoje tri osnovna slučaja koja se mogu pojaviti

- a) Treba provjeriti naprezanje dok su nam poznati moment savijanja i poprečni presjek

$$\frac{M}{W_y} \leq \sigma_{dop}$$

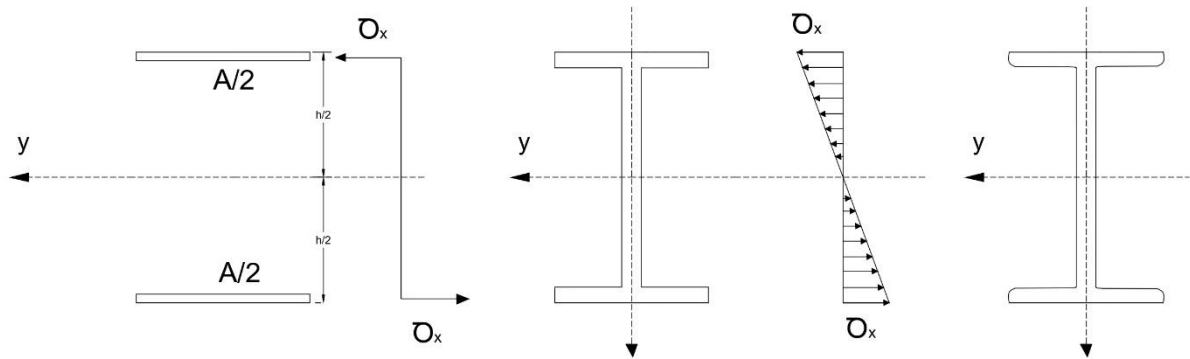
- b) Treba odrediti presjek ako su nam poznati moment savijanja i dopušteno naprezanje

$$W_y \geq \frac{M}{\sigma_{dop}}$$

- c) Treba odrediti opterećenje ako su nam poznati presjek štapa i dopušteno naprezanje

$$M \leq W_y * \sigma_{dop}$$

Kod materijala sa istim svojstvima na tlak i vlak uzimamo presjek koji je simetričan na neutralnu os. Tako je za krajnja vlakna na vlačnoj i tlačnoj strani koeficijent sigurnosti jednak. Postavimo još uvjet o najmanjoj masi štapa, onda je najbolji presjek koji ima najmanju površinu  $A$  pri određenom momentu otpora  $W_y$  ili pri određenoj površini  $A$  najveći moment  $M$ . To možemo postići ako što veću površinu podjelimo što dalje od neutralne osi. Najpovoljniji raspored površine je da postavimo svaku polovicu površine na udaljenosti  $\frac{h}{2}$  od neutralne osi. (slika 5.2)

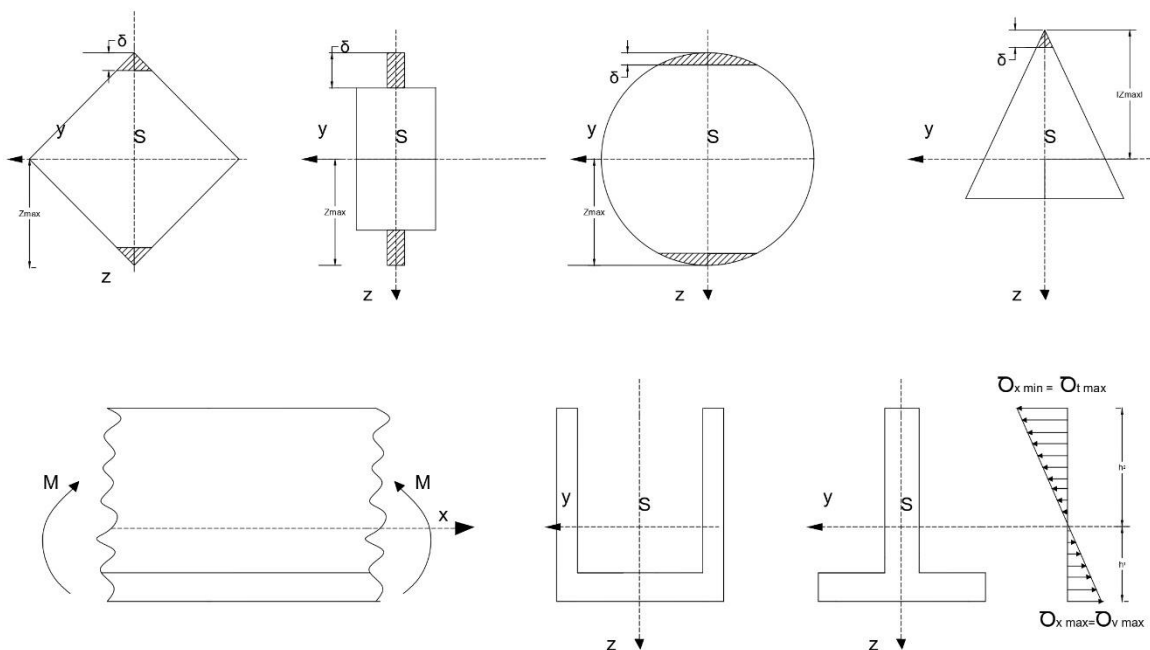


Slika 5.2. Najpovoljniji raspored površine

Tada su momenti tromosti i momenti otpora idealnog presjeka

$$I_{y,id} = 2 * \frac{A}{2} * \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{A h^2}{4} \qquad W_{y,id} = \frac{I_{y,id}}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{2} A h \qquad (4.15)$$

U stvarnosti ne postoji takav štap nego postoji I- profil koji je najbliži idealnom zato što pojasevi moraju imati neku debljinu I moraju biti vertikalno spojeni



---

Slika 5.3. Nesimetričan presjek s obzirom na neutralnu os

Stupanj iskorištenosti nam iskazuje ekonomičnost presjeka I dobiva se dijeljenjem momenta otpora nekog presjeka I momenta otpora idealnog presjeka iste visine

$$\mu = \frac{W_y}{W_{yd}} = \frac{2W_y}{Ah} < 1 \quad (4.16)$$

Što je  $\mu$  veći to je presjek bliži idealnom obliku, za I-profil je najveći.

Kod nekih presjeka moment otpora se može prikazati smanjivanjem površine, ako odrežemo određene dijelove koji su prikazani na slici iznad smanjuje se moment tromosti manje nego što se udaljenost krajnjeg vlakna od neutralne osi. Time se povećava moment otpora, a  $\sigma_{x,max}$  se smanjuje. Kod krhkih materijala je to nešto drugačije, njima je tlačna čvrtoća veća od vlačne pa moramo uzeti nesimetričan presjek obzirom na neutralnu os I onda veća površina u vlačnoj zoni.

$$\frac{W_{y2}}{W_{y1}} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{\sigma_{v,dop}}{\sigma_{t,dop}} \quad (4.17)$$

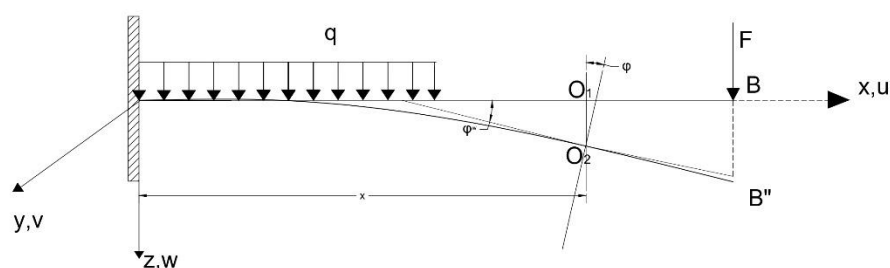
Najbolje će biti materijal iskorišten ako je  $\sigma_{v,dop} = \sigma_{v,max}$  te  $\sigma_{t,dop} = \sigma_{t,max}$

---

## 6. ANALIZA REZULTATA POMAKA PRI ISPITIVANJU NOSAČA

Nakon što smo definirali uvjet čvrstoće I nakon analiziranja stanja naprezanja pri čistom savijanju I savijanju silama, moramo I definirati uvjet krutosti najveća deformacija ne smije biti veća od unaprijed određene vrijednosti. Kod računa statički neodređenih nosača moramo imati određeni broj dopunskih jednadžbi koji se dobiva iz uvjeta deformabilnosti.

