

# Idejna rješenja natkrivanja javnog prostora mrežom prednapetih kabela

---

**Matošević, Dominik**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:185745>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-13**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
GRAĐEVINSKI FAKULTET

IDEJNA RJEŠENJA NATKRIVANJA JAVNOG  
PROSTORA MREŽOM PREDNAPETIH  
KABELA

ZAVRŠNI RAD IZ KOLEGIJA GRAĐEVNA STATIKA 2

Student: Dominik Matošević, 0149225797

Mentorica: izv. prof. dr. sc. Petra Gidak

ZAGREB, 2023.

## Zahvala:

Zahvaljujem se mentorici prof. dr. sc. Petri Gidak, dipl. ing. građ., na predloženoj temi, stručnoj pomoći i savjetima tijekom izrade završnog rada.

## SADRŽAJ

1. UVOD.....	4
2. PREDNAPETE KONSTRUKCIJE OD UŽADI.....	5
2.1. Povijest i razvoj.....	5
2.2. Karakteristike konstrukcija od kabela.....	7
2.3. Vrste kabela.....	8
2.4. Mreže užadi.....	9
2.5. Povezivanje kabela.....	11
3. PRONALAZAK RAVNOTEŽNOG OBLIKA.....	13
3.1. Ravnoteža čvora.....	14
3.2. Minimalna i poopćena mreža kabela.....	16
4. METODA GUSTOĆE SILA.....	17
4.1. Iteracijska primjena metode gustoće sila.....	19
4.2. Uvođenje kinematičkih ograničenja.....	20
5. IDEJNO RJEŠENJE MREŽA OD PREDNAPETIH KABELA.....	21
5.1. Program za određivanje oblika.....	21
5.2. Lokacija konstrukcije „Primjer 1“.....	21
5.2.1. Zadavanje oblika „Primjer 1“.....	22
5.3. Lokacija konstrukcije „Primjer 2“.....	29
5.3.1. Zadavanje oblika „Primjer 2“.....	29
6. ZAKLJUČAK.....	38
7. LITERATURA.....	39
8. IZVORI SLIKA.....	40

# 1. UVOD

Razvoj vlačnih konstrukcija potaknut je razvojem materijala i tehnika projektiranja. Zadnjih nekoliko desetljeća ubrzano se povećava broj i mjesta primjene vlačnih konstrukcija. Oblikovanje statičkih sistema radi optimizacije njihove nosivosti primjenjivo je na sve tipove konstrukcija, no nalaženja ravnotežnog oblika vlačnih, gipkih ili visećih konstrukcija osnovna je zadaća svakog projektanta.

Zbog osjetljivosti mreže prednapetih kabela na promjenu djelovanja vanjskoga opterećenja razvijene su metode za proračun takvih konstrukcija. Često u uporabi, a i metoda koja će se u ovom završnom radu koristiti za pronalaženje ravnotežnog oblika mreže prednapetih kabela, je metoda gustoće sila.

Metoda se temelji na linearnom sustavu jednadžbi statičke ravnoteže čvorova prednapete mreže. Linearizacija je posljedica pretpostavke da je odnos vlačne sile u kabelu i njegove duljine konstantan. Na taj način sustav nelinearnih jednadžbi ravnoteže čvora postaje linearan

U ovom radu detaljnije će se proučiti glavne karakteristike konstrukcija od mreže prednapetih kabela, utjecaj opterećenja, korištenje metode gustoće sila u nalaženju oblika vlačnih konstrukcija, te idejna rješenja natkrivanja javnog prostora mrežom prednapetih kabela.

## **2. PREDNAPETE KONSTRUKCIJE OD UŽADI**

### **2.1. Povijest i razvoj**

Kroz povijest gipke i vlačne konstrukcija od užadi pripisujemo nomadskim narodima daleke prošlosti. Prve nastambe - šatori nomadskih plemena sklopljeni su od užadi koja je sidrena na štapove ili životinjske kosti u sredini i po rubovima, a na to je slagana životinjska koža koja preuzima vanjsko opterećenje, te ga prenosi preko užadi na stupove i konačno u tlo. Korištenje priručnih materijala te lagana i sastavna struktura šatora uvelike je odgovarala nomadskom načinu života ranijih plemena, a najbolje se vidi na primjerima konusnih šatora indijskih plemena Sjeverne Amerike te „crnih šatora“ pustinjskih plemena na području Afrike.

