

# Metoda gustoća sila

---

Čutura, Lucija

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:785966>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-14**

Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Lucija Čutura

# **METODA GUSTOĆA SILA**

ZAVRŠNI ISPIT

Zagreb, godina 2024.



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Lucija Čutura

# **METODA GUSTOĆA SILA**

ZAVRŠNI ISPIT

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl

Zagreb, godina 2024.



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Lucija Čutura

# **FORCE DENSITY METHOD**

FINAL EXAM

prof. dr. sc. Krešimir Fresl

Zagreb, 2024



OBRAZAC 3

POTVRDA O POZITIVNOJ OCJENI PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Student/ica :

Lucija Čutura (Ime i prezime)	0082065861 (IMBAG)
----------------------------------	-----------------------

zadovoljio/la je na pisanom dijelu završnog ispita pod naslovom:

Metoda gustoća sila (Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)
--

Force density method (Naslov teme završnog ispita na engleskom jeziku)
---

i predlaže se provođenje daljnjeg postupka u skladu s Pravilnikom o završnom ispitu i diplomskom radu Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta.

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu znanstvenog projekta: (upisati ako je primjenjivo)

 (Naziv projekta, šifra projekta, voditelj projekta)
---

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu stručne prakse na Fakultetu: (upisati ako je primjenjivo)

 (Ime poslodavca, datum početka i kraja stručne prakse)
--

Datum: 16. rujna 2024.

Mentor: Krešimir Fresl

Potpis mentora:

Komentor: Elizabeta Šamec



OBRAZAC 5

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja:

Zucija Čutura, 0082065861  
(Ime i prezime, JMBAG)

student/ica Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta ovim putem izjavljujem da je moj pisani dio završnog ispita pod naslovom:

Metoda gustoća sila  
(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

izvorni rezultat mojega rada te da se u izradi istoga nisam koristio/la drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

Datum: 16.09.2024

Potpis: Čutura



OBRAZAC 6

IZJAVA O ODOBRENJU ZA POHRANU I OBJAVU PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Ja :

Zucija Čutura, 99054934333  
(Ime i prezime, OIB)

ovom izjavom potvrđujem da sam autor/ica predanog pisanog dijela završnog ispita i da sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti odgovara sadržaju dovršenog i obranjenog pisanog dijela završnog ispita pod naslovom:

Metoda gustoća sila  
(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

koji je izrađen na sveučilišnom prijediplomskom studiju Građevinarstvo Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta pod mentorstvom:

prof. dr. sc. Krešimira Fresla  
(Ime i prezime mentora)

i obranjen dana:

24.09.2024  
(Datum obrane)

Suglasan/suglasna sam da pisani dio završnog ispita bude javno dostupan, te da se trajno pohrani u digitalnom repozitoriju Građevinskog fakulteta, repozitoriju Sveučilišta u Zagrebu te nacionalnom repozitoriju.

Datum:

16.09.2024

Potpis:

Zčutura

## ZAHVALE

Na prvom mjestu, želim izraziti svoju duboku zahvalnost mentoru, prof. dr. sc. Krešimiru Freslu, na strpljenju, nesebičnom dijeljenju znanja, korisnim savjetima i vodstvu kroz proces izrade ovog rada. Vaša podrška i usmjerenja bili su neprocjenjivi u svim fazama ovog istraživanja.

Veliko hvala i dr. sc. Elizabeti Šamec na pomoći i stručnim savjetima pri izradi primjera koji su bili potrebni za ovaj rad.



## SAŽETAK

Metoda gustoća sila je linearizirani postupak pronalaska oblika vlačnih konstrukcija. Primjenom metode iterativno se pronalazi oblik konstrukcije koja zadovoljava estetske i funkcionalne uvjete. Osim kod vlačnih konstrukcija, metoda je primjenjiva i na tlačne konstrukcije uz primjenu vlačno-tlačne analogije, koja polazi od pretpostavke da se zrcaljenjem ravnotežne mreže, koja je u čistom vlaku, dobiva kruta mreža u čistom tlaku. U radu su posebno opisane metoda i analogija te su primijenjene na primjeru rešetkaste ljuske na kraju rada.

**Ključne riječi:** fizikalni modeli, numerički modeli, ravnoteža čvora, metoda gustoća sila, vlačno-tlačna analogija, rešetkasta ljuska

## SUMMARY

The force density method is a linearized procedure for determining the shape of tensile structures. By applying the method iteratively, the shape of the structure that meets both aesthetic and functional requirements is found. In addition to tensile structures, the method can also be applied to compressive structures through the use of the tension-compression analogy, which assumes that by mirroring the equilibrium network in pure tension, a rigid network in pure compression is achieved. The paper specifically describes the method and the analogy, and they are applied to the example of a grid shell at the end of the paper.

**Keywords:** physical models, numerical models, node equilibrium, force density method, tension-compression analogy, grid shell

---

## SADRŽAJ

<b>ZAHVALE .....</b>	<b>i</b>
<b>SAŽETAK .....</b>	<b>ii</b>
<b>SUMMARY .....</b>	<b>iii</b>
<b>SADRŽAJ .....</b>	<b>iv</b>
<b>1. UVOD .....</b>	<b>1</b>
<b>2. Nalaženje oblika.....</b>	<b>2</b>
2.1. Fizikalni i numerički modeli .....	2
2.2. Ravnoteža slobodnog čvora.....	4
<b>3. Metoda gustoća sila .....</b>	<b>7</b>
3.1. Opis metode .....	7
<b>4. Vlačno-tlačna analogija .....</b>	<b>9</b>
4.1. Temelji analogije.....	9
4.2. Primjena analogije .....	11
<b>5. Primjeri.....</b>	<b>15</b>
5.1. Primjer 1.....	15
5.2. Primjer 2.....	18
5.3. Primjer 3.....	21
5.4. Primjer 4.....	22
<b>6. ZAKLJUČAK .....</b>	<b>25</b>
<b>7. POPIS LITERATURE .....</b>	<b>26</b>
<b>8. POPIS SLIKA .....</b>	<b>28</b>

## 1. UVOD

Tema ovog završnog rada je primjena metode gustoća sila koju su razvili Hans-Jörg Schek, Klaus Linkwitz i suradnici. Metoda se koristi za pronalaženje oblika vlačnih konstrukcija ali svoju primjenu pronalazi i u vlačno-tlačnoj analogiji. Analogija polazi od pretpostavke da se zrcaljenjem oblika ravnotežne mreže u čistom vlaku dobiva kruta mreža elemenata u čistom tlaku. Ta analogija uvelike olakšava proces projektiranja i matematičke analize. U radu je prikazan postupak traženja oblika tlačne konstrukcije (štapne ili ljuskaste) na temelju analogije proračuna vlačnih konstrukcija od užadi. Na kraju rada je na primjerima prikazana i primjena metode.

## 2. NALAŽENJE OBLIKA

Za razliku od tradicionalnih betonskih, čeličnih i konstrukcija od opeke kod kojih su oblik i okvirne dimenzije unaprijed poznate, to nije slučaj kod konstrukcija od užadi. Oblikovanje takvih konstrukcija ili prema nazivu u stranoj literaturi "*form finding*" se sastoji od nekoliko faza.

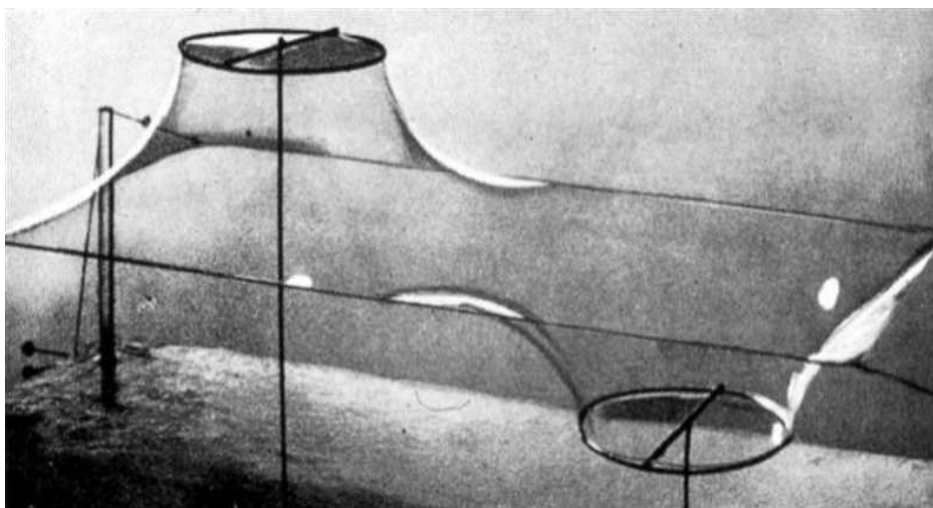
Prva faza je nalaženje oblika i ona podrazumijeva određivanje početne ravnotežne konfiguracije. Konfiguracija obuhvaća geometrijski oblik mreže i razdiobu prednaponskih sila u užadi. Druga faza oblikovanja je geometrijski nelinearni statički proračun, a posljednja faza je krojenje kabela.