Promatramo deformacije pri ravnom savijanju:



Slika 6. Deformacija štapa pri ravnom savijanju

Otprećimo štapa vanjskim opterećenjem u ravnini  $xz$ . U toj ravnini pod opterećenjem se uzdužna os iskrivljuje, pa se podudaraju ravnina savijanja nosača s ravninom opterećenja. Poprečni presjeci se okreću oko neutralne osi, ali ostaju okomiti na savijenu os štapa. Os koja se deformirala nazivamo elastična linija ili progibna linija

Uzdužna os štapa pri savijanju ostaje iste duljine, te u smjeru osi  $x$  pomiće se težište presjeka. Pomak  $u$  je puno manji od  $w$  pa ga zanemarujemo. Pomak težišta u smjeru osi  $y$  je nula. Time zaključujemo da se težište pomiće u smjeru okomitom na nepromijenjenu os štapa. Pomak  $O_1O_2$  ( $w$ ) nazivamo progibom nosača u zadanom presjeku. Oznaka za najveći progib je  $f$ . Kut zaokreta presjeka  $\varphi$  je kut za koji se neki presjek okrene. Progib ( $w$ ) I kut zaokreta ( $\varphi$ ) su međusobno povezani



---

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dw}{dx} \quad (5.1)$$

Obično je  $\varphi$  vrlo mali kut, manji od 1 pa vrijedi da je  $\operatorname{tg}\varphi = \varphi$

$$\varphi = \frac{dw}{dx} \quad (5.2)$$

Deformaciju nosača dobivamo određivanjem jednadžbe elastične linije nosača.

Diferencijalna jednadžba elastične linije nosača

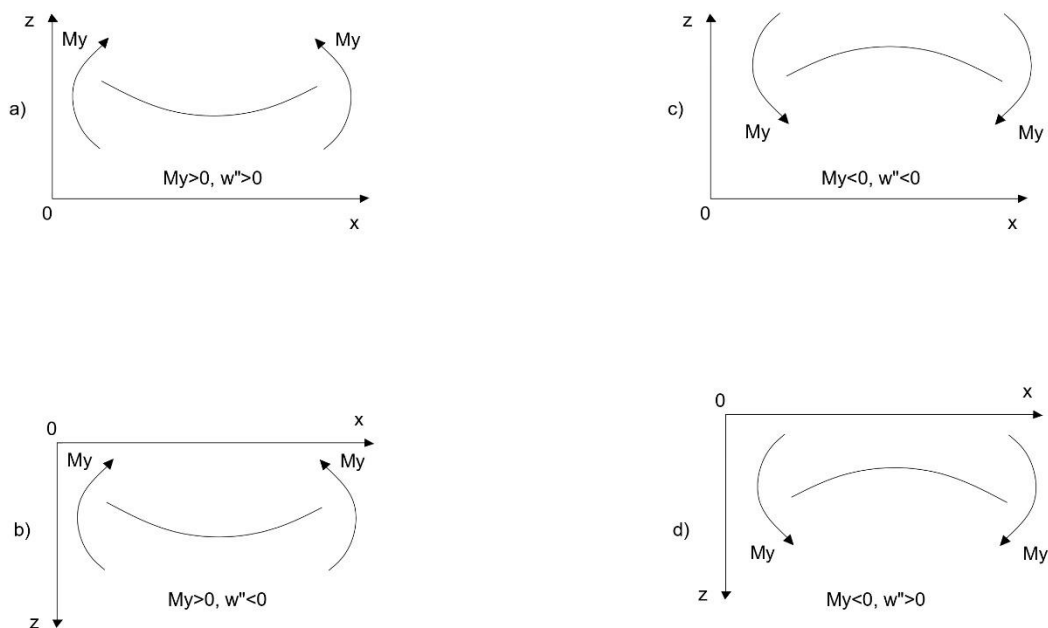
Elastičnu liniju nosača promatramo kao promatramo kao graf funkcije gdje sama funkcija predstavlja ordinate elastične linije gdje je argument  $w = w(x)$ . Tu funkciju određujemo na sljedeći način

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{EI_y} \quad (5.3)$$

Zanemarujemo utjecaj poprečne sile na zakrivljenost zato što je mala, u obzir uzimamo samo moment savijanja  $M_y$ .

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (5.4)$$

$$\frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{M_y}{EI_y} \quad (5.5)$$



Slika 6.1. Ovisnost predznaka o izboru koordinatnog sustava

Ako uzmemo male progibe, vrijedi da je  $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \ll 1$ . Pa veličinu  $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2$  zanemarujemo i dobivamo sljedeći izraz:

$$\frac{d^2x}{dx^2} = \pm \frac{M_y}{EI_y} \quad (5.6)$$

Jednadžba se može riješiti principom superpozicije. Predznak ovisi koji koordinatni sustav izaberemo

Uzmemo u obzir izraze koji povezuju momente savijanja poprečnu silu i opterećenje

$$\frac{dT_z}{dx} = -q \quad \frac{dM_y}{dx} = T_z \quad \frac{d^2M_y}{dx^2} = -q$$

$$\varphi = \frac{dw}{dx}$$

$$M_y = EI_y \frac{d^2w}{dx^2}$$

Deriviramo izraz dva puta i dobivamo sljedeće

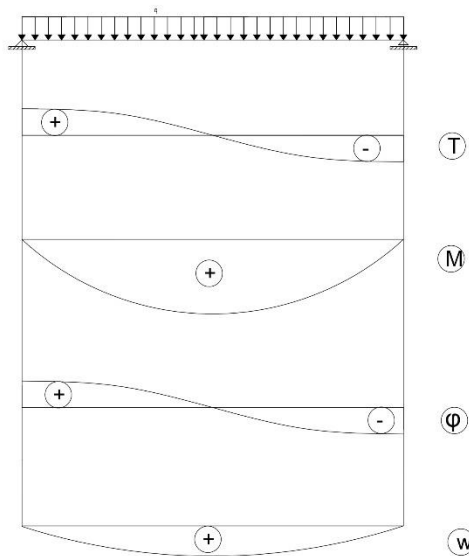
$$T_z = \frac{dM_y}{dx} = - \frac{d}{dx} \left( EI_y \frac{d^2w}{dx^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
q &= -\frac{dT_z}{dx} = -\frac{d^2M_y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} (EI_y \frac{d^2w}{dx^2}) \\
\varphi &= \frac{dw}{dx} \\
M_y &= -EI_y \frac{d^2w}{dx^2} \\
T_z &= -\frac{d}{dx} (EI_y \frac{d^2w}{dx^2}) \\
q &= \frac{d^2}{dx^2} (EI_y \frac{d^2w}{dx^2}) \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Ako je  $EI_y$  konstantno slijedi da je:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{dw}{dx} \\
M_y &= -EI_y \frac{d^2w}{dx^2} \\
T_z &= -EI_y \frac{d^3w}{dx^3} \\
q &= EI_y \frac{d^4w}{dx^4} \tag{5.8}
\end{aligned}$$

