

Određivanje deformacija nosača pri savijanju primjenom grafoanalitičke metode

Lovrić, Filip

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:592015>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-03**

Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Filip Lovrić

**ODREĐIVANJE DEFORMACIJA NOSAČA PRI
SAVIJANJU PRIMJENOM GRAFOANALITIČKE
METODE**

ZAVRŠNI ISPIT

Zagreb, 2024.



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Filip Lovrić

**ODREĐIVANJE DEFORMACIJA NOSAČA PRI
SAVIJANJU PRIMJENOM GRAFOANALITIČKE
METODE**

ZAVRŠNI ISPIT

Mentor: doc. dr. sc. Marina Frančić Smrkić

Zagreb, 2024.



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Filip Lovrić

**DETERMINATION OF GIRDER DEFORMATIONS
IN BENDING USING THE GRAPHOANALYTICAL
METHOD**

FINAL EXAM

Mentor: Asst. Prof. Marina Frančić Smrkić, PhD

Zagreb, 2024



OBRAZAC 3

POTVRDA O POZITIVNOJ OCJENI PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Student/ica :

(Ime i prezime)

(JMBAG)

zadovoljio/la je na pisanom dijelu završnog ispita pod naslovom:

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

(Naslov teme završnog ispita na engleskom jeziku)

i predlaže se provođenje daljnjeg postupka u skladu s Pravilnikom o završnom ispitu i diplomskom radu Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta.

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu znanstvenog projekta: (upisati ako je primjenjivo)

(Naziv projekta, šifra projekta, voditelj projekta)

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu stručne prakse na Fakultetu: (upisati ako je primjenjivo)

(Ime poslodavca, datum početka i kraja stručne prakse)

Datum:

Mentor:

Potpis mentora:

Komentor:



OBRAZAC 5

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja :

Filip Lovrić, 0082065882

(Ime i prezime, JMBAG)

student/ica Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta ovim putem izjavljujem da je moj pisani dio završnog ispita pod naslovom:

Određivanje deformacija nosača pri savijanju primjenom grafoanalitičke metode

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

izvorni rezultat mogega rada te da se u izradi istoga nisam koristio/la drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

Datum:

11. rujna 2024.

Potpis:

Filip Lovrić



OBRAZAC 6

IZJAVA O ODOBRENJU ZA POHRANU I OBJAVU PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Ja :

Filip Lovrić, 5047975420

(Ime i prezime, OIB)

ovom izjavom potvrđujem da sam autor/ica predanog pisanog dijela završnog ispita i da sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti odgovara sadržaju dovršenog i obranjenog pisanog dijela završnog ispita pod naslovom:

Određivanje deformacija nosača pri savijanju primjenom grafoanalitičke metode

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

koji je izrađen na sveučilišnom prijediplomskom studiju Građevinarstvo Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta pod mentorstvom:

doc. dr. sc. Marine Frančić Smrkić

(Ime i prezime mentora)

i obranjen dana:

24. rujna 2024.

(Datum obrane)

Suglasan/suglasna sam da pisani dio završnog ispita bude javno dostupan, te da se trajno pohrani u digitalnom repozitoriju Građevinskog fakulteta, repozitoriju Sveučilišta u Zagrebu te nacionalnom repozitoriju.

Datum:

11.9.2024.

Potpis:

Filip Lovrić

SAŽETAK

U ovom završnom radu obrađen je postupak grafoanalitičkog određivanja deformacija nosača pri savijanju. Definirani su pojmovi elastične linije nosača, diferencijalne jednadžbe elastične linije, stvarni i fiktivni nosač te je detaljno objašnjen postupak grafoanalitičke metode. Primjenom grafoanalitičke metode riješena su tri praktična primjera. U nastavku su izrađeni numerički modeli zadanih primjera u računalnom programu *SAP2000*. Usporedbom vrijednosti unutarnjih sila i deformacija dobivenih grafoanalitičkom metodom i numeričkim modelom utvrđena su odstupanja zanemarivih vrijednosti.

Ključne riječi: grafoanalitička metoda, nosač, savijanje, deformacije, progib, numerički model

ABSTRACT

This thesis deals with the graphoanalytical determination of beam deformations during bending. The terms elastic line of a beam, differential equations of the elastic line, real and fictitious girder are defined and the graphoanalytical method is explained in detail. Three practical examples were solved using the graphoanalytical method. The numerical models of the examples were created using the SAP2000 computer programme. By comparing the values for internal forces and deformations determined with the graphoanalytical method and the numerical model, deviations of negligible values were found.

Keywords: graphoanalytical method, girder, bending, deformations, deflection, numerical model

SADRŽAJ

SAŽETAK	i
ABSTRACT	ii
SADRŽAJ	iii
1 UVOD	1
2 DEFORMACIJA RAVNOG ŠTAPA PRI SAVIJANJU	2
2.1 Diferencijalna jednačba elastične linije nosača.....	3
2.2 Grafoanalitička metoda određivanja deformacija nosača	5
2.3 Primjena grafoanalitičke metode na nosač promjenjivog poprečnog presjeka.....	7
3 NUMERIČKI PRIMJERI	9
3.1 Primjer 1	9
3.2 Primjer 2	12
3.3 Primjer 3	16
4 NUMERIČKA ANALIZA PRIMJENOM RAČUNALNOG PROGRAMA SAP2000.....	20
4.1 Primjer 1	20
4.2 Primjer 2	21
4.3 Primjer 3	23
5 ZAKLJUČAK.....	26
POPIS LITERATURE	27
POPIS SLIKA.....	28
POPIS TABLICA.....	30

1 UVOD

Prilikom projektiranja konstrukcija potrebno je ispuniti kriterije koji se odnose na čvrstoću, krutost i stabilnost. Danas se za potrebe proračuna koriste hrvatske norme (HRN) temeljene na europskim normama (EN) za projektiranje konstrukcija. Sukladno navedenim propisima, potrebno je provesti dimenzioniranje prema graničnim stanjima. Granična stanja nosivosti su stanja prilikom kojih nastupa otkazivanje konstrukcije, dok se u granična stanja uporabljivosti svrstavaju ona stanja kod čijih prekoračenja nisu ispunjeni propisani uvjeti funkcionalnosti [1].

Kod graničnih stanja uporabljivosti izvode se provjere deformacija, vibracija i pukotina, čije prekomjerne vrijednosti mogu narušiti uporabljivost konstrukcije. Uvjet za granična stanja uporabljivosti iskazan je u sljedećem obliku:

$$E_d \leq C_d \quad (1.1)$$

pri čemu je:

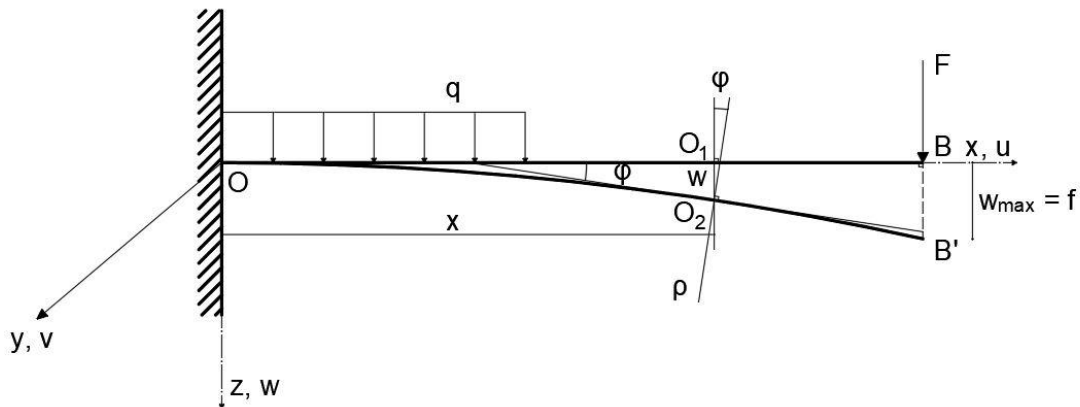
E_d – proračunska vrijednost učinaka djelovanja

C_d – granična vrijednost odgovarajućeg kriterija uporabljivosti [1, 2].

