

# Nosači na elastičnoj podlozi

---

Šimunić, Mia

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:574463>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-14**

Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Mia Šimunić

# NOSAČI NA ELASTIČNOJ PODLOZI

ZAVRŠNI ISPIT

Zagreb, 2024.



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Mia Šimunić

# NOSAČI NA ELASTIČNOJ PODLOZI

ZAVRŠNI ISPIT

Mentorica: doc. dr. sc. Marina Frančić Smrkić

Komentorica: izv. prof. dr. sc. Ana Skender

Zagreb, 2024.



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Mia Šimunić

# **BEAMS ON ELASTIC FOUNDATION**

FINAL EXAM

Supervisor: Assistant Prof. Marina Frančić Smrkić

Cosupervisor: Associate Prof. Ana Skender

Zagreb, 2024



OBRAZAC 3

POTVRDA O POZITIVNOJ OCJENI PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Student/ica :

Mia Šimunić (Ime i prezime)	0082067268 (JMBAG)
--------------------------------	-----------------------

zadovoljio/la je na pisanom dijelu završnog ispita pod naslovom:

Nosači na elastičnoj podlozi  
(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

Beams on elastic foundation  
(Naslov teme završnog ispita na engleskom jeziku)

I predlaže se provođenje daljnjeg postupka u skladu s Pravilnikom o završnom ispitu i diplomskom radu Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta.

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu znanstvenog projekta: (upisati ako je primjenjivo)

(Naziv projekta, šifra projekta, voditelj projekta)

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu stručne prakse na Fakultetu: (upisati ako je primjenjivo)

(Ime poslodavca, datum početka i kraja stručne prakse)

Datum: 17.9.2024.

Mentor: Doc. dr. sc. Marina Frančić Smrkić

Potpis mentora:

Komentor: Izv. prof. dr. sc. Ana Skender



OBRAZAC 5

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja:

Mia Šimunić, 0082067268

(Ime i prezime, JMBAG)

student/ica Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta ovim putem izjavljujem da je moj pisani dio završnog ispita pod naslovom:

Nosači na elastičnoj podlozi

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

izvorni rezultat mojega rada te da se u izradi istoga nisam koristio/la drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

Datum:

17.09.2024.

Potpis:

Mia Šimunić



OBRAZAC 6

IZJAVA O ODOBRENJU ZA POHRANU I OBJAVU PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Ja:

Mia Šimunić, 93997390539

(Ime i prezime, OIB)

ovom izjavom potvrđujem da sam autor/ica predanog pisanog dijela završnog ispita i da sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti odgovara sadržaju dovršenog i obranjenog pisanog dijela završnog ispita pod naslovom:

Nosači na elastičnoj podlozi

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

koji je izrađen na sveučilišnom prijediplomskom studiju Građevinarstvo Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta pod mentorstvom:

doc.dr.sc. Marina Frančić Smrkić

(Ime i prezime mentora)

i obranjen dana:

24.09.2024.

(Datum obrane)

Suglasan/suglasna sam da pisani dio završnog ispita bude javno dostupan, te da se trajno pohrani u digitalnom repozitoriju Građevinskog fakulteta, repozitoriju Sveučilišta u Zagrebu te nacionalnom repozitoriju.

Datum:

17.09.2024.

Potpis:

Mia Šimunić

## SAŽETAK

Nosači na elastičnoj podlozi predstavljaju sustave u kojima nosači leže na deformabilnoj ili elastičnoj podlozi. Kroz ovaj rad su uz pomoć navedene literature prikazane razne vrste nosača na elastičnoj podlozi i načini proračuna istih. Ovi sustavi su statički neodređeni, što znači da njihove vanjske reakcije i unutarnje sile ne možemo odrediti jednadžbama ravnoteže, pa se oslanjamo na rubne uvjete karakterističnih točaka prema Winklerovoj teoriji.

Takve nosače koristimo u građevinarstvu, geotehničkom inženjerstvu, konstrukcijskom projektiranju i drugim inženjerskim disciplinama gdje se konstrukcije povezuju s tlom. Winklerova teorija posebno se primjenjuje kod konstrukcija mostova i zgrada, kao i kod betonskih hala i kupola velikih raspona.

U ovom radu razmatraju se osnovne metode proračuna unutarnjih sila i deformacija za nosače na elastičnoj podlozi različitih duljina. Također su analitički riješeni primjeri uspoređeni s rezultatima proračuna u računalnom programu SAP. Usporedba pokazuje razliku u rezultatima manju od 1%.

**Ključne riječi:** elastična podloga, Winklerova teorija, beskonačno dugi nosač, polubeskonačno dugi nosač, konačno dugi nosač



## SUMMARY

Beams supported by an elastic foundation are systems where the beam is situated on a deformable, elastic substrate. This paper, based on a literature review, shows various types of beams on elastic foundation as well as ways to calculate them. These systems are statically indeterminate, which means that their external reactions and internal forces cannot be fully determined using only equilibrium equations. Instead, the boundary conditions at specific points, as outlined by Winkler's theory, are used for analysis.

Such beams find applications in various fields, including construction, geotechnical engineering, structural design, and other areas where structures interact with the ground. Winkler's theory is particularly relevant for analysing structures such as bridges, buildings, concrete halls, and large-span domes.

This paper explores fundamental methods for calculating internal forces and deformations in beams on elastic foundation of varying lengths. It includes a comparison between analytically derived results and those obtained through SAP software analysis, revealing a discrepancy of less than 1% between the two methods.

**Key words:** elastic foundation, Winkler's theory, infinite beam, semi-infinite beam, finite-length beam

---

## SADRŽAJ

SAŽETAK .....	i
SUMMARY .....	ii
SADRŽAJ .....	iii
1. UVOD .....	1
2. NOSAČ NA ELASTIČNOJ PODLOZI.....	2
3. DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA ELASTIČNE LINIJE NOSAČA.....	4
4. BESKONAČNO DUGI NOSAČ NA ELASTIČNOJ PODLOZI.....	7
4.1. Opterećenje koncentriranom silom.....	7
4.2. Opterećenje nizom koncentriranih sila.....	13
4.3. Opterećenje jednolikim kontinuiranim opterećenjem duljine l.....	14
4.3.1. Točka unutar opterećenog dijela.....	14
4.3.2. Točka izvan opterećenog dijela.....	15
4.4. Opterećenje koncentriranim momentom .....	16
5. POLUBESKONAČNO DUGI NOSAČ NA ELASTIČNOJ PODLOZI.....	17
5.1. Proračun složenih problema superpozicijom.....	18
6. KONAČNO DUGI NOSAČ NA ELASTIČNOJ PODLOZI.....	20
7. NOSAČ NA JEDNAKO RAZMAKNUTIM ELASTIČNIM LEŽAJEVIMA .....	24
8. ANALITIČKI PRORAČUN NOSAČA KONAČNE DULJINE.....	25
9. NUMERIČKI PRIMJERI .....	27
10. ZAKLJUČAK.....	34
POPIS LITERATURE .....	35
POPIS SLIKA.....	36
POPIS TABLICA.....	37

## 1. UVOD

Tema završnog rada bavi se proučavanjem primjene nosača na elastičnoj podlozi, otkrivajući kompleksnost inženjerskih konstrukcija i statički neodređenih sustava. Riječ je o posebnim sustavima u kojima čvrsti nosač leži na podlozi koja se može deformirati ili prilagoditi opterećenju, čime se stvaraju izazovi pri izračunavanju unutarnjih sila i vanjskih reakcija [7]. Zbog toga njihove reakcije nije moguće riješiti samo pomoću jednadžbi ravnoteže, kao što je slučaj kod statički određenih nosača [7]. Dodatne varijable i rubni uvjeti uvedeni su kako bi se mogli riješiti ovakvi sustavi, a primjenjuju se u specifičnim točkama konstrukcije.

Kod nosača na elastičnoj podlozi, vanjska reakcija podloge pojavljuje se kao kontinuirano opterećenje, dok su kod određenih i neodređenih sustava vanjske reakcije obično koncentrirane sile ili momenti. Teorija savijanja nosača temelji se na pretpostavci da su reakcije podloge proporcionalne progibu na toj točki, koncept koji je prvi predstavio E. Winkler 1867. godine. Danas se Winklerova teorija i dalje koristi u proračunima nosača ovoga tipa te ima ključnu ulogu u procjeni progiba, unutarnjih sila i stabilnosti u stvarnim radnim uvjetima. Nosači na elastičnoj podlozi omogućuju precizne proračune koji su bitni za funkcionalnost, sigurnost i stabilnost konstrukcija.

## 2. NOSAČ NA ELASTIČNOJ PODLOZI

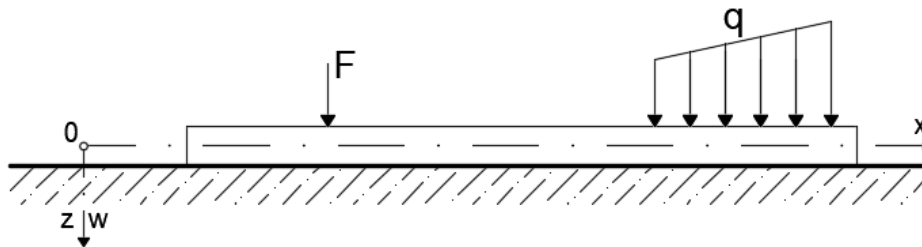
Nosač na elastičnoj podlozi je konstrukcija koja je pozicionirana na kontinuiranoj elastičnoj podlozi koju možemo zamisliti kao skup neovisnih elastičnih opruga. Iz toga slijedi da je reakcija podloge proporcionalna progibu nosača u određenoj točki.

$$q_r = -k \cdot w \quad (2.1)$$

Koeficijent podloge, označen kao  $k$ , karakterizira krutost podloge i predstavlja reakciju podloge na jedinicu duljine nosača [1]. Može se izraziti kao:

$$k = k_1 \cdot b \quad (2.2)$$

Gdje  $k_1$  predstavlja modul podloge, a  $b$  širinu nosača.