Najznačajniji razvoj vlačnih prednapetih nosivih sistema započinje utemeljiteljem „Instituta za lagane konstrukcije Sveučilišta u Stuttgartu“, njemačkim arhitektom i građevinskim inženjerom Frei Paul Ottom. Na čelu s Ottom započinje prvo sustavno istraživanje laganih konstrukcija ovisnih o obliku. Uvođenjem fizikalnog modela u postupku pronalaženja, primijenio je novu vrstu membrane koja je složena od nosive čelične mreže i translucentne opne, a rabljena za pokrivanje krova Njemačkog paviljona na svjetskoj izložbi Expo u Montrealu 1967. godina i krov Olimpijskog stadiona u Münchenu, 1972. godina.

Suvremeni razvoj laganih gipkih konstrukcija od užadi omogućen je napretkom teorije konstrukcija i gotovo eksponencijalnim razvojem računala koja omogućuju brži i precizniji proračun te grafički prikaz, uz to i jeftinija i masovnija proizvodnja raznovrsnih sintetičkih materijala izvrsnih mehaničkih i drugih svojstava.



*Slika 1: Frei Otto i model krovišta bazena u Olimpijskom parku u Münchenu u Njemačkoj [1]*



*Slika 2: Olimpijski stadion u Münchenu, 1972. godina. [2]*

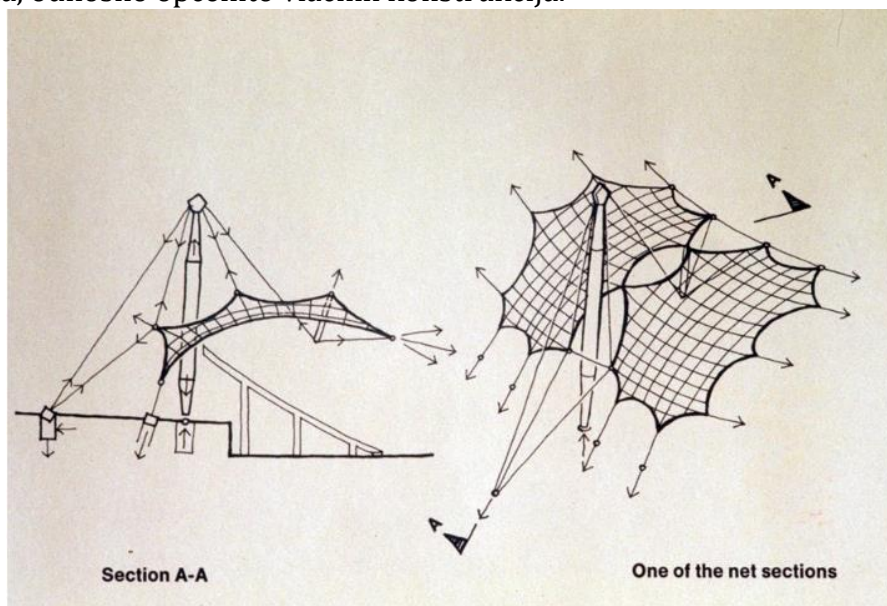
## 2.2. Karakteristike konstrukcija od kabela

Konstrukcije od užadi najčešće se sastoje od kablova i membrana koji leže u zakrivljenim plohama i skupa tvore mreže, često prekrivene nekom vrstom tkanine, te se sidre u temelje ili druge potporne konstrukcije.

Čelično uže (često zvano kabel ili sajla) je gipki građevinski element kojem je duljina znatno veća od visine i širine, a pod utjecajem vanjskog djelovanja ovisno o položaju vanjske koncentrirane sile, mijenja svoj oblik, odnosno ravnotežni položaj.

Karakteristika užadi je mala, zanemariva fleksijska krutost zbog čega se uže nema sposobnost preuzimanja momenta savijanja, poprečne sile kao ni tlačne sile. Jedino se pojavljuje centrična vlačna sila. Stoga, kako bi moglo uravnotežiti vanjsko djelovanje, kabel mora promijeniti svoj oblik i time aktivirati vlačnu silu, a do sloma užeta može doći samo u slučaju prekoračenju vrijednosti vlačnih naprezanja naspram vrijednosti vlačne čvrstoće u samom elementu.

Pojam konstrukcija od užadi obuhvaća široki spektar. Neke od oblika na koje nailazimo u svakodnevnom životu su prednapeta užad za ovješene mostove, prednapete grede i rešetke od užadi te prednapete mreže od užadi. Može se zaključiti da je važno svojstvo užeta vlačna čvrstoća, a osim nje i aksijalna krutost. Stoga su oblik mreže i razina prednapona ključni parametri nosivosti mreža prednapetih kabela, odnosno općenito vlačnih konstrukcija.