U prošlosti je jedini način pronalaženja oblika bio pomoću fizičkih modela, a danas su u upotrebi različite metode i računalni modeli.

### 2.1. Fizički i numerički modeli

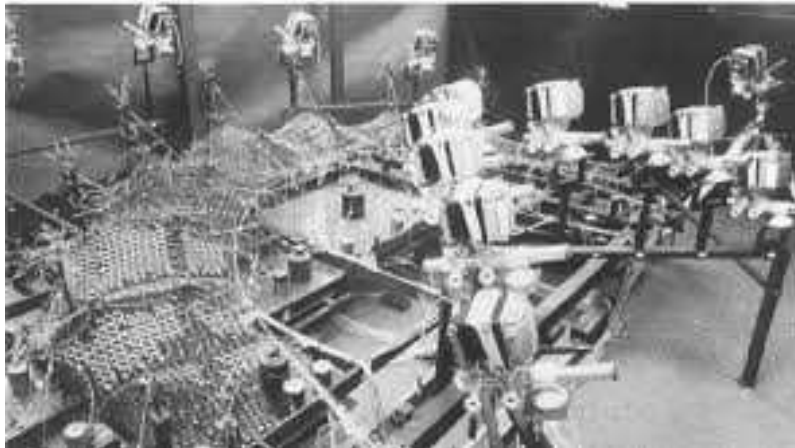
#### Fizički modeli

Kao što je već spomenuto, u prošlosti je jedini način pronalaženja oblika bio pomoću fizičkih modela. U tome je veliku ulogu imao Frei Otto koji se za svoje projekte koristio upravo takvim modelima. Prvotno su korištene opne od sapunice koje su bile primjer stabilne minimalne plohe jer je opna između zadanih rubnih uvjeta zauzimala ravnotežni položaj.



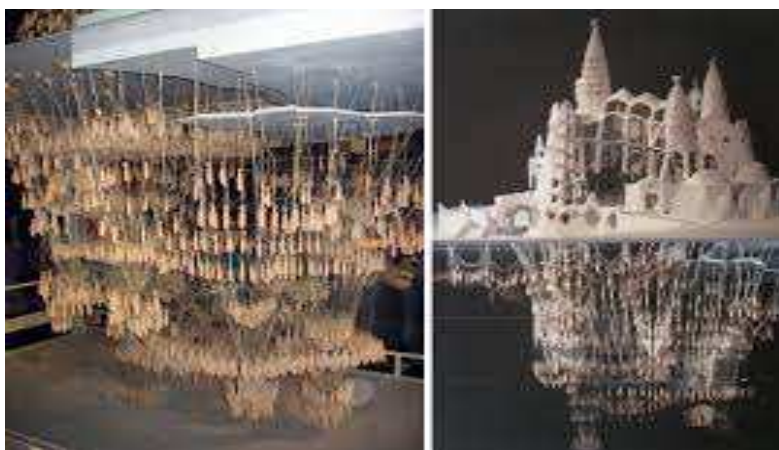
Slika 1. Model od sapunice (Izvor: [<https://tinyurl.com/yc37ar8z>])

Kasnije je, po uzoru na model od sapunice, Otto razvio model od tankih žica i malih spajalica kako bi određivanje koordinata točaka plohe bilo što preciznije.



Slika 2. Frei Ottov fizikalni model od žica i spajalica (Izvor: [<https://tinyurl.com/2funxn7v>])

Nešto poznatiji je rad arhitekta Antonija Gaudija, kada su u pitanju tlačne konstrukcije. On je izrađivao modele uz pomoć užadi i vreća pijeska kako bi odredio optimalne oblike lukova i svodova. Opterećenja koja je postavljao na užadi odgovarala su budućim stvarnim opterećenjima na konstrukciju. Najpoznatija građevina koju je projektirao uz pomoć modela je kriptu Colònia Güell. Gaudi se koristio modelima kako bi nadopunio statičke i grafičko-statičke proračune za određivanje oblika tlačnih konstrukcija.



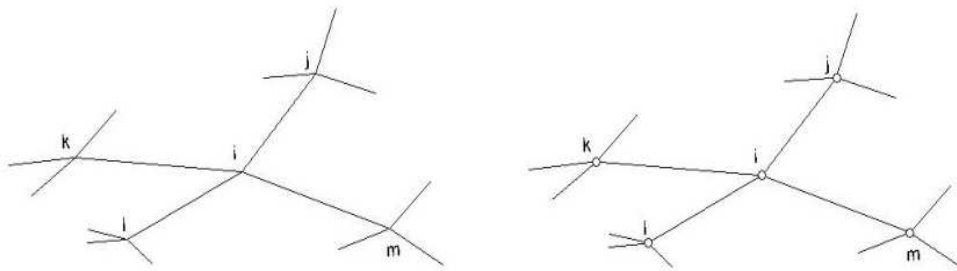
Slika 3. Fizikalni model za kriptu Colònia Güell, Barcelona (Izvor: [<https://tinyurl.com/mr2wya3y>])

Glavna mana fizikalnih modela je gotovo nemoguće točno i precizno određivanje koordinata točaka plohe. Posljedice toga su greške u određivanju duljine kabela, što uzrokuje promjenu veličine prednaponske sile u kabelu, što dalje vodi ka neravnoteži same mreže. Zbog toga je potrebna izrada numeričkih modela koja slijedi nakon izrade fizikalnih modela.

## Numerički modeli

Kako bi se unaprijedio postupak nalaženja oblika i određivanja prednaponskih sila u kabelima, javila se potreba za razvojem računalnih programa. Prvi takav program je napravljen za potrebe proračuna Olimpijskog stadiona u Münchenu 1972. godine.

Za oblikovanje numeričkog modela pretpostavlja se da su kabeli potpuno savitljivi i bez težine. Mreža se promatra kao sustav zglobno spojenih štapnih elemenata. Štapovi su dijelovi užeta između dva čvora, a čvorovi sjecišta dva užeta. Još jedna pretpostavka je da su štapovi centrično spojeni u čvorove što u stvarnosti nije tako zbog debljine kabela (slika 4.).



Slika 4. Shema dijela mreže (Izvor: [2])

### 2.2. Ravnoteža slobodnog čvora

Mreža se, kako je već navedeno, promatra kao sustav štapova i čvorova. Čvorove možemo podijeliti na slobodne unutarnje i ležajne čvorove u kojima su kabeli spojeni s krutim rubnim ili unutarnjim linijskim i točkastim osloncima. Jedan od postupaka nalaženja oblika konstrukcija od užadi je postavljanje jednadžbi ravnoteže čvorova.

S obzirom na temu ovog rada, postupak traženja oblika tlačne konstrukcije polazi od traženja oblika slobodno oblikovane mreže kabela koji su međusobno spojeni u čvorovima i oslonjeni na nepomične krajeve. Napetim kabelima se prenose prednaponske sile, vlastita težina i ostala djelovanja na konstrukciju, a kako su čvorovi u konačnici nepomične odnosno fiksne točke u njima se postavljaju jednadžbe ravnoteže sila u užadi, to jest, štapovima. Tako za svaki slobodni čvor  $i$  se mogu napisati tri jednadžbe ravnoteže čvora projicirane na tri koordinatne osi:

$$\sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \vec{e}_{i,j} \cdot \vec{i} = 0 \quad , \quad \sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \vec{e}_{i,j} \cdot \vec{j} = 0 \quad , \quad \sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \vec{e}_{i,j} \cdot \vec{k} - P = 0 \quad .$$

Skalar  $S_{\{i,j\}}$  predstavlja vrijednost sile u štapa  $\{i,j\}$ , a vektor  $e_{\{i,j\}}$  jedinični vektor na osi štapa  $\{i,j\}$ , orijentiran od čvora  $i$  prema čvoru  $j$ :