Slika 2.1 Nosač na elastičnoj podlozi [1]

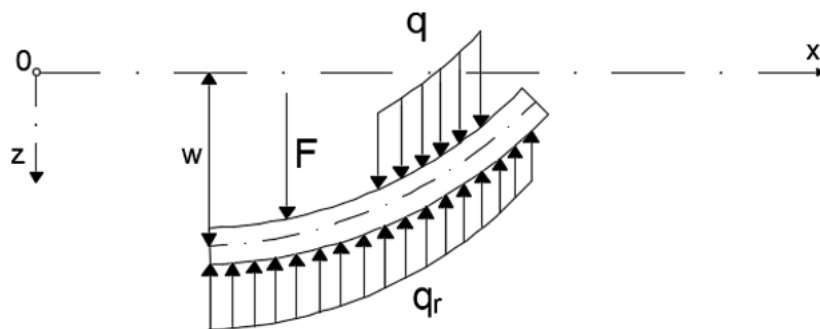
Modul podloge  $k_1$  određuje se eksperimentalnim ispitivanjem [1]. Tablica 2.1 prikazuje neke karakteristične vrijednosti modula podloge:

Tablica 2.1 Moduli podloge za materijale [1]

Materijal podloge	Modul podloge $k_1$ [MN/m <sup>3</sup> ]
Mokra glina, svježe nasuti pijesak	1-5
Vlažna glina, slegnuti pijesak	5-50
Malo vlažna glina, potpuno slegnuti pijesak	50-100
Pjeskovita glina, tvrda glina	100-200
Šljunak	4000-6000
Beton i armirani beton	8000-15000

1867. godine E. Winkler je postavio teoriju prema kojoj deformacija elastične podloge ovisi samo o pritisku u točki mjerenja deformacije. Ova teorija kasnije je postala osnova za daljnja istraživanja, a koeficijent elastičnosti podloge nazvan je Winklerovim koeficijentom [2].

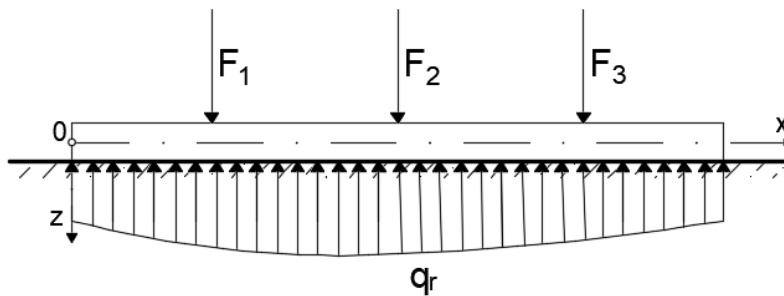
Izraz (2.1) pokazuje da podloga slijedi elastična svojstva prema Hookeovom zakonu [4]. Negativni predznak u izrazu označava da je reakcija podloge usmjerena suprotno od progiba. Ovisno o progibu, reakcija može biti usmjerena prema gore ili dolje.



Slika 2.2 Ovisnost reakcije o progibu [1]

### 3. DIFERENCIJALNA JEDNAĐŽBA ELASTIČNE LINIJE NOSAČA

Pri određivanju reakcije podloge  $q_r$  potrebno je uzeti u obzir deformaciju nosača uzrokovanu vanjskim opterećenjima, a ne samo jednađbe ravnoteže. Razlog tome je statička neodređenost sustava.



Slika 3.1 Nosač opterećen koncentriranim silama [1]

Diferencijalna jednađba elastične linije glasi:

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -M \quad (3.1)$$

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = -\frac{d^2 M}{dx^2} \quad (3.2)$$

Desni član izraza (3.2) jednak je ukupnom kontinuiranom opterećenju koje djeluje na nosač:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -(q + q_r) \quad (3.3)$$

Uz primjenu izraza (2.1) i (3.3) oblik diferencijalne jednađbe elastične linije se mijenja:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = -k \cdot w + q \quad (3.4) [1]$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{k}{EI} \cdot w = \frac{q}{EI} \quad (3.5)$$

Označimo:

$$\frac{k}{EI} = 4\alpha^4; \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \quad (3.6)$$

Iz toga slijedi izraz:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\alpha^4 w = \frac{q}{EI} \quad (3.7)$$

Parametar  $\alpha$ , definiran izrazom (3.6), ovisi o omjeru krutosti nosača i elastične podloge te je ključan za oblikovanje elastične linije. Ovaj parametar uključuje savojnu krutost grede i elastičnost nosivog medija [1]. Kod nosača izloženog samo koncentriranim opterećenjima, vrijedi  $q = 0$ , a jednačba se pojednostavljuje:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\alpha^4 w = 0 \quad (3.8)$$

Opće rješenje jednačbe tražimo kao:

$$w = e^{rx} \quad (3.9)$$

Uvrštavanjem u diferencijalnu jednačbu (3.8) slijedi:

$$(r^4 + 4\alpha^4) \cdot e^{rx} = 0 \quad (3.10)$$

$$r^4 + 4\alpha^4 = 0 \quad (3.11)$$

$$r = \pm \alpha \cdot (1 \pm i), \quad i = \sqrt{-1} \quad (3.12)$$

Uvrštavanjem gornjih izraza u izraz (3.9) dobiva se opće rješenje homogene diferencijalne jednačbe:

$$w = e^{\alpha x} \cdot [A \cos \alpha x + B \sin \alpha x] + e^{-\alpha x} \cdot [C \cos \alpha x + D \sin \alpha x] \quad (3.13)$$

Konstante A, B, C i D su konstante integracije koje ovise o načinu oslanjanja grede. One se određuju pomoću rubnih uvjeta za  $w$ ,  $w'$ ,  $w''$  i  $w'''$ . Vrijedi da je  $w'' = M$ , a  $w''' = T$ .

Svaki kraj nosača ima dva rubna uvjeta [1]:

- Upeti kraj:  $w=0$ ,  $w'=0$
- Zglobno oslonjeni kraj:  $w=0$ ,  $w'' = M = 0$
- Slobodan kraj:  $w'' = M = 0$ ,  $w''' = T = 0$

Opće se rješenje tako može zapisati kao:

$$w = e^{\alpha x} \cdot [A \cos \alpha x + B \sin \alpha x] + e^{-\alpha x} \cdot [C \cos \alpha x + D \sin \alpha x] + w_p \quad (3.14)$$

Gdje  $w_p$  označava partikularno rješenje izraza (3.7). Ako na nosač djeluje jednoliko kontinuirano opterećenje  $q = \text{konst.}$ , partikularno rješenje  $w_p$  tada ima oblik:

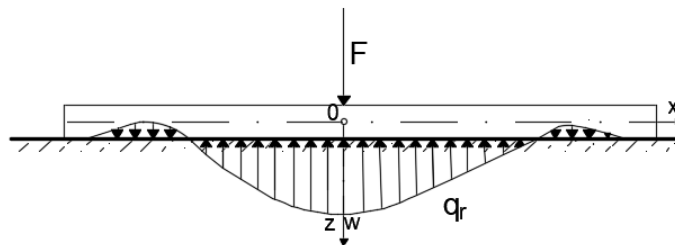
$$w_p = \frac{q_0}{k}, \quad q = q_0 = \text{konst.} \quad (3.15)$$



## 4. BESKONAČNO DUGI NOSAČ NA ELASTIČNOJ PODLOZI

### 4.1. Opterećenje koncentriranom silom

Kod beskonačno dugog nosača opterećenog koncentriranom silom  $F$ , rješenje je jednostavno. Koordinatni sustav postavljen je tako da ishodište leži na pravcu djelovanja sile  $F$ , a zbog simetrije, dovoljno je analizirati samo desnu stranu nosača. Rubni uvjeti su sljedeći: kada  $x \rightarrow \infty$ , progib  $w=0$ , a sve njegove derivacije također su jednake nuli [1]. Ti uvjeti su zadovoljeni kada su konstante  $A$  i  $B$  jednake nuli.

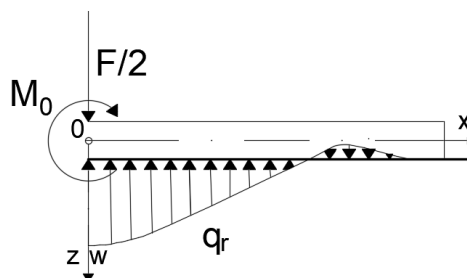


Slika 4.1 Reakcije nosača na koncentrirano opterećenje [1]

Jednadžba elastične linije za desni dio glasi:

$$w = e^{-\alpha x} \cdot [C \cos \alpha x + D \sin \alpha x] \quad (4.1)$$

Konstante  $C$  i  $D$  određuju se pomoću rubnih uvjeta u ishodištu. U toj točki određeni su nagib tangente elastične linije, gdje je  $w'(0)=0$ , i veličina poprečne sile:  $T = -EIw'''(0) = -\frac{F}{2}$ .



Slika 4.2 Desni dio nosača [1]

Deriviranjem (4.1) po  $x$  dobiva se:

$$\begin{aligned}
 w' &= -\alpha \cdot e^{-\alpha x} \cdot [(C + D) \cdot \sin \alpha x + (C - D) \cdot \cos \alpha x] \\
 w'(0) &= -\alpha \cdot (C - D) = 0 \\
 C &= D
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Uvrštavanjem  $C=D$  u (4.1):

$$w = Ce^{-\alpha x} \cdot [\cos \alpha x + \sin \alpha x] \tag{4.3}$$

$$w' = -2\alpha Ce^{-\alpha x} \cdot \sin \alpha x \tag{4.4}$$

$$w'' = -2\alpha^2 Ce^{-\alpha x} \cdot [\cos \alpha x - \sin \alpha x] \tag{4.5}$$

$$w''' = 4\alpha^3 Ce^{-\alpha x} \cdot \cos \alpha x \tag{4.6}$$

Time uvjet  $T = -EIw'''(0) = -\frac{F}{2}$  glasi:

$$T = -EIw'''(0) = -EI \cdot 4\alpha^3 C = -\frac{F}{2} \tag{4.7}$$

$$C = \frac{F}{8EI \cdot \alpha^3} \tag{4.8}$$

Ako (4.8) uvrstimo u izraz (4.3) dobivamo:

$$w = \frac{F}{8EI \cdot \alpha^3} \cdot e^{-\alpha x} \cdot [\cos \alpha x + \sin \alpha x], \quad x \geq 0 \tag{4.9}$$

$$w = \frac{F}{8EI \cdot \alpha^3} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \left[ \sqrt{2} \cdot \sin\left(\alpha x + \frac{\pi}{4}\right) \right] \tag{4.10}$$

Iz jednačbe (4.10) primjećuje se da elastična linija nosača ima valoviti oblik s amplitudama koje eksponencijalno padaju s udaljavanjem od točke sile  $F$  (ishodišta koordinatnog sustava) [1]. Duljina valova  $\lambda$  je definirana kao:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \cdot \sqrt[4]{\frac{4EI}{k}} \tag{4.11}$$