Deformacije nosača uslijed djelovanja vanjskog opterećenja mogu se odrediti analitičkim, grafičkim, grafoanalitičkim ili numeričkim metodama. U nastavku rada obrađena je grafoanalitička metoda određivanja progiba pri savijanju. Na numeričkim primjerima prikazana je primjena metode, a potom su pripadajuća rješenja uspoređena s rezultatima izračunatima primjenom računalnog programa SAP2000.

2 DEFORMACIJA RAVNOG ŠTAPA PRI SAVIJANJU

Promatramo deformiranje ravnog štapa opterećenog na savijanje (slika 1).



Slika 1: Deformacija štapa pri savijanju (Izvor: [3])

Štap OB opterećen je vanjskim opterećenjem koje djeluje okomito na uzdužnu os štapa u ravnini xz . Uslijed djelovanja opterećenja uzdužna se os iskrivljuje u ravnini djelovanja opterećenja. Deformirana uzdužna os štapa (krivulja OB') naziva se **elastična** ili **progibna linija nosača**. Poprečni presjeci prilikom savijanja ostaju okomiti na savijenu os štapa. Pomaci točaka u smjerovima koordinatnih osi x , y , i z označavaju se kao u , v i w . S obzirom da elastična linija nosača leži u ravnini xz , pomak u smjeru osi y jednak je nuli ($v = 0$). Također postoji pomak u smjeru osi x , međutim znatno je manje vrijednosti u odnosu na pomak w . Iz tog se razloga pomak u zanemaruje. Pomak $\overline{O_1O_2} = w$ naziva se **progib nosača**. Progib maksimalne vrijednosti označavamo s f . Kut φ naziva se **kut zaokreta presjeka** [3, 4].

Između kuta zaokreta $\varphi(x)$ i progiba $w(x)$ može se uspostaviti ovisnost prema izrazu:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dw}{dx}. \quad (2.1)$$

Prema slici 1 vidljivo je da u točki O_2 tangenta na elastičnu liniju zatvara s osi x kut jednak kutu zaokreta φ . S obzirom da su progibi značajno manjih veličina u odnosu na raspon, može se uvesti pretpostavka da je $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$, pri čemu slijedi izraz:

$$\varphi(x) = \frac{dw(x)}{dx}. \quad (2.2)$$

Iz prethodnog se izraza može iščitati da je kut zaokreta poprečnog presjeka jednak derivaciji progiba po apscisi presjeka, što povlači činjenicu da funkcija progiba i njena prva derivacija moraju biti neprekinute funkcije.

2.1 Diferencijalna jednadžba elastične linije nosača

Progibna linija nosača može se promatrati kao graf neke funkcije čiji se izraz za slučaj čistoga savijanja može odrediti iz izraza za zakrivljenost nosača:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{EI_y}. \quad (2.3)$$

Izraz za zakrivljenost krivulje glasi:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.4)$$

Izjednačavanjem prethodna dva izraza slijedi:

$$\frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{M_y}{EI_y}. \quad (2.5)$$

Uzevši isključivo u obzir male progibe, izraz $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2$ može se zanemariti kao veličina manjeg reda iz čega slijedi pojednostavljena jednadžba progibne linije nosača:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \pm \frac{M_y}{EI_y}. \quad (2.6)$$

Predznaci uz desni izraz odabiru se ovisno o odabranom koordinatnom sustavu. Izrazi koji povezuju unutarnje sile i opterećenje glase:

$$\frac{dM_y}{dx} = T_z \quad \frac{dT_z}{dx} = -q \quad \frac{d^2M_y}{dx^2} = -q,$$

a prema izrazima (2.2) i (2.6):

$$\varphi = \frac{dw}{dx}$$

$$M_y = -EI_y \frac{d^2w}{dx^2}$$

Derivacijom prethodnog izraza slijedi:

$$T_z = \frac{dM_y}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right).$$

Ponovnom derivacijom slijedi izraz:

$$q = -\frac{dT_z}{dx} = -\frac{d^2 M_y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right).$$

Diferencijalne zavisnosti pri savijanju glase:

$$\varphi = \frac{dw}{dx}$$

$$M_y = -EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$T_z = -\frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \quad (2.7)$$

$$q = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right).$$

Ako je štap konstantnog poprečnog presjeka, odnosno $EI_y = \text{const.}$, slijedi:

$$\varphi = \frac{dw}{dx}$$

$$M_y = -EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$T_z = -EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} \quad (2.8)$$

$$q = EI_y \frac{d^4 w}{dx^4}.$$

Iz prethodno izvedenih jednadžbi može se zaključiti da se iterativnim deriviranjem funkcije elastične linije nosača mogu odrediti funkcije kuta zaokreta, momenta savijanja, poprečne sile i opterećenja. Analogno, ukoliko je zadana funkcija opterećenja, uzastopnim integriranjem slijede jednadžbe poprečne sile, momenta savijanja i kuta zaokreta [3, 4].

2.2 Grafoanalitička metoda određivanja deformacija nosača

Prema izrazima iz prethodnog poglavlja može se zaključiti da se opetovanom integracijom funkcije opterećenja može doći do izraza za kut zaokreta i progib. Međutim, kod nosača s promjenjivom krutosti ili kod kompleksnih izraza za moment savijanja, analitička metoda nije najprikladnije rješenje. Također, u inženjerskoj praksi uglavnom nije potrebno znati jednadžbu elastične linije, već je za potrebe dimenzioniranja potrebno poznavati isključivo maksimalne vrijednosti progiba i kuta zaokreta. Za rješavanje takvih zadataka može se koristiti grafoanalitička metoda pomoću koje se mogu odrediti vrijednosti progiba i kuta zaokreta u traženim poprečnim presjecima bez poznavanja izraza elastične linije nosača.

Grafoanalitička metoda temelji se na analogiji diferencijalnih jednadžbi:

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_y, \quad (2.9)$$

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = -q. \quad (2.10)$$

Uvodimo tzv. **fiktivni nosač**, jednake duljine i krutosti kao stvarni nosač, koji je opterećen fiktivnim opterećenjem \bar{q} u obliku dijagrama momenta savijanja M_y na stvarnom nosaču, vrijedi:

$$\bar{q} = M_y \quad (2.11)$$

Posljedica fiktivnog opterećenja su fiktivni moment savijanja \bar{M} i fiktivna poprečna sila \bar{T} . Smjer fiktivnog opterećenja određuje se ovisno o predznaku momenta savijanja na stvarnom nosaču. Pozitivni dijagram momenta savijanja usmjerava fiktivno opterećenje prema dolje i obrnuto.

U poprečnom presjeku fiktivnog opterećenja možemo postaviti izraz:

$$\frac{d^2 \bar{M}}{dx^2} = -\bar{q} \quad (2.12)$$

ili pomoću izraza (2.11):

$$\frac{d^2 \bar{M}}{dx^2} = -M_y. \quad (2.13)$$

Usporedbom jednadžbi (2.9) i (2.13) slijedi izraz:

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^2 \bar{M}}{dx^2}, \quad (2.14)$$

pri čemu je moment savijanja stvarnoga nosača prikazan kao druga derivacija fiktivnog momenta savijanja fiktivnoga nosača opterećenog fiktivnim opterećenjem u obliku dijagrama momenta savijanja na stvarnom nosaču.

Integriranjem prethodnog izraza slijedi:

$$EI_y = \frac{dw}{dx} = \frac{d\bar{M}}{dx} + C \quad (2.15)$$

Temeljem jednadžbe koja povezuje diferencijalnu ovisnost momenta savijanja i poprečne sile proizlazi da je:

$$\frac{d\bar{M}}{dx} = \bar{T} \quad (2.16)$$

Izraz (2.15) zapisan pomoću izraza (2.16) glasi:

$$EI_y = \frac{dw}{dx} = \bar{T} + C \quad (2.17)$$

Integriranjem izraza (2.17) proizlazi:

$$EI_y w = \bar{M} + Cx + D \quad (2.18)$$

Konstante integracije C i D ovise o rubnim uvjetima nosača. Za nosač učvršćen na način tako da su fiktivna poprečna sila i fiktivni moment savijanja jednaki nuli u presjecima u kojima su kut zaokreta i progib stvarnoga nosača jednaki nuli, tada su i konstante integracije jednake nuli [3]. Slijedi izraz za kut zaokreta stvarnog nosača:

$$\varphi = \frac{dw}{dx} = \frac{\bar{T}}{EI_y}, \quad (2.19)$$

odnosno kut zaokreta stvarnog nosača u nekom poprečnom presjeku jednak je iznosu fiktivne poprečne sile pripadajućeg presjeka fiktivnog nosača podijeljene s fleksijskom krutosti.