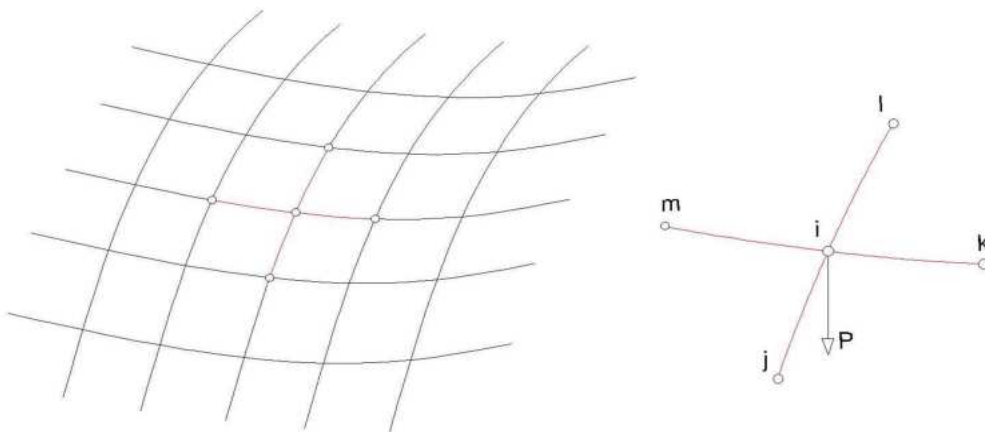
$$\vec{e}_{i,j} = \frac{x_j - x_i}{l_{\{i,j\}}} \vec{i} + \frac{y_j - y_i}{l_{\{i,j\}}} \vec{j} + \frac{z_j - z_i}{l_{\{i,j\}}} \vec{k},$$

gdje je  $l_{\{i,j\}}$  duljina štapa  $\{i,j\}$ :

$$l_{\{i,j\}} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}.$$

Sila  $P$  (slika 5.), koja je uzeta u obzir u jednadžbi ravnoteže čvora po vertikalnoj osi, je težina dijela konstrukcije koja pripada promatranom čvoru. Vrijednost te sile je broj proporcionalan zbroju polovina duljina kabela koji ulaze u čvor (druga polovina odsječka opterećuje čvor na drugom kraju kabela). Dakle, težina koja opterećuje pojedini čvor je jednaka zbroju polovica težina priključenih štapova:

$$P = \sum \frac{G_i}{2} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \vec{g} \cdot A \cdot l_{i,j}.$$



Slika 5. Dio mreže kabela i izdvojeni čvor s pripadajućim opterećenjem



Daljnijim raspisivanjem jednadžbi ravnoteže, odnosno raspisivanjem jediničnog vektora i duljine štapa u jednadžbama ravnoteže, dobivamo sustav jednadžbi koji je nelinearan:

$$\sum_{j \in Ni} S_{\{i,j\}} \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0,$$

$$\sum_{j \in Ni} S_{\{i,j\}} \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0,$$

$$\sum_{j \in Ni} S_{\{i,j\}} \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} - P = 0.$$

Iz tog razloga nije moguće rješenje dobiti izravno već se iterativnim postupkom približava konačnom rješenju uz određena ograničenja i pretpostavke. Jedna od pretpostavki s kojom sustav postaje rješiv je ta da se pretpostavi jednaka sila prednapona u svakom elementu mreže. Ukoliko taj uvjet ne zadovoljava estetske ili funkcionalne uvjete mogu se uvesti i neke druge pretpostavke kao na primjer:

1. Različite, ali poznate sile prednaprezanja
2. Unutarnja geometrija mreže, odnosno udaljenosti među čvorovima ili smjer kabela
3. Veličina projekcije mreže na horizontalnu ravninu xy
4. Odnos sile i duljine pojedinih elemenata, odnosno gustoća sila

### 3. METODA GUSTOĆA SILA

#### 3.1. Opis metode

Početak sedamdesetih godina prošlog stoljeća Hans-Jörg Schek, Klaus Linkwitz i njihovi suradnici su razvili metodu gustoća sile u kojoj su nelinearni problem nalaženja oblika linearizirali. Jednadžba je linearizirana tako što je omjer sile  $S_{\{i,j\}}$  u štapu  $\{i,j\}$  i duljine štapa  $l_{\{i,j\}}$  zamijenjen oznakom  $q_{\{i,j\}}$  koja označava gustoću sile (koeficijent sile):

$$q_{\{i,j\}} = \frac{S_{\{i,j\}}}{l_{\{i,j\}}}.$$

Primjenom novih oznaka sustav jednadžbi prelazi u:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in Ni} q_{\{i,j\}}(x_j - x_i) &= 0, \\ \sum_{j \in Ni} q_{\{i,j\}}(y_j - y_i) &= 0, \\ \sum_{j \in Ni} q_{\{i,j\}}(z_j - z_i) - P &= 0 \end{aligned}$$

Gustoća sile se prije proračuna zadaje jednaka za sve elemente mreže kako bi se pojednostavio postupak. Osim toga, potrebno je poznavati topologiju mreže (povezanost čvorova) i odrediti koji su to ležajni čvorovi te zadati njihove položaje.

Kao rješenje jednadžbi se dobiju koordinate točaka ravnotežne mreže, s tim da nikakve početne koordinate nisu potrebne. Pomoću dobivenih koordinata se mogu izračunati duljine štapova, a sile u štapovima se izračunaju uz pomoć formule za gustoću sile.

Iteracijom se uz pomoć prethodno dobivenih rezultata približava modelu koji zadovoljava estetske i funkcionalne uvjete.



Slika 6. Višenamjenska dvorana u Mannheimu izgrađena 1974. godine (Izvor: [https://tinyurl.com/5258zhc4])

Metoda gustoća sila pokazala se odličnom za sastavljanje i rješavanje jednadžbi ravnoteže prednapetih kabela i membrana. Primijenjena je na mnoge prenapete krovove, kao i na krovove izgrađene prema principu drvenih ljuski. Osim toga, ova metoda u ranim fazama projekta omogućuje dosta prostora za pronalazak alternativa i izvedivih rješenja.



Slika 7. Solemar toplice u Bad Dürrenheimu, 1987 (Izvor: [https://tinyurl.com/9ybreppz])

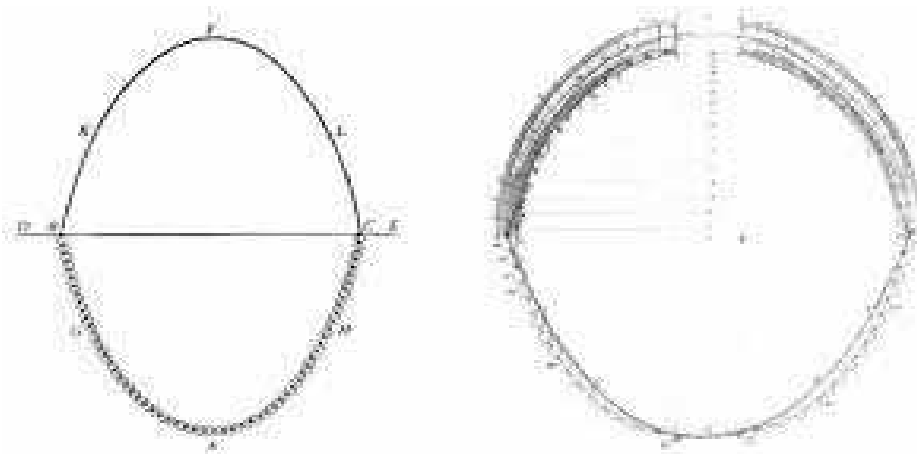
## 4. VLAČNO-TLAČNA ANALOGIJA

### 4.1. Temelji analogije

“Kao što visi gipko uže, tako će, samo okrenuto, stajati i čvrsti luk.” rečenica je kojom je Robert Hook postavio temelj vlačno-tlačne analogije u dodatku svog djela “Description of Helioscopes”.

Analogijom se koristimo kako bismo pronašli optimalne oblike lukova, svodova i ljuski. Takvi elementi mogu prenositi samo uzdužne tlačne sile, s tim da sile koje uzrokuju savijanje trebaju biti svedene na minimum ili u idealnom se slučaju potpuno poništiti. Ideja analogije je: obrnuti oblik lančanice, koji je po definiciji pod čistim vlačnim naprezanjem bez savijanja, kako bi se dobio ekvivalentni luk koji je pod čistim tlakom.

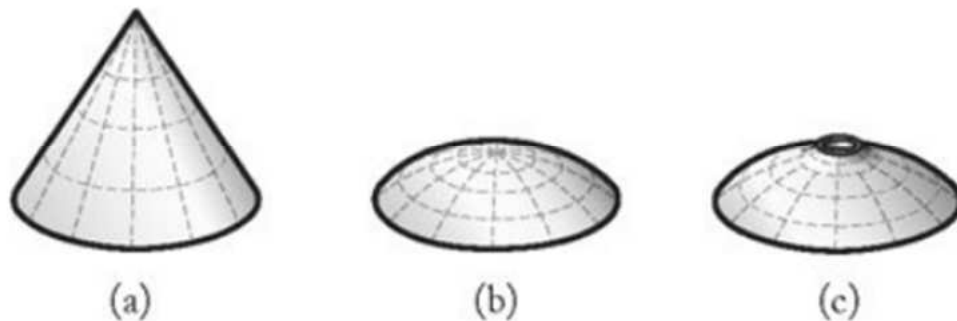
Optimalni oblik ovisi o opterećenju i njegovom rasporedu. Za lanac koji je opterećen samo vlastitom težinom raspoređenom jednoliko po jedinici duljine, optimalni oblik luka je lančanica, a ako je opterećenje jednoliko horizontalno raspoređeno, optimalni oblik luka je parabola. Također, na oblik utječe i potrebna visina luka.



Slika 8. Skica Hookeove analogije i Polenijeva analiza napuknute kupole Svetog Petra u Rimu  
(Izvor: [<https://tinyurl.com/4mvarwuz>])

Osim na lukove, analogija je primjenjiva i na trodimenzionalne elemente, konkretno ljuske. Kako su takve strukture kompleksnije, način prijenosa opterećenja je drugačiji, pa se mogu pronaći različiti mogući optimalni oblici. Po uzoru na lukove, presijecanjem više lančanica može se konstruirati mreža koja je samo vlačno opterećena. Ako elemente te mreže promatramo kao štapove međusobno spojene čvorovima, njezinim zrcaljenjem ćemo dobiti tlačno opterećenu rešetkastu konstrukciju.