Slika 3: Složeni oblik konstrukcije od užadi, sidrene na jarbole i rubne oslonce [3]

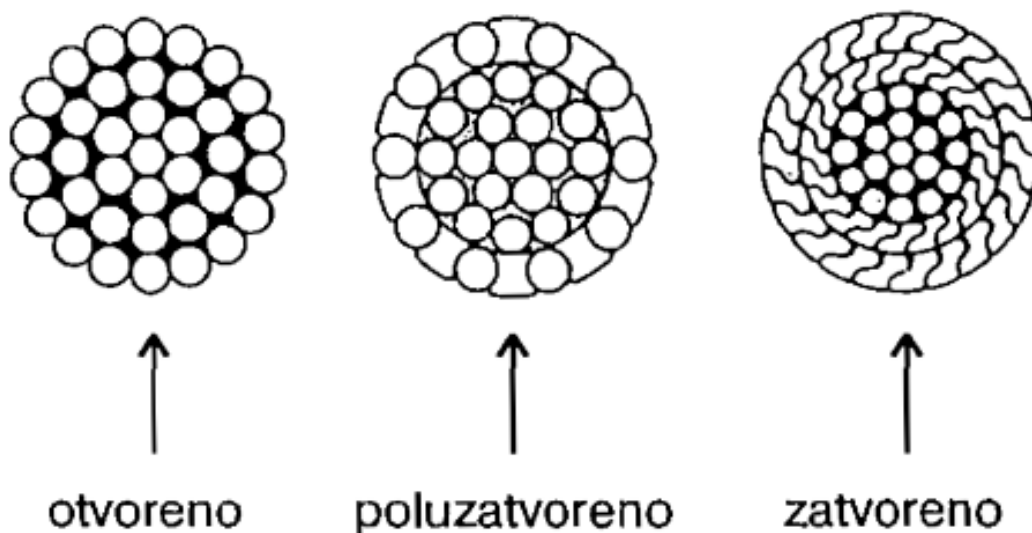


## 2.3. Vrste kabela

Užad koja se uglavnom koristi za vlačne konstrukcije može se podijeliti prema građi i načinu pletenja na spiralnu i pramenu užad. Spiralna užad uglavnom se koristi kao nosiva i nepokretna užad dok se pramena užad uglavnom koristi kao pokretna.

Spiralno čelično užde ima oko jezgre omotano nekoliko redova žica koje čine jednostruku zavojnicu te je zbog toga vrlo čvrsto, ali slabo savitljivo, pa se rabi kao nepokretno (nosiva užad žičara, tramvaja, dizala, mostova i slično.). Radni vijek čeličnih užadi je ograničen zbog promjene njihovih svojstava tijekom eksploatacije pod djelovanjem raznih opterećenja i konstantnoj izloženosti atmosferilijama.

Otvorena spiralna užad izrađuje se od žica kružnoga presjeka, a zatvorena užad od žica kojima je presjek u obliku slova Z, pa im je površina glatka. Prameno užde sastavljeno je od žica upredenih u dvostruku zavojnicu. Izrađuje se od pramenova načinjenih od više redova žica omotanih oko jezgre. Pramenovi mogu u užadi biti upredeni u istome smjeru kao i žice pojedinih pramenova (istosmjerno upredena užad) ili u obrnutome smjeru (križano upredena užad). Pramena se užad rabi kao pokretna, jer se zbog velike gipkosti lako namata i prelazi preko kolotura.



Slika 4: Vrste spiralnih čeličnih užadi [4]