Analogno, slijedi izraz za progib:

$$w = \frac{\bar{M}}{EI_y}, \quad (2.20)$$

pri čemu je progib stvarnog nosača nekog poprečnog presjeka jednak iznosu fiktivnog momenta savijanja pripadajućeg presjeka fiktivnog nosača podijeljenog s fleksijskom krutosti.

Prema svemu navedenom, određivanje deformacija nosača pri savijanju grafoanalitičkom metodom svodi se na određivanje fiktivnog momenta savijanja i fiktivne poprečne sile. Fiktivni i stvarni nosač jednakih su krutosti, no razlikuju se u načinima oslanjanja. Stvarni i

njemu fiktivni nosač nazivaju se **konjugirani nosači** [3]. Na sljedećoj slici nalazi se prikaz nekoliko učestalih konjugiranih nosača.

STVARNI NOSAČ	FIKTIVNI NOSAČ

Slika 2: Prikaz konjugiranih nosača (Izvor: [3, 4])

2.3 Primjena grafoanalitičke metode na nosač promjenjivog poprečnog presjeka

Grafoanalitička metoda može se primijeniti na nosač promjenjivog poprečnog presjeka. Moguće je zapisati diferencijalnu jednadžbu elastične u obliku:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{EI_y} = -\frac{MI_0}{I_y} \cdot \frac{1}{EI_0'}$$

pri čemu je I_0 proizvoljno odabrani, ali konstantni moment tromosti.

Označavanjem

$$\frac{MI_0}{I_y} = M^*, \quad (2.21)$$

sljedi zapis diferencijalne jednadžbe elastične linije u obliku:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M^*}{EI_0}. \quad (2.22)$$

Dalje se u proračunu uzima nosač konstantnoga poprečnog presjeka s momentom tromosti I_0 i momentnim dijagramom M^* . Izraz za progib u tom slučaju glasi:

$$w = \frac{\overline{M^*}}{EI_0}, \quad (2.23)$$

a izraz za kut zaokreta:

$$\varphi = \frac{\overline{T^*}}{EI_0}. \quad (2.24)$$

3 NUMERIČKI PRIMJERI

U nastavku su prikazana tri numerička primjera riješena primjenom grafoanalitičke metode.

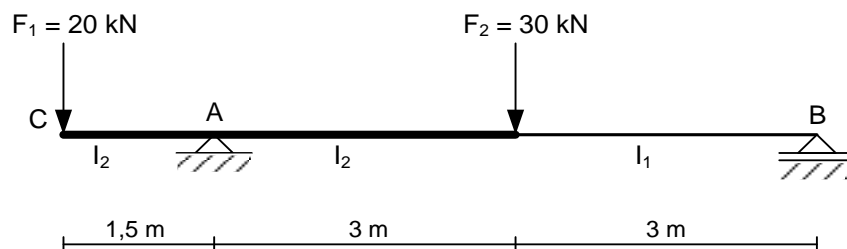
3.1 Primjer 1

Primjenom grafoanalitičke metode treba odrediti progib i kut zaokreta točke C grednog nosača na slici.

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$I_1 = 10^7 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = 2 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$



Slika 3: Skica nosača (primjer 1)

Zadani je statički određeni nosač u obliku proste grede, stoga iz jednadžbi ravnoteže možemo izračunati vrijednosti reakcija i unutarnjih sila.

Iz $\sum M_A = 0$ slijedi vrijednost reakcije B:

$$20 \cdot 1,5 - 30 \cdot 3 + B \cdot 6 = 0$$

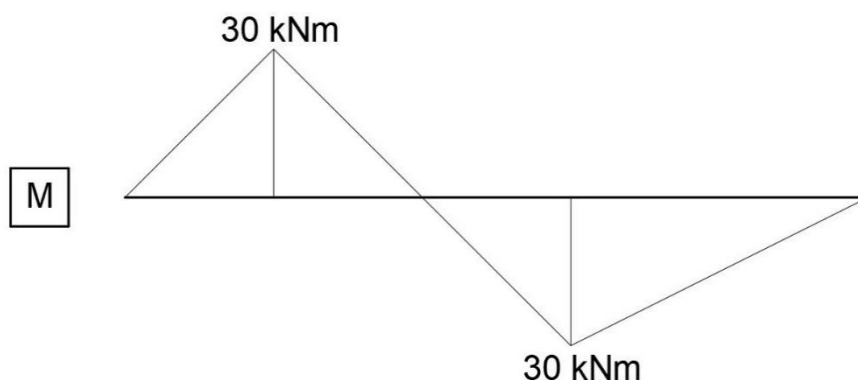
$$B = 10 \text{ kN.}$$

Iz $\sum M_B = 0$ slijedi vrijednost reakcije A:

$$20 \cdot 7,5 - A \cdot 6 + 30 \cdot 3 = 0$$

$$A = 40 \text{ kN.}$$

Dijagram momenta savijanja za zadani sustav prikazan je na sljedećoj slici:



Slika 4: Dijagram momenta savijanja (primjer 1)

Zatim je potrebno konstruirati fiktivni nosač. Po prethodno navedenim pravilima, slobodni kraj C zamjenjuje se upetim ležajem, nepomični ležaj A zamjenjuje se zglobovom, dok klizni ležaj B ostaje nepromijenjen.

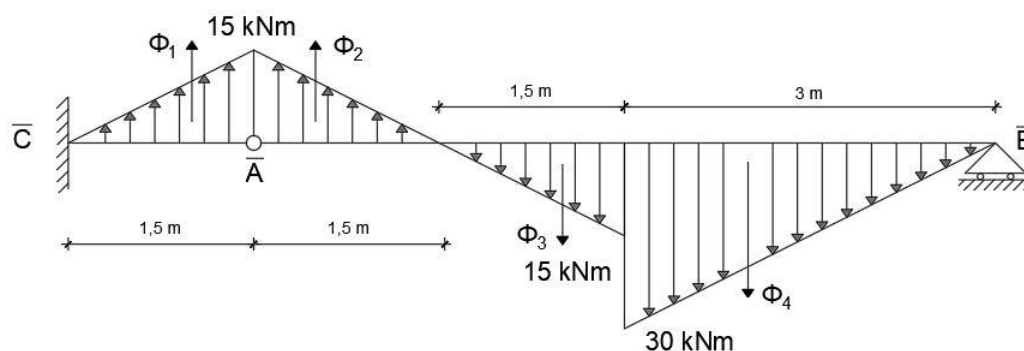
Prije nanošenja fiktivnog opterećenja, s obzirom da je u primjeru zadan nosač promjenjivog poprečnog presjeka, potrebno je provesti redukciju momentnog dijagrama prema izrazu:

$$M^* = \frac{I_0}{I_i}$$

Za $I_0 = I_1$ slijedi:

$$M^* = M \cdot \frac{I_0}{I_2} = 30 \cdot \frac{10^7}{2 \cdot 10^7} = 15 \text{ kNm}.$$

Na fiktivni nosač nanosimo fiktivno opterećenje u obliku reduciranog momenta dijagrama, sukladno slici:



Slika 5: Fiktivni nosač i fiktivno opterećenje (primjer 1)

Zatim je potrebno izračunati vrijednosti fiktivnih sila. Fiktivno opterećenje dijelimo na manje dijelove (trokute) te računamo vrijednost fiktivne sile kao površinu svakog trokuta:

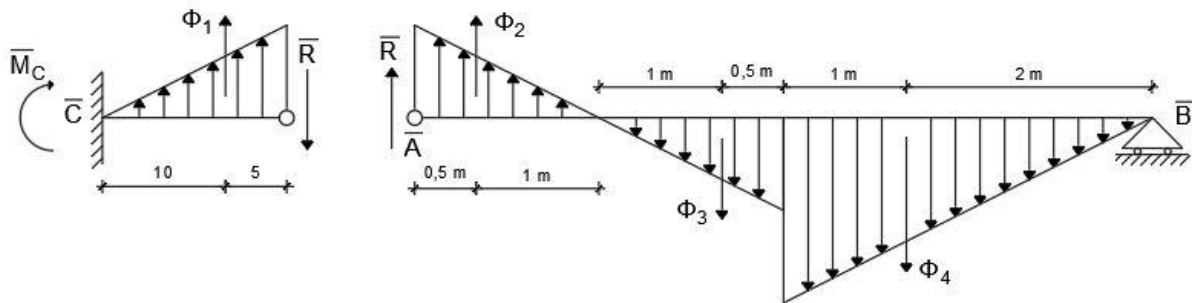
$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 1,5 = 11,25 \text{ kNm}^2,$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 1,5 = 11,25 \text{ kNm}^2,$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 1,5 = 11,25 \text{ kNm}^2,$$

$$\Phi_4 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 3 = 45 \text{ kNm}^2.$$

Potom se nosač presiječe kroz zglob kako bi se odredila sila \bar{R} .