Ako u izraze (4.4), (4.5), (4.6) uvrstimo (4.8) dobivamo izraze za kutove zaokreta, momente savijanja i poprečne sile:

$$\varphi = w' = -\frac{F}{4EI\alpha^2} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin \alpha x \quad (4.12)$$

$$M = -EI \cdot w'' = \frac{F}{4\alpha} \cdot e^{-\alpha x} \cdot (\cos \alpha x - \sin \alpha x) \quad (4.13)$$

$$T = -EIw''' = -\frac{F}{2} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \cos \alpha x \quad (4.14)$$

Uvode se funkcije:

$$f_1(\alpha x) = e^{-\alpha x} \cdot (\cos \alpha x + \sin \alpha x) \quad (4.15)$$

$$f_2(\alpha x) = e^{-\alpha x} \cdot \sin \alpha x \quad (4.16)$$

$$f_3(\alpha x) = e^{-\alpha x} \cdot (\cos \alpha x - \sin \alpha x) \quad (4.17)$$

$$f_4(\alpha x) = e^{-\alpha x} \cdot \cos \alpha x \quad (4.18)$$

Uvrštavanjem funkcija (4.15), (4.16), (4.17) i (4.18) u gornje izraze dobivamo jednačbe za progibe, kutove zaokreta, momente savijanja i poprečne sile:

$$w = \frac{F}{8EI \cdot \alpha^3} \cdot f_1(\alpha x) \quad (4.19)$$

$$\varphi = w' = \frac{F}{4EI \cdot \alpha^2} \cdot f_2(\alpha x) \quad (4.20)$$

$$M = \frac{F}{4\alpha} \cdot f_3(\alpha x) \quad (4.21)$$

$$T = -\frac{F}{2} \cdot f_4(\alpha x) \quad (4.22)$$

Jednačbe vrijede za  $x \geq 0$ , tada su:  $f_1(0) = 1$ ,  $f_2(0) = 0$ ,  $f_3(0) = 1$  i  $f_4(0) = 1$ ; iz čega slijede najveće vrijednosti za progib, moment savijanja i poprečnu silu u ishodištu koordinatnog sustava:

$$w(0) = w_{max} = \frac{F}{8EI \cdot \alpha^3} = \frac{F\alpha}{2k} \quad (4.23)$$

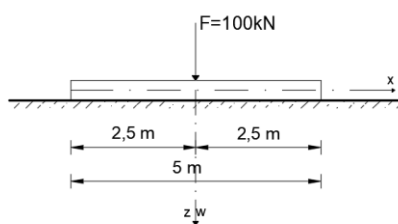
$$\varphi(0) = 0 \quad (4.24)$$

$$M(0) = M_{max} = \frac{F}{4\alpha} \quad (4.25)$$

$$T(0) = T_{max} = -\frac{F}{2} \quad (4.26)$$

Kroz primjer zadatka vidljiva je primjena gornjih izraza:

Za zadani nosač položen na elastičnu podlogu, treba odrediti progibnu liniju nosača te dijagrame unutrašnjih sila.



Slika 4.3 Opterećenje nosača i poprečni presjek

Zadano:

$$k = 750 \text{ MPa}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$I_y = 2,3 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI_y}} = \sqrt[4]{\frac{750}{4 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 2,3 \cdot 10^6 \cdot 10^{-12}}} = 4,44 \frac{1}{\text{m}}$$

$\alpha \cdot L = 4,44 \cdot 5 = 22,19 > 5$  nosač se može promatrati kao beskonačno dug

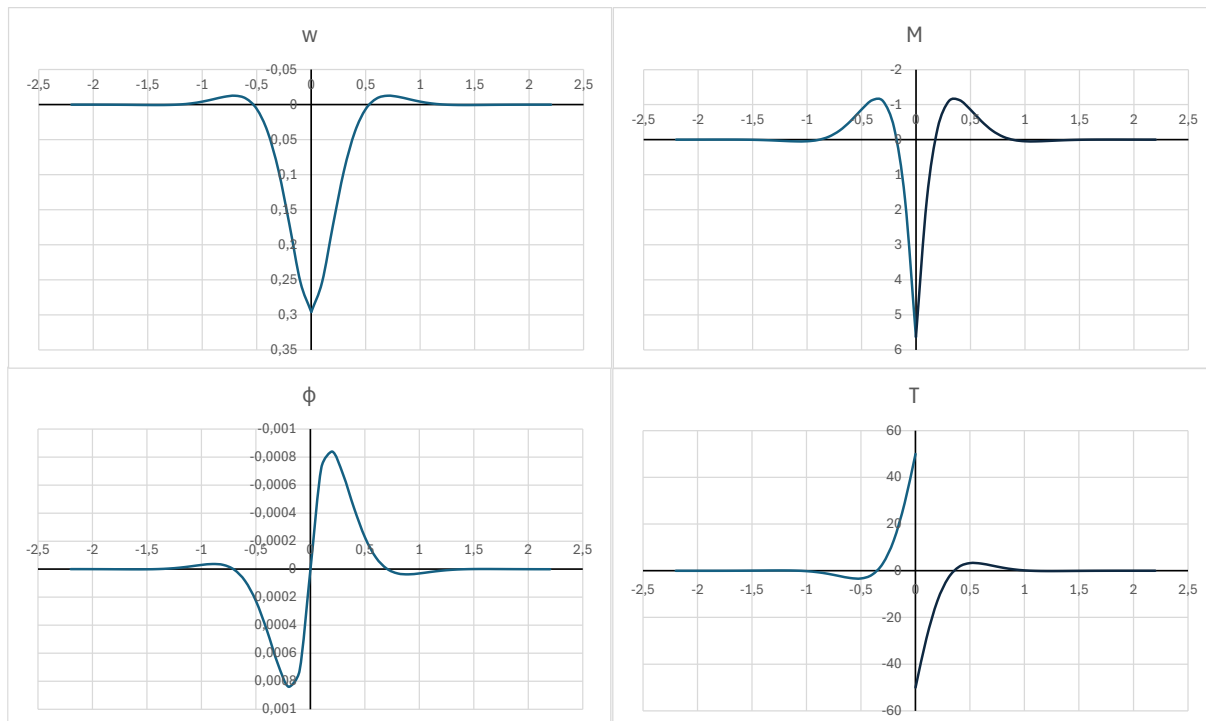
Za  $x = 0$ :

$$w = \frac{F}{8EI_y \alpha^3} \cdot e^{-\alpha x} \cdot [\cos(\alpha x) + \sin(\alpha x)] = \frac{100 \cdot 10^3}{8 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 2,3 \cdot 10^6 \cdot 0,00444^3} = 0,296 \text{ mm}$$

$$\varphi = w' = -\frac{F}{4EI_y \alpha^2} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin(\alpha x) = 0$$

$$M(x) = \frac{F}{4\alpha} \cdot e^{-\alpha x} \cdot [\cos(\alpha x) - \sin(\alpha x)] = \frac{100}{4 \cdot 4,44} = 5,63 \text{ kNm}$$

$$T(x) = -\frac{F}{2} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \cos(\alpha x) = -\frac{100}{2} = -50 \text{ kN}$$



Slika 4.4 Grafovi progiba, kuta zaokreta i unutarnjih sila

Grafovi unutarnjih sila prikazani na Slika 4.4. imaju oblik prigušenih valova. Na mjestu djelovanja opterećenja ( $x=0$ ), pojavljuju se vrijednosti dane izrazima (4.24), (4.25) i (4.26).

Točke u kojima je progib nula dobivamo iz uvjeta:

$$f_1(\alpha x_0) = e^{-\alpha x_0} \cdot (\cos \alpha x_0 + \sin \alpha x_0)$$

$$\cos \alpha x_0 + \sin \alpha x_0 = 0$$

$$\tan \alpha x_0 = -1$$

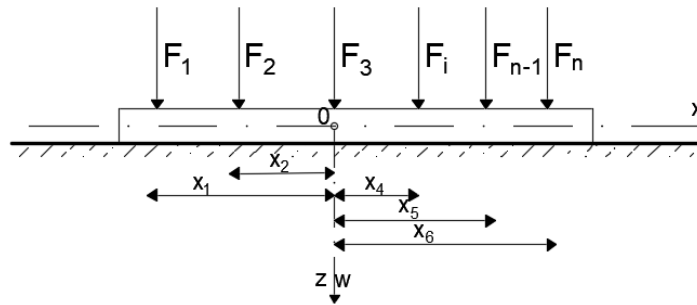
$$\alpha x_0 = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \dots$$

$$x_0 = \frac{3\pi}{4\alpha}, \frac{7\pi}{4\alpha}, \frac{11\pi}{4\alpha}, \dots \quad (4.27)$$

Iz izraza (4.23), (4.24), (4.25) i (4.26) dobivamo da je progib  $w(\pi) = 0,043w_{max}$  i  $w(2\pi) = 0,0019w_{max}$ . Na udaljenosti  $x = \frac{2\pi}{\alpha}$  od točke djelovanja sile, progib iznosi 0,19% maksimalnog progiba. Progibi za koje vrijedi  $\alpha x > 5$ , zanemarivo su mali i mogu se smatrati nula.

## 4.2. Opterećenje nizom koncentriranih sila

Ishodište koordinatnog sustava postavljeno je u presjek nosača u kojem se izračunavaju progib, kut zaokreta, moment savijanja ili poprečna sila.