## 2.4. Mreže užadi

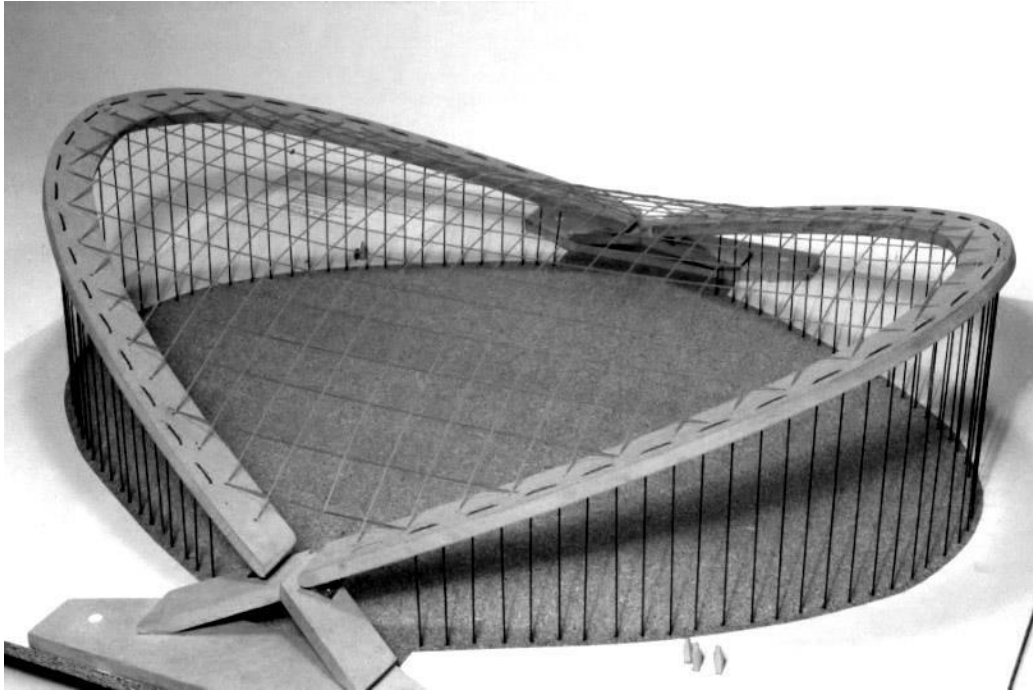
Tri osnovna načina spajanja kabela u mreže su pravčaste mreže, regularne mreže i neregularne mreže.

- Pravčaste mreže kabela su mreže za koje kabel leži na svom pravcu i ne dolazi do lomova u čvorovima. Ovaj tip mreže ne zahtjeva dodatno nalaženje oblika jer se sâm oblik može odrediti preko poznatih geometrijskih rubnih uvjeta. Zanimljivost pravčastih mreža kabela je ta, što do gubitka prednapona dolazi isključivo relaksacijom užadi radi puzanja i plastičnih deformacija, a ne zbog djelovanja poprečnog opterećenja. Primjeri ovakvih mreža su hiperbolički paraboloid i rotacijski hiperboloid.



*Slika 5. Dimnjak nuklearnog reaktora kao primjer rotacijskog hiperboloida [5]*

- Regularne mreže su drugi osnovni način spajanja kabela u mrežu i sastavljena je od dviju familija užadi koje se sijeku i tvore sedlastu plohu. Matematičkim rječnikom one se sijeku, dok u stvarnosti prelaze jedne preko drugih uz korištenje veza. Jedna familija užadi predstavlja nosivu užad i konkavna je, dok druga je druga familija užadi prednaponska, konveksna. Na kontaktu dviju familija nastaju dvije uravnotežene sile kojima kablovi djeluju jedan na drugi. Pri djelovanju vertikalnog opterećenja, sile u nosivoj užadi se povećavaju, dok se u prednaponskoj smanjuju.



*Slika 6: Primjer regularne mreže- Raleigh Arena [6]*

- Neregularne mreže se sastoje od više familija užadi ili od mreža užadi kompleksnije složenosti. Karakteristika neregularnih mreža je ta da može mijenjati zakrivljenost, odnosno uže u jednom dijelu može biti konveksno, a u drugom konkavno, te se može prekinuti u nekom čvoru i umetnuti neki kruti element unutar mreže.



*Slika 7: Zabavni centar Khan Shatyr u Kazahstanu kao primjer neregularne mreže [7]*

## 2.5. Povezivanje kabela

Tri osnovne vrste povezivanja kabela u konstrukcijama su:

- a) veza kabel-kabel,
- b) kabel- konstrukcija
- c) veza kabel-podloga.

*Ad a)* Kabel-kabel veza se primjenjuje u slučaju međusobnog križanja dva kabela te ovisno o zahtjevima može biti jednostruka, dvostruka i sl. Ovaj primjer veza promatra se kao zglobno pridržanje zbog toga što ne dopušta vertikalne i horizontalne pomake, a dopušta zaokret elementa. Radi lakše montaže stezaljki, iskustveno se umjesto jednog debljeg kabela, koriste se dva tanja kabela.

Ovisno o tipu mreže, stezaljke se montiraju *in situ* ili u tvornici.