Slika 6: Nosač presječen kroz zglob (primjer 1)

Iz $\Sigma \bar{M}_B = 0$ slijedi vrijednost sile \bar{R} :

$$-\bar{R} \cdot 6 - \Phi_2 \cdot 5,5 + \Phi_3 \cdot 3,5 + \Phi_4 \cdot 2 = 0$$

$$\bar{R} = 11,25 \text{ kNm}^2.$$

Iz $\Sigma \bar{M}_C = 0$ slijedi vrijednost momenta \bar{M}_C :

$$-\bar{M}_C + \Phi_1 \cdot 1 - \bar{R} \cdot 1,5 = 0$$

$$\bar{M}_C = -5,625 \text{ kNm}^2.$$

Iz $\Sigma \bar{F}_z = 0$ slijedi vrijednost sile \bar{R}_C :

$$\bar{R}_C + \Phi_1 - \bar{R} = 0$$

$$\bar{R}_C = 0.$$

Pomoću \bar{M}_C i \bar{R}_C slijede konačne vrijednosti progiba i kuta zaokreta točke C:

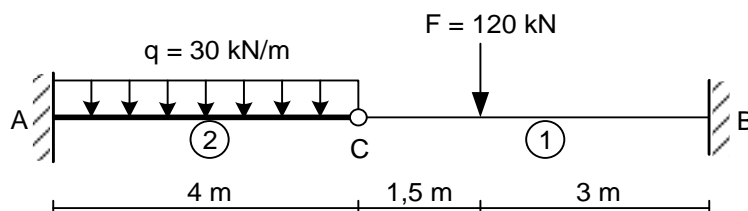
$$w_C = \frac{\bar{M}_C}{EI_1} = \frac{-5,625 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^7} = -2,813 \text{ mm (pomak prema gore)}$$

$$\varphi_C = \frac{\bar{R}_C}{EI_1} = \frac{0}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^7} = 0 \text{ rad.}$$

3.2 Primjer 2

Za zadani nosač treba nacrtati dijagrame unutarnjih sila te odrediti pomak točke C. Nosač oznake 1 profil je IPE 400, a nosač oznake 2 IPE 450.

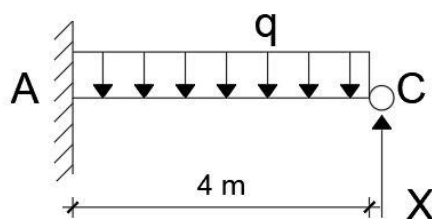
Modul elastičnosti čelika je $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.



Slika 7: Skica nosača (primjer 2)

Nosač AB statički je neodređen sustav, što podrazumijeva nemogućnost dobivanja iznosa unutarnjih sila i reakcija rješavanjem samo jednačbi ravnoteže. Iz tog razloga pristup rješavanju zadatka nešto je drugačiji od prethodnog. Konkretno, na zadanom primjeru potrebno je sustav razdvojiti na dva podsustava na području zgloba C te na svakom podsustavu postaviti dodatnu jednačbu (uvjet kompatibilnosti) kojom se dolazi do nepoznate veličine. Nakon određivanja nepoznatih veličina, zadatak je jednak prethodnom.

Zadani nosač razdvajamo na dva nosača presijecanjem kroz zglob C te promatramo lijevi dio nosača:



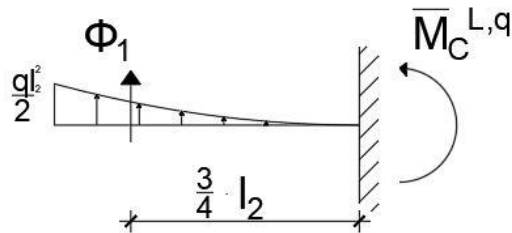
Slika 8: Lijevi dio nosača (primjer 2)

Uvjet kompatibilnosti za ovaj dio nosača glasi:

$$w_C^l = w_C^q - w_C^X.$$

U skladu s prethodnim izrazom, potrebno je zasebno odrediti progib koji je posljedica opterećenja q i nepoznate sile X .

Fiktivni nosač s fiktivnim opterećenjem u obliku momentnog dijagrama od opterećenja q prikazan je na sljedećoj slici:



Slika 9: Fiktivni nosač (lijevo) s fiktivnim opterećenjem u obliku M dijagrama od opterećenja q (primjer 2)

Iz skice je vidljivo da je fiktivno opterećenje u obliku kvadratne parabole s maksimalnom vrijednosti $\frac{ql_2^2}{2}$ i težištem na udaljenosti $\frac{3}{4}$ duljine konzole od oslonca.

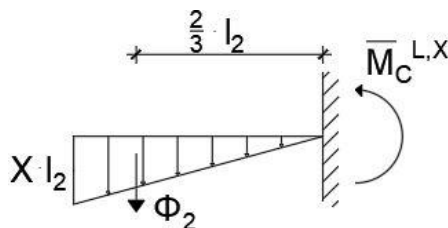
Vrijednost fiktivne sile Φ_1 za $q = 30 \text{ kN/m}$ i $l_2 = 4 \text{ m}$:

$$\Phi_1 = \frac{ql_2^2}{2} \cdot l_2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{ql_2^3}{6} = 320 \text{ kNm}^2.$$

Pripadajući fiktivni moment savijanja $\bar{M}_C^{L,q}$:

$$\bar{M}_C^{L,q} = \Phi_1 \cdot l_2 \cdot \frac{3}{4} = 960 \text{ kNm}^3.$$

Zatim na istom fiktivnom nosaču postavljamo fiktivno opterećenje u obliku momentnog dijagrama od djelovanja sile X , kao što je prikazano na slici:



Slika 10: Fiktivni nosač (lijevo) s fiktivnim opterećenjem u obliku M dijagrama od djelovanja sile X (primjer 2)

Vrijednost fiktivne sile Φ_2 :

$$\Phi_2 = X \cdot l_2 \cdot l_2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{Xl_2^2}{2} \text{ kNm}^2.$$

Pripadajući fiktivni moment savijanja $\bar{M}_C^{L,X}$:

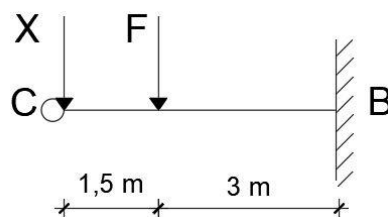
$$\bar{M}_C^{L,X} = -\Phi_2 \cdot l_2 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{Xl_2^2}{3} = -21,33X \text{ kNm}^3.$$

Postavljamo uvjet da je ukupan pomak točke C za lijevi dio nosača:

$$w_C^L = w_C^q - w_C^X$$

$$w_C^L = \frac{\bar{M}_C^{L,q} + \bar{M}_C^{L,X}}{EI_2} = \frac{960 - 21,33X}{EI_2}$$

Analogno rješavamo desni podsustav nosača primjenom istih principa. Na sljedećoj su slici prikazana djelovanja na desnom dijelu nosača:



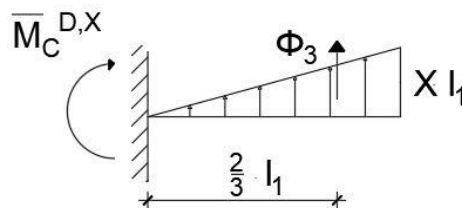
Slika 11: Desni dio nosača (primjer 2)

Pomak točke C za desni dio nosača glasi:

$$w_C^D = w_C^F + w_C^X.$$

U skladu s prethodnim izrazom, potrebno je zasebno odrediti progib koji je posljedica djelovanja sile X i F.