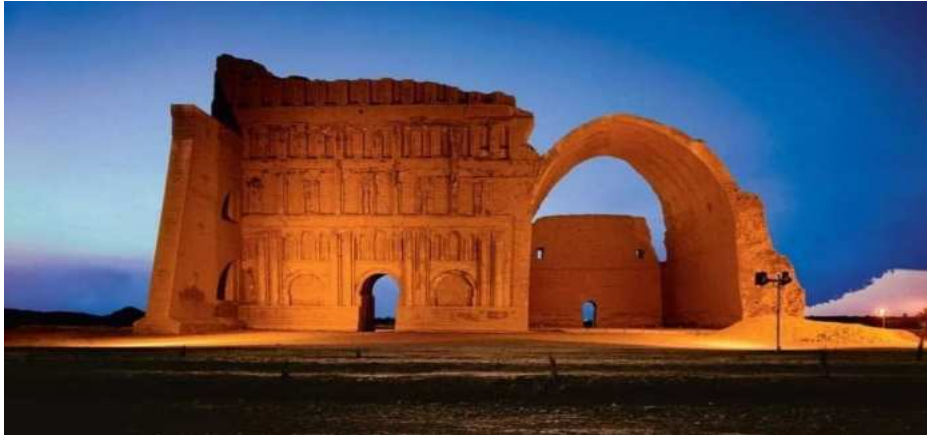
Prvo treba provjeriti uvjet težine dijelova vlačne konstrukcije koji spadaju na pojedini čvor, a zatim i prolaze li vlačni štapovi, koji u stvari predstavljaju i pojednostavljene vlačne linije, jezgrom poprečnog presjeka svoda ili luka. Veća preciznost prilikom odabira oblika može se osigurati povećanjem broja čvorova, čime se smanjuju duljine vlačnih štapova.



Slika 9. Primjeri ljuskastih struktura kružnog tlocrta koje mogu djelovati pod čistim tlakom (a) stožasta ljuska; (b) plitka kuglasta kupola; i (c) sferična kupola s okrenutim okulusom u sredini  
(Izvor: [1])

## 4.2. Primjena analogije

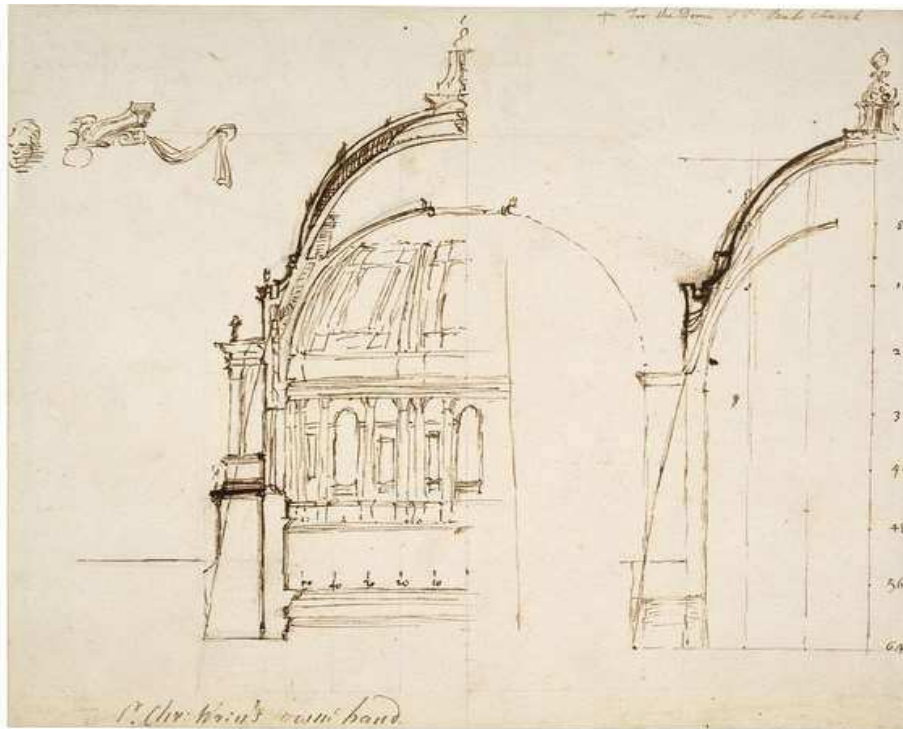
Iako se tek nakon Hookea primjena analogije počela više koristiti i istraživati, oblici okrenute lančanice su bili i prije primjenjivani. Tome svjedoči jedan od ostataka lukova drevne palače u Ktezifontu u Mezopotamiji.



Slika 10. Palača u Ktezifontu (Izvor: [<https://tinyurl.com/mwjcrnm2>])

Prva Hookeova primjena analogije je bila u suradnji s inženjerom i znanstvenikom Christopherom Wrenom. Znanjem o lančanici i analogiji koristili su se prilikom dizajniranja kupole na katedrali Svetoga Pavla u Londonu.

Na priloženoj slici (Slika 11.) je skica kupole promjera 33 metra i njezin presjek zajedno sa zrcaljenom lančanicom. Pomoću te skice i ostalih modela Hook i Wren su ustanovili optimalni oblik kupole koji bi odlično podnosio tlačna naprezanja.



Slika 11. Wrenova skica lančanice i kupole na katedrali sv. Pavla u Londonu (Izvor: [https://tinyurl.com/d5twt6dx])

Nešto poznatija primjena je bila na procjeni sigurnosti sto godina staroj kupoli Svetog Petra na katedrali u Rimu na kojoj su se pojavile radijalne pukotine. Prvotni dizajn kupole trebao je biti čvrsta, polu-kuglasta struktura kakvu je zamislio arhitekt Antonius di San Gallo. Tu ideju je izmijenio Michelangelo koji je odlučio da se težina mora smanjiti te je predložio kupolu s dvostrukom školjkom. Inspiraciju je pronašao u radu Filippa Brunelleschija na kupoli katedrale u Firenci.

Giambattista della Porta i Domenico Fontana su nakon Michelangelove smrti dodatno modificirali dizajn povećanjem visine kupole, što je pomoglo u smanjenju bočnog potiska. Također je uveo željezne lance kako bi upravljao zateznim naprezanjima u donjem dijelu kupole.



Slika 12. Kupola na katedrali Svetog Petra u Rimu (Izvor: [<https://tinyurl.com/3pwavuwe>])

Zbog pojava pukotina na kupoli, krajem 1740.-ih godina papa je dao postaviti komisiju kako bi se odredili uzroci pukotina i najbolji način za njihovu sanaciju. Zatraženo je mišljenje triju matematičara, konkretno, Thomasa Le Seura, Francoisa Jacquiera i Ruđera Boškovića. Oni su, za tadašnje vrijeme, na revolucionaran način pristupili rješavanju problema. Teorijskim putem su tražili objašnjenje pojava pukotina i statičkim proračunom došli do mjera sanacije. "Mišljenje" je dano u obliku ekspertize koja se sastojala od nekoliko dijelova. U ekspertizi su objašnjeni mogući uzroci pojava pukotina, od kojih su neki i odbačeni, te su statičkim proračunom određeni pomaci kupole. To je ujedno bila prva primjena principa virtualnoga rada u graditeljskoj praksi.

Osim spomenutih inženjera u procjeni sigurnosti je sudjelovao matematičar i inženjer Giovanni Poleni koji se za te potrebe koristio statičkom analizom i Hookeovom lančanicom, ali je inovativno upotrijebio različite težine kako bi predstavio različite dijelove (voussoire) u svom modelu.

Po uzoru na Hookea, Poleni je razmatrao samo dvodimenzionalni luk, opravdavši ovu aproksimaciju tvrdnjom da se kupola može promatrati kao niz radialnih lukova u obliku polumjeseca koji djeluju neovisno jedan o drugome. Poleni se koristio modelom kako bi odredio idealan oblik kamenog luka, a budući da je os lančanice "ležala" unutar debljine luka, zaključio je da je svaki par suprotnih lukova stabilan, pa tako i cijela kupola. Preporučio je da se dodaju dodatni vezovi koji bi preuzeli tangencijalna naprezanja.