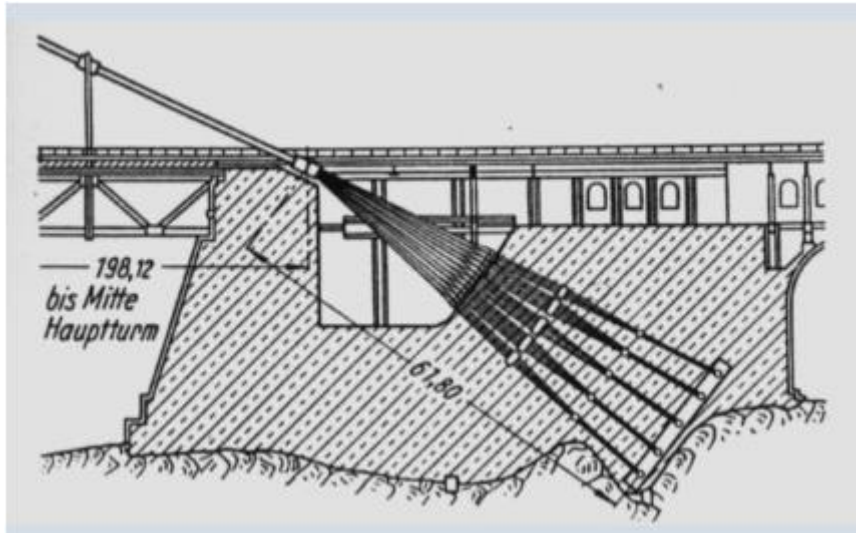
*Slika 8: Prikaz jednostruke veze kabel-kabel (lijevo) i dvostruke veze kabel-kabel (desno) [8]*

*Ad b)* Veza kabel- konstrukcija podrazumijeva sve vrste veza između kabela i nosive konstrukcije koja je nekim načinom temeljena u tlo. Sastoji se od završetka kabela i krutog okvira (najčešće armirani beton ili čeliči profil) koji mora preuzeti veličinu sile prednapinjanja za koju je projektirana.



*Slika 9: Prikaz veze kabela sa čeličnim (lijevo) i betonskim stupom (desno) [8]*

Ad c) veza kabel- podloga koristi se kada je potrebno sile iz kabela izravno prenijeti u tlo. Ovisno o vrsti podloge razlikuju se gravitacijska sidra koja vlačnu silu uravnotežuju vlastitom težinom i pločasta, gljivasta i slična sidra koja se vlačnim silama odupiru težinom tla.



Slika 10: Primjer gravitacijskog sidrenja kabela kod visećeg mosta [9]

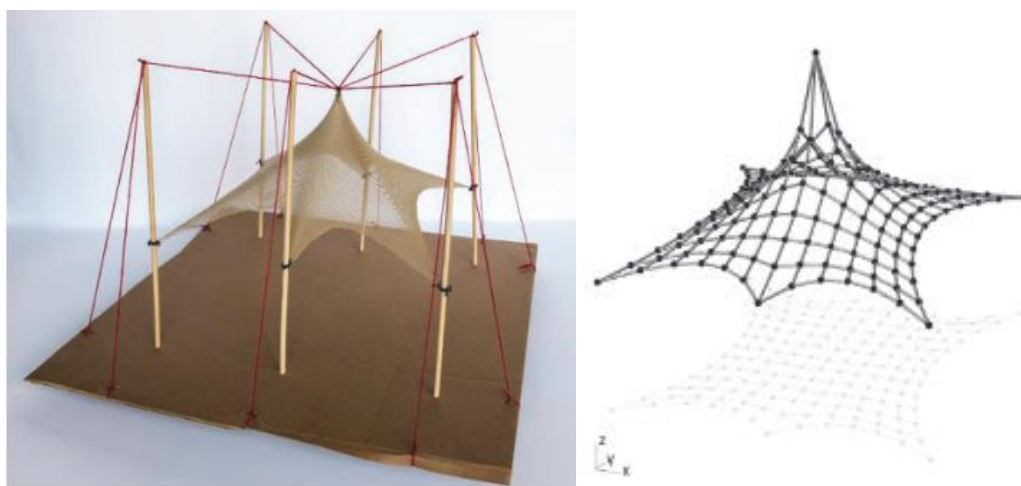
### 3. PRONALAZAK RAVNOTEŽNOG OBLIKA

Kao što je već rečeno u samom uvodu, nalaženje oblika (eng. *form-finding*) smatra se najvažnijom zadaćom u projektiranju vlačnih konstrukcija u kojem će se zadovoljiti vizualno-estetske potrebe i potrebe stabilnosti i funkcionalnosti koje nalaže inženjerska struka.

Sâmo oblikovanje konstrukcije od kabela razlikuje se od onog kod tradicionalnih armiranobetonskih, čeličnih i drvenih konstrukcija zbog toga što dimenzije i oblik nisu unaprijed poznate, već ih treba pronaći. Stoga postoje dva načina pronalaska oblika: fizikalni model i numerički model.