Fiktivni nosač s fiktivnim opterećenjem u obliku momentnog dijagrama od sile X prikazan je na slici:



Slika 12: Fiktivni nosač (desno) s fiktivnim opterećenjem u obliku M dijagrama od djelovanja sile X (primjer 2)

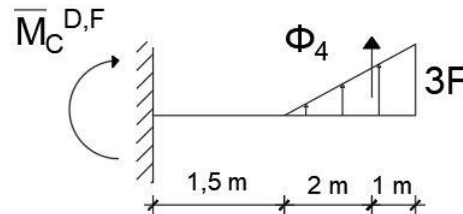
Vrijednost fiktivne sile Φ_3 :

$$\Phi_3 = X \cdot l_1 \cdot l_1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{Xl_1^2}{2} \text{ kNm}^2.$$

Pripadajući fiktivni moment savijanja $\bar{M}_C^{D,X}$:

$$\bar{M}_C^{D,X} = \Phi_3 \cdot l_1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{Xl_1^3}{3} = 30,375X \text{ kNm}^3.$$

Zatim na istom fiktivnom nosaču postavljamo fiktivno opterećenje u obliku momentnog dijagrama od djelovanja sile F , kao što je prikazano na slici:



Slika 13: Fiktivni nosač (desno) s fiktivnim opterećenjem u obliku M dijagrama od djelovanja sile F (primjer 2)

Vrijednost fiktivne sile Φ_4 :

$$\Phi_4 = F \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 540 \text{ kNm}^2.$$

Pripadajući fiktivni moment savijanja $\bar{M}_C^{D,F}$:

$$\bar{M}_C^{D,F} = \Phi_4 \cdot 3,5 = 1890 \text{ kNm}^3.$$

Uvrštavanjem u uvjet kompatibilnosti slijedi izraz:

$$w_C^D = \frac{\bar{M}_C^{D,F} + \bar{M}_C^{D,X}}{EI_1} = \frac{1890 + 30,375X}{EI_1}$$

Uvjet kompatibilnosti glasi da pomak točke C s lijeve i desne strane mora biti jednak. Izjednačavanjem izraza za progib lijevo i desno slijedi:

$$\frac{960 - 21,33X}{EI_2} = \frac{1890 + 30,375X}{EI_1}$$

Nakon unakrsnog množenja te grupiranja članova uz X slijedi:

$$X = \frac{960I_1 - 1890I_2}{30,375I_2 + 21,33I_1}$$

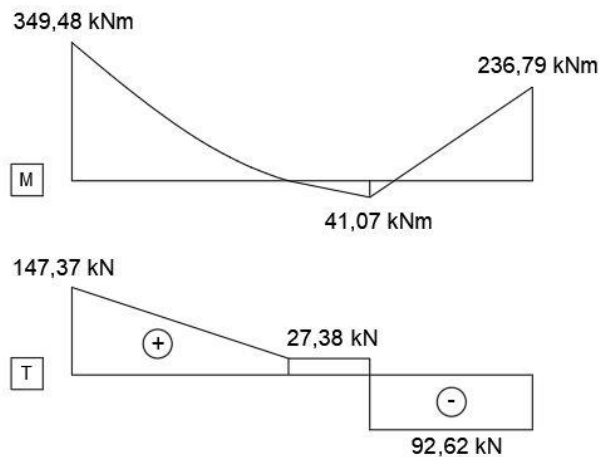
Uvrštavanjem vrijednosti momenta tromosti za profil IPE 400 $I_1 = 2,31 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ i profil IPE 450 $I_2 = 3,37 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ proizlazi konačna vrijednost sile X :

$$X = -27,38 \text{ kN}$$

Uvrštavanjem vrijednosti X , momenta tromosti i modula elastičnosti $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ u jedan od izraza za progib, proizlazi konačna vrijednost progiba točke C :

$$w_C^L = \frac{960 - 21,33X}{EI_2} = 0,02182 \text{ m} = 21,82 \text{ mm}$$

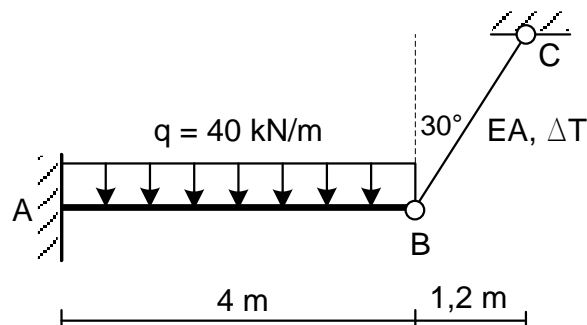
Na sljedećoj slici prikazani su dijagrami unutarnjih sila:



Slika 14: Dijagrami unutarnjih sila (primjer 2)

3.3 Primjer 3

Za sustav na slici treba nacrtati dijagrame unutarnjih sila te odrediti pomak točke B . Greda AB čelični je profil IPE 330, a štapni element čelični je cijevni profil s vanjskim promjerom duljine $D = 31,8 \text{ mm}$ i debljine stijenke $t = 1,6 \text{ mm}$. Štap se zagrijava za $\Delta T = 20^\circ \text{C}$. Modul elastičnosti čelika je $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, a toplinski koeficijent $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$.



Slika 15: Skica nosača (primjer 3)

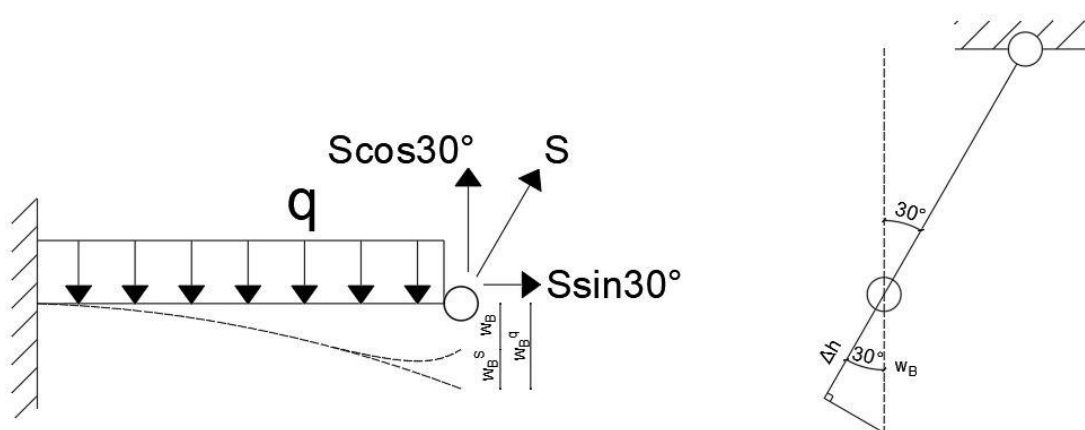
Zadani nosač statički je neodređeni sustav sastavljen od grede i štapnog elementa spojenih zglobom. Slično kao u prethodnom primjeru, potrebno je postaviti dodatni uvjet kompatibilnosti kako bi se odredile sve nepoznate vrijednosti unutarnjih sila i reakcija.

