

# Određivanje naprezanja opterećenih tankostjenih posuda

---

**Klapač, Martin**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:962373>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-03**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Martin Klapač

# **ODREĐIVANJE NAPREZANJA OPTEREĆENIH TANKOSTIJNIH POSUDA**

ZAVRŠNI ISPIT

Zagreb, 2024.



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Martin Klapač

# **ODREĐIVANJE NAPREZANJA OPTEREĆENIH TANKOSTIJNIH POSUDA**

ZAVRŠNI ISPIT

prof. dr. sc. Diana Šimić Penava

Zagreb, 2024.



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Martin Klapač

**STRESS DETERMINATION IN LOADED  
THIN-WALLED CONTAINERS**

FINAL EXAM

prof. dr. sc. Diana Šimić Penava

Zagreb, 2024.



OBRAZAC 3

POTVRDA O POZITIVNOJ OCJENI PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Student/ica :

Martin Klapač

(Ime i prezime)

0082062992

(JMBAG)

zadovoljio/la je na pisanom dijelu završnog ispita pod naslovom:

Određivanje naprezanja opterećenih tankostjenih posuda

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

Stress determination in loaded thin-walled containers

(Naslov teme završnog ispita na engleskom jeziku)

i predlaže se provođenje daljnjeg postupka u skladu s Pravilnikom o završnom ispitu i diplomskom radu Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta.

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu znanstvenog projekta: (upisati ako je primjenjivo)

(Naziv projekta, šifra projekta, voditelj projekta)

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu stručne prakse na Fakultetu: (upisati ako je primjenjivo)

(Ime poslodavca, datum početka i kraja stručne prakse)

Datum:

15.9.2024.

Mentor:

Diana Šimić Penava

Potpis mentora:

*Diana Šimić Penava*

Komentor:



OBRAZAC 5

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja :

Martin Klapač, 0082062992

(Ime i prezime, JMBAG)

student/ica Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta ovim putem izjavljujem da je moj pisani dio završnog ispita pod naslovom:

Određivanje napreznaja opterećenih tankostijenih posuda

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

izvorni rezultat mojega rada te da se u izradi istoga nisam koristio/la drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

Datum:

17.09.2024.

Potpis:



OBRAZAC 6

IZJAVA O ODOBRENJU ZA POHRANU I OBJAVU PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Ja :

Martin Klapač, 19577386823

(Ime i prezime, OIB)

ovom izjavom potvrđujem da sam autor/ica predanog pisanog dijela završnog ispita i da sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti odgovara sadržaju dovršenog i obranjenog pisanog dijela završnog ispita pod naslovom:

Određivanje naprezanja opterećenih tankostijenih posuda

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

koji je izrađen na sveučilišnom prijediplomskom studiju Građevinarstvo Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta pod mentorstvom:

Diana Šimić Penava

(Ime i prezime mentora)

i obranjen dana:

24.09.2024.

(Datum obrane)

Suglasan/suglasna sam da pisani dio završnog ispita bude javno dostupan, te da se trajno pohrani u digitalnom repozitoriju Građevinskog fakulteta, repozitoriju Sveučilišta u Zagrebu te nacionalnom repozitoriju.

Datum:

17.09.2024.

Potpis:

## ZAHVALE

Zahvaljujem se svim kolegama, profesorima i najviše mentorici Diani Šimić Penavi na svemu što nas je naučila na kolegiju Otpornost materijala 1 i na svim korisnim savjetima prilikom pisanja ovog Završnog rada. Najveće zahvale idu mojoj obitelji bez koje sve ovo ne bi bilo moguće.



## SAŽETAK

Ovaj završni rad bavi se analizom naprezanja u tankostijenim posudama pod opterećenjem. Kroz teorijsku analizu i proračune, istraženi su obodni i aksijalni naponi te njihova raspodjela unutar tankostijenih posuda pod unutarnjim pritiskom. U uvodnom dijelu rada objašnjene su osnovne karakteristike tankostijenih posuda te je dana teorijska podloga za razumijevanje naprezanja u ovim specifičnim konstrukcijama. Detaljno su analizirane tanke sferne posude, tanke cilindrične posude, tanki kružni prstenovi. U ovom završnom radu obrađena je Laplaceova jednačba kao osnovna jednačba za rješavanje problematike naprezanja u tankostijenim posudama. Dobiveni zaključci ukazuju na značaj pravilne analize naprezanja pri projektiranju tankostijenih posuda u industrijskoj primjeni, posebice u kemijskoj, naftnoj i energetske industrije. Riješena su dva numerička primjera na kojim se računalo opterećenje i stanje naprezanja.

**Ključne riječi:** naprezanja, deformacije, opterećenja, tankostijene posude, tanki kružni prstenovi, Laplaceova jednačba, tanke sferne posude, tanke cilindrične posude

## SUMMARY

This thesis deals with the analysis of stresses in thin-walled pressure vessels under load. Through theoretical analysis and calculations, circumferential and axial stresses and their distribution within spherical vessels under internal pressure were investigated. The introductory part of the thesis explains the basic characteristics of thin-walled vessels and provides the theoretical background for understanding the stresses in these specific structures. Thin spherical vessels, thin cylindrical vessels, and thin circular rings were analyzed in detail. In this thesis, Laplace's equation is addressed as the fundamental equation for solving stress problems in thin-walled vessels. The conclusions drawn emphasize the importance of proper stress analysis in the design of thin-walled vessels for industrial applications, particularly in the chemical, petroleum, and energy industries. Two numerical examples were solved to calculate the load and stress state.