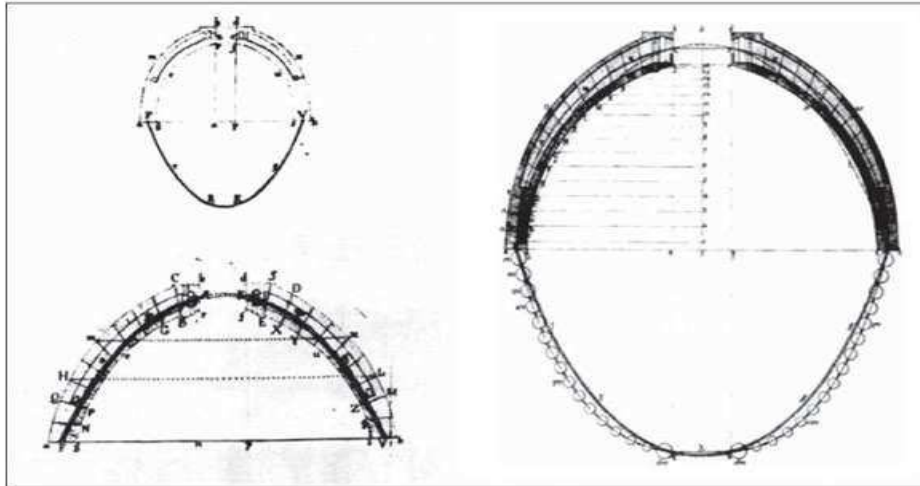


Figure 5 Poleni's study of St Peter's Cathedral, 1747

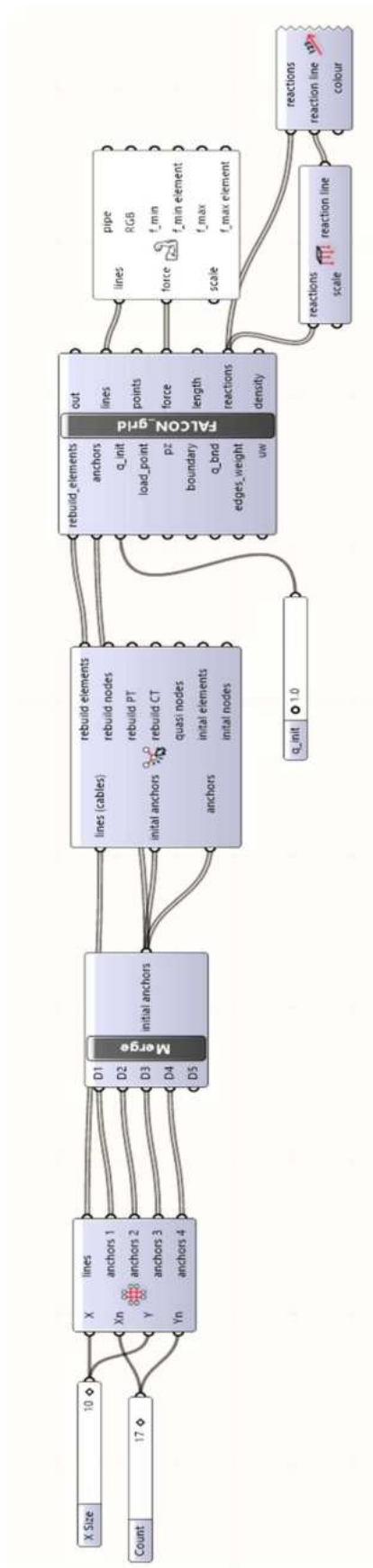
Slika 13. Polenijeva analiza kupole na katedrali Svetog Petra (Izvor: [https://scielo.org.za/img/revistas/jsaice/v55n3/11f05.jpg ])

## 5. PRIMJERI

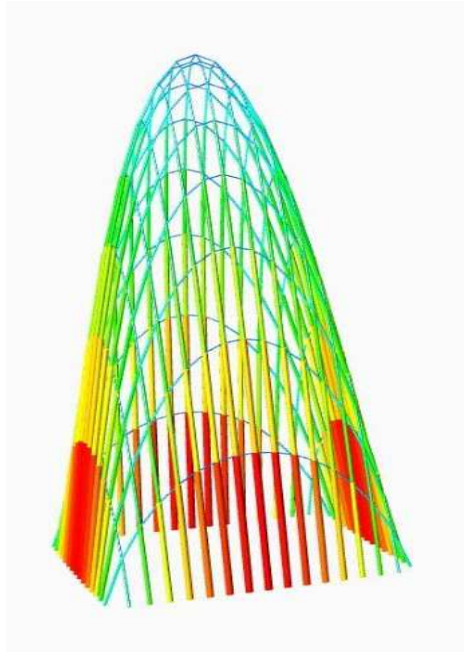
Postupak pronalaženja oblika provodimo u programskom paketu FALCON (Form-finding Algorithm for Linear Constrained Optimisation of Networks) unutar kojega je integriran dodatak (eng. plug-in) *Grasshopper* u kojem se zadaju sve željene funkcije. Postupak započinje zadavanjem geometrije pomoću alata iz odjeljka "*Geometry*". Pomoću njih se zadaje broj kabela u  $x$  i  $y$  smjeru te tlocrtna površina koju mreža zauzima. U svim primjerima je korištena mreža bez rubnog kabela, dakle, kabeli su pričvršćeni u "tlo". Sljedeći korak je krojenje mreže. Korištenjem alata iz odjeljka "*Network*" generira se mreža. Funkcija "*Interactive net*" vraća korisniku novo stvorene elemente, čvorove, povezivost i topologiju čvorova, ali i izvorno generiranu mrežu (elemente i čvorove) u  $xy$  ravnini. Za osnovno pronalaženje oblika koristimo komponentu FALCON (jedan korak metode gustoća sila), prvu od četiri komponente odjeljka *Solver*. Funkcija koja je korištena je predviđena za pronalazak oblika tlačnih konstrukcija i kao ulazne podatke koji su joj potrebni koristi listu linija koje tvore mrežu i listu nepomičnih čvorova postavljenih na željenim pozicijama. Posljednji korak je vizualizacija dobivenih oblika i rezultata pomoću funkcija iz odjeljka "*Visualisation*". Pomoću tih funkcija moguće je prikazati oblik konstrukcije, odnosno mreže, smjerove i iznose reakcija, vrijednosti duljina elemenata itd. U primjerima koji slijede su analizirane uočene promijene na četiri modela. Nakon postavljenih željenih uvjeta u *Grasshopper*-u, konstrukcija se prikazuje u programu *Rhinoceros3D*.

### 5.1. Primjer 1

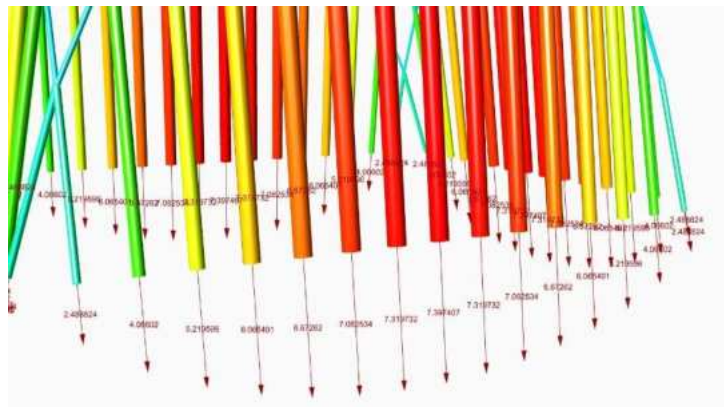
U prvom primjeru je prikazan postupak pronalaženja oblika jednostavne tlačne mrežaste ljuske (Slika 14.). Odabrana je mreža s nepomičnim rubovima (eng. Net with fixed edges) i bez rubnog kabela, a tlocrtna površina i broj polja na koje je podjeljena može se regulirati klizačem postavljenim s lijeve strane funkcije. S obzirom da se radi o nalaženju oblika tlačne konstrukcije, svim rubnim ležajevima postavljena je koordinata  $z=0$ . Mreža je dobivena korištenjem funkcije "*Interactive net*" koja rastavlja "običnu" mrežu na elemente i čvorove. Početna gustoća sila je u funkciji FALCON je zadana jednaka za sve elemente i iznosi  $q=1$ . Izgled konstrukcije s tom gustoćom sila je prikazan na slici 15. Vizualizacija rezultata u vidu izgleda mreže je izvršena uz pomoć funkcije "*Force display*", a iznosi i smjerovi reakcija su prikazani uz pomoć funkcija "*Reaction value*" i "*Reaction vector*".



Slika 14. Pronalaženje oblika rešetkaste ljuske temeljeno na vlačno-tlačnoj analogiji

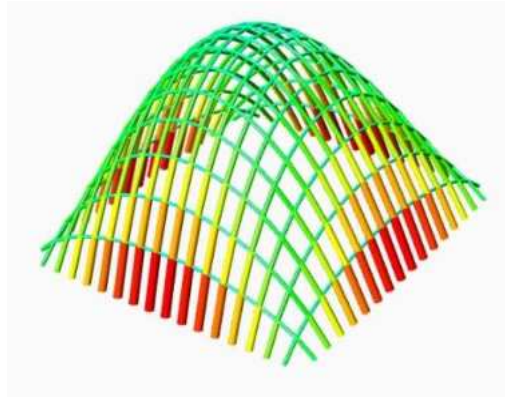


Slika 15. Izgled rešetkaste ljuske kada je gustoća sila  $q=1$ .