Ako znamo opterećenje  $q(x)$  I uvjete oslanjanja uzastopnim integriranjem dobivamo momente savijanja  $M_y$ , poprečnu silu  $T_z$  I opterećenje  $q(x)$ , a obrnuto uzastopnim deriviranjem  $w(x)$  dobiti  $\varphi(x)$ ,  $M_y(x)$ ,  $T_z(x)$ ,  $q(x)$



Slika 6.2 Dijagrami

---

Izraz  $\frac{d^2x}{dx^2} = \pm \frac{M_y}{EI_y}$  se može koristiti samo kod malih pomaka u odnosu na raspon nosača, u suprotnom koristimo za velike pomake izraz

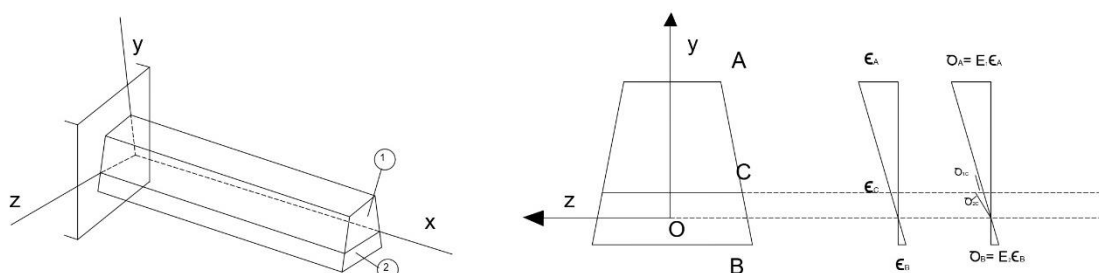
$$\frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{[1+(\frac{dw}{dx})^2]^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{M_y}{EI_y}.$$

## 7. KOMPOZITNI NOSAČI

Nosači koji su izrađeni od više od jednog materijala nazivaju se kompozitima nosačima. Deformacije u kompozitnim gredama određujemo isto kao u gredama od jednog materijala, dakle poprečni presjeci ostaju ravni tijekom savijanja. Ova pretpostavka vrijedi za čisto savijanje bez obzira na vrstu materijala. Stoga, uzdužne deformacije u kompozitnoj gredi variraju linearno od vrha do dna grede, kao što je izraženo jednačinom u nastavku:

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} = -ky \quad (6.1)$$

$y$  je udaljenost od neutralne osi,  $\rho$  je polumjer zakrivljenosti, a  $k$  je zakrivljenost.



Slika 7. Kompozitni nosač od dva materijala

Ova greda sastoji se od dva materijala, označenih s 1 i 2 na slici, koji spojeni djeluju kao jedna greda. Ravnina  $xy$  je ravnina simetrije i da je ravnina  $xz$  neutralna ravnina grede. Međutim, neutralna os (os  $z$  na slici 5-40b) ne prolazi kroz težište presjeka kada je greda izrađena od dva različita materijala. Ako je greda pozitivno savijena, deformacije  $\epsilon_x$  će varirati kao što je prikazano na slici 5-40c, gdje je  $\epsilon_A$  tlačna deformacija na vrhu grede,  $\epsilon_B$  je vlačna deformacija na dnu, a  $\epsilon_C$  je deformacija na dodirne površine

ine dvaju materijala. Naravno, naprezanje je nula neutralna os (os  $z$ ).

Pretpostavimo da se oba materijala ponašaju linearno elastično ako da vrijedi Hookeov zakon za jedno osno naprezanje. Naprezanja

---

u materijalima dobivaju se množenjem deformacija s odgovarajućim modulom elastičnosti.

Označavajući module elastičnosti za materijale 1 i 2 kao  $E_1$  i  $E_2$ , a također uz pretpostavku da je  $E_2 > E_1$ , dobivamo dijagram naprezanja prikazan na sl. 5-40d. Tlačno naprezanje na vrhu grede je  $\sigma_A = E_1 \varepsilon_A$ , a vlačno naprezanje na dnu je  $\sigma_B = E_2 \varepsilon_B$ . Na dodirnoj površini (C) naprezanja u dva materijala su različite jer su im moduli različiti. U materijalu 1 naprezanje je  $\sigma_{1C} = E_1 \varepsilon_C$ , a u materijalu 2 je  $\sigma_{2C} = E_2 \varepsilon_C$

Koristeći Hookeov zakon i jednadžbu, možemo izraziti normalno naprezanja na udaljenosti  $y$  od neutralne osi u smislu zakrivljenosti:

$$\sigma_{x1} = -E_1 ky \quad \sigma_{x2} = -E_2 ky \quad (6.1)$$

gdje je  $\sigma_{x1}$  naprezanje u materijalu 1, a  $\sigma_{x2}$  naprezanje u materijalu 2. Uz pomoć ovih jednadžbi možemo locirati neutralnu os i dobiti odnos moment-zakrivljenost.

Neutralna os

Položaj neutralne osi (os  $z$ ) nalazi se iz uvjeta da je rezultanta aksijalna sila koja djeluje na poprečni presjek nula stoga vrijedi:

$$\int_1 \sigma_{x1} dA + \int_2 \sigma_{x2} dA = 0 \quad (6.2)$$

gdje se podrazumijeva da se prvi integral procjenjuje preko površine presjeka materijala 1, a drugi integral se procjenjuje preko površina poprečnog presjeka materijala 2. Ako sredimo izraz dobivamo

$$-\int_1 E_1 ky dA - \int_2 E_2 ky dA = 0 \quad (6.3)$$

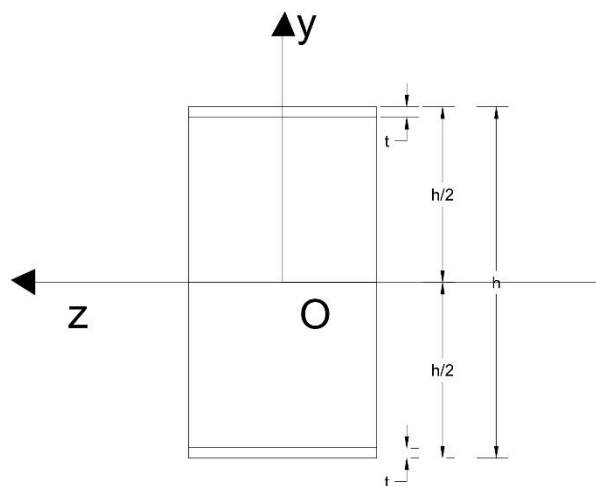
Budući da je zakrivljenost konstanta u bilo kojem presjeku, nije uključeni u integracije i mogu se poništiti iz jednadžbe, stoga jednadžba za lociranje neutralne osi postaje:

$$E_1 \int_1 y dA + E_2 \int_2 y dA = 0 \quad (6.4)$$

Integrali u ovoj jednadžbi predstavljaju prve momente od ta dva dijelova površine presjeka u odnosu na neutralnu os.