**Key words:** stresses, deformations, loads, thin-walled vessels, Thin circular rings, Laplace's equation, thin spherical vessels, thin cylindrical vessels

## SADRŽAJ

<b>ZAHVALE .....</b>	<b>i</b>
<b>SAŽETAK .....</b>	<b>ii</b>
<b>SUMMARY.....</b>	<b>iii</b>
<b>SADRŽAJ .....</b>	<b>iv</b>
<b>1. UVOD .....</b>	<b>1</b>
<b>2. METODE I TEHNIKE RADA.....</b>	<b>2</b>
<b>3. OPĆI POJMOVI O POSUDAMA TANKIH STIJENKI.....</b>	<b>3</b>
3.1. Općenito o posudama tankih stijeni.....	3
3.2. Karakteristike posuda tankih stijenki.....	4
3.3. Primjena posuda tankih stijenki .....	6
3.4. Prednosti posuda tankih stijenki .....	6
<b>4. NAPREZANJA I DEFORMACIJE POSUDA TANKIH STIJENKI .....</b>	<b>7</b>
<b>5. TANKA SFERNA POSUDA .....</b>	<b>11</b>
5.1. Općenito o tankim sfernim posudama .....	11
5.2. Proračun opterećenja tankih sfernih posuda .....	12
5.3. Primjer tankih sfernih posuda .....	14
<b>6. TANKA CILINDRIČNA POSUDA .....</b>	<b>15</b>
6.1. Općenito o tankim cilindričnim posudama.....	15
6.2. Proračun opterećenja tankih cilindričnih posuda.....	15
6.3. Primjer tankih cilindričnih posuda .....	17
<b>7. TANKI KRUŽNI PRSTEN .....</b>	<b>18</b>
7.1. Općenito o tankim kružnim prstenovima .....	18
7.2. Proračun opterećenja tankih kružnih prstenova .....	18
7.3. Primjer tankih kružnih prstenova .....	20
<b>8. PRVI ZADATAK .....</b>	<b>21</b>
<b>9. DRUGI ZADATAK .....</b>	<b>25</b>
<b>10. ZAKLJUČAK .....</b>	<b>29</b>
<b>POPIS LITERATURE .....</b>	<b>30</b>
<b>POPIS SLIKA .....</b>	<b>31</b>

## 1. UVOD

Tankostijene posude pod tlakom igraju ključnu ulogu u mnogim industrijama, uključujući kemijsku, naftnu, farmaceutsku i energetska industriju. One se koriste za skladištenje tekućina i plinova pod visokim pritiskom, što ih čini neizostavnim dijelom industrijskih postrojenja. Zbog svoje tanke stijenke u odnosu na prečnik, ove posude moraju biti precizno projektirane kako bi mogle izdržati unutarnje i vanjske sile bez strukturnih oštećenja ili neuspjeha.

U okviru ovog završnog rada istražuju se osnovni koncepti vezani uz naprezanja, deformacije i opterećenja kod tankostijenih posuda, s naglaskom na tanke sferne i cilindrične posude, kao i tanki kružni prstenovi. Posebna pažnja posvećena je analizi raspodjele naprezanja unutar ovih posuda te utjecaju unutarnjeg pritiska na njihovu strukturalnu stabilnost.

Razmatrajući teorijske osnove i proračune temeljene na Laplaceovoj jednadžbi, rad analizira ključne parametre koji utječu na sigurnost i učinkovitost posuda u industrijskoj primjeni. U ovom kontekstu, pravilno razumijevanje i primjena teorije naprezanja od presudnog su značaja za dizajniranje posuda koje zadovoljavaju sigurnosne standarde u zahtjevnim uvjetima rada.

Kroz numeričke primjere i teoretske analize, ovaj rad ima za cilj doprinijeti boljem razumijevanju ponašanja tankostijenih posuda pod različitim uvjetima opterećenja te naglasiti važnost preciznih proračuna u inženjerskoj praksi.

## 2. METODE I TEHNIKE RADA

U ovom radu korištene su različite metode i tehnike za analizu naprezanja i opterećenja tankostijenih posuda. Primarno su korištene teorijske metode temeljene na klasičnim inženjerskim principima otpornosti materijala i teorije elastičnosti. Glavna metoda proračuna naprezanja unutar tankostijenih sfernih i cilindričnih posuda temelji se na Laplaceovoj jednadžbi, koja se koristi za opisivanje odnosa između unutarnjeg pritiska i naprezanja u stijenkama posude. Osim teorijskih proračuna, korištene su i numeričke metode koje su preko dva numerička primjera prikazale stanje naprezanja te određivanje pritiska. Kombinacijom teorijskih i numeričkih metoda nam je omogućena precizna analiza naprezanja i deformacija, čime su potvrđeni teoretski modeli i njihova primjenjivost u praksi.

### 3. OPĆI POJMOVI O POSUDAMA TANKIH STIJENKI

#### 3.1. Općenito o posudama tankih stijeni

Posude tankih stijeni su konstrukcije čija je debljina stijenke značajno manja od njihovih ostalih dimenzija, posebno radijusa. Tipično se smatraju tankostijenim ako je omjer radijusa (R) prema debljini stijenke (t) veći od 10 ( $R/t > 10$ ).

Ovisno o obliku plohe posude razlikujemo cilindrične, sferne i druge tankostijene posude.

U tehničkim konstrukcijama pojavljuju se vrlo često u obliku rezervoara, kotlova i slično, koji služe za zadržavanje tekućina ili plinova pod pritiskom.

Pri promatranju posuda tankih stijeni može se zanemariti savijanje, koje se pojavljuje samo u okolici pričvršćenja ili nagle promjene debljine ili zakrivljenosti stijenke, tako da se na dovoljnoj udaljenosti od tih mjesta može uzeti da su naprezanja po debljini stijenke jednako raspoređena.



**Slika 1.:** Primjer tankostijene posude, sprinkler tank (Izvor: <https://iit.ie/galvanised-sprinkler-tanks/>)

### 3.2. Karakteristike posuda tankih stijenki

Tankostijene posude imaju nekoliko specifičnih karakteristika koje ih čine jedinstvenima u inženjerskim primjenama. Njihova geometrija, raspodjela naprezanja i ponašanje pod tlakom razlikuju ih od debelostijenih posuda, a njihove karakteristike omogućuju lagane, ali čvrste konstrukcije koje se koriste u mnogim industrijama.