Većina istraživanja u počecima ovakvih tipova konstrukcija se temeljila na fizikalnim modelima, ponajviše modelu opna od sapunice, a njime se služio i već spomenuti Frei Otto. Iako nam fizikalni modeli daju dovoljno korisnih podataka o vlačnoj konstrukciji i njenom ponašanju, nisu dovoljno precizni pa se koriste više kao vizualna reprezentacija konstrukcije. Razvojem računala i računalnih programa danas su značajni numerički modeli i omogućeno je projektiranje sve složenijih vlačnih konstrukcija temeljem ulaznih podataka i provođenjem statičkih i dinamičkih analiza.

Najčešće korištene numeričke metode su metoda dinamičke relaksacije, aproksimacija linearne metode, metoda konačnih elemenata, metoda matrice krutosti, te metoda gustoće sila koja će u danjem tekstu biti objašnjena i korištena putem računalnog programa Rhino i dodatka Grasshopper i FALCON.



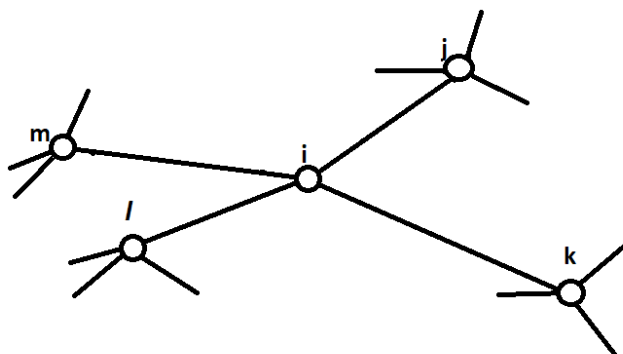
Slika 11: Fizikalni i numerički model [10]



### 3.1. Ravnoteža čvora

Osnovni korak u nalaženju oblika konstrukcija od užadi je rješavanje jednadžbi ravnoteže čvorova. Prilikom zadavanja jednadžbi ravnoteže čvorova uvedene su određene pretpostavke u proračunu:

- Zanemaruje se vlastita težina elemenata (kabela),
- Elementi između čvorova su ravni i međusobno zglobno spojeni,
- Nema vanjskoga opterećenja,
- Topologija mreže nam je unaprijed poznata,
- Kabeli preuzimaju samo vlačne sile.



Slika 12: Čvor „i“ sa susjednim čvorovima i priključnim štapovima

Čvorove mreža dijele se na slobodne i ležajne čvorove. U slobodnim čvorovima križaju se unutarnji kabeli i spajaju s rubnim kabelima, dok su u ležajnim čvorovima kabeli spojeni krutim rubom. Koordinate ležajnih čvorova su nam poznati podatak, pa s njima ulazimo u analizu, a koordinate slobodnih čvorova mreže se dobiva rješavanjem sustava jednadžbi.

Svaki slobodan čvor se može napisati s tri jednadžbe ravnoteže koje označavaju ravnoteže projekcije sila u priključnim im štapovima na tri koordinatne osi.

$$\sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \cdot \vec{e}_{i,j} \cdot \vec{i} = 0$$

$$\sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \cdot \vec{e}_{i,j} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \cdot \vec{e}_{i,j} \cdot \vec{k} = 0$$

Vrijednost sile u štapu  $S_{\{i,j\}}$  za vlačnu silu iznosi  $S_{\{i,j\}} > 0$ , dok za tlačnu silu  $S_{\{i,j\}} < 0$ .

Jedinični vektor  $\vec{e}_{i,j}$  štapa  $\{i,j\}$  orijentiran od čvora  $i$  prema čvoru  $j$  se zapisuje:

$$\vec{e}_{i,j} = \frac{x_j - x_i}{l_{\{i,j\}}} \vec{i} + \frac{y_j - y_i}{l_{\{i,j\}}} \vec{j} + \frac{z_j - z_i}{l_{\{i,j\}}} \vec{k} ,$$

a duljina kabela:

$$l_{\{i,j\}} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}.$$

Od gore navedenih jednađbi, proizlazi sustav od tri nelinearne jednađbe ravnoteđe svakog čvora mreže:

$$\sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \cdot \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0$$

$$\sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \cdot \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0$$

$$\sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \cdot \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0$$

gdje svaki skup koji sadrži koordinate  $x_i, y_i, z_i, i \in N_f$ , a zadovoljava jednađbe, tvori ravnotežnu konfiguraciju.