---

Ako je presjek grede dvostruko simetričan, kao u slučaju drvena greda s čeličnim pokrovnim pločama na vrhu i dnu (Sl. 5-41), neutralna os nalazi se na sredini visine presjeka I prethodna jednadžba nije potrebna.

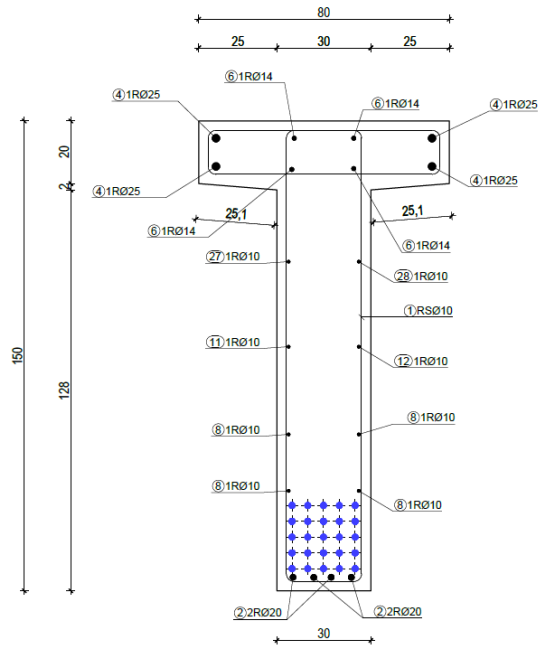


*Slika 7.1 Dvostruko simetrični kompozitni nosači*

## 8. NUMERIČKI ZADATAK

### 8.1. OSNOVNI PODATCI O NOSAČU

Armiranobetonski nosač je adhezijsko pred napregnutog ukupne dužine 32,5 m. Nosač je ukupne visine 150 cm, te širine gornjeg pojasa 80 cm i visine 20 cm. Širina hrpta iznosi 30 cm a visine je 128 cm. Nosač u vlačnoj zoni je armiran s 4 $\varnothing$ 20 te pred napet s 20 kablova (tipa Y1860S7), u gornjoj zoni armiran je s 4 $\varnothing$ 25 i 4 $\varnothing$ 14. Konstruktivnu armaturu čine armaturne šipke  $\varnothing$ 10, a vilice  $\varnothing$ 10 na razmaku 10 i 15 cm. Nosač ima tri kružna otvora promjera 30cm na udaljenost od lijevog ležaja 340 cm i 665 cm, te otvor od desnog ruba nosača na udaljenosti 304,4 cm. Potrebno je izračunati naprezanje i deformacije u pet zadanih točaka.



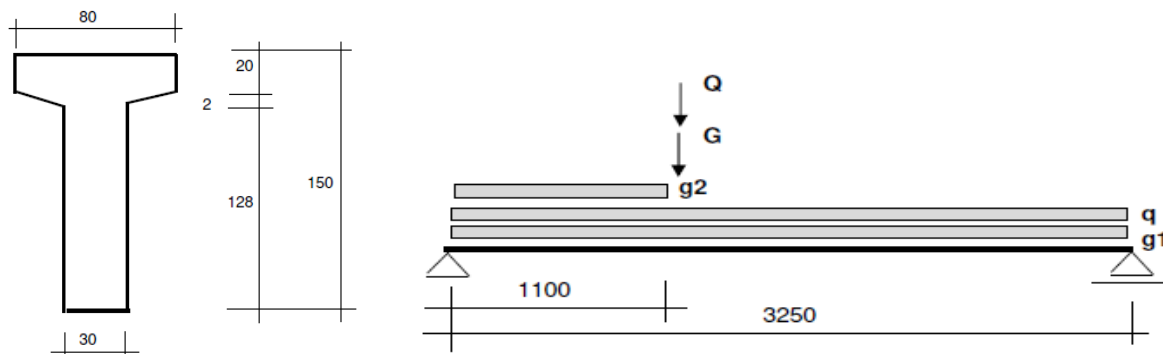
Slika 8.1.1 Armiranobetonski nosač

### 8.2. PODATCI O PROBNOM OPTEREĆENJU

Položaj opterećenja pri statičkom opterećivanju odgovara najnepovoljnijem u projektu odnosno daje približno jednake unutarnje sile u karakterističnim presjecima, i to za nedostajuće stalno i ukupno pokretno opterećenje gdje su svi parcijalni koeficijenti sigurnosti za opterećenje jednaki 1,0



### 8.3. PRORAČUN OPTEREĆENJA ZA PROBNO OPTEREĆENJE



Slika 8.3.1 Opterećenja prema projektu

Analiza opterećenja bez vlastite težine (opterećenja preuzeta iz dostavljenog proračun):

- krovni pokrivač + elektrana  $g_1 = 7,80 \text{ kN/m'}$
- povremeno opterećenja (snijeg i vjetar)  $q = 10,08 \text{ kN/m'}$
- vatro barijera (do 11,0 m)  $g_2 = 3,50 \text{ kN/m}$
- koncentrirano opterećenje  
 $G+Q=16,30+1,00=17,30 \text{ kN}$  (na 11,0 m)

Analiza reakcija:

$$R_A = (7,80 + 10,08) \times 32,5 \times 0,50 + (3,50 \times 11,0) \times 27,0 / 32,50 + 17,30 \times 21,50 / 32,50$$

$$R_A = 290,55 + 31,98 + 11,44 = 333,97 \text{ kN}$$

$$R_B = 290,55 + 6,52 + 5,86 = 302,93 \text{ kN}$$

Kontrola (suma vertikalnih sila):

$$R_A + R_B = 1(g_1 + q) \times 32,50 + g_2 \times 11,0 + G + Q$$

$$636,90 \text{ kN} = 636,90 \text{ kN} \quad (\text{tačno})$$

---

Proračun momenta u polovici raspona:

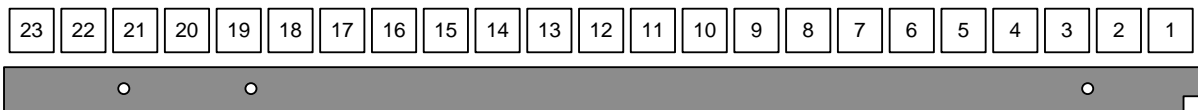
$$M_{\max} \approx M_{L/2} = 302,93 \times 16,25 - (7,80 + 10,08) \times 16,252/2 = 2561,90 \text{ kNm}$$

#### 8.4. FAZE ISPITIVANJA I EFIKASNOST PROBNOG OPTEREĆENJA

Statičko probno opterećenje nosača provedeno je u četiri faze opterećenja i četiri faze rasterećenja u približno jednakim koracima. Kao opterećenje korištene su 23 palete (Slika ) mase 2,79 tona opterećene rubnjacima i opločnicima jednoliko raspoređene po nosaču (8.4.2.).