**Slika 2.:** Primjer tankostijene posude, kanalizacijske pvc cijevi

(Izvor: <https://www.vodoskok.hr/prodajni-program/sustavi-odvodnje-otpadnih-i-oborinskih-voda/pvc-cijevi-i-spojni-dijelovi-za-ulic>)

Ključna karakteristika tankostijenih posuda je omjer radijusa  $R$  prema debljini stijenke  $t$ , omjer  $R/t$  mora biti veći od 10, tj.  $R/t > 10$ . Ovaj uvjet omogućava pojednostavljenje analiza naprezanja, jer se pretpostavlja da su naprezanja u stijenki jednoliko raspoređena i ne mijenjaju se značajno kroz debljinu stijenke.

- **Radijus posude  $R$ :** Radijus je mjera udaljenosti od središta posude do njezine unutarnje površine. Kod cilindričnih posuda, radijus je konstantan u svim presjecima posude, dok kod sfernih posuda predstavlja sferni radijus
- **Debljina stijenke  $t$ :** Debljina stijenke je mjera koliko je "debela" struktura posude. Kod tankostijenih posuda, debljina stijenke je relativno mala u usporedbi s radijusom

Jedna od drugih ključnih karakteristika tankostijenih posuda je način na koji se naprezanja raspodjeljuju kroz debljinu stijenke. Budući da je debljina mala u odnosu na radijus, pretpostavlja se da je naprezanje konstantno kroz cijelu debljinu stijenke.

To znači da možemo zanemariti promjene naprezanja u radijalnom smjeru i fokusirati se na obodna i uzdužna naprezanja.

- Obodno naprezanje: U tankostijenim posudama, obodno naprezanje je najveće jer se javlja duž oboda posude. To je naprezanje koje najviše utječe na stabilnost posude i njezinu otpornost na unutarnji tlak.
- Uzdužno naprezanje: Djeluje duž osi cilindra u cilindričnim posudama. Uzdužno naprezanje je obično manje od obodnog, ali je također važan faktor u analizi stabilnosti posude.
- Radijalno naprezanje: Radijalno naprezanje djeluje u smjeru od unutarnje prema vanjskoj stijenci posude. Kod tankostijenih posuda, radijalno naprezanje je mnogo manje u odnosu na obodno i uzdužno naprezanje i često se može zanemariti.

Tankostijene posude su posebno osjetljive na unutarnji ili vanjski tlak zbog svoje tanke stijenke. Karakteristika tankostijenih posuda je da se pod unutarnjim tlakom deformiraju prema vani, dok se pod vanjskim tlakom deformiraju prema unutra.



### 3.3. Primjena posuda tankih stijenki

Tankostijene posude koriste se u mnogim industrijama zbog svoje učinkovitosti, izdržljivosti i relativno male težine. Evo industrija u kojima se najviše koriste:

- kemijska i petro-kemijska industrija,
- naftna i plinska industrija,
- zrakoplovna i svemirska industrija,
- automobilska industrija,
- brodogradnja i pomorstvo,
- energetika,
- farmaceutska i prehrambena industrija,
- graditeljstvo

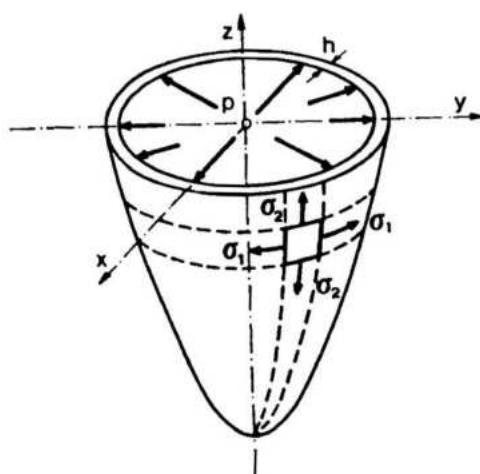
### 3.4. Prednosti posuda tankih stijenki

Neke od prednosti tankostijenih posuda u odnosu na debelostijene posude su:

- Lagana konstrukcija: Zbog tanke stijenke, tankostijene posude teže mnogo manje u odnosu na svoje debelostijene ekvivalente. To je ključno u industrijama gdje je masa važan faktor, poput zrakoplovstva, svemirske industrije i automobilske industrije.
- Manja potrošnja materijala: Tankostijene posude zahtijevaju manje materijala za izradu, što ih čini isplativijima i efikasnijima. Ova ušteda materijala također smanjuje ukupne troškove proizvodnje.
- Visoka otpornost na unutarnji tlak: Zbog optimalne raspodjele naprezanja, osobito kod sfernih posuda, tankostijene posude mogu podnijeti visoke unutarnje tlakove uz relativno malu debljinu stijenke.

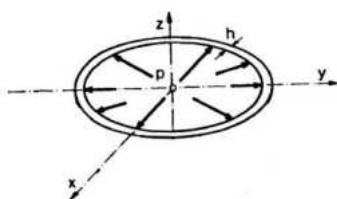
#### 4. NAPREZANJA I DEFORMACIJE POSUDA TANKIH STIJENKI

Pri promatranju posuda tankih stijenki može se zanemariti savijanje, koje se pojavljuje samo u okolini pričvršćenja ili nagle promjene debljine ili zakrivljenosti stijenke, tako da se na dovoljnoj udaljenosti od tih mjesta može uzeti da su naprezanja po debljini stijenke posude raspodijeljena jednoliko. Promatrat ćemo posudu tankih stijenki, konstantne debljine  $h$ , u obliku rotacijske plohe simetrične u odnosu na os  $z$  i podvrgnute unutarnjem pritisku  $p$ , raspodijeljenom simetrično s obzirom na os rotacijske simetrije.