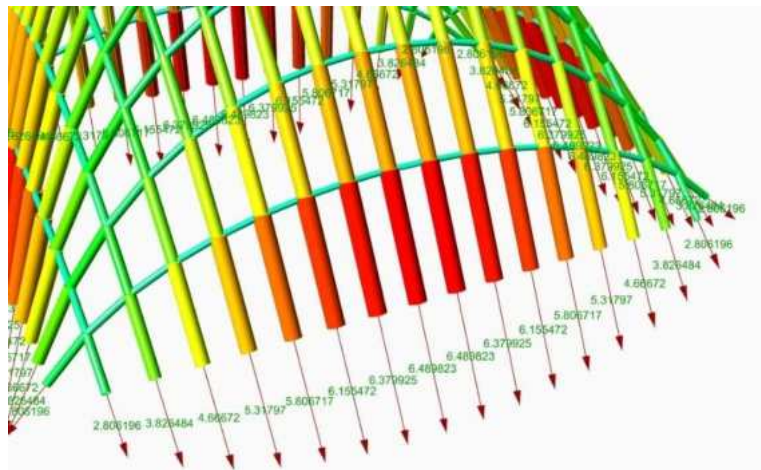


Slika 16. Iznosi i smjerovi reakcija kada je gustoća sila  $q=1$

Na idućim slikama (Slika 17. i Slika 18.) prikazana je tlačna mrežasta konstrukcija iste geometrije kao i na prethodnim slikama (Slika 15. i Slika 16.), ali s promijenjenom vrijednosti gustoće sila. Gustoća sila je povećana na  $q=3,5$ . Uspoređivanjem slika može se zaključiti da vrijednost gustoća sila utječe na geometriju i izgled, ali i na iznose reakcija.



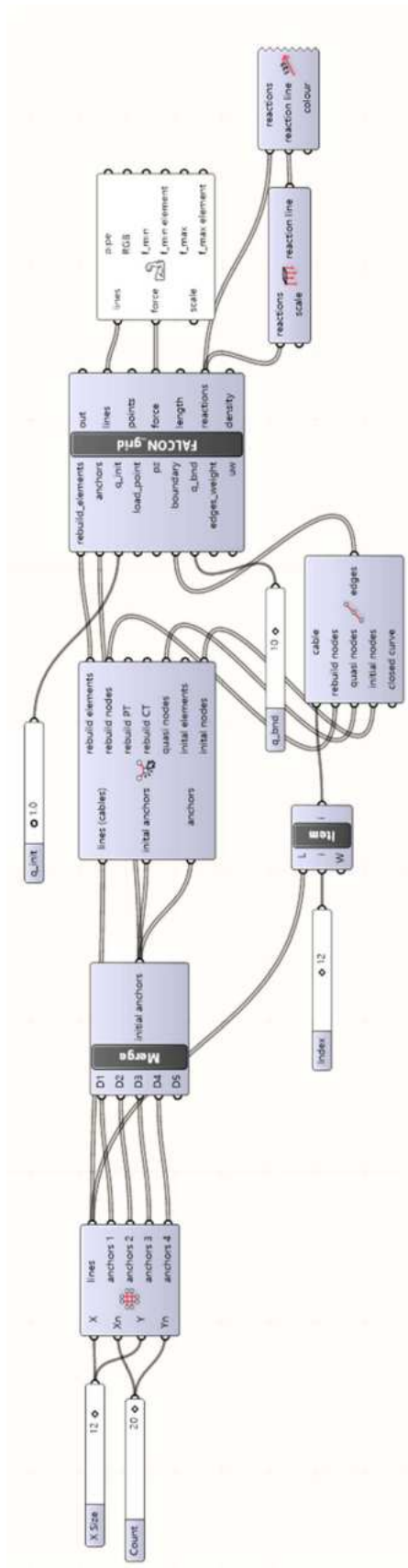
Slika 17. Izgled rešetkaste ljuske kada je povećana gustoća sila na  $q=3,5$



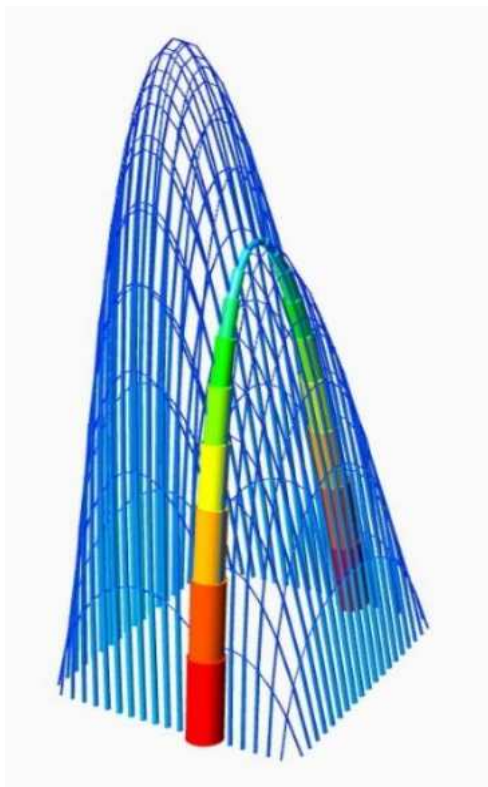
Slika 18. Iznosi i smjerovi reakcija kada je gustoća sila  $q=3,5$

## 5.2. Primjer 2

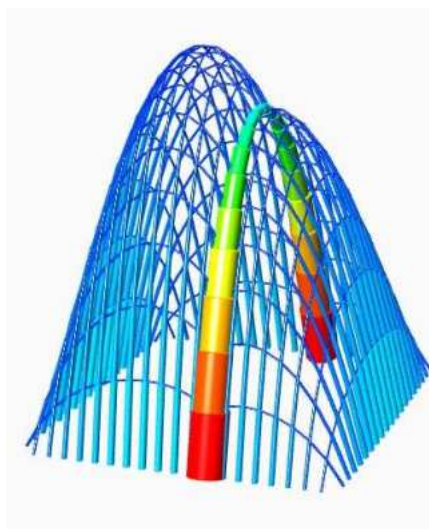
U idućem primjeru (Slika 19.) je korištena slična geometrija mreže kao i u prethodnom primjeru. Povećana je tlocrtna površina i broj polja na koje je podijeljena. Osim toga, na proizvoljnom kabelu, koji se može odabrati pomoću klizača, je posebno povećana gustoća sile u odnosu na ostale kabele. Tako je kabelom veće gustoće konstrukcija vizualno podijeljena na dva dijela, odnosno, odabrani kabel se nalazi između dva brijega. Uspoređivanjem slika 20. i 21. uočljivo je da vrijednost gustoća sila utječe na izgled konstrukcije.



Slika 19. Pronalaženje oblika rešetkaste ljuske kod koje jedan kabel ima veću gustoću u odnosu na druge kabele



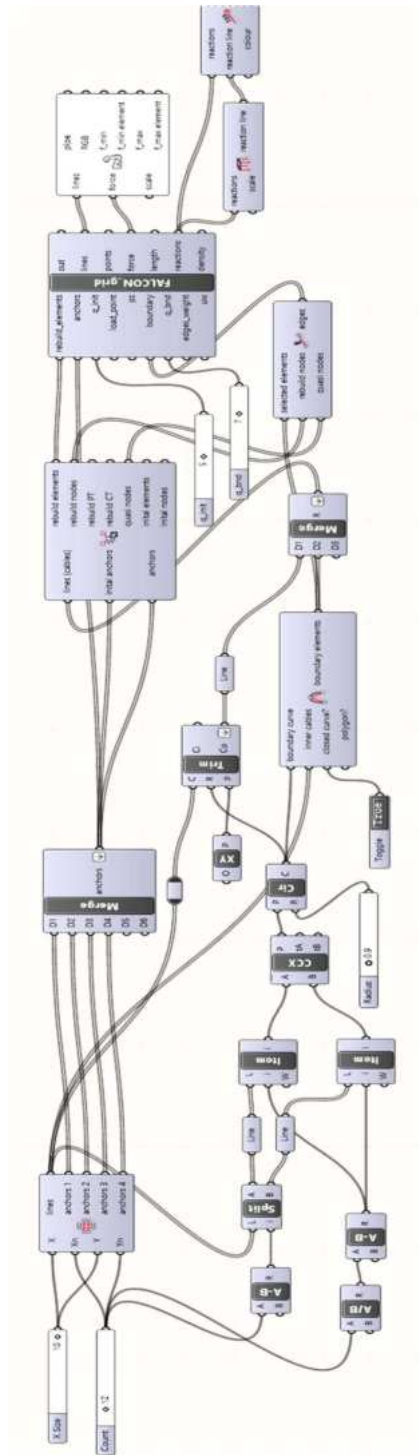
Slika 20. Izgled rešetkaste ljuske kada je gustoća sila u jednom od kabela 10, a u ostalima 1