Slika 8.4.1. Palete s opterećenjem mase 2,79 tona



Slika 8.4.2. Skica rasporeda opterećenja po nosaču

Probno opterećenje provedeno je u sljedećem fazama:

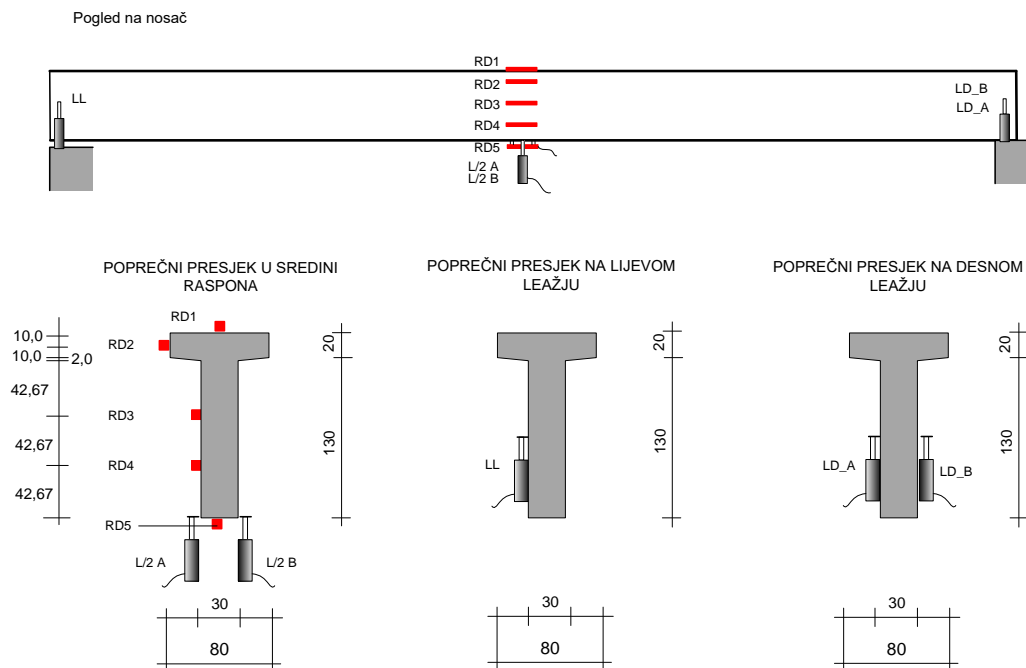
- Faza 0 : nosač neopterećen,
- Faza 1: nosač opterećen s paletama 1, 5, 9, 13, 17 i 21,
- Faza 2: nosač opterećen s paletama = faza 1 + 3, 7, 11, 15, 19 i 23,
- Faza 3: nosač opterećen s paletama = faza 2 + 2, 6, 10, 14, 18 i 22,
- Faza 4: nosač opterećen s paletama = faza 3 + 4, 8, 12, 16 i 20,

## Faze rasterećenja nosača

- Faza 5: nosač opterećen s paletama = faza 3
- Faza 6: nosač opterećen s paletama = faza 2
- Faza 7: nosač opterećen s paletama = faza 1
- Faza 8: nosač rasterećen.

## 8.5.OPIS MJERNIH MJESTA

Tijekom probnog opterećenja kontinuirano u svakoj fazi mjereni su vertikalni pomaci u sredini raspona (mjerna mjesta L/2A i L/2B) i vertikalni pomaci na lijevom ležaju (LL) i desnom ležaju (LD\_A i LD\_B). Mjereni su i horizontalni pomaci u sredini raspona, na donjem rubu nosača. Relativne deformacije mjerene su u sredini raspona na pet mjernih mjesta (RD1 - RD5) od gornjeg ruba nosača do donjeg ruba nosača.



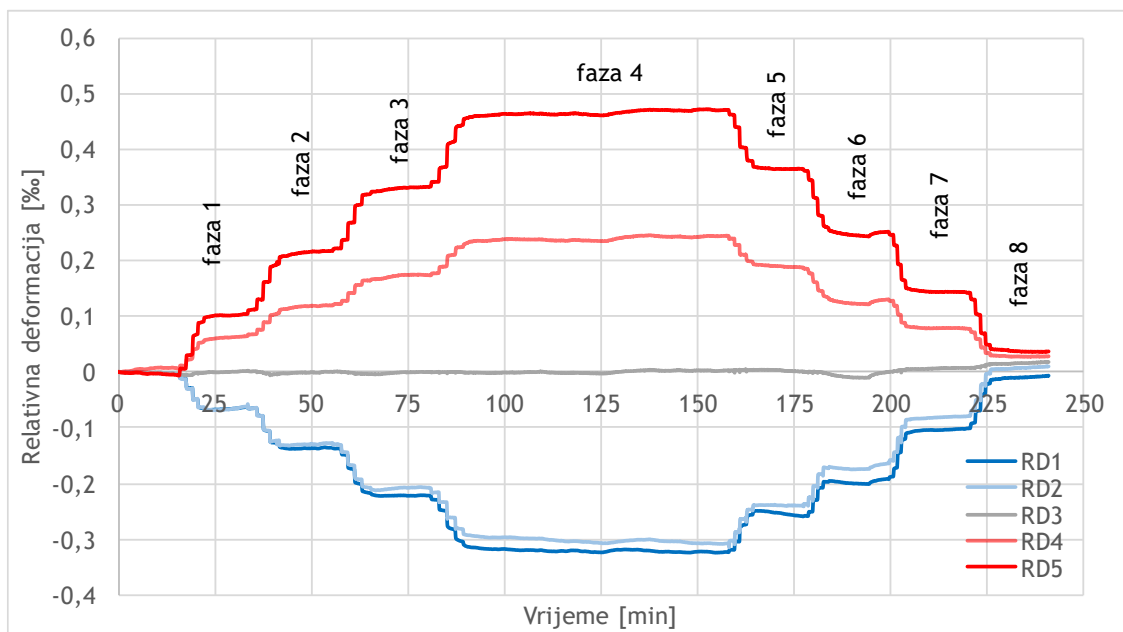
Slika 8.5.1. Položaj mjernih mjesta po nosaču

## 8.6. REZULTATI MJERENJA RELATIVNIH DEFORMACIJA

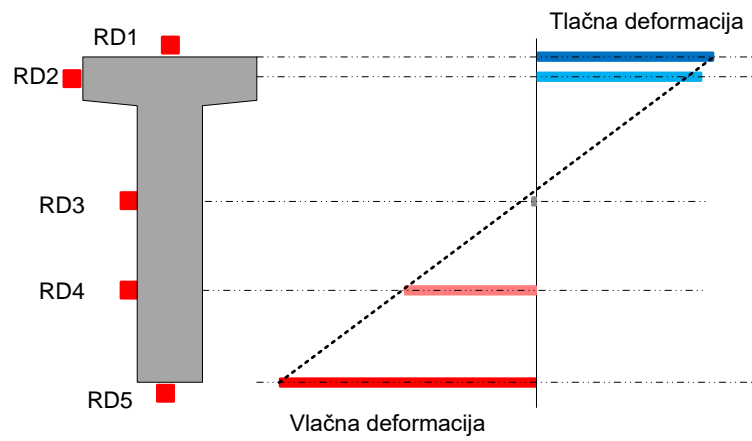
Rezultati mjerenja relativnih deformacija su prikazani na slici 12, a maksimalne (faza 4) i zaostale (faza 8) vrijednosti relativnih deformacija, te vrijednosti odgovarajućih maksimalnih naprezanja prikazane su u tablici 3. Za izračun naprezanja korišten je modul elastičnosti betona  $E = 35,0$  GPa.