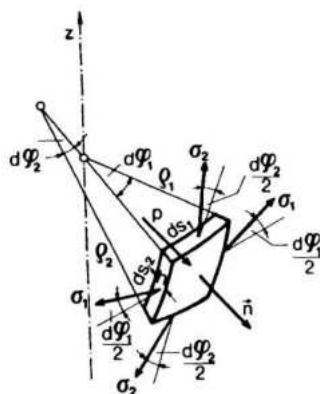
Slika 3.: Posuda tankih stijenki konstantne debljine  $h$

Presjeci okomiti na os  $z$  imaju oblik kružnog prstena različitog polumjera. Presjek takve posude s ravninom u kojoj leži os simetrije naziva se meridijanski presjek koji je i ujedno i ravnina simetrije posude



Slika 4.: Meridijanski presjek (ravnina simetrije posude)

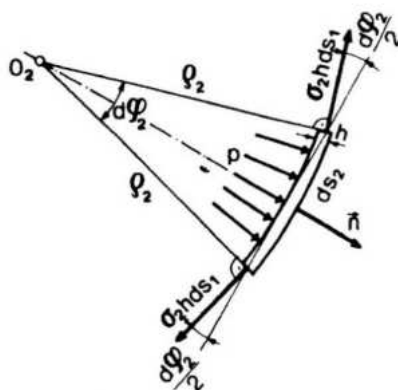
Kada dvjema meridijanskim ravninama i dvjema ravninama okomitim na meridijan iz promatrane posude izrežemo beskonačno mali element duljine stranica  $ds_1$  i  $ds_2$ .



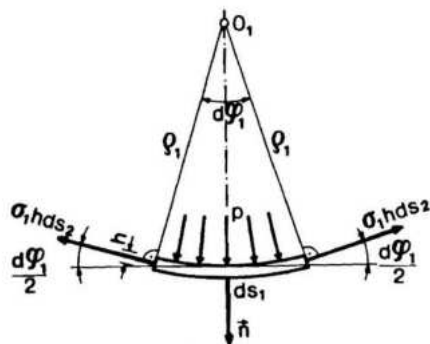
Slika 5.: Izrezani beskonačno mali element

S  $\rho_2$  je označen polumjer zakrivljenosti luka u meridijanskoj ravnini, a s  $\rho_1$  u ravnini okomitoj na meridijan, tako da je  $d_{s1} = \rho_1 d\varphi_1$  i  $d_{s2} = \rho_2 d\varphi_2$ . Bočne stijenke elementa djeluju samo normalna napreznja  $\sigma_1$  u cirkularnom i  $\sigma_2$  u meridijanskom smjeru.

Djelovanjem unutarnjim pritiskom p na posudu ona odgovara sa normalnim napreznjima  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ .



Slika 6.:  $ds_2$



Slika 7.: ds1

Ako sve sile projiciramo na smjer vanjske normale elementa plohe, dobivamo:

$$pd_{s1}d_{s2} - 2\sigma_1hds2 \sin \frac{d\varphi_1}{2} - 2\sigma_1hds2 \sin \frac{d\varphi_2}{2} = 0$$

(4.1.1.)

Kako se radi o beskonačno malom djelu posude, uz pretpostavku, dalje možemo računati:

$$\sin \frac{d\varphi_1}{2} \approx \frac{d\varphi_1}{2}$$

$$\sin \frac{d\varphi_2}{2} \approx \frac{d\varphi_2}{2}$$

(4.2.2.)

$$d\varphi_1 = \frac{ds_1}{\rho_1}$$

$$d\varphi_2 = \frac{ds_2}{\rho_2}$$

(4.3.3.)

Slijedi:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{h}$$

(4.3.3.)

Jednadžba (4.3.3.) predstavlja **Laplaceovu jednadžbu**. To je osnovna jednadžba za određivanje napreznja u posudama tankih stijenki.

Budući da jednadžba sadrži dvije nepoznate komponente napreznja, potrebno je postaviti još jednu jednadžbu. Meridijanska  $\sigma_2$  i cirkularna  $\sigma_1$  napreznja u jednadžbi glavna su napreznja. Treće glavno napreznje  $\sigma_3$ , usmjereno u smjeru normale na površinu elementa, na unutarnjoj strani posude  $\sigma_3 = -p$ , a na vanjskoj strani  $\sigma_3 = 0$ .

U posudama tankih stijenki uvijek je  $\sigma_1$  i  $\sigma_2 > p$ , što znači da veličinu  $p$  možemo zanemariti u usporedbi s  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , tj. uzeti da je  $\sigma_3 = 0$ , tako da se element posude nalazi u dvoosnom stanju napreznja s glavnim napreznjima  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ .

Deformacije u cirkularnom i meridijanskom smjeru računaju se prema sljedećim izrazima:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_1 - \nu \cdot \sigma_2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_2 - \nu \cdot \sigma_1)$$

( 4.4.4 )

## 5. TANKA SFERNA POSUDA

### 5.1. Općenito o tankim sfernim posudama

Tanke sferne posude su posebna vrsta posuda tankih stijena koje se koriste za skladištenje tekućina ili plinova pod visokim pritiskom. Njihova geometrija u obliku sfere omogućava optimalno raspoređivanje unutarnjih naprezanja po čitavoj površini, što ih karakterizira kao vrlo efikasnim i sigurnim za primjenu u raznim industrijama.

Sferne posude, kako se može zaključiti i po samom imenu, imaju oblik sfere, što im omogućava ravnomjernu raspodjelu unutarnjeg pritiska na sve strane. Kod ovakvih posuda omjer promjera i debljine stijenke je vrlo velik, što ih karakterizira tankostijenim konstrukcijama.