Slika 4.5 Nosač opterećen koncentriranim silama [1]

Apscisa  $x_i$  predstavlja udaljenost promatranog presjeka od točke djelovanja sile. Izrazi za progib, kut zaokreta, moment savijanja i poprečnu silu dobivaju se primjenom zakona superpozicije [6] te jednadžbi (4.9), (4.12), (4.13), (4.14) i (4.27), uzimajući u obzir uvjet simetrije.

$$w(0) = \frac{1}{8EI \cdot \alpha^3} \cdot \sum_{i=1}^n F_i e^{-\alpha x_i} \cdot (\cos \alpha x_i + \sin \alpha x_i) = \frac{1}{8EI \cdot \alpha^3} \cdot \sum_{i=1}^n F_i \cdot f_1(\alpha x_i) \quad (4.28)$$

$$\varphi(0) = -\frac{1}{4EI \cdot \alpha^2} \cdot \sum_{i=1}^n F_i e^{-\alpha x_i} \cdot \sin \alpha x_i = -\frac{1}{4EI \cdot \alpha^2} \cdot \sum_{i=1}^n F_i \cdot f_2(\alpha x_i) \quad (4.29)$$

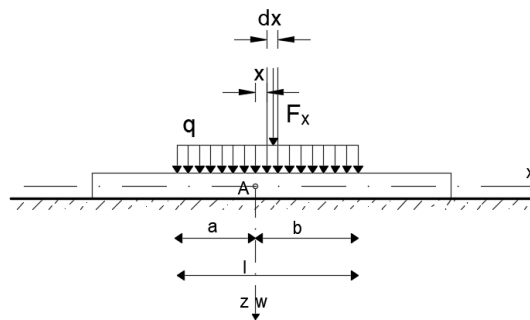
$$M(0) = \frac{1}{4\alpha} \cdot \sum_{i=1}^n F_i e^{-\alpha x_i} \cdot (\cos \alpha x_i - \sin \alpha x_i) = \frac{1}{4\alpha} \cdot \sum_{i=1}^n F_i \cdot f_3(\alpha x_i) \quad (4.30)$$

$$T(0) = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n F_i e^{-\alpha x_i} \cdot \cos \alpha x_i = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n F_i \cdot f_4(\alpha x_i) \quad (4.31)$$

Zbog simetrije poprečnih presjeka koji su jednako udaljeni od koncentrirane sile,  $x_i$  ulazi u jednadžbe kao apsolutna vrijednost. iz toga slijedi da su progibi i momenti savijanja jednaki, dok se kutovi zaokreta i poprečne sile razlikuju samo u predznaku.

### 4.3. Opterećenje jednolikim kontinuiranim opterećenjem duljine l

#### 4.3.1. Točka unutar opterećenog dijela



Slika 4.6 Točka u opterećenom dijelu [1]

Zbog elementarnog opterećenja  $F_x = q dx$ :

$$dw = \frac{q dx}{8EI \cdot \alpha^3} \cdot e^{-\alpha x} \cdot (\cos \alpha x + \sin \alpha x) \quad (4.32)$$

Progib u točki A iznosi:

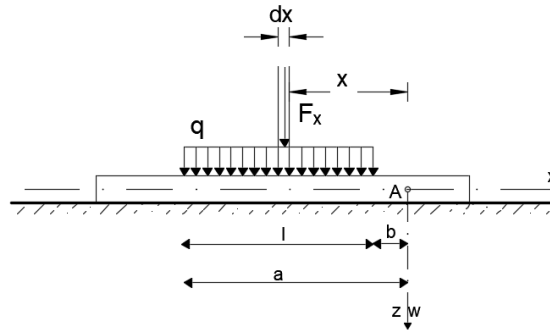
$$w = \int_0^a \frac{q dx}{8EI \cdot \alpha^3} \cdot e^{-\alpha x} \cdot (\cos \alpha x + \sin \alpha x) + \int_0^b \frac{q dx}{8EI \cdot \alpha^3} \cdot e^{-\alpha x} \cdot (\cos \alpha x + \sin \alpha x)$$

$$w = \frac{q}{8EI \cdot \alpha^4} (2 - e^{-\alpha a} \cdot \cos \alpha a - e^{-\alpha b} \cdot \cos \alpha b)$$

$$w = \frac{q}{2k} (2 - e^{-\alpha a} \cdot \cos \alpha a - e^{-\alpha b} \cdot \cos \alpha b) \quad (4.33)$$



## 4.3.2. Točka izvan opterećenog dijela



Slika 4.7 Točka izvan neopterećenog dijela [1]

Progib u točki A:

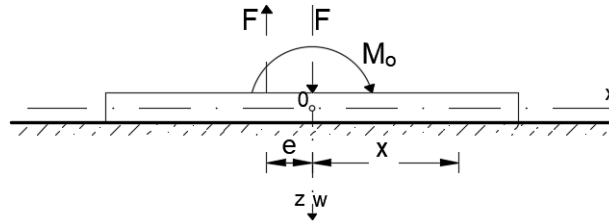
$$w = \int_0^a \frac{q \, dx}{8EI \cdot \alpha^3} \cdot e^{-\alpha x} \cdot (\cos \alpha x + \sin \alpha x) - \int_0^b \frac{q \, dx}{8EI \cdot \alpha^3} \cdot e^{-\alpha x} \cdot (\cos \alpha x + \sin \alpha x)$$

$$w = \frac{q}{8EI \cdot \alpha^4} (e^{-\alpha b} \cdot \cos \alpha b - e^{-\alpha a} \cdot \cos \alpha a)$$

$$w = \frac{q}{2k} (e^{-\alpha b} \cdot \cos \alpha b - e^{-\alpha a} \cdot \cos \alpha a)$$

(4.34)

## 4.4. Opterećenje koncentriranim momentom



Slika 4.8 Opterećenje koncentriranim momentom [1]

Koncentrirani moment  $M_0$  koji djeluje na nosač zamijenimo spregom sila, tako da vrijedi:

$$F \cdot e = M_0; \quad e \rightarrow 0$$

$$w = \frac{F}{8EI \cdot \alpha^3} \cdot \{f_1(\alpha x) - f_1[\alpha(x + e)]\} = -\frac{M_0}{8EI \cdot \alpha^3} \cdot \frac{f_1[\alpha(x+e)] - f_1(\alpha x)}{e}$$

$$w = -\frac{M_0}{8EI \cdot \alpha^3} \lim_{e \rightarrow 0} \frac{f_1[\alpha(x+e)] - f_1(\alpha x)}{e} = -\frac{M_0}{8EI \cdot \alpha^3} \cdot \frac{df_1(\alpha x)}{dx}$$

$$w = \frac{M_0}{4EI \cdot \alpha^2} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin \alpha x = \frac{M_0}{4EI \cdot \alpha^2} \cdot f_2(\alpha x) \quad (4.35)$$

Derivacijom izraza (4.35) dobiveni su izrazi za kut zaokreta, moment savijanja i poprečnu silu:

$$w = \frac{M_0}{4EI \cdot \alpha^2} \cdot f_2(\alpha x)$$

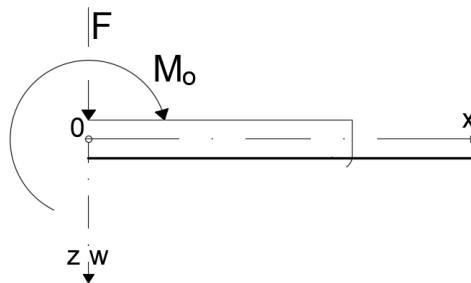
$$\varphi = w' = \frac{M_0}{4EI \alpha} \cdot f_3(\alpha x)$$

$$M = -EIw'' = \frac{M_0}{2} \cdot f_4(\alpha x)$$

$$T = -EIw''' = -\frac{M_0 \alpha}{2} \cdot f_1(\alpha x) \quad (4.36)$$

## 5. POLUBESKONAČNO DUGI NOSAČ NA ELASTIČNOJ PODLOZI

Pojam "polubeskonačno dugi nosač" odnosi se na gredu kojoj je jedan kraj beskonačne duljine, dok je drugi kraj ograničen [2]. Ograničeni kraj može biti različito definiran, može biti slobodan, zglobno povezan ili upet. Bez obzira na specifičnost ograničenog kraja, rješenja se mogu pronaći korištenjem formula koje se primjenjuju za beskonačne nosače, uz upotrebu rubnih uvjeta. Kao primjer uzet je nosač kojem u lijevom kraju djeluju koncentrirana sila i moment.



Slika 5.1 Polubeskonačno dugi nosač opterećen momentom i silom [1]

Progib i sve njegove derivacije su jednake nuli kada  $x \rightarrow \infty$ , konstante A i B su također jednake nuli [1], iz toga proizlazi jednadžba elastične linije nosača:

$$w = e^{-\alpha x} \cdot [C \cos \alpha x + D \sin \alpha x] \quad (5.1)$$

Uz rubne uvjete na lijevom kraju, u ishodištu koordinatnog sustava:

$$M = -EIw''(0) = M_0 \quad (5.2)$$

$$T = -EIw'''(0) = -F_0 \quad (5.3)$$

Deriviranjem izraza (5.1) dobiva se jednadžba:

$$\begin{aligned} w'' &= -2e^{-\alpha x} \cdot \alpha^2 \cdot [D \cos \alpha x - C \sin \alpha x] \\ w''' &= 2e^{-\alpha x} \cdot \alpha^3 \cdot [D(\sin \alpha x + \cos \alpha x) - C(\sin \alpha x - \cos \alpha x)] \end{aligned} \quad (5.4)$$

Uvrštavanjem rubnih uvjeta (5.2) i (5.3) slijedi:

$$\begin{aligned} D &= \frac{M_0}{2EI \cdot \alpha^2} \\ C &= \frac{F_0 - \alpha \cdot M_0}{2EI \cdot \alpha^3} \end{aligned} \quad (5.5)$$

U jednadžbu (5.1) uvrste se izrazi (5.5):

$$w = \frac{e^{-\alpha x}}{2EI \cdot \alpha^3} \cdot [F_0 \cdot \cos \alpha x - \alpha M_0 \cdot (\cos \alpha x - \sin \alpha x)]$$

$$w = \frac{1}{2EI \cdot \alpha^3} \cdot [F_0 \cdot f_4(\alpha x) - \alpha M_0 \cdot f_3(\alpha x)] \quad (5.6)$$

Kada je  $x=0$  iznos progiba ispod opterećenja glasi:

$$w(0) = \frac{F_0 - \alpha \cdot M_0}{2EI \cdot \alpha^3} \quad (5.7)$$

Deriviranjem izraza (5.6) dobivaju se izrazi za kut zaokreta, moment savijanja i poprečnu silu:

$$\varphi = w' = -\frac{e^{-\alpha x}}{2EI \cdot \alpha^2} \cdot [F_0 \cdot (\cos \alpha x + \sin \alpha x) - 2\alpha M_0 \cdot \cos \alpha x]$$

$$\varphi = -\frac{1}{2EI \cdot \alpha^2} \cdot [F_0 \cdot f_1(\alpha x) - 2\alpha M_0 \cdot f_4(\alpha x)] \quad (5.8)$$

$$M = -EIw'' = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \cdot [F_0 \cdot \sin \alpha x - \alpha M_0 \cdot (\cos \alpha x + \sin \alpha x)]$$

$$M = -\frac{1}{\alpha} \cdot [F_0 \cdot f_2(\alpha x) - \alpha M_0 \cdot f_1(\alpha x)] \quad (5.9)$$