Za zadani sustav uvjet kompatibilnosti glasi:

$$w_B = w_B^q - w_B^S = \frac{\Delta h}{\cos 30^\circ},$$

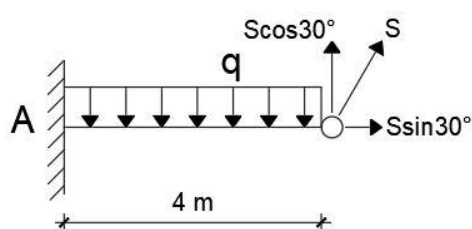
pri čemu je Δh izraz koji obuhvaća produljenje štapnog elementa od uzdužne sile i djelovanja temperature:

$$\Delta h = \frac{S \cdot L}{E \cdot A} + \alpha_t \cdot \Delta T \cdot L.$$



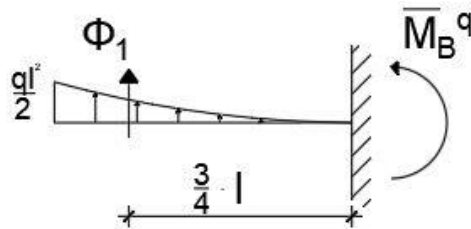
Slika 16: Prikaz plana pomaka (primjer 3)

Nosač presiječemo u zglobu B . Promatramo lijevi dio nosača:



Slika 17: Lijevi dio nosača (primjer 3)

Potrebno je kao i u prethodnim primjerima zasebno izračunati vrijednosti fiktivnih momenata savijanja od opterećenja q i sile S . Fiktivni nosač opterećen u obliku dijagrama momenta savijanja od opterećenja q prikazan je na slici:



Slika 18: Fiktivni nosač s fiktivnim opterećenjem u obliku M dijagrama od opterećenja q (primjer 3)

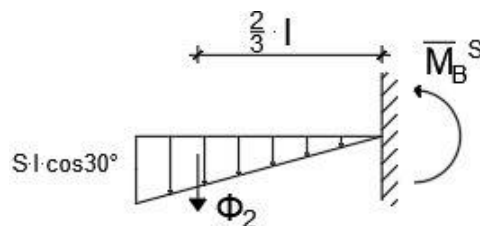
Vrijednost fiktivne sile Φ_1 za $q = 40 \text{ kN/m}$ i $l = 4 \text{ m}$:

$$\Phi_1 = \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{1}{3} = \frac{ql^3}{6} = 426,67 \text{ kNm}^2.$$

Pripadajući fiktivni moment savijanja \bar{M}_B^q :

$$\bar{M}_B^q = \Phi_1 \cdot l \cdot \frac{3}{4} = 1280 \text{ kNm}^3.$$

Zatim na istom fiktivnom nosaču postavljamo fiktivno opterećenje u obliku momentnog dijagrama od djelovanja vertikalne komponente sile S , kao što je prikazano na slici:



Slika 19: Fiktivni nosač s fiktivnim opterećenjem u obliku M dijagrama od opterećenja vertikalne komponente sile S (primjer 3)

Vrijednost fiktivne sile Φ_2 :

$$\Phi_2 = S \cdot l \cdot \cos 30^\circ \cdot l \cdot \frac{1}{2} = \frac{Sl^2 \cos 30^\circ}{2} \text{ kNm}^2.$$

Pripadajući fiktivni moment savijanja \bar{M}_B^S :

$$\bar{M}_B^S = -\Phi_2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} = -\frac{Sl^3 \cos 30^\circ}{3} = -18,48S \text{ kNm}^3.$$

Uvjet kompatibilnosti glasi:

$$w_B = w_B^q - w_B^S = \frac{\bar{M}_B}{EI} = \frac{\bar{M}_B^q + \bar{M}_B^S}{EI} = \frac{\Delta h}{\cos 30^\circ}$$

$$w_B = \frac{1280 - 18,48S}{EI} = \frac{S \cdot L + \alpha_t \cdot \Delta T \cdot L \cdot E \cdot A}{EA \cos 30^\circ}$$

Nakon unakrsnog množenja i grupiranja članova uz S proizlazi jednačina:

$$S = \frac{1280 \cdot A \cdot \cos 30^\circ - \alpha_t \cdot \Delta T \cdot L \cdot E \cdot A \cdot I}{I \cdot L + 18,48 \cdot A \cdot \cos 30^\circ}$$

Uvrštavanjem pripadajućih vrijednosti geometrijskih karakteristika i opterećenja:

$$I - \text{moment tromosti IPE 330} = 1,18 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$L - \text{duljina štapa} = \frac{1,2}{\cos 60^\circ} = 2,4 \text{ m}$$

$$\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$$

$$\Delta T = 20^\circ\text{C}$$

$$E - \text{modul elastičnosti čelika} = 2 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$$

$$A - \text{površina presjeka cijevnog profila} = \frac{[D^2 - (D - 2 \cdot t)^2]\pi}{4} = 1,518 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

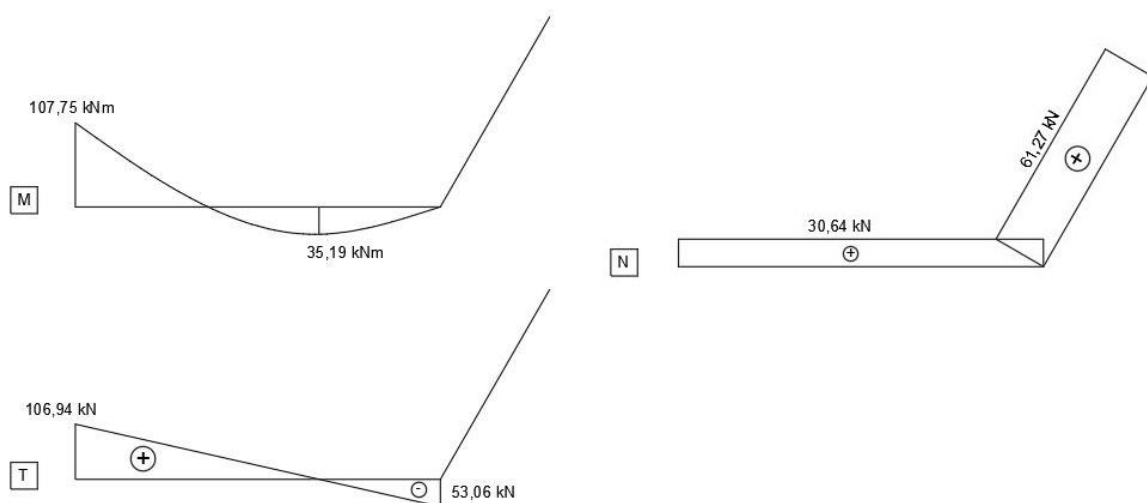
Slijedi vrijednost sile S :

$$S = 61,27 \text{ kN.}$$

Uvrštavanjem vrijednosti sile S u izraz za progib:

$$w_B = \frac{\bar{M}_B}{EI} = \frac{1280 - 18,48S}{EI} = 0,00626 \text{ m} = 6,26 \text{ mm}$$

Slijede prikazi dijagrama unutarnjih sila:



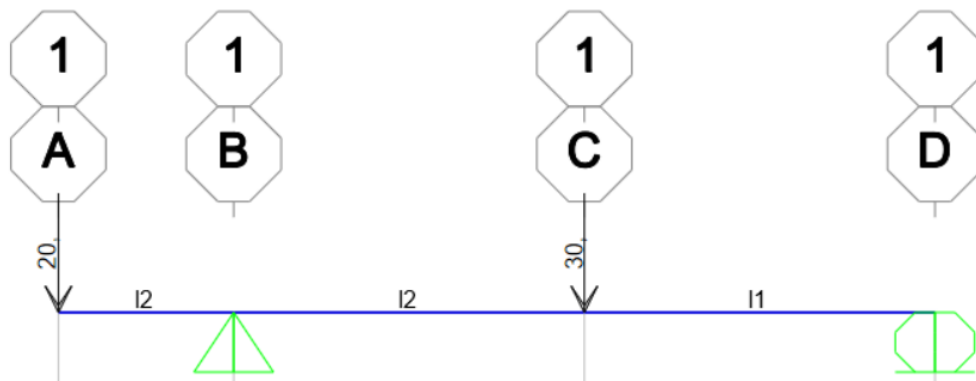
Slika 20: Dijagrami unutarnjih sila (primjer 3)

4 NUMERIČKA ANALIZA PRIMJENOM RAČUNALNOG PROGRAMA SAP2000

U ovom poglavlju prikazat će se rezultati prethodnih numeričkih primjera dobiveni primjenom programskog paketa *SAP2000*. *SAP2000*, kao i mnogi računalni programi za proračun konstrukcija, se bazira na metodi konačnih elemenata, numeričkoj metodi koja se temelji na jednostavnoj aproksimaciji nepoznatih varijabli u svrhu transformacije parcijalnih diferencijalnih jednačbi u obične diferencijalne jednačbe [5]. Gredni i štapni elementi svedeni su na linijske elemente s pripadajućim geometrijskim karakteristikama te nakon zadavanja opterećenja proveden je proračun unutarnjih sila i deformacija.