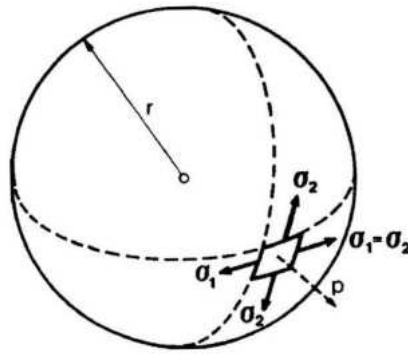
Specifična geometrija omogućava:

- **Manje naprezanja** za isti unutarnji pritisak u odnosu na druge oblike (npr. cilindrične posude).
- **Manje deformacije** jer se sav unutarnji pritisak ravnomjerno raspodjeljuje kroz stijene posude.

Najveća prednost posuda sfernih oblika je u tome što ne postoje kritične točke koncentracije naprezanja, kakve se često javljaju kod cilindričnih posuda, posebno na spojevima ili na ravnim površinama.

## 5.2. Proračun opterećenja tankih sfernih posuda

Zbog centralne simetrije posude i opterećenja vrijedi nam sljedeće:



**Slika 8.:** Tanka sferna posuda polumjera  $r$  i debljine stijenke  $h$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$$

(5.1.1.)

$$\rho_1 = \rho_2 = r$$

(5.2.2.)

Pomoću Laplaceove jednadžbe (4.3.3.) dobivamo sljedeće

$$\frac{2\sigma}{r} = \frac{\rho}{h}$$

(5.3.3.)

ili

$$\sigma = \frac{\rho r}{2h}$$

(5.4.4.)

Opseg sferne posude u bilo kojoj dijametralnoj ravnini prije deformacija jednak je  $2\pi r$ , a nakon deformacije je  $2\pi(r + \Delta r)$ . Relativna deformacija opsega glasi:

$$\varepsilon = \frac{2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r}$$

(5.5.5.)

Prema izrazu (4.4.4.)

$$\varepsilon = \frac{1}{E} (\sigma - \nu\sigma) = \frac{1-\nu}{E} \sigma = \frac{1-\nu}{E} \frac{p r}{2 h} = \frac{\Delta r}{r}$$

(5.6.6.)

Dalje dobivamo izraz za povećanje polumjera:

$$\Delta r = \frac{1-\nu}{E} \frac{p r^2}{2 h}$$

(5.7.7.)

Volumenska deformacija:

$$\varepsilon_v = 3\varepsilon = 3 \frac{1-\nu}{E} \sigma = 3 \frac{1-\nu}{E} \frac{p r}{2 h}$$

(5.8.8.)



### 5.3. Primjer tankih sfernih posuda



**Slika 9.:** Industrijski sferni spremnici (Izvor: <https://www.eurotanks.eu/lpg-spherical-tanks/>)

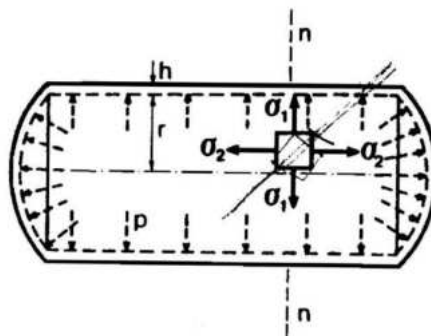
## 6. TANKA CILINDRIČNA POSUDA

### 6.1. Općenito o tankim cilindričnim posudama

Tanka cilindrična posuda je vrsta posude tankih stijena, koja se koristi za skladištenje tekućina ili plinova pod pritiskom. Zbog svog cilindričnog oblika, ova posuda doživljava različite vrste naprezanja kada je izložena unutarnjem pritisku, uključujući obodna i uzdužna naprezanja.

Cilindričan oblik omogućava veću zapreminu za skladištenje tekućina ili plinova, dok zid posude malih debljina omogućava uštedu materijala.

### 6.2. Proračun opterećenja tankih cilindričnih posuda



Slika 10.: Tanka cilindrična posuda debljine stijenke  $h$

Za cilindrične posude vrijedi:

$$\rho_1 = r$$

(6.1.1.)

$$\rho_2 = \infty$$

(6.2.2.)

Laplaceova jednađba prima oblik:

$$\frac{\sigma_1}{r} + \frac{\sigma_2}{\infty} = \frac{p}{h}$$
$$\sigma_1 = \frac{p r}{h}$$

(6.3.3.)

Za određivanje naprežanja  $\sigma_2$  presijecimo cilindričnu posudu ravninom okomitom na os ponude i promotrimo ravnotežu odrezanog dijela posude.

$$\sigma_2 = \frac{p r}{2 h}$$

(6.4.4.)

Naprežanje  $\sigma_1$  u cirkularnom smjeru dvaput je veće od normalnog naprežanja  $\sigma_2$  u uzdužnome smjeru.

Opseg poprečnog presjeka posude prije deformacije jednak je  $2\pi r$ , a nakon deformacije je  $2\pi(r + \Delta r)$ .

Deformacija je u cirkularnom smjeru:

$$\varepsilon = \frac{2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r}$$

(6.5.5.)

### 6.3. Primjer tankih cilindričnih posuda

Primjer tanke cilindrične posude, zavareni čelični spremnik pod tlakom konstruiran je kao horizontalni cilindar s kupolastim krajevima. Poklopac za pristup vidi se na jednom kraju, a ispusni ventil nalazi se u donjem središnjem dijelu.