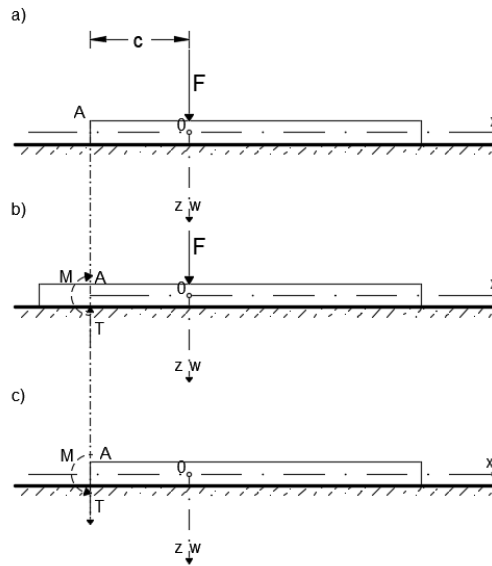
$$T = -EIw''' = -e^{-\alpha x} \cdot [F_0 \cdot (\cos \alpha x - \sin \alpha x) - 2\alpha M_0 \cdot \sin \alpha x]$$

$$T = -[F_0 \cdot f_3(\alpha x) + 2\alpha M_0 \cdot f_2(\alpha x)] \quad (5.10)$$

## 5.1. Proračun složenih problema superpozicijom

Složeni problemi mogu se riješiti koristeći jednadžbe (5.6) – (5.10) zajedno s principom superpozicije. Prema ovom principu, kada na konstrukciju djeluje više sila, ukupni pomak određene točke može se izračunati tako da se prvo pojedinačno odrede pomaci uzrokovani svakom silom, a zatim se ti pomaci zbroje. Konačni pomak je rezultat zbroja svih tih pojedinačnih pomaka [6].

Ovaj princip je prikazan na primjeru polubeskonačno dugog nosača na elastičnoj podlozi, koji je opterećen koncentriranom silom na određenoj udaljenosti  $c$  od slobodnog kraja nosača.



Slika 5.2 Proračun superpozicijom [1]

Progib nosača pod a) dobije se superpozicijom progiba nosača pod b) i c):

$$w_a = w_b + w_c \quad (5.11)$$

Iz toga slijedi:

$$w_b = \frac{F}{8EI \cdot \alpha^3} \cdot f_1(\alpha x) \quad (5.12)$$

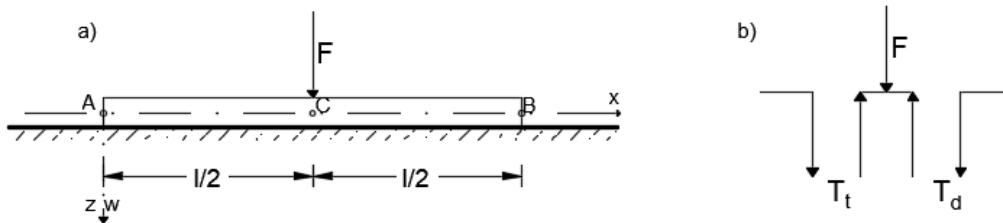
$$w_c = \frac{1}{2EI \cdot \alpha^3} \cdot \{T \cdot f_4 \cdot [\alpha(x + c)] + \alpha M \cdot f_3 \cdot [\alpha(x + c)]\} \quad (5.13)$$

$$w_a = \frac{F}{8EI \cdot \alpha^3} \cdot f_1(\alpha x) + \frac{1}{2EI \cdot \alpha^3} \cdot \{T \cdot f_4 \cdot [\alpha(x + c)] + \alpha M \cdot f_3 \cdot [\alpha(x + c)]\} \quad (5.14)$$

## 6. KONAČNO DUGI NOSAČ NA ELASTIČNOJ PODLOZI

Za nosače konačne duljine, ispravno rješenje mora zadovoljiti zahtjeve diferencijalne jednačbe elastične linije nosača kao i specifične rubne uvjete na oba kraja grede. Sve ranije izvedene jednačbe elastičnih linija beskonačnih nosača zadovoljavaju uvjet savijanja, a primjenom principa superpozicije, sve kombinacije tih opterećenja također će ispuniti navedenu diferencijalnu jednačbu.

Kombinacija opterećenja koja zadovoljava rubne uvjete elastične linije daje rješenje diferencijalne jednačbe za nosač konačne duljine.



Slika 6.1 Konačno dugi nosač na elastičnoj podlozi [1]

Nosač je opterećen koncentriranom silom u sredini. Rješenje diferencijalne jednačbe prikazuje se kao:

$$w = C_1 \sin \alpha x \cdot \sinh \alpha x + C_2 \sin \alpha x \cdot \cosh \alpha x + C_3 \cos \alpha x \cdot \sinh \alpha x + C_4 \cos \alpha x \cdot \cosh \alpha x \quad (6.1)$$

$$w' = (C_2 - C_3)\alpha \sin \alpha x \cdot \sinh \alpha x + (C_1 - C_4)\alpha \sin \alpha x \cdot \cosh \alpha x + (C_1 + C_4)\alpha \cos \alpha x \cdot \sinh \alpha x + (C_2 + C_3)\alpha \cos \alpha x \cdot \cosh \alpha x \quad (6.2)$$

$$w'' = 2C_1\alpha^2 \cos \alpha x \cdot \cosh \alpha x + 2C_2\alpha^2 \cos \alpha x \cdot \sinh \alpha x - 2C_3\alpha^2 \sin \alpha x \cdot \cosh \alpha x - 2C_4\alpha^2 \sin \alpha x \cdot \sinh \alpha x \quad (6.3)$$

$$w''' = 2(C_2 - C_3)\alpha^3 \cos \alpha x \cdot \cosh \alpha x + 2(C_1 - C_4)\alpha^3 \cos \alpha x \cdot \sinh \alpha x - 2(C_1 + C_4)\alpha^3 \sin \alpha x \cdot \cosh \alpha x - 2(C_2 + C_3)\alpha^3 \sin \alpha x \cdot \sinh \alpha x \quad (6.4)$$

Kada je  $x=0$ , slijede rubni uvjeti:

$$\begin{aligned} M &= -EIw''(0) = 0 \\ T &= -EIw'''(0) = 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Vrijedi uvjet simetrije pa za  $x = \frac{l}{2}$  slijedi:

$$\begin{aligned} w' \left( \frac{l}{2} \right) &= 0 \\ T &= -EIw''' \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{F}{2} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Iz rubnih uvjeta dobivamo:

$$w''(0) = 2C_1\alpha^2 = 0, \quad C_1 = 0 \quad (6.7)$$

$$w'''(0) = 2(C_2 - C_3)\alpha^3 = 0, \quad C_2 = C_3 \quad (6.8)$$

Iz uvjeta (6.6):

$$\begin{aligned} w' \left( \frac{l}{2} \right) &= C_4\alpha \left[ \cos \left( \alpha \frac{l}{2} \right) \cdot \sinh \left( \alpha \frac{l}{2} \right) - \sin \left( \alpha \frac{l}{2} \right) \cdot \cosh \left( \alpha \frac{l}{2} \right) \right] \\ &+ C_3 2\alpha \cdot \cos \left( \alpha \frac{l}{2} \right) \cdot \cosh \left( \alpha \frac{l}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} w''' \left( \frac{l}{2} \right) &= -C_4 2\alpha^3 \left[ \cos \left( \alpha \frac{l}{2} \right) \cdot \sinh \left( \alpha \frac{l}{2} \right) + \sin \left( \alpha \frac{l}{2} \right) \cdot \cosh \left( \alpha \frac{l}{2} \right) \right] \\ &- C_3 4\alpha^3 \cdot \sin \left( \alpha \frac{l}{2} \right) \cdot \sinh \left( \alpha \frac{l}{2} \right) = -\frac{F}{2EI} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Rješenje sustava jednačbi:

$$C_3 = \frac{F\alpha}{k} \cdot \frac{\sin \left( \alpha \frac{l}{2} \right) \cdot \cosh \left( \alpha \frac{l}{2} \right) - \cos \left( \alpha \frac{l}{2} \right) \cdot \sinh \left( \alpha \frac{l}{2} \right)}{\sinh(\alpha l) + \sin(\alpha l)} \quad (6.11)$$

$$C_4 = \frac{2F\alpha}{k} \cdot \frac{\cos \left( \alpha \frac{l}{2} \right) \cdot \cosh \left( \alpha \frac{l}{2} \right)}{\sinh(\alpha l) + \sin(\alpha l)} \quad (6.12)$$

U izraz (6.1) dodamo pripadne vrijednosti konstanti integracije (6.7), (6.8), (6.11) i (6.12):

$$w = \frac{F\alpha}{k} \left\{ \frac{\sin(\frac{\alpha l}{2}) \cdot \cosh(\frac{\alpha l}{2}) - \cos(\frac{\alpha l}{2}) \cdot \sinh(\frac{\alpha l}{2})}{\sinh(\alpha l) + \sin(\alpha l)} \cdot [\sin(\alpha x) \cdot \cosh(\alpha x) + \cos(\alpha x) \cdot \sinh(\alpha x)] + \frac{2 \cos(\frac{\alpha l}{2}) \cdot \cosh(\frac{\alpha l}{2})}{\sinh(\alpha l) + \sin(\alpha l)} \cdot \cos(\alpha x) \cdot \cosh(\alpha x) \right\}; \quad \text{za } 0 \leq x < \frac{l}{2} \quad (6.13)$$

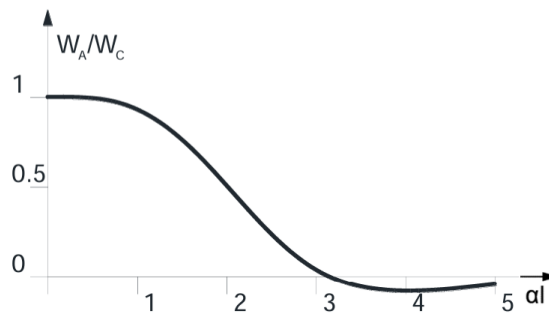
Za  $\frac{l}{2} < x \leq l$  deformacije nosača određuju se obzirom na hvatište sile:

$$w_A = w(0) = \frac{2F\alpha}{k} \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha l}{2}) \cdot \cosh(\frac{\alpha l}{2})}{\sinh(\alpha l) + \sin(\alpha l)} \quad (6.14)$$

$$w_c = w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{F\alpha}{2k} \cdot \frac{2 + \cos(\alpha l) + \cosh(\alpha l)}{\sinh(\alpha l) + \sin(\alpha l)} \quad (6.15)$$

$$\frac{w_A}{w_c} = \frac{w(0)}{w\left(\frac{l}{2}\right)} = \frac{4 \cos(\frac{\alpha l}{2}) \cdot \cosh(\frac{\alpha l}{2})}{2 + \cos(\alpha l) + \cosh(\alpha l)} \quad (6.16)$$