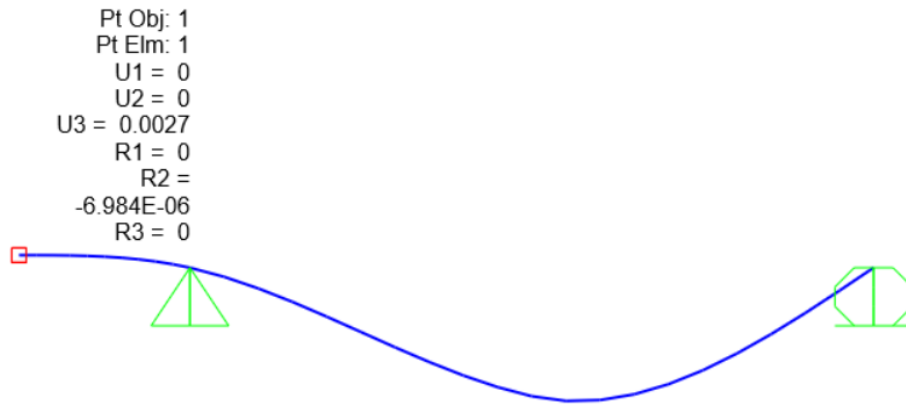
4.1 Primjer 1

Na slici je prikazan numerički model prvog primjera.



Slika 21: Numerički model (primjer 1)

Nakon zadanih geometrijskih karakteristika i opterećenja te nakon provedbe analize slijedi prikaz elastične linije nosača nakon opterećenja s vrijednostima u traženom čvoru:



Slika 22: Elastična linija (primjer 1)

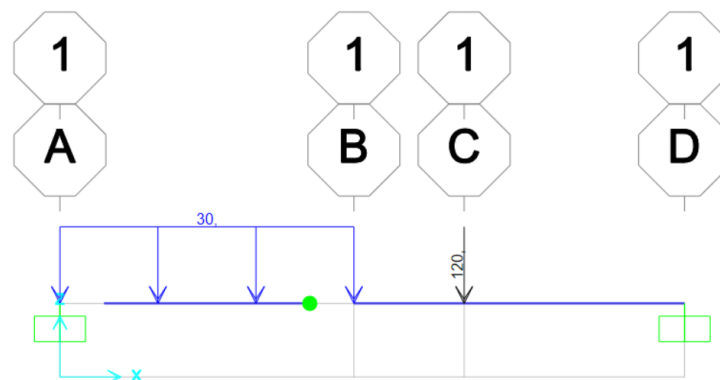
U sljedećoj su tablici prikazani rezultati dobiveni grafoanalitičkom metodom i primjenom računalnog programa.

Tablica 1: Usporedba rezultata (primjer 1)

Primjer 1	Kut zaokreta	Progib
Grafoanalitička metoda	0	2,8125 mm
SAP2000	0	2,7 mm
Odstupanje	±0%	±4%

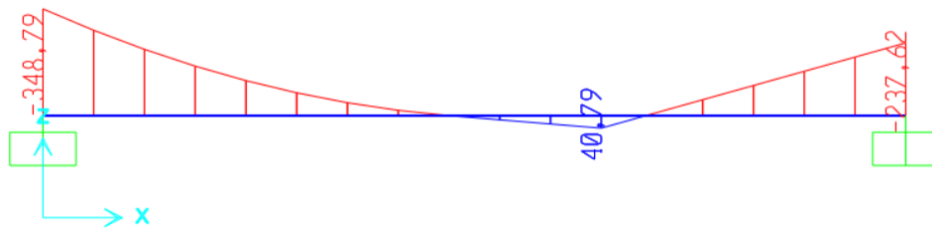
4.2 Primjer 2

Na slici je prikazan numerički model drugog primjera.

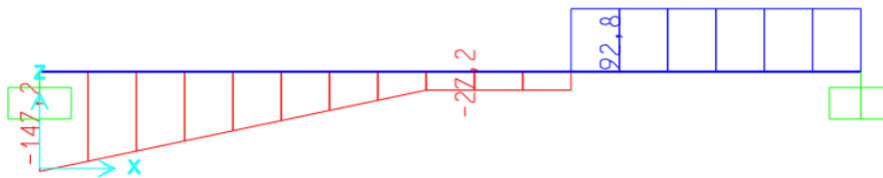


Slika 23: Numerički model (primjer 2)

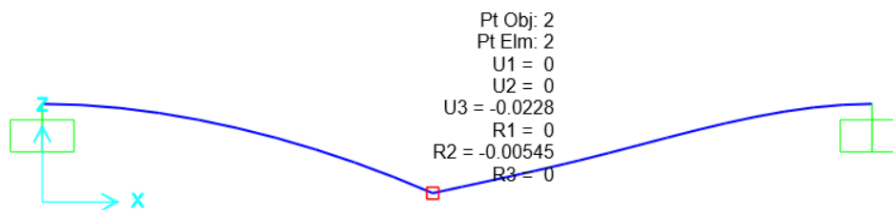
Nakon zadanih geometrijskih karakteristika i opterećenja te nakon provedbe analize slijedi prikaz unutarnjih sila i elastične linije nosača nakon opterećenja s traženim vrijednostima:



Slika 24: Dijagram momenta savijanja (primjer 2)



Slika 25: Dijagram poprečnih sila (primjer 2)



Slika 26: Elastična linija (primjer 2)

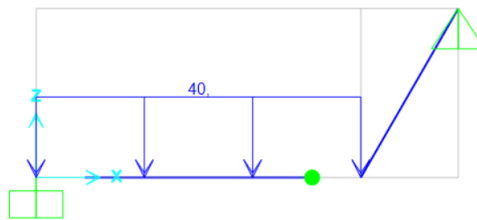
U sljedećoj su tablici prikazane maksimalne vrijednosti dobivene grafoanalitičkom metodom i primjenom računalnog programa.

Tablica 2: Usporedba rezultata (primjer 2)

Primjer 2	Moment savijanja	Poprečna sila	Progib
Grafoanalitička metoda	349,48 kNm	147,37 kN	21,82 mm
SAP2000	348,79 kNm	147,2 kN	22,28 mm
Odstupanje	±0,20%	±0,12%	±2,06%

4.3 Primjer 3

Na slikama je prikazan numerički model trećeg primjera.

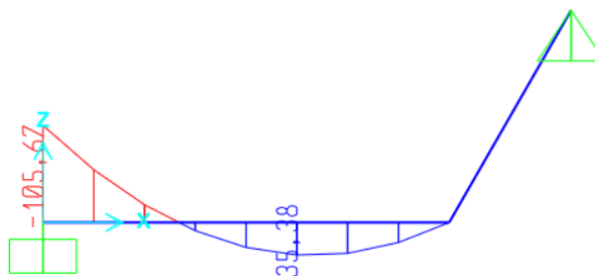


Slika 27: Numerički model s distribuiranim opterećenjem (primjer 3)

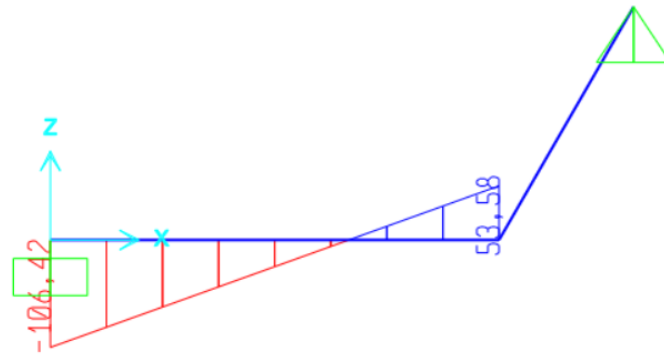


Slika 28: Numerički model s temperaturnim opterećenjem (primjer 3)