**Slika 11.:** Zavareni čelični spremnik (Izvor: [https://en.wikipedia.org/wiki/Pressure\\_vessel](https://en.wikipedia.org/wiki/Pressure_vessel))

## 7. TANKI KRUŽNI PRSTEN

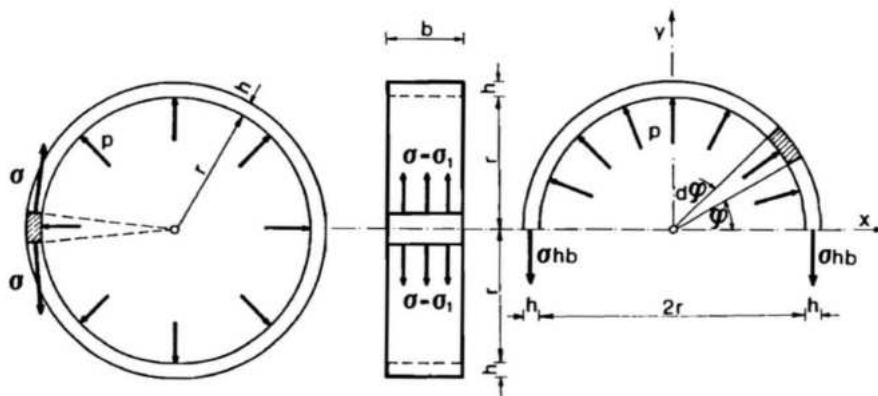
### 7.1. Općenito o tankim kružnim prstenovima

Tanki kružni prsten je vrsta posude tankih stijenki koja se često koristi u inženjerskim primjenama kada je potrebno poduprijeti opterećenje ili pritisak duž oboda kružne strukture. Takve prstenaste konstrukcije mogu se pojaviti u različitim tehničkim primjenama, poput cjevovoda, prstenova u ležajevima, ili spremnika pod pritiskom.

### 7.2. Proračun opterećenja tankih kružnih prstenova

Tanki kružni prsten, na slici 1., podvrgnemo opterećenju unutarnjeg pritiska  $p$ .

Pod djelovanjem unutarnjeg pritiska  $p$  dolazi do jednolikog rastezanja prstena. U prstenu će se pojaviti naprezanje samo u cirkularnom smjeru, koja su zbog rotacijske simetrije prstena i opterećenja u svim radijalnim presjecima jednaka. Za uzdužni smjer naprezanja su jednaka nuli, jer u tom smjeru nema vanjskih opterećenja, a deformacija prstena nije podvrgnuta nikakvom ograničenju.



**Slika 12.:** Tanki kružni prsten polumjera  $r$ , debljine stijenki  $h$  i širine  $b$

Za prsten vrijedi sljedeće:

$$\rho_1 = r; \quad \rho_2 = \infty$$

(7.1.1.)

$$\sigma_1 = \sigma; \quad \sigma_2 = \sigma$$

(7.2.2.)

Nadalje, pomoću Hookeova zakona dobivamo:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{p r}{E h} = \frac{\Delta r}{r}$$

(7.3.3.)

Gdje je povećanje volumena:

$$\Delta r = \frac{p r^2}{E h}$$

(7.4.4.)

### 7.3. Primjer tankih kružnih prstenova

Priključci za cijevne elemente, sa slike Slika 1., jedni su od mnogih vrsta tankih kružnih prstenova. Koristi se za razne industrije, uključujući petrokemiju, naftnu i plinsku industriju, farmaceutiku, proizvodnju energije i mnoge druge.



**Slika 13.:** Primjer tankih kružnih prstena, priključci za cijevne elemente (Izvor: <https://www.universalmetalcorporation.com/products/tube-fittings/>)

## 8. PRVI ZADATAK

Kroz sustav od dvije cijevi (prstena), čelične i betonske, prolazi tekućina pod pritiskom „ $p$ “, te se pritom čelična cijev ohladi za  $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Odredi maksimalni dopušteni pritisak „ $p$ “ ako betonska cijev ne može preuzeti vlačna naprezanja ( $\sigma_{\text{beton}} \leq 0$ ).

$E_b=30\text{ GPa}$ ;

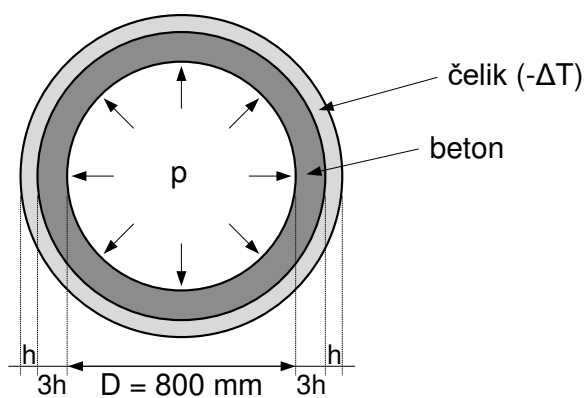
$E_{\text{č}}=210\text{ GPa}$ ;

$\alpha_{T,\text{č}} = 1,7 \cdot 10^{-5}\text{ 1/K}$ ;

$\Delta T=-50\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;

$D=800\text{ mm}$ ;

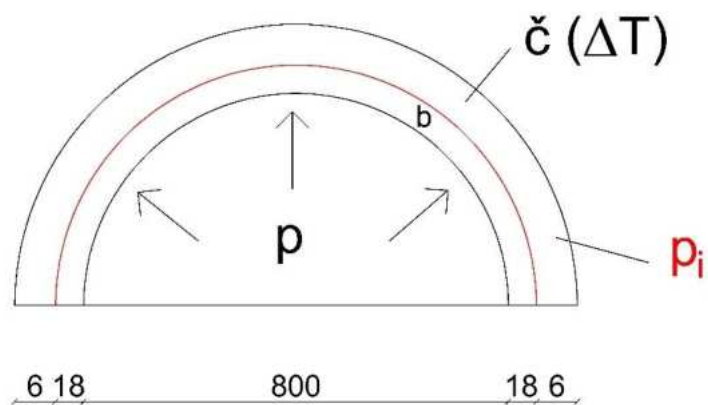
$h=6\text{ mm}$ .