Grafički prikaz odnosa:



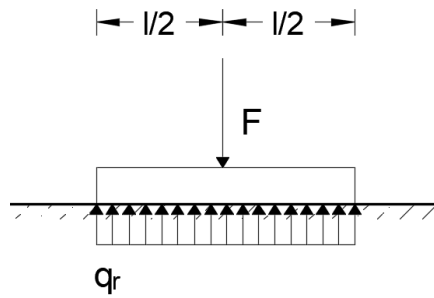
Slika 6.2 Grafički prikaz odnosa progiba i  $\alpha l$  [1]

Veličina  $\alpha l$  se određuje na temelju omjera progiba krajnjeg i srednjeg presjeka. Ako je vrijednost  $\alpha l$  manja od 1, progibi su gotovo jednaki, pa se savijanje nosača može zanemariti, a nosač se smatra apsolutno krutim. Kada je  $\alpha l$  veći od 3, koncentrirano opterećenje u sredini nosača ima zanemariv utjecaj, nosač se može smatrati beskonačno dugačkim. U slučaju kada je  $\alpha l$  u rasponu od 1 do 3, koncentrirano opterećenje značajno utječe na deformacije krajnjih presjeka [1]. Na temelju toga, nosače konačne duljine možemo razvrstati u tri kategorije:

1. Kratki apsolutno kruti nosači,  $\alpha l < 0,6$ , pomaci podloge računaju se izrazom:

$$w = \frac{F}{kl} \quad (6.17)$$



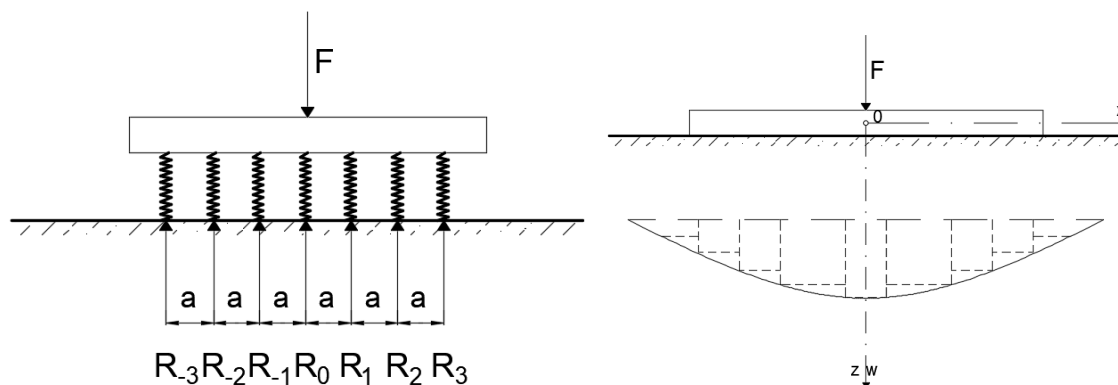


Slika 6.3 Linearna reakcija sustava [1]

2. Nosači konačne duljine,  $0,6 < \alpha l < 5$ .
3. Beskonačno dugački nosači,  $\alpha l > 5$

Za nosače konačne duljine, rješenje se može postići superpozicijom rješenja za beskonačno duge i polubeskonačno duge nosače.

## 7. NOSAČ NA JEDNAKO RAZMAKNUTIM ELASTIČNIM LEŽAJEVIMA



Slika 7.1 Nosač na jednako razmaknutim ležajevima [1]

Kod jednako razmaknutih elastičnih ležajeva, problem se pojednostavljuje zamjenom pojedinačnih ležajeva ekvivalentnom neprekinutom elastičnom podlogom, oprugama. Ovo je izvedivo ako je razmak između susjednih ležajeva dovoljno malen, a koncentrirana reakcija se može zamijeniti ekvivalentnim ravnomjerno raspodijeljenim opterećenjem. U praksi, razmak  $a$  se obično ograničava tako da vrijedi  $a \leq \frac{\pi}{4\alpha}$  [1]. Krutost elastičnog ležaja označava se s  $K$  i izražava u N/m. Intenzitet relativnog opterećenja glasi:

$$\frac{R}{a} = \frac{Kw}{a} = q \quad (7.1)$$

Ako pretpostavimo da je  $q=kw$  dobivamo koeficijent elastične podloge ekvivalentan nizu elastičnih ležajeva:

$$k = \frac{K}{a} \quad (7.2)$$

## 8. ANALITIČKI PRORAČUN NOSAČA KONAČNE DULJINE

Proračun nosača temelji se na analizi naprezanja, deformacija i unutarnjih reakcija. Prvi korak analize je prepoznavanje tipa nosača, vrste opterećenja (koncentrirano, kontinuirano, moment), te definiranje rubnih uvjeta [5]. U literaturi za svaki tip nosača na elastičnoj podlozi i vrstu opterećenja postoje gotovi analitički izrazi pomoću kojih se mogu brzo odrediti unutarnje sile i progibi u određenim poprečnim presjecima.

U literaturi se koeficijent  $\alpha$  označava i kao  $\beta$ . Taj koeficijent određuje doprinos podloge ukupnoj krutosti sustava, veći  $\beta$  znači kruću podlogu što za rezultat daje manji progib, dok manji  $\beta$  označava mekšu podlogu i time povećava progibe i smanjuje ukupnu stabilnost.

Koeficijente  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_{a1}, F_{a2}, F_{a3}, F_{a4}$  i  $F_{a5}$  dobivamo prema sljedećim trigonometrijskim izrazima:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \cosh \beta x \cos \beta x \\
 F_2 &= \cosh \beta x \sin \beta x + \sinh \beta x \cos \beta x \\
 F_3 &= \sinh \beta x \sin \beta x \\
 F_4 &= \cosh \beta x \sin \beta x - \sinh \beta x \cos \beta x
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

$$\begin{aligned}
 F_{a1} &= [x - a]^0 \cosh[\beta(x - a)] \cos[\beta(x - a)] \\
 F_{a2} &= \cosh[\beta(x - a)] \sin[\beta(x - a)] + \sinh[\beta(x - a)] \cos[\beta(x - a)] \\
 F_{a3} &= \sinh[\beta(x - a)] \sin[\beta(x - a)] \\
 F_{a4} &= \cosh[\beta(x - a)] \sin[\beta(x - a)] - \sinh[\beta(x - a)] \cos[\beta(x - a)] \\
 F_{a5} &= [x - a]^0 - F_{a1}
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

U nastavku su navedene formule za slučaj kada je konačni nosač opterećen koncentriranom silom [5].

$$\theta = \theta_A \cdot F_1 + \frac{M_A}{2EI\beta} \cdot F_2 + \frac{R_A}{2EI\beta^2} \cdot F_3 - y_A \cdot \beta \cdot F_4 - \frac{W}{2EI\beta^2} \cdot F_{a3} \tag{8.3}$$

$$y = y_A \cdot F_1 + \frac{\theta_A}{2\beta} \cdot F_2 + \frac{M_A}{2EI\beta^2} \cdot F_3 + \frac{R_A}{4EI\beta^3} \cdot F_4 - \frac{W}{4EI\beta^3} \cdot F_{a4} \quad (8.4)$$

$$M = M_A \cdot F_1 + \frac{R_A}{2\beta} \cdot F_2 - y_A 2EI\beta^2 \cdot F_3 - \theta_A EI\beta \cdot F_4 - \frac{W}{2\beta} \cdot F_{a2} \quad (8.5)$$

$$V = R_A \cdot F_1 - y_A 2EI\beta^3 \cdot F_2 - \theta_A 2EI\beta^2 \cdot F_3 - M_A \beta F_4 - W F_{a1} \quad (8.6)$$

U slučaju da je konačni nosač opterećen kontinuiranim opterećenjem izrazi glase:

$$V = R_A \cdot F_1 - y_A 2EI\beta^3 \cdot F_2 - \theta_A 2EI\beta^2 \cdot F_3 - M_A \beta F_4 - \frac{W}{2\beta} F_{a2} \quad (8.7)$$

$$M = M_A \cdot F_1 + \frac{R_A}{2\beta} \cdot F_2 - y_A 2EI\beta^2 \cdot F_3 - \theta_A EI\beta \cdot F_4 - \frac{W}{2\beta^2} \cdot F_{a3} \quad (8.8)$$

$$\theta = \theta_A \cdot F_1 + \frac{M_A}{2EI\beta} \cdot F_2 + \frac{R_A}{2EI\beta^2} \cdot F_3 - y_A \cdot \beta \cdot F_4 - \frac{W}{4EI\beta^3} \cdot F_{a4} \quad (8.9)$$

$$y = y_A \cdot F_1 + \frac{\theta_A}{2\beta} \cdot F_2 + \frac{M_A}{2EI\beta^2} \cdot F_3 + \frac{R_A}{4EI\beta^3} \cdot F_4 - \frac{W}{4EI\beta^4} \cdot F_{a5} \quad (8.10)$$

Vrijednosti progiba, kuta zaokreta, momenta i poprečne sile za polubeskonačni nosač dobivamo pomoću sljedećih izraza:

$$V = R_A \cdot F_1 - y_A 2EI\beta^3 \cdot F_2 - \theta_A 2EI\beta^2 \cdot F_3 - M_A \beta F_4 + LT_v \quad (8.11)$$

$$M = M_A \cdot F_1 + \frac{R_A}{2\beta} \cdot F_2 - y_A 2EI\beta^2 \cdot F_3 - \theta_A EI\beta \cdot F_4 + LT_M \quad (8.12)$$

$$\theta = \theta_A \cdot F_1 + \frac{M_A}{2EI\beta} \cdot F_2 + \frac{R_A}{2EI\beta^2} \cdot F_3 - y_A \cdot \beta \cdot F_4 + LT_\theta \quad (8.13)$$

$$y = y_A \cdot F_1 + \frac{\theta_A}{2\beta} \cdot F_2 + \frac{M_A}{2EI\beta^2} \cdot F_3 + \frac{R_A}{4EI\beta^3} \cdot F_4 + LT_y \quad (8.14)$$

Izrazi za  $LT_v$ ,  $LT_M$ ,  $LT_\theta$ ,  $LT_y$  računaju se određenim formulama ovisno o vrsti opterećenja nosača [5].