Slika 21. Izgled rešetkaste ljuske kada su povećane gustoće sila

### 5.3. Primjer 3

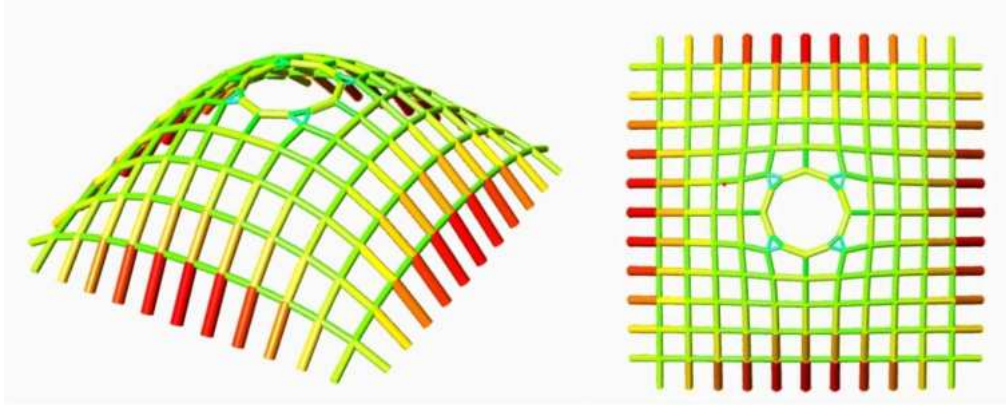
U primjeru 3 (Slika 22.) dodana je rupa u središtu mreže. U sjecištu središnjih kabela je dodana kružnica određenog polumjera. Kako bi se kabeli mogli pričvrstiti, dodan je i rubni kabel na mjestu kružnice koji ima veću gustoću sila u odnosu na ostale kabele.



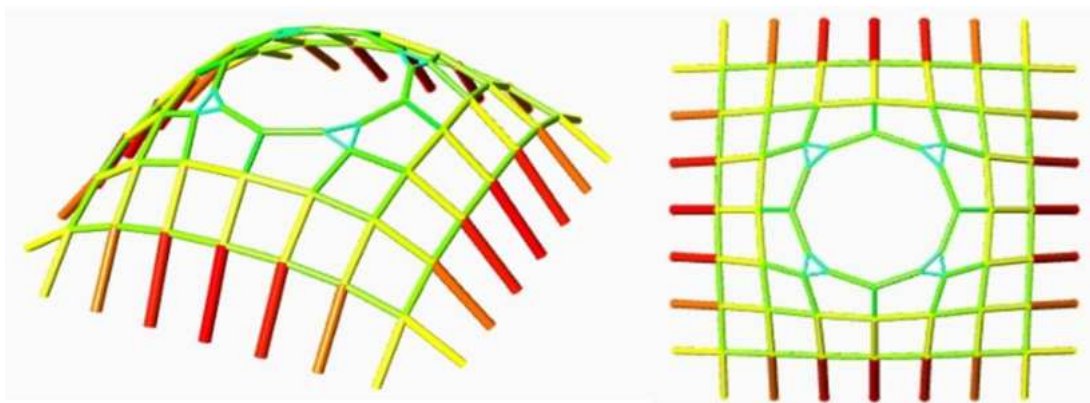
Slika 22. Pronalaženje oblika rešetkaste ljuške s rupom u središtu i rubnim kabelom za kojeg su pričvršćeni ostali kabele



Na priloženim slikama (Slika 23. i Slika 24.) prikazane su razlike između konstrukcija koje su nastale zbog promjene broja kabela u konstrukciji i promjene polumjera rupe pa je tako došlo i do promjene oblika konstrukcije. Na slici 23. se primjećuje puno glađi oblik konstrukcije zbog gustoće kabela.



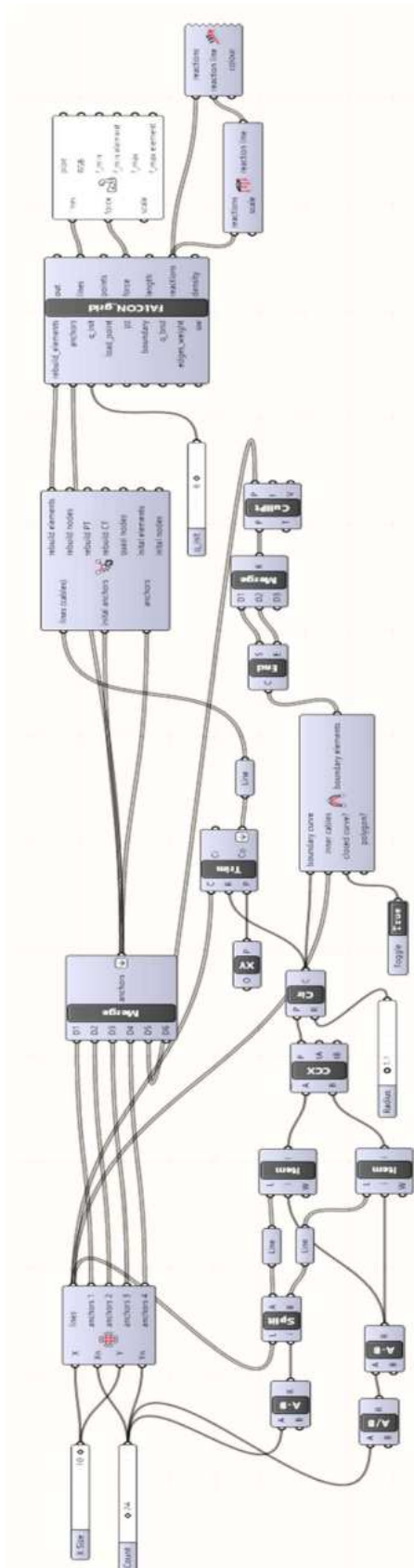
Slika 23. Rešetkasta ljuska s rupom u središtu



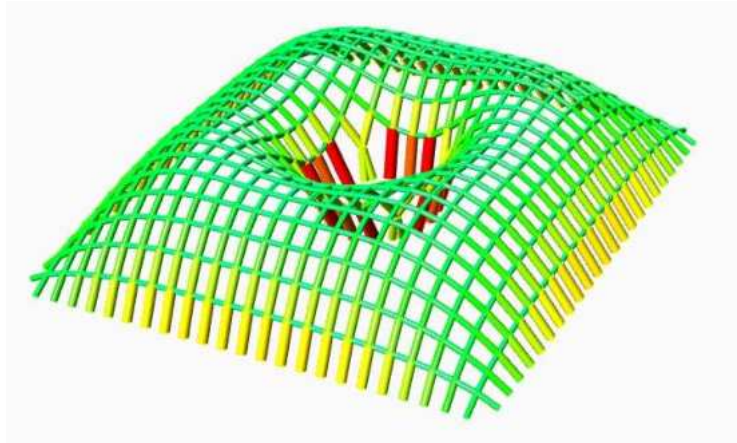
Slika 24. Rešetkasta ljuska s rupom u središtu, povećanog polumjera rupe te smanjenim brojem kabela

#### 5.4. Primjer 4

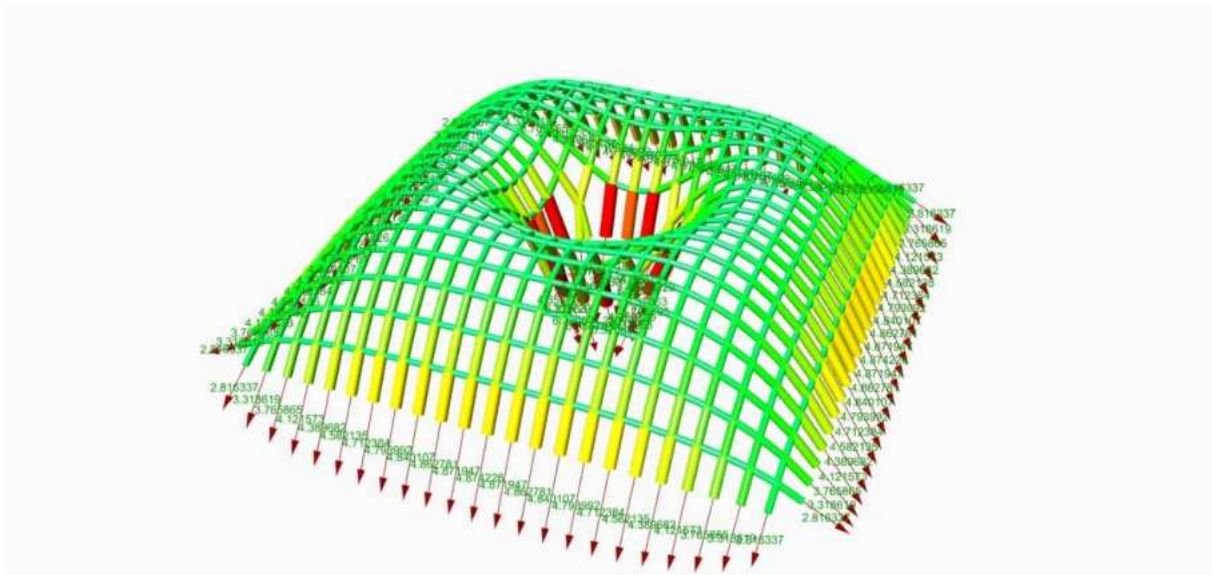
U posljednjem primjeru je rupa iz središta konstrukcije premještena u xy ravninu te su kabeli pričvršćeni u "tlo" (a ne za rubni kabel). Time je dobiven drugačiji izgled konstrukcije i promijenjen put prenošenja sila, odnosno, više su opterećeni središnji elementi mreže koji su pričvršćeni u rupu.