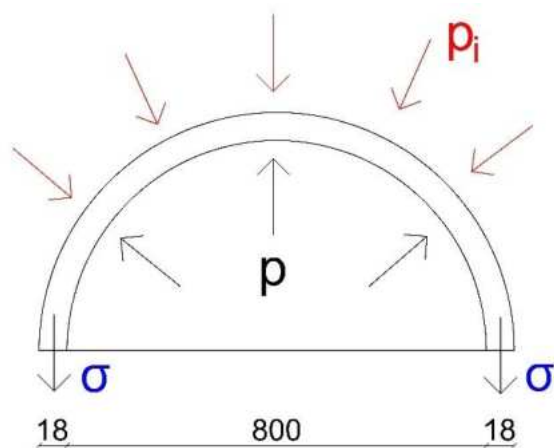


$$E_b = 30 \text{ GPa} = 30 \cdot 10^3 \text{ MPa}$$

$$E_{\check{c}} = 210 \text{ GPa} = 210 \cdot 10^3 \text{ MPa}$$



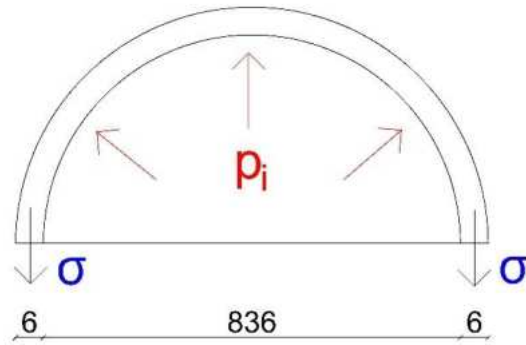
Slika 14.: Presjek skice zadatka



Slika 15.: Beton

$$\sigma_b = \frac{p \cdot 800 - 836 \cdot p_i}{36}$$

$$\sigma_b = \frac{200}{9} p - \frac{209}{9} p_i$$



Slika 16.: Čelik

$$\sigma_{\zeta} = \frac{p_i \cdot 836}{12} = \frac{209 \cdot p_i}{3}$$

## UVJET DEFORMACIJE

$$\varepsilon_b = \varepsilon_{\zeta}$$

$$\frac{\sigma_b}{E_b} = \frac{\sigma_{\zeta}}{E_b} + \alpha_T \cdot \Delta T \quad (-50 \cdot 1,7 \cdot 10^{-5})$$

$$\frac{200 \cdot p}{9 \cdot 30 \cdot 10^3} - \frac{209 \cdot p_i}{9 \cdot 30 \cdot 10^3} = \frac{209 \cdot p_i}{9 \cdot 210 \cdot 10^3} - 8,5 \cdot 10^{-4}$$

$$\sigma_b \leq 0$$

$$\frac{200 \cdot p}{9} - \frac{209 \cdot p_i}{9} \leq 0$$

$$p \leq 1,045 \cdot p_i$$

$$p_{max} = 1,045 \cdot p_i$$

$$0 = \frac{209 \cdot p_i}{63000} - 8,5 \cdot 10^{-4}$$

$$p_i = 2,562 \text{ MPa}$$

$$p_{max} = 1,045 \cdot 2,562$$

Maksimalni dopušteni pritisak:

$$p_{max} = 2,678 \text{ MPa}$$

## 9. DRUGI ZADATAK

Bakreni valjak nalazi se unutar čeličnog prstena tako da im se stijenke dodiruju. Valjak je opterećen silom  $F$  kao što je prikazano na slici, a prsten se pritom **hladi za temperaturu od 30 °C**. Treba odrediti stanje naprezanja u valjku i prstenu.

$D = 100$  mm;

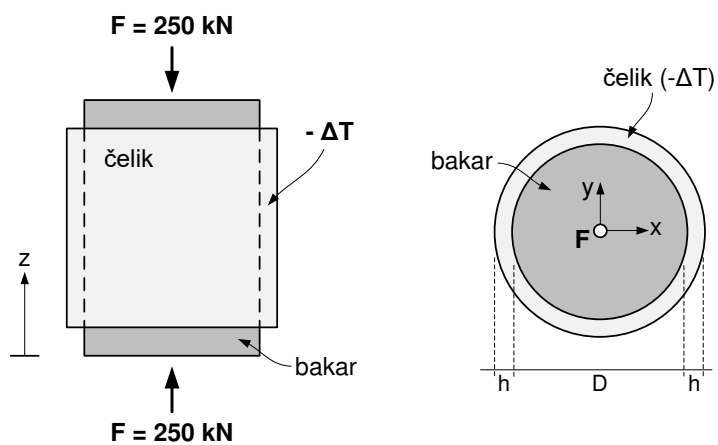
$h = 2$  mm;

$E_B = 105$  MPa;

$E_{\check{c}} = 2 \cdot 105$  MPa;

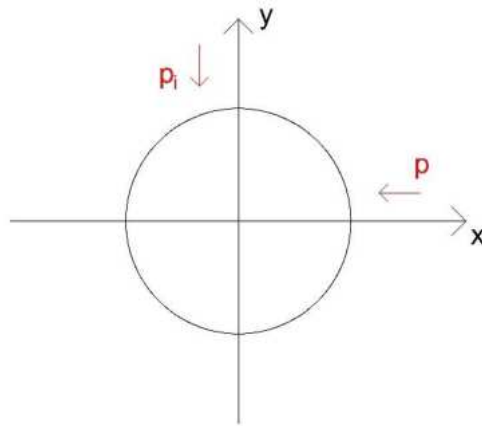
$\nu_B = 0,36$ ;

$\alpha_{T\check{c}} = 125 \cdot 10^{-7}$  1/K.



$$F = 250 \text{ kN}$$

STANJE NAPREZANJA (VALJAK)