Ako je  $n$  broj slobodnih čvorova, a  $m$  broj elemenata, tada možemo napisati  $3n$  jednađbi sa  $3n+m$  nepoznanica. Broj nepoznanica je uvijek za  $m$  veći od broja jednađbi, stoga je sustav nemoguće jednoznačno riješiti. Odnosno, kako bi se dobio jednak broj jednađbi i nepoznanica, treba primijeniti jedno od pravila pomoću kojeg će se eliminirati sile u štapovima kao nepoznanice.

- a) **Kvazilaplaceovo pravilo:**  
Unaprijed su zadane uravnotežene projekcije sila u svim štapovima na ravninu  $xy$ ,
- b) **Pravilo gustoće sila:**  
Zadaju se omjeri između iznosa sila i duljina svakog štapa,
- c) **Općeno pravilo minimalne mreže („geodetske mreže“ ) :**  
Zadani su iznosi sila u svim štapovima,
- d) **Kombinirano pravilo:**  
U nekim štapovima zadani su iznosi sila, a u ostalim štapovima duljine.



## 3.2. Minimalna i poopćena mreža kabela

Ako se označi ukupna duljina kabela sa oznakom  $L$ , dobiva se:

$$L = \sum l_{\{i,j\}} = \sum \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

te ako se izjednači njezina derivacija po koordinatama slobodnih čvorova s nulom nastaje sustav od  $3n$  jednadžbi sa  $3n$  nepoznanica:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{j \in N_i} \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = \sum_{j \in N_i} \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_i} = \sum_{j \in N_i} \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0$$

Pomnožimo li zatim sustav jednadžbi sa  $S = S_{\{i,j\}}$ , dobiva se:

$$S \frac{\partial L}{\partial x_i} = S \cdot \sum_{j \in N_i} \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0$$

$$S \frac{\partial L}{\partial y_i} = S \cdot \sum_{j \in N_i} \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0$$

$$S \frac{\partial L}{\partial z_i} = S \cdot \sum_{j \in N_i} \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0$$

Sustav postaje rješiv ako se uvedu dodatne pretpostavke i rubni uvjeti koji dovode do jedinstvenog rješenja, ali i uvjetuju oblik konstrukcije. Pretpostavka za rješavanje ovog sustava je jednaka sila u svim elementima mreže. Konstrukcija će tada poprimati oblik minimalne mreže za koju je zbroj duljina kabela manji od zbroja duljina kabela u bilo kojem drugom položaju.

To znači da oblik minimalne mreže ne ovisi o vrijednosti sile  $S$ , ali za fizičko ostvarenje rješenje sila mora biti vlačna. Minimalna mreža ili geodetska mreža je ploha u čijoj su točki  $i$  u svim smjerovima jednaka naprezanja, dok joj je srednja zakrivljenost jednaka nuli.

Poopćena minimalna mreža se dobije kada se zadaju različite sile u kabelima, ali jednake duž pojedinog kabela.

## 4. METODA GUSTOĆE SILA

Metoda gustoće sila objavljena je po prvi put 1971. godine u članku: „*Einige Bemerkungen zur Berechtung von vorgespannten Seilnetzkonstruktionen*“ autora Hans-Jörg Scheka i Klaus Linkwitsa. Metodom se problem nalaženja oblika linearizira drugačijim udruživanjem veličina.

Drugim riječima, sustav nelinearnih jednadžbi pretvara se u sustav linearnih jednadžbi, a rješenje sustava daje koordinate mreže koja je u ravnoteži. Za postupak nisu potrebne nikakve koordinate, samo gustoća sila svakog elementa pa se zbog toga koristi za sastavljanje i rješavanje jednadžbi ravnoteže mreže prednapetih kabela.

Omjer vlačne sile u štapu  $S_{i,j}$  i njegove duljine  $l_{i,j}$  nazivamo gustoćom sila:

$$q_{i,j} = \frac{S_{i,j}}{l_{i,j}}$$

iz toga slijedi da linearan sustav jednadžbi ravnoteže

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{x_i - x_j}{l_{i,j}} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{y_i - y_j}{l_{i,j}} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{z_i - z_j}{l_{i,j}} = 0 ,$$

prelazi u linearan

$$\sum_{j=1}^n q_{i,j} \cdot (x_i - x_j) = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n q_{i,j} \cdot (y_i - y_j) = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n q_{i,j} \cdot (z_i - z_j) = 0 .$$

Rješavanjem sustava dobivaju se koordinate slobodnih čvorova pa se mogu izračunati duljine štapova  $l\{i,j\}$ , a potom i vrijednosti sila u štapovima  $S\{i,j\}$ .