Slika 25. Pronalaženje oblika rešetkaste ljuške s rupom u središtu u xy ravnini koja nema rubni kabel već su kabeli pričvršćeni za "tlo"



Slika 26. Rešetkasta ljuska s rupom u središtu u xy ravnini



Slika 27. Iznosi i smjerovi reakcija

## 6. ZAKLJUČAK

U radu su opisani načini nalaženja oblika vlačnih konstrukcija nekada i danas. Opisana je metoda gustoća sila kao jedan od načina koji se danas koristi. Na temelju modela i proračuna poznatih građevina, kao što su Gaudijeva kriptna Colònia Güell i kupola Svetog Petra u Rimu, dokazana je moguća primjena metode i na tlačne konstrukcije na temelju vlačno-tlačne analogije. Kod tlačnih konstrukcija je, za razliku od vlačnih, bitno uzeti u obzir težinu kabela u jednadžbama ravnoteža čvorova. Daljnjim rješavanjem jednadžbi, uz pretpostavku jednake gustoće sila u svim elementima, dolazi se do prvog oblika konstrukcije. Iteracijom se dolazi do estetski i funkcionalno zadovoljavajućeg oblika.

U radu su predloženi primjeri nalaženja oblika tlačnih mrežastih konstrukcija uz pomoć metode i analogije, pri čemu je korišten programski paket FALCON. Uz pomoć primjera je zaključeno da iznos gustoće sila utječe na oblik konstrukcije i na vrijednosti reakcija. Nadalje, u programskom paketu je moguće koristiti razne geometrijske oblike mreža, lako zadati željene karakteristike i odrediti vrste pričvršćenja mreže.

Ono što uvelike olakšava i čini cijelu priču zanimljivom je upravo vlačno-tlačna analogija na čijem su temelju izgrađene mnogobrojne, svjetski poznate građevine. Analogija se koristi za pronalazak optimalnih oblika lukova, svodova i ljuski, a oblici ovise o opterećenju.

## 7. POPIS LITERATURE

- [1] Adriaenssens, S., Block, Ph., Veenendaal, D. i Williams, C. (eds.): *Shell Structures for Architecture: Form Finding and Optimization*, Routledge, London, 2014,
- [2] Fresl, K.: Građevna statika 2., bilješke s predavanja; *Prednapete gipke konstrukcije od užadi kao uvod u geometrijsku nelinearnost*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb 2017, str. 145-187, dostupno na <https://master.grad.hr/nastava/gS/gS2/gS2.pdf> (pristupljeno: 20.8.2024)
- [3] Vukadin, J., Vidović, D., Vuco, J. (2021): *Ocjena sličnosti ravnotežnih oblika vlačnih konstrukcija – Ravnotežna ploha naspram ravnotežne mreže*, Rad za Rektorovu nagradu, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2021., dostupno na <https://master.grad.hr/nastava/gS/sr/rovk.pdf> (pristupljeno: 20.8.2024)
- [4] Gidak, P., Šamec, E., Fresl, K., Vukadin, J.: *Traženje oblika vlačnih konstrukcija u nastavi na Građevinskom fakultetu*, *Građevinar*, 73 (2021) 4, str. 349-363, doi: <https://doi.org/10.14256/JCE.3168.2021>
- [5] Fresl, K.: Građevna statika 1., bilješke s predavanja; *O pojmu virtualnoga rada*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb 2017, str. 190-193, dostupno na <https://master.grad.hr/nastava/gS/gS1/gS1.pdf> (pristupljeno 26.8.2024)
- [6] Kušević, R.: *Ruđer Bošković u povijesti građevinskog inženjerstva*, *Građevinar* 13(1961)10, str. 301–308; pretisak: *Građevinar* 51(1999)1, str. 43–52
- [7] E. Šamec, K. Fresl, P. Gidak: *An extended linear procedure for constrained form finding. Proceedings of the 2019 IASS Symposium: Form and Force*, Barcelona, Spain, 2019., pp. 1961-1968

- [8] Šamec, E., Fresl, K.: *FALCON: Form-finding Algorithm for Linear Constrained Optimisation of Networks*. Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2021., dostupno na <http://www.grad.hr/nastava/gf/falcon/falcon.html> (pristupljeno: 12.09.2024)

## 8. POPIS SLIKA

Slika 1. Model od sapunice (Izvor: [ <a href="https://tinyurl.com/yc37ar8z">https://tinyurl.com/yc37ar8z</a> ]) .....	2
Slika 2. Frei Ottov fizikalni model od žica i spajalica (Izvor: [ <a href="https://tinyurl.com/2funxn7v">https://tinyurl.com/2funxn7v</a> ])....	3
Slika 3. Fizikalni model za kriptu Colònia Güell, Barcelona (Izvor: [ <a href="https://tinyurl.com/mr2wya3y">https://tinyurl.com/mr2wya3y</a> ]) .....	3
Slika 4. Shema dijela mreže (Izvor: [2]) .....	4
Slika 5. Dio mreže kabela i izdvojeni čvor s pripadajućim opterećenjem.....	5
Slika 6. Višenamjenska dvorana u Mannheimu izgrađena 1974. godine (Izvor: [ <a href="https://tinyurl.com/5258zhc4">https://tinyurl.com/5258zhc4</a> ]) .....	8
Slika 7. Solemar toplice u Bad Dürreheimu, 1987. (Izvor: [ <a href="https://tinyurl.com/9ybrepz">https://tinyurl.com/9ybrepz</a> ]).....	8
Slika 8. Skica Hookeove analogije i Polenijeva analiza napuknute kupole Svetog Petra u Rimu (Izvor: [ <a href="https://tinyurl.com/4mvarwuz">https://tinyurl.com/4mvarwuz</a> ]) .....	9
Slika 9. Primjeri ljuskastih struktura kružnog tlocrta koje mogu djelovati pod čistim tlakom (a) stožasta ljuska; (b) plitka kuglasta kupola; i (c) sferična kupola s okrenutim okulusom u sredini (Izvor: [1]) .....	10
Slika 10. Palača u Ktezifontu (Izvor: [ <a href="https://tinyurl.com/mwjcrnm2">https://tinyurl.com/mwjcrnm2</a> ]).....	11
Slika 11. Wrenova skica lančanice i kupole na katedrali sv. Pavla u Londonu (Izvor: [ <a href="https://tinyurl.com/d5twt6dx">https://tinyurl.com/d5twt6dx</a> ]) .....	12
Slika 12. Kupola na katedrali Svetog Petra u Rimu (Izvor: [ <a href="https://tinyurl.com/3pwavuwe">https://tinyurl.com/3pwavuwe</a> ])..	13
Slika 13. Polenijeva analiza kupole na katedrali Svetog Petra (Izvor: [ <a href="https://scielo.org.za/img/revistas/jsaice/v55n3/11f05.jpg">https://scielo.org.za/img/revistas/jsaice/v55n3/11f05.jpg</a> ]) .....	14
Slika 14. Pronalaženje oblika rešetkaste ljuske temeljeno na vlačno-tlačnoj analogiji.....	16
Slika 15. Izgled rešetkaste ljuske kada je gustoća sila $q=1$ . .....	17
Slika 16. Iznosi i smjerovi reakcija kada je gustoća sila $q=1$ .....	17
Slika 17. Izgled rešetkaste ljuske kada je povećana gustoća sila na $q=3,5$ .....	18
Slika 18. Iznosi i smjerovi reakcija kada je gustoća sila $q=3,5$ .....	18
Slika 19. Pronalaženje oblika rešetkaste ljuske kod koje jedan kabel ima veću gustoću u odnosu na druge kabele .....	19
Slika 20. Izgled rešetkaste ljuske kada je gustoća sila u jednom od kabela 10, a u ostalima 1	20
Slika 21. Izgled rešetkaste ljuske kada su povećane gustoće sila .....	20
Slika 22. Pronalaženje oblika rešetkaste ljuske s rupom u središtu i rubnim kabelom za kojeg su pričvršćeni ostali kabeli .....	21
Slika 23. Rešetkasta ljuska s rupom u središtu .....	22
Slika 24. Rešetkasta ljuska s rupom u središtu, povećanog polumjera rupe te smanjenim brojem kabela .....	22
Slika 25. Pronalaženje oblika rešetkaste ljuske s rupom u središtu u xy ravnini koja nema rubni kabel već su kabeli pričvršćeni za "tlo" .....	23
Slika 26. Rešetkasta ljuska s rupom u središtu u xy ravnini.....	24

Slika 27. Iznosi i smjerovi reakcija ..... 24