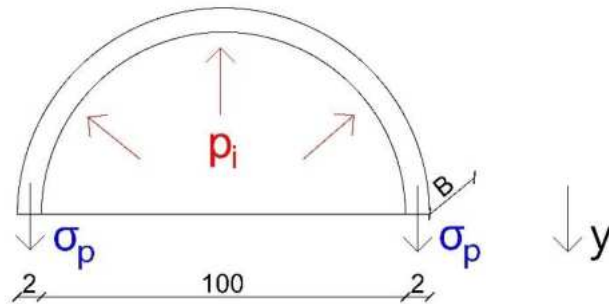


**Slika 17.:** Stanje naprezanja (valjak)

$$\sigma_x = \sigma_y = -p_i$$

$$\sigma_z = -\frac{250 \cdot 10^3}{\frac{100^2 \pi}{4}} = -31,831 \text{ MPa}$$

## STANJE NAPREZANJA (PRSTEN)



Slika 18.: Stanje naprezanja (prsten)

$$\sum F_y = 0$$

$$2 \cdot \sigma_p \cdot 2 \cdot B - p_i \cdot 100 \cdot B = 0$$

$$\sigma_p = \frac{p_i \cdot 100}{4} = 25 p_i$$

## UVJET DEFORMACIJE

$$\varepsilon_{x,p} = \varepsilon_{y,v}$$

$$\frac{\sigma_p}{E_p} + \alpha_T \cdot \Delta T = \frac{1}{E_v} [\sigma_p - \nu_B (\sigma_p + \sigma_z)]$$

$$\frac{25 p_i}{2 \cdot 10^5} + 125 \cdot 10^{-7} \cdot (-30) = \frac{1}{10^5} [-p_i - 0,36(-p_i - 31,831)] \cdot 2 \cdot 10^5$$

$$25 p_i - 75 = -2 p_i + 0,72 p_i + 22,91832$$

$$26,28 p_i = 97,91832$$

$$p_i = +3,726 \text{ MPa}$$

## STANJE NAPREZANJA (VALJAK)

$$\sigma_x = \sigma_y = -3,726 \text{ MPa (tlak)}$$

$$\sigma_z = -31,831 \text{ MPa (tlak)}$$

## STANJE NAPREZANJA (PRSTEN)

$$\sigma_p = 93,15 \text{ MPa (vlak)}$$

## 10. ZAKLJUČAK

U ovom završnom radu obrađena je analiza naprezanja u tankostijenim posudama pod opterećenjem, s naglaskom na tanke sferne posude, tanke cilindrične posude, tanke kružne prstenove. Kroz teorijski dio i provedene proračune, pokazano je da su tangencijalna (obodna) i aksijalna naprezanja dominantna u ovakvim konstrukcijama, te da je njihov točan proračun ključan za sigurnost i dugotrajnost posuda pod pritiskom. Zaključno, pravilno dimenzioniranje i optimizacija tankostijenih posuda ključno su područje inženjerske prakse koje osigurava sigurnost i efikasnost rada u industrijama gdje su ove posude prisutne, a rezultati ovog rada pridonose boljem razumijevanju i primjeni ovih konstrukcija.



## POPIS LITERATURE

- [1] Prof. dr. sc. Vice Šimić, dipl. ing. građ.: Otpornost materijala 1, Zagreb, 2002.
- [2] <https://hrcak.srce.hr/file/179301>
- [3] [http://old.riteh.hr/zav\\_katd\\_sluz/knjiznica/doktorati/Goran\\_Turkalj\\_disertacija.pdf](http://old.riteh.hr/zav_katd_sluz/knjiznica/doktorati/Goran_Turkalj_disertacija.pdf)
- [4] <https://learnmech.com/pressure-vessel/>
- [5] [https://en.wikipedia.org/wiki/Pressure\\_vessel](https://en.wikipedia.org/wiki/Pressure_vessel)
- [6] <https://www.eurotanks.eu/lpg-spherical-tanks/>

## POPIS SLIKA

Slika 1.: Primjer tankostijene posude, sprinkler tank (Izvor: <a href="https://iit.ie/galvanised-sprinkler-tanks/">https://iit.ie/galvanised-sprinkler-tanks/</a> ).....	3
Slika 2.: Primjer tankostijene posude, kanalizacijske pvc cijevi (Izvor: <a href="https://www.vodoskok.hr/prodajni-program/sustavi-odvodnje-otpadnih-i-oborinskih-voda/pvc-cijevi-i-spojni-dijelovi-za-ulic">https://www.vodoskok.hr/prodajni-program/sustavi-odvodnje-otpadnih-i-oborinskih-voda/pvc-cijevi-i-spojni-dijelovi-za-ulic</a> .....	4
Slika 3.: Posuda tankih stijenki konstantne debljine $h$ .....	7
Slika 4.: Meridijanski presjek (ravnina simetrije posude).....	7
Slika 5.: Izrezani beskonačno mali element.....	8
Slika 6.: $ds_2$ .....	8
Slika 7.: $ds_1$ .....	9
Slika 8.: Tanka sferna posuda polumjera $r$ i debljine stijenke $h$ .....	12
Slika 9.: Industrijski sferni spremnici (Izvor: <a href="https://www.eurotanks.eu/lpg-spherical-tanks/">https://www.eurotanks.eu/lpg-spherical-tanks/</a> ) .....	14
Slika 10.: Tanka cilindrična posuda debljine stijenke $h$ .....	15
Slika 11.: Zavareni čelični spremnik (Izvor: <a href="https://en.wikipedia.org/wiki/Pressure_vessel">https://en.wikipedia.org/wiki/Pressure_vessel</a> ) .	17
Slika 12.: Tanki kružni prsten polumjera $r$ , debljine stijenki $h$ i širine $b$ .....	18
Slika 13.: Primjer tankih kružnih prstena, priključci za cijevne elemente (Izvor: <a href="https://www.universalmetalcorporation.com/products/tube-fittings/">https://www.universalmetalcorporation.com/products/tube-fittings/</a> ) .....	20
Slika 14.: Presjek skice zadatka.....	22
Slika 15.: Beton.....	22
Slika 16.: Čelik.....	23
Slika 17.: Stanje naprezanja (valjak) .....	26
Slika 18.: Stanje naprezanja (prsten) .....	27