**Tablica 1. Maksimalna i zaostala relativna deformacija, te proračunato maksimalno naprezanje**

Mjerno mjesto	Maksimalna relativna deformacija [%]	Zaostale relativne deformacije [%]	Maksimalno naprezanje [MPa]
RD1	-0,322	-0,006	-11,3
RD2	-0,307	0,010	-10,7
RD3	0,003	0,018	0,10
RD4	0,243	0,028	8,5
RD5	0,471	0,037	16,5



Slika 8.6.1. Rezultati mjerenja relativnih deformacija



Slika 8.6.2. Skica raspodjele relativnih deformacija po visini nosača za 4 fazu mjerenja

---

## 8.7. FOTODOKUMENTACIJA



Slika 8.7.1. Opterećenje nosača u fazi 2



Slika 8.7.2. Opterećenje nosača u fazi 3



Slika 8.7.3. Opterećenje nosača u fazi 4

---

## 8.8. PRORAČUN NOSAČA

a ) Promatramo čisti betonski presjek

Određivanje položaja neutralne osi:

$$Z = \frac{80 \cdot 150 \cdot 75 - 2 \cdot 25 \cdot 128 \cdot 64 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 25 \left( \frac{1}{3} \cdot 2 + 128 \right)}{80 \cdot 150 - 2 \cdot 25 \cdot 128 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 25} = \frac{483966,67}{5550} = 87,2 \text{ cm}$$

Određivanje aksijalnog momenta tromosti:

$$I_y = \frac{80 \cdot 150^3}{12} + 80 \cdot 150 (87,2 - 75)^2 - 2 \cdot \left( \frac{25 \cdot 128^3}{12} + 25 \cdot 128 (87,2 - 64)^2 \right) - 2 \cdot \left( \frac{25 \cdot 2^3}{36} + \frac{25 \cdot 2}{2} \cdot (87,2 - \left( \frac{2}{3} + 128 \right))^2 \right) = 24286080 - 12182869 - 85985,33 = 12017225,67 \text{ cm}^4 = 12017 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Naprezanje I deformacije:

$$\sigma = \frac{M}{I_y} \cdot Z \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

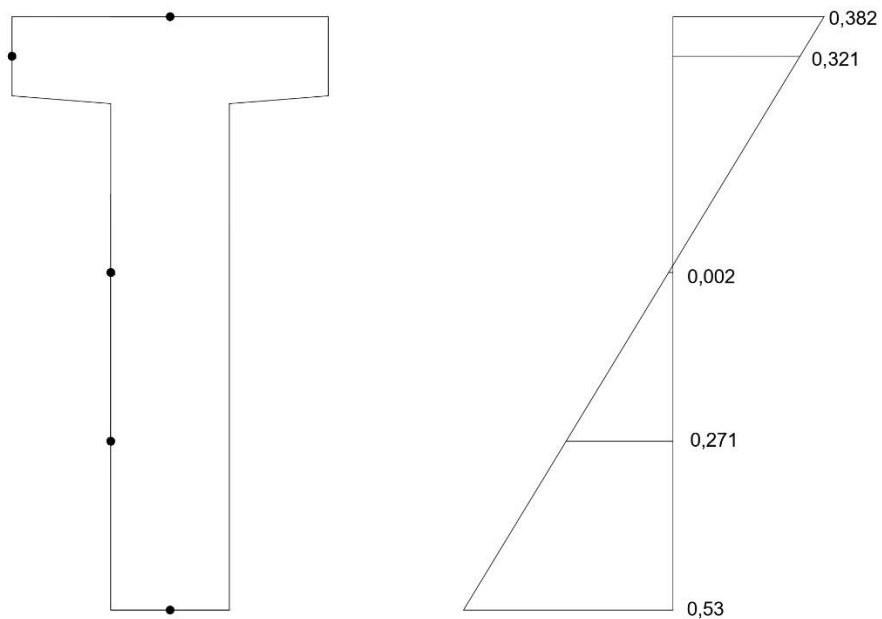
$$\sigma_1 = \frac{2561,9 \cdot 10^3}{12017 \cdot 10^4} \cdot 628 = 13,38 \text{ MPa} \quad \epsilon_1 = \frac{\sigma}{E} = 0,382$$

$$\sigma_2 = \frac{2561,9 \cdot 10^3}{12017 \cdot 10^4} \cdot 528 = 11,26 \text{ MPa} \quad \epsilon_2 = \frac{\sigma}{E} = 0,321$$

$$\sigma_3 = \frac{2561,9 \cdot 10^3}{12017 \cdot 10^4} \cdot 1,3 = 0,05 \text{ MPa} \quad \epsilon_3 = \frac{\sigma}{E} = 0,002$$

$$\sigma_4 = \frac{2561,9 \cdot 10^3}{12017 \cdot 10^4} \cdot 445,3 = 9,5 \text{ MPa} \quad \epsilon_4 = \frac{\sigma}{E} = 0,271$$

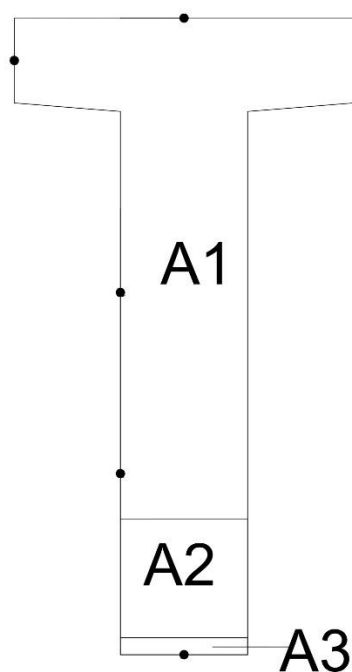
$$\sigma_5 = \frac{2561,9 \cdot 10^3}{12017 \cdot 10^4} \cdot 1,3 = 18,591 \text{ MPa} \quad \epsilon_5 = \frac{\sigma}{E} = 0,53$$



Slika 8.8.1 Raspodjela deformacija

b) Presjek promatramo kao kompozitni nosač

Podijelimo na tri površine:



Slika 8.8.2 Podjela površina



---

Promatramo površinu broj 1:

$$A_1 = 80 \cdot 20 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 25 + 96 \cdot 30 = 4530 \text{ cm}^2 = 453000 \text{ mm}^2$$

$$z_1 = \frac{80 \cdot 20 \cdot 140 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 25 \cdot 128.67 + 96 \cdot 30 \cdot 80}{80 \cdot 20 + 2 \cdot 25 + 96 \cdot 30} = 101.73 \text{ cm}$$

$$I_{y1} = \frac{80 \cdot 20^3}{12} + 80 \cdot 20 \cdot 38.1^2 + 2 \cdot \left( \frac{25 \cdot 2^3}{36} + \frac{25 \cdot 2}{2} \cdot 26.77^2 \right) + \frac{30 \cdot 96^3}{12} + 30 \cdot 96 \cdot 21.9^2 = 4638440.82 \text{ cm}^2$$

Promatramo površinu broj 2:

$$A_2 = 30.80 \text{ cm}^2$$

$$z_2 = 18.36 \text{ cm}^2$$

$$I_{y2} = \frac{\pi \cdot 1.34^4}{64} + \frac{\pi \cdot 1.34^2}{4} \cdot (101.9 - 18.36)^2 = 9768.96 \cdot 20 = 195379.2 \text{ cm}^2$$

Promatramo površinu broj 3:

$$A_3 = 12.57 \text{ cm}^2$$

$$z_3 = 4 \text{ cm}^2$$

$$I_{y3} = \frac{\pi \cdot 2^4}{64} + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot (101.9 - 4)^2 = 30111.097 \cdot 4 = 120444.38 \text{ cm}^2$$