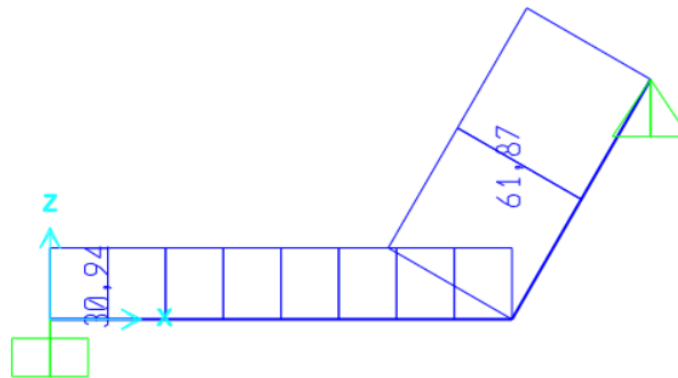
Nakon zadanih geometrijskih karakteristika i opterećenja te nakon provedbe analize slijedi prikaz unutarnjih sila i elastične linije nosača nakon opterećenja s traženim vrijednostima:



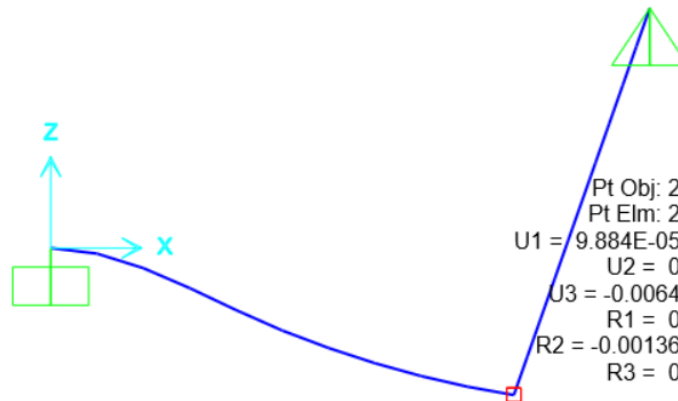
Slika 29: Dijagram momenta savijanja (primjer 3)



Slika 30: Dijagram poprečnih sila (primjer 3)



Slika 31: Dijagram uzdužnih sila (primjer 3)



Slika 32: Elastična linija (primjer 3)

U sljedećoj su tablici prikazane maksimalne vrijednosti dobivene grafoanalitičkom metodom i primjenom računalnog programa.

Tablica 3: Usporedba rezultata (primjer 3)

Primjer 3	Moment savijanja	Poprečna sila	Uzdužna sila	Progib
Grafoanalitička metoda	107,75 kNm	106,94 kN	61,27 kN	6,26mm
SAP2000	105,67 kNm	106,42 kN	61,87 kN	6,4 mm
Odstupanje	±1,93%	±0,49%	±0,97%	±2,19%

5 ZAKLJUČAK

Kako bi se uspješno provelo dimenzioniranje konstrukcije, nužno je provesti proračune prema graničnim stanjima nosivosti i graničnim stanjima uporabljivosti. Prilikom proračuna graničnih stanja uporabljivosti potrebno je odrediti deformacije (progibe) nosača i ograničiti ih na određene vrijednosti koje zadržavaju funkcionalnost konstrukcije.

U ovom završnom radu prikazana je metoda grafoanalitičkog određivanja progiba pri savijanju. U uvodnom dijelu definirana je diferencijalna jednadžba elastične linije nosača, pojmovi kao što su fiktivni nosač i fiktivno opterećenje te je objašnjen postupak proračuna deformacija primjenom grafoanalitičke metode. Zatim su grafoanalitičkim postupkom riješena tri numerička primjera čija su rješenja u vidu unutarnjih sila i deformacija uspoređena s rezultatima dobivenima primjenom programa za proračun konstrukcija *SAP2000*.

S obzirom da se većina današnjih računalnih paketa temelji na numeričkim aproksimacijskim metodama, ponajviše metodom konačnih elemenata, očekivana su određena odstupanja od grafoanalitičkog postupka. Daljnjom analizom utvrđena su minimalna odstupanja zanemarivih veličina između rezultata dviju metoda. Konkretno, odstupanja su u iznosima od 0% do 4%. Navedeni rezultati jasno potvrđuju visoku uspješnost i pouzdanost suvremenih metoda proračuna konstrukcija u inženjerskoj praksi.

Grafoanalitička metoda pruža mogućnost određivanja progiba u karakterističnim presjecima nosača bez poznavanja izraza elastične linije nosača te je pogodna za provjeru jednostavnijih izračuna elemenata konstrukcije.

POPIS LITERATURE

1. Sorić Z, Kišiček T. Betonske konstrukcije 1 Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet; 2014.
2. HRN EN 1990:2011, Eurokod: Osnove projektiranja konstrukcija, Eurocode: Basis of structural design Bruxelles: European Committee for Standardization.
3. Šimić V. Otpornost materijala I. III. izdanje Zagreb: Školska knjiga; 2007.
4. Alfrević I. Nauka o čvrstoći I Zagreb: Tehnička knjiga; 1989.
5. Dhatt G, Lefrançois E, Touzot G. Finite Element Method London: John Wiley & Sons; 2012.

POPIS SLIKA

Slika 1: Deformacija štapa pri savijanju (Izvor: [3])	2
Slika 2: Prikaz konjugiranih nosača (Izvor: [3, 4])	7
Slika 3: Skica nosača (primjer 1).....	9
Slika 4: Dijagram momenta savijanja (primjer 1).....	10
Slika 5: Fiktivni nosač i fiktivno opterećenje (primjer 1).....	10
Slika 6: Nosač presječen kroz zglob (primjer 1).....	11
Slika 7: Skica nosača (primjer 2).....	12
Slika 8: Lijevi dio nosača (primjer 2)	12
Slika 9: Fiktivni nosač (lijevo) s fiktivnim opterećenjem u obliku M dijagrama od opterećenja q (primjer 2).....	13
Slika 10: Fiktivni nosač (lijevo) s fiktivnim opterećenjem u obliku M dijagrama od djelovanja sile X (primjer 2).....	13
Slika 11: Desni dio nosača (primjer 2).....	14
Slika 12: Fiktivni nosač (desno) s fiktivnim opterećenjem u obliku M dijagrama od djelovanja sile X (primjer 2).....	14
Slika 13: Fiktivni nosač (desno) s fiktivnim opterećenjem u obliku M dijagrama od djelovanja sile F (primjer 2).....	15
Slika 14: Dijagrami unutarnjih sila (primjer 2).....	16
Slika 15: Skica nosača (primjer 3)	16
Slika 16: Prikaz plana pomaka (primjer 3)	17
Slika 17: Lijevi dio nosača (primjer 3).....	17
Slika 18: Fiktivni nosač s fiktivnim opterećenjem u obliku M dijagrama od opterećenja q (primjer 3).....	18
Slika 19: Fiktivni nosač s fiktivnim opterećenjem u obliku M dijagrama od opterećenja verikalne komponente sile S (primjer 3).....	18
Slika 20: Dijagrami unutarnjih sila (primjer 3).....	19
Slika 21: Numerički model (primjer 1).....	20
Slika 22: Elastična linija (primjer 1).....	21
Slika 23: Numerički model (primjer 2).....	21
Slika 24: Dijagram momenta savijanja (primjer 2)	22
Slika 25: Dijagram poprečnih sila (primjer 2)	22
Slika 26: Elastična linija (primjer 2).....	22

Slika 27: Numerički model s distribuiranim opterećenjem (primjer 3).....	23
Slika 28: Numerički model s temperaturnim opterećenjem (primjer 3).....	23
Slika 29: Dijagram momenta savijanja (primjer 3)	23
Slika 30: Dijagram poprečnih sila (primjer 3)	24
Slika 31: Dijagram uzdužnih sila (primjer 3).....	24
Slika 32: Elastična linija (primjer 3).....	24

POPIS TABLICA

Tablica 1: Usporedba rezultata (primjer 1)	21
Tablica 2: Usporedba rezultata (primjer 2)	22
Tablica 3: Usporedba rezultata (primjer 3)	25