## 9. NUMERIČKI PRIMJERI

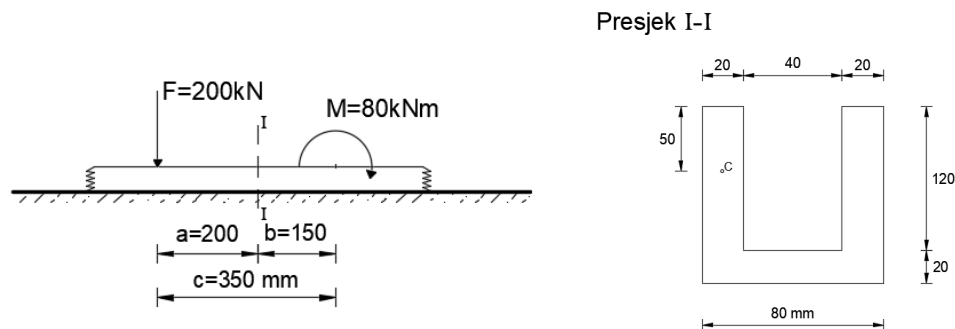
### 1. zadatak

Za beskonačno dugi nosač na elastičnoj podlozi treba odrediti glavna naprezanja i glavne osi u točki C presjeka I-I.

Zadano je:

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$k_1 = 18 \text{ N/mm}^3$$



Slika 9.1 Opterećenje nosača i poprečni presjek

Karakteristike materijala i poprečnog presjeka:

$$I_y = 2 \cdot \left[ \frac{20 \cdot 140^3}{12} + 20 \cdot 140 \cdot (70 - 62,5)^2 \right] + \frac{40 \cdot 20^3}{12} + 20 \cdot 40 \cdot (62,5 - 10)^2$$

$$= 116,93 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$S_y^C = 2 \cdot [20 \cdot 50 \cdot (77,5 - 25).] = 105000 \text{ mm}^3$$

$$k = k_1 \cdot b = 18 \cdot 80 = 1440 \text{ N/mm}^2$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI_y}} = \sqrt[4]{\frac{1440}{4 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 116,93 \cdot 10^5}} = 3,48 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{mm}}$$

$$\alpha a = 3,48 \cdot 10^{-3} \cdot 200 = 0,696$$

$$\alpha b = 3,48 \cdot 10^{-3} \cdot 150 = 0,522$$

Za  $x=200$  mm

Elastična linija nosača:

$$\begin{aligned} w &= \frac{F}{8EI_y \alpha^3} \cdot e^{-\alpha a} \cdot [\cos(\alpha a) + \sin(\alpha a)] - \frac{M}{4EI_y \alpha^2} \cdot e^{-\alpha b} \cdot \sin(\alpha b) = \\ &= \frac{200 \cdot 10^3}{8 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 116,93 \cdot 10^5 \cdot (3,48 \cdot 10^{-3})^3} \cdot e^{-0,696} \cdot [\cos(0,696) + \sin(0,696)] - \\ &= \frac{80 \cdot 10^6}{4 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 116,93 \cdot 10^5 \cdot (3,48 \cdot 10^{-3})^2} \cdot e^{-0,522} \cdot \sin(0,522) \\ &= -0,029 \text{ mm} \end{aligned}$$

Kut zaokreta:

$$\begin{aligned} \varphi = w' &= -\frac{F}{4EI_y \alpha^2} \cdot e^{-\alpha a} \cdot \sin(\alpha a) + \frac{M}{4EI_y \alpha} \cdot e^{-\alpha b} \cdot [\cos(\alpha b) - \sin(\alpha b)] = \\ &= -\frac{200 \cdot 10^3}{4 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 116,93 \cdot 10^5 \cdot (3,48 \cdot 10^{-3})^2} \cdot e^{-0,696} \cdot \sin(0,696) + \\ &= \frac{80 \cdot 10^6}{4 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 116,93 \cdot 10^5 \cdot 3,48 \cdot 10^{-3}} \cdot e^{-0,522} \cdot [\cos(0,522) - \sin(0,522)] \\ &= -2,615 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \end{aligned}$$

Moment savijanja:

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{F}{4\alpha} \cdot e^{-\alpha a} \cdot [\cos(\alpha a) - \sin(\alpha a)] - \frac{M}{2} \cdot e^{-\alpha b} \cdot \cos(\alpha b) \\ &= \frac{200 \cdot 10^3}{4 \cdot 3,48 \cdot 10^{-3}} \cdot e^{-0,696} \cdot [\cos(0,696) - \sin(0,696)] - \frac{80 \cdot 10^6}{2} \cdot e^{-0,522} \cdot \cos(0,522) \\ &= -19,67 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Poprečna sila:

$$\begin{aligned} T(x) &= -\frac{F}{2} \cdot e^{-\alpha a} \cdot \cos(\alpha a) - \frac{M\alpha}{2} \cdot e^{-\alpha b} \cdot [\cos(\alpha b) + \sin(\alpha b)] \\ &= -\frac{200}{2} \cdot e^{-0,696} \cdot \cos(0,696) - \frac{80 \cdot 3,48}{2} \cdot e^{-0,522} \cdot [\cos(0,522) + \sin(0,522)] \\ &= -151,04 \text{ kN} \end{aligned}$$

Naprezanja u točki C:

Normalno naprezanje:

$$\sigma_x^c = \frac{M(x)}{I_y} \cdot z_c = \frac{-19,67 \cdot 10^6}{116,93 \cdot 10^5} \cdot (-27,5) = 46,26 \text{ MPa (vlak)}$$

Posmično naprezanje:

$$\tau_{xz}^c = \frac{T(x) \cdot S_y^c}{I_y \cdot b_c} = \frac{-151,04 \cdot 10^3 \cdot 105000}{116,93 \cdot 10^5 \cdot 40} = -33,91 \text{ MPa}$$

Glavna naprezanja:

$$\sigma_{1,2}^c = \frac{\sigma_x^c}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x^c)^2 + 4 \cdot (\tau_{xz}^c)^2}$$

$$\sigma_1^c = \frac{46,26}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(46,26)^2 + 4 \cdot (-33,91)^2} = 64,18 \text{ MPa (vlak)}$$

$$\sigma_2^c = \frac{46,26}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(46,26)^2 + 4 \cdot (-33,91)^2} = -17,92 \text{ MPa (tlak)}$$

Glavne osi:

$$\sigma_x^c + \sigma_y^c = \sigma_1^c + \sigma_2^c$$

$$\sigma_z^c = 0$$

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2 \cdot \tau_{xz}^c}{\sigma_x^c} = \frac{2 \cdot (-33,91)}{64,18 + (-17,92)} = -1,466 \Rightarrow \varphi_0 = -27,85^\circ$$

$$\tan \varphi_{01} = \frac{\tau_{xz}^c}{\sigma_1^c - \sigma_z^c} = \frac{-33,91}{64,18 - 0} = -0,528 \Rightarrow \varphi_0 = -27,83^\circ$$

$$\tan \varphi_{02} = \frac{\tau_{xz}^c}{\sigma_2^c - \sigma_z^c} = \frac{-33,91}{-17,92 - 0} = 1,892 \Rightarrow \varphi_0 = 62,15^\circ$$

## 2. zadatak

Za nosač konačne duljine na elastičnoj podlozi treba odrediti funkcije za progib, kut zaokreta, moment savijanja i poprečnu silu. Poprečni presjek je kvadratni (0,4 m).

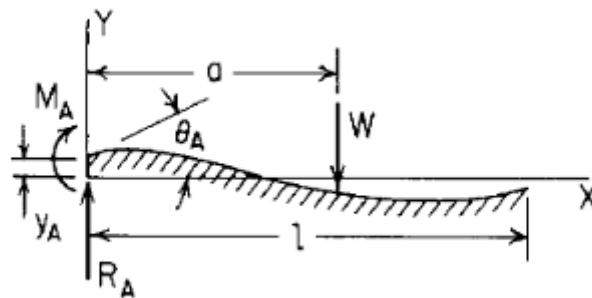
$$E = 21,7 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$k_1 = 10000 \text{ kN/m}^3$$

$$l = 10 \text{ m}$$

$$a = 3 \text{ m}$$

$$W = 300 \text{ kN}$$



Slika 9.2 Nosač konačne duljine na elastičnoj podlozi opterećen koncentriranom silom [5]

Zadatak treba riješiti u SAP-u ili ETABS-u i usporediti s analitičkim vrijednostima.

Karakteristike materijala i poprečnog presjeka:

$$I = \frac{0,4 \cdot 0,4^3}{12} = 2,13 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$\beta = \left( \frac{b \cdot k_1}{4EI} \right)^{\frac{1}{4}} = \left( \frac{0,4 \cdot 10000}{4 \cdot 21,7 \cdot 10^6 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3}} \right)^{\frac{1}{4}} = 0,38337 \frac{1}{\text{m}}$$

$$\beta l = 0,3833 \cdot 10 = 3,833 \text{ - nosač konačne duljine}$$

$$\beta(l - a) = 0,3833 \cdot (10 - 3) = 2,6831$$

Koeficijenti:



$$C_2 = \cosh \beta l \sin \beta l + \sinh \beta l \cos \beta l = -32,5234$$

$$C_3 = \sinh \beta l \sin \beta l = -14,7225$$

$$C_4 = \cosh \beta l \sin \beta l - \sinh \beta l \cos \beta l = 3,0508$$

$$C_{11} = (\sinh \beta l)^2 - (\sin \beta l)^2 = 532,7251$$

$$C_{a1} = \cosh[\beta(l-a)] \cos[\beta(l-a)] = -6,5903$$

$$C_{a2} = \cosh[\beta(l-a)] \sin[\beta(l-a)] + \sinh[\beta(l-a)] \cos[\beta(l-a)] = -3,2762$$

Napomena: vrijednosti koeficijenata dobivene su pomoću Excel tablice.