Položaj neutralne osi y poprečnog presjeka:

$$z_0 = \frac{210000 \cdot 1017.3 \cdot 453000 + 180000 \cdot 3080 \cdot 1836 + 210000 \cdot 1257 \cdot 40}{210000 \cdot 453000 + 180000 \cdot 3080 + 210000 \cdot 1257} = 1018.34 \text{ mm} = 101.9 \text{ cm}$$

Naprezanje u materijalu 1:

$$\sigma_1 = \frac{E_1 M}{E_1 I_{y1} + E_2 I_{y2} + E_3 I_{y3}} \cdot z$$

$$\sigma_{1,1} = \frac{210000 \cdot 2561.9 \cdot 10^6}{210000 \cdot 4638440.82 \cdot 10^4 + 180000 \cdot 195379.2 \cdot 10^4 + 210000 \cdot 120444.38 \cdot 10^4} \cdot 481 =$$

$$= 0.052 \cdot 481 = 25.01 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{210000 \cdot 2561,9 \cdot 10^6}{210000 \cdot 4638440,82 \cdot 10^4 + 180000 \cdot 195379,2 \cdot 10^4 + 210000 \cdot 120444,38 \cdot 10^4} \cdot 381 =$$

$$= 0,052 \cdot 381 = 19,81 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{210000 \cdot 2561,9 \cdot 10^6}{210000 \cdot 4638440,82 \cdot 10^4 + 180000 \cdot 195379,2 \cdot 10^4 + 210000 \cdot 120444,38 \cdot 10^4} \cdot 166 =$$

$$= 0,052 \cdot 166 = 8,63 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1,4} = \frac{210000 \cdot 2561,9 \cdot 10^6}{210000 \cdot 4638440,82 \cdot 10^4 + 180000 \cdot 195379,2 \cdot 10^4 + 210000 \cdot 120444,38 \cdot 10^4} \cdot 592 =$$

$$= 0,052 \cdot 592 = 30,78 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1,5} = \frac{210000 \cdot 2561,9 \cdot 10^6}{210000 \cdot 4638440,82 \cdot 10^4 + 180000 \cdot 195379,2 \cdot 10^4 + 210000 \cdot 120444,38 \cdot 10^4} \cdot 1019 =$$

$$= 0,052 \cdot 1019 = 52,99 \text{ MPa}$$

Deformacije u materijalu 1:

$$\epsilon_{1,1} = \frac{\sigma_1}{E} = 0,119$$

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\sigma_2}{E} = 0,094$$

$$\epsilon_{1,3} = \frac{\sigma_3}{E} = 0,041$$

$$\epsilon_{1,4} = \frac{\sigma_4}{E} = 0,147$$

$$\epsilon_{1,5} = \frac{\sigma_5}{E} = 0,252$$

Naprezanje u materijalu 2:

$$\sigma_2 = \frac{E_2 M}{E_1 I_{y1} + E_2 I_{y2} + E_3 I_{y3}} \cdot z$$

$$\sigma_{2,1} = \frac{180000 \cdot 2561,9 \cdot 10^6}{210000 \cdot 4638440,82 \cdot 10^4 + 180000 \cdot 195379,2 \cdot 10^4 + 210000 \cdot 120444,38 \cdot 10^4} \cdot 481 =$$

$$= 0,045 \cdot 481 = 21,44 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{2,2} = \frac{180000 \cdot 2561,9 \cdot 10^6}{210000 \cdot 4638440,82 \cdot 10^4 + 180000 \cdot 195379,2 \cdot 10^4 + 210000 \cdot 120444,38 \cdot 10^4} \cdot 381 =$$

$$= 0,045 \cdot 381 = 17,15 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{2,3} = \frac{180000 \cdot 2561,9 \cdot 10^6}{210000 \cdot 4638440,82 \cdot 10^4 + 180000 \cdot 195379,2 \cdot 10^4 + 210000 \cdot 120444,38 \cdot 10^4} \cdot 166 =$$

$$0,045 \cdot 166 = 7,47 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{2,4} = \frac{180000 \cdot 2561,9 \cdot 10^6}{210000 \cdot 4638440,82 \cdot 10^4 + 180000 \cdot 195379,2 \cdot 10^4 + 210000 \cdot 120444,38 \cdot 10^4} \cdot 592 =$$

$$0,045 \cdot 592 = 26,64 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{2,5} = \frac{180000 \cdot 2561,9 \cdot 10^6}{210000 \cdot 4638440,82 \cdot 10^4 + 180000 \cdot 195379,2 \cdot 10^4 + 210000 \cdot 120444,38 \cdot 10^4} \cdot 1019 =$$

---

$$0.045 \cdot 1019 = 45,85 \text{ MPa}$$

Deformacije u materijalu 2:

$$\epsilon_{2,1} = \frac{\sigma_1}{E} = 0.102$$

$$\epsilon_{2,2} = \frac{\sigma_2}{E} = 0.081$$

$$\epsilon_{2,3} = \frac{\sigma_3}{E} = 0.036$$

$$\epsilon_{2,4} = \frac{\sigma_4}{E} = 0.127$$

$$\epsilon_{2,5} = \frac{\sigma_5}{E} = 0.218$$

Naprezanje u materijalu 3:

$$\sigma_3 = \frac{E_3 M}{E_1 I_{y1} + E_2 I_{y2} + E_3 I_{y3}} * z$$

$$\sigma_{3,1} = \frac{210000 \cdot 2561,9 \cdot 10^6}{210000 \cdot 4638440,82 \cdot 10^4 + 180000 \cdot 195379,2 \cdot 10^4 + 210000 \cdot 120444,38 \cdot 10^4} * 481 =$$
$$= 0.052 \cdot 481 = 25,01 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{3,2} = \frac{210000 \cdot 2561,9 \cdot 10^6}{210000 \cdot 4638440,82 \cdot 10^4 + 180000 \cdot 195379,2 \cdot 10^4 + 210000 \cdot 120444,38 \cdot 10^4} * 381 =$$
$$= 0.052 \cdot 381 = 19,81 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{3,3} = \frac{210000 \cdot 2561,9 \cdot 10^6}{210000 \cdot 4638440,82 \cdot 10^4 + 180000 \cdot 195379,2 \cdot 10^4 + 210000 \cdot 120444,38 \cdot 10^4} * 166 =$$
$$= 0.052 \cdot 166 = 8,63 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{3,4} = \frac{210000 \cdot 2561,9 \cdot 10^6}{210000 \cdot 4638440,82 \cdot 10^4 + 180000 \cdot 195379,2 \cdot 10^4 + 210000 \cdot 120444,38 \cdot 10^4} * 592 =$$
$$= 0.052 \cdot 592 = 30,78 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{3,5} = \frac{210000 \cdot 2561,9 \cdot 10^6}{210000 \cdot 4638440,82 \cdot 10^4 + 180000 \cdot 195379,2 \cdot 10^4 + 210000 \cdot 120444,38 \cdot 10^4} * 1019 =$$
$$= 0.052 \cdot 1019 = 52,99 \text{ MPa}$$

Deformacije u materijalu 1:

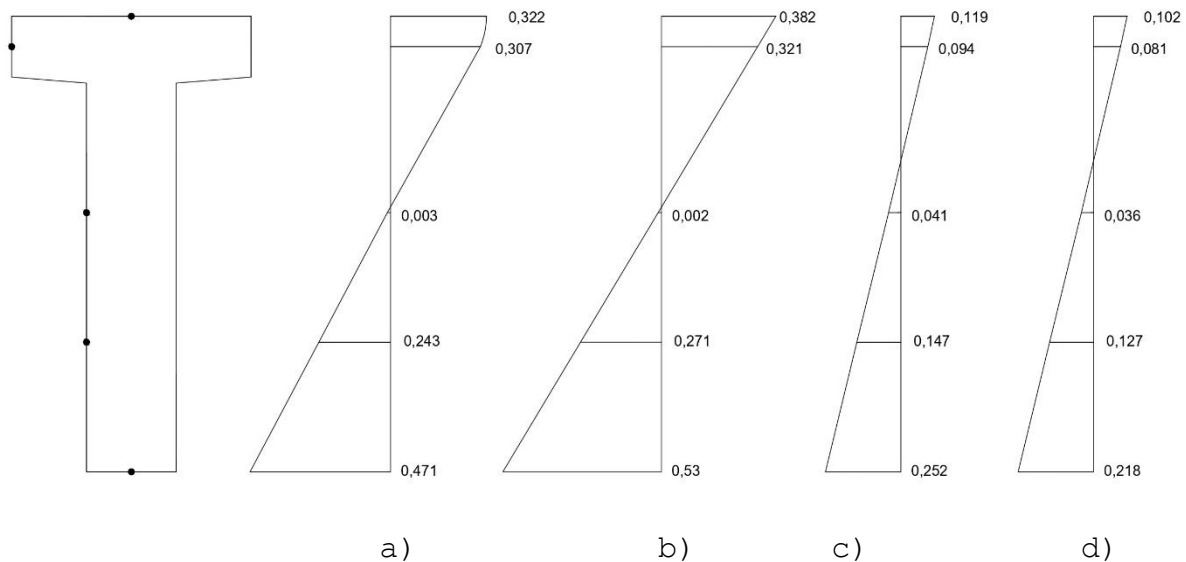
$$\epsilon_{3,1} = \frac{\sigma_1}{E} = 0.119$$

$$\epsilon_{3,2} = \frac{\sigma_2}{E} = 0.094$$

$$\epsilon_{3,3} = \frac{\sigma_3}{E} = 0.041$$

$$\epsilon_{3,4} = \frac{\sigma_4}{E} = 0.147$$

$$\epsilon_{3,5} = \frac{\sigma_5}{E} = 0.252$$



Slika 8.8.3. a) rezultat relativnih deformacija eksperimenta b) rezultat relativnih deformacija proračuna čistog betonskog elementa c) rezultat deformacija kompozitnog nosača u materijalu 1 d) rezultat deformacija kompozitnog nosača u materijalu 2

---

## 9. ZAKLJUČAK

U ovom radu opisali smo ponašanje štapa s primijenjenim opterećenjem i savijanjem koja se javlja u ravnina simetrije u presjeku štapa. Razmatrali smo oba savijanja čisto savijanje i savijanje silama. Uočena su normalna naprezanja variraju linearno od neutralne površine u skladu s formulom savijanja, koja su pokazala da su naprezanja izravno proporcionalna momentu savijanja  $M$  i obrnuto proporcionalan momentu tromosti / presjeka. Uzdužne deformacije u savijenom štapu proporcionalne su njezinoj zakrivljenosti, a deformacije u štapu pri čistom savijanju variraju linearno s udaljenošću od neutralne površine, bez obzira na oblik krivulje naprezanja materijala.

Na kraju, analize raspravljalo se o kompozitnim gredama (tj. gredama od više od jednog materijala).

---

## 10. LITERATURA

- [1] Vice Šimić, *Otpornost materijala I*, Zagreb, 2007
- [2] Bože Plazibat, *Nauka o čvrstoći*, Split 2019
- [3] James M. Goodno, *Mecanics of Materials*

---

## 11. POPIS SLIKA

<u>1. Slika 1. a) Ravni štap izložen opterećenju b) Dijagram poprečnih sila c) Dijagram momenta savijanja (Izvor [1])</u> .....	2
<u>2. Slika 1.2. Dio štapa zamijenjen unutarnjim silama, momentom savijanja i poprečnom silom (Izvor [1])</u> .....	4
<u>3. Slika 1.3. Dijagrami poprečne sile i momenta (Izvor [1])</u> ..	5
<u>4. Slika 1.4. Savijanje silama (Izvor [1])</u> .....	7
<u>5. Slika 3. Elastična linija pri čistom savijanju kao dio kružnice (Izvor [1])</u> .....	8
<u>6. Slika 3.1. Geometrijska analiza deformiranja štapa pri čistom savijanju (Izvor [1])</u> .....	9
<u>7. Slika 3.2. Pravokutni element štapa prije deformiranja i nakon njega (Izvor [1])</u> .....	10
<u>8. Slika 3.3 Podjela normalnog naprezanja po visini presjeka pri čistom savijanju (Izvor [2])</u> .....	11
<u>9. Slika 4. Linijski nosač opterećen savijanjem silama, raspodjela posmičnih naprezanja po poprečnom presjeku nosača, deplanacija poprečnog presjeka (Izvor [2])</u> .....	13
<u>10. Slika 4.1. Razmatrani nosač s momentnim dijagramom i njegov dio između dvaju bliskih presjeka u području konstantne poprečne sile (Izvor [2])</u> .....	14
<u>11. Slika 4.2. Raspodjela posmičnih naprezanja po visini pravokutnoga poprečnog presjeka (Izvor [2])</u> .....	16
<u>12. Slika 5. Poprečni presjeci s dvije osi simetrije. (Izvor [2])</u> .....	17
<u>13. Slika 5.2. Najpovoljniji raspored površine (Izvor [2])</u> ..	20
<u>14. Slika 5.3. Nesimetričan presjek s obzirom na neutralnu os (Izvor [1]) (Izvor [2])</u> .....	20
<u>15. Slika 6. Deformacija štapa pri ravnom savijanju</u> .....	22
<u>16. Slika 6.1. Ovisnost predznaka o izboru koordinatnog sustava (Izvor [2])</u> .....	24
<u>17. Slika 6.2. Dijagrami (Izvor [2])</u> .....	25
<u>18. Slika 7. Kompozitni nosač od dva materijala (Izvor [3])</u> ..	27
<u>19. Slika 7.1. Dvostruko simetrični kompozitni nosači</u> .....	29
<u>20. Slika 8.1.1. Armiranobetonski nosač</u> .....	30
<u>21. Slika 8.3.1. Opterećenja prema projektu</u> .....	31
<u>22. Slika 8.4.1. Palete s opterećenjem mase 2,79 tona</u> .....	32
<u>23. Slika 8.5.1. Položaj mjernih mjesta po nosaču</u> .....	33

---

<u>24.</u> Slika 8.6.1. Rezultati mjerenja relativnih deformacija...	34
<u>25.</u> Slika 8.7.1. Opterećenje nosača u fazi 2.....	36
<u>26.</u> Slika 8.7.2. Opterećenje nosača u fazi 3.....	36
<u>27.</u> Slika 8.7.3. Opterećenje nosača u fazi 4.....	36
<u>28.</u> Slika 8.8.1. Raspodjela naprezanja.....	38
<u>29.</u> Slika 8.8.2. Raspodjela površina.....	38
<u>30.</u> Slika 8.8.3. a) rezultat relativnih deformacija eksperimenta b) rezultat relativnih deformacija proračuna čistog betonskog elementa c) rezultat deformacija kompozitnog nosača u materijalu 1 d) rezultat deformacija kompozitnog nosača u materijalu 2 . . . . . . .	42