Koeficijenti, kut zaokreta i progib preuzeti su iz tablice 8.5., Young and Budynas, Roark's Formulas for Stress and Strain, za slobodno položeni nosač:

$$R_A = M_A = 0$$

$$\theta_A = \frac{W}{2EI\beta^2} \cdot \frac{C_2 \cdot C_{a2} - 2 \cdot C_3 \cdot C_{a1}}{C_{11}} = \frac{300}{2 \cdot 21,7 \cdot 10^6 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3} \cdot 0,3833^2} \cdot \frac{-32,5234 \cdot (-3,2762) - 2 \cdot (-14,7225) \cdot (-6,5903)}{532,7251}$$

$$= -3,69 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$y_A = \frac{W}{2EI\beta^3} \cdot \frac{C_4 \cdot C_{a1} - C_3 \cdot C_{a2}}{C_{11}} = \frac{300}{2 \cdot 21,7 \cdot 10^6 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3} \cdot 0,3833^3} \cdot \frac{3,0508 \cdot (-6,5903) - (-14,7225) \cdot (-3,2762)}{532,7251}$$

$$= -7,4 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -7,4 \text{ mm}$$

Progib u presjeku  $x = 3 \text{ m}$ :

Koeficijenti:

$$F_1 = \cosh \beta x \cos \beta x = 0,7098$$

$$F_2 = \cosh \beta x \sin \beta x + \sinh \beta x \cos \beta x = 2,1661$$

$$F_4 = \cosh \beta x \sin \beta x - \sinh \beta x \cos \beta x = 1,0052$$

$$F_{a4} = \cosh[\beta(x-a)] \sin[\beta(x-a)] - \sinh[\beta(x-a)] \cos[\beta(x-a)] = 0$$

$$y(x=3) = y_A \cdot F_1 + \frac{\theta_A}{2\beta} \cdot F_2 - \frac{W}{4EI\beta^3} \cdot F_{a4} = -7,4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,7098 + \frac{-3,69 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0,38337} \cdot 2,1661 - \frac{300}{4 \cdot 21,7 \cdot 10^6 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3} \cdot 0,38337^3} \cdot 0 = -0,0158 \text{ m} = -15,8 \text{ mm}$$

Predznaci progiba i kuteva zaokreta odnose se na koordinatni sustav na slici 9.2.

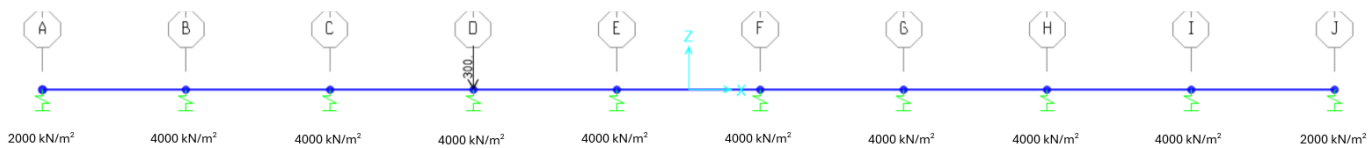
Kut zaokreta u presjeku  $x = 3$  m:

$$\theta(x = 3) = \theta_A \cdot F_1 - y_A \cdot \beta \cdot F_4 - \frac{W}{2EI\beta^2} \cdot F_{a3} = -3,69 \cdot 10^{-3} \cdot 0,7098 - (-7,4 \cdot 10^{-3}) \cdot 0,38337 \cdot 1,0052 - 0 = -2,78 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

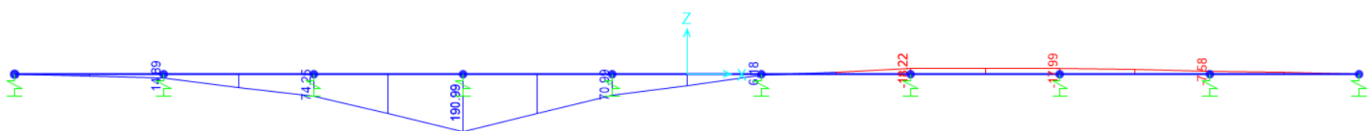
Moment savijanja u presjeku  $x = 3$  m:

$$\begin{aligned} M &= -y_A \cdot 2EI\beta^2 \cdot F_3 - \theta_A \cdot EI\beta \cdot F_4 \\ &= -(-7,4 \cdot 10^{-3}) \cdot 2 \cdot 21,7 \cdot 10^6 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3} \cdot 0,38337^2 \cdot 1,2966 \\ &\quad - (-3,69 \cdot 10^{-3}) \cdot 21,7 \cdot 10^6 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3} \cdot 0,38337 \cdot 1,0052 = 190,9 \text{ kNm} \end{aligned}$$

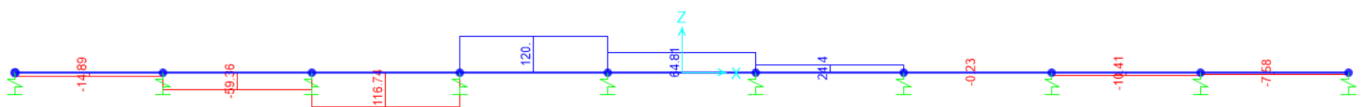
Numeričko rješenje:



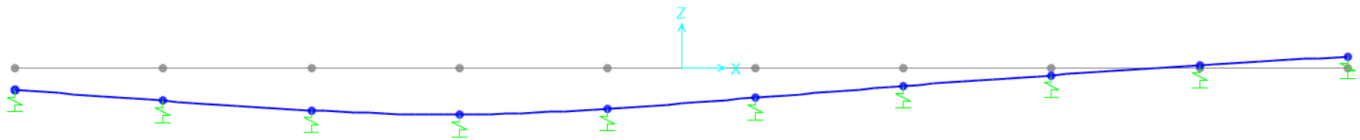
Slika 9.3 Model opterećen koncentriranom silom u presjeku D



Slika 9.4 Dijagram momenata savijanja



Slika 9.5 Dijagram poprečnih sila



Slika 9.6 Progibna linija

Tablica 9.1 Progibi i kutovi zaokreta u svim točkama nosača

Presjek:	A	B	C	D	E
U3 (mm)	-7,446	-11,116	-14,345	-15,815	-13,799
R2 (rad)	0,003711	0,00355	0,002587	-0,000278	-0,003107

Presjek:	F	G	H	I	J
U3 (mm)	-10,1	-6,159	-2,545	0,708	3,79
R2 (rad)	-0.00394	-0.00381	-0.003419	-0.003143	-0.003061

Usporedba analitičkih i numeričkih vrijednosti za progib i kut zaokreta:

Tablica 9.2 Usporedba analitičkih i numeričkih vrijednosti

x (m)	Progib (mm):		Kut zaokreta (rad):	
	0	3,0	0	3,0
Analitički	-7,4	-15,8	-0,00369	-0,000278
Numerički	-7,45	-15,82	-0,00371	-0,000278

Razlika između analitičkog i numeričkog rješenja iznosi oko 1%.

## 10. ZAKLJUČAK

Ovaj rad naglašava ključnu ulogu nosača na elastičnoj podlozi u modernom inženjerstvu. Korištenje ovih nosača omogućuje ravnomjernu raspodjelu opterećenja, povećanu stabilnost te smanjenje vibracija u konstrukcijama. Elastične podloge znatno umanjuju negativne posljedice koncentriranih opterećenja i neujednačenih slijeganja, što doprinosi dugotrajnosti i otpornosti konstrukcija.

Rad uključuje proračune unutarnjih sila i deformacija za razne vrste nosača uz različite rubne uvjete te uspoređuje analitičke i numeričke metode rješavanja. Pokazano je da su odstupanja minimalna, manja od 1%, što ukazuje na visoku preciznost analitičkih izraza.

Nosači na elastičnoj podlozi pokazuju izuzetnu prilagodljivost u širokom spektru inženjerskih primjena, uključujući potporne zidove mostova te temelje za strojeve i zgrade. Njihova prisutnost je također vidljiva u temeljima tehničkih konstrukcija, poput pragova ispod željezničkih tračnica i temeljnih greda tračnica lučkih dizalica. U slučajevima kada su konstrukcije izložene raznolikim opterećenjima, njihova važnost u suvremenom inženjerskom projektiranju dodatno dolazi do izražaja, pridonoseći optimizaciji gradnje i smanjenju troškova održavanja.

## POPIS LITERATURE

- [1] Šimić, V.: Otpornost Materijala II, Školska knjiga, Zagreb, 1995.
- [2] Hetényi, M.: Beams on Elastic Foundation: Theory With Applications in the Fields of Civil and Mechanical Engineering, University of Michigan Press, 1952.
- [3] Bassin, M., Brodsky, S., Wolkoff, H.: Statics and Strength of Materials, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [4] Šimić, V.: Otpornost Materijala I, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- [5] Young, W., Budynas, R.: Roark's formulas for Stress and Strain, McGraw-Hill, New York, 2001.
- [6] Alfirević, I.: Nauka o čvrstoći II, Golden marketing, Zagreb, 1999.
- [7] Brnčić, V.: Otpornost materijala, Građevinska knjiga, Beograd, 1982.

## POPIS SLIKA

Slika 2.1 Nosač na elastičnoj podlozi [1].....	2
Slika 2.2 Ovisnost reakcije o progibu [1].....	3
Slika 3.1 Nosač opterećen koncentriranim silama [1].....	4
Slika 4.1 Reakcije nosača na koncentrirano opterećenje [1] .....	7
Slika 4.2 Desni dio nosača [1] .....	7
Slika 4.3 Opterećenje nosača i poprečni presjek.....	10
Slika 4.4 Grafovi progiba, kuta zaokreta i unutarnjih sila.....	11
Slika 4.5 Nosač opterećen koncentriranim silama [1].....	13
Slika 4.6 Točka u opterećenom dijelu [1] .....	14
Slika 4.7 Točka izvan neopterećenog dijela [1].....	15
Slika 4.8 Opterećenje koncentriranim momentom [1].....	16
Slika 5.1 Polubeskonačno dugi nosač opterećen momentom i silom [1] .....	17
Slika 5.2 Proračun superpozicijom [1].....	19
Slika 6.1 Konačno dugi nosač na elastičnoj podlozi [1].....	20
Slika 6.2 Grafički prikaz odnosa progiba i $\alpha l$ [1] .....	22
Slika 6.3 Linearna reakcija sustava [1] .....	23
Slika 7.1 Nosač na jednako razmaknutim ležajevima [1].....	24
Slika 9.1 Opterećenje nosača i poprečni presjek.....	27
Slika 9.2 Nosač konačne duljine na elastičnoj podlozi opterećen koncentriranom silom [5] .....	30
Slika 9.3 Model opterećen koncentriranom silom u presjeku D .....	32
Slika 9.4 Dijagram momenata savijanja .....	32
Slika 9.5 Dijagram poprečnih sila .....	32
Slika 9.6 Progibna linija.....	33

## POPIS TABLICA

Tablica 2.1 Moduli podloge za materijale [1] .....	2
Tablica 9.1 Progibi i kutovi zaokreta u svim točkama nosača.....	33
Tablica 9.2 Usporedba analitičkih i numeričkih vrijednosti.....	33