U svakom čvoru mreže mora biti zadovoljen sljedeći uvjet:

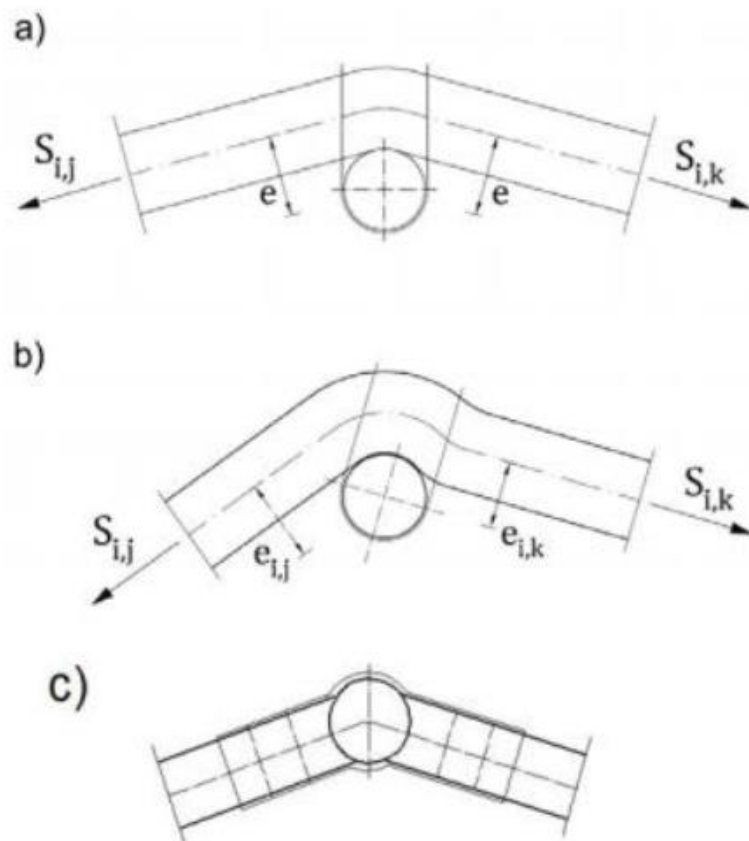
$$S_{i,j} \cdot e_i = S_{i,k} \cdot e_k,$$

Gdje su:

- $S_{i,j}$  i  $S_{i,k}$  sile u i-tom i k-tom štapu istog užeta,
- $e_i$  i  $e_k$  krakovi sila u odnosu na središte donjeg kabela

Ako uvjet nije zadovoljen doći će do zaokretanja čvora. Naime, krak svake sile se povećava ili smanjuje (ovisno o veličini sile) sve dok se ne postigne ravnoteža momenata.

Mijenjajući vrijednosti gustoće sila u elementima, mijenja se i rješenje sustava, a postupak se ponavlja sve dok se ne dobije zadovoljavajući oblik konstrukcije.



Slika 13 : Mimoilaženje užadi :  
 a) ekscentricitet , b) izobličenje čvora , c) centrični spoj [11]

## 4.1. Iteracijska primjena metode gustoće sila

Za izračunavanje mreže minimalne duljine koristimo iteracijski postupak. Iteracija je matematička metoda približnog rješavanja analitički nerješivih jednadžbi uzastopnim uvrštavanjem približnih rješenja i dobivanja sve točnijih rezultata do neke željene dovoljne točnosti.

U k-tom koraku postupka, gustoća sila  $q_{\{i,j\}}^{(k)}$  u štapu  $\{i,j\}$  izračunava se :

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \frac{\bar{S}}{S_{i,j}^{(k-1)}}$$

- $S_{i,j}^{(k-1)}$  predstavlja vrijednost sile izračunate u prethodnom koraku
- $\bar{S}$  predstavlja traženu vrijednost sile
- $q_{i,j}^{(k-1)}$  je gustoća sile u prethodnom koraku,

Gustoća sila je proporcionalna vrijednost sile, stoga je omjer vrijednosti sila u dva koraka iteracije ( bez promjene duljine štapnog elementa) jednak omjeru gustoće sila:

$$\frac{S_{i,j}^{(k)}}{S_{i,j}^{(k-1)}} = \frac{q_{i,j}^{(k)}}{q_{i,j}^{(k-1)}}$$

S obzirom da vrijednost  $S_{i,j}^{(k)}$  predstavlja traženu vrijednost sile  $\bar{S}$ , dobiva se prethodni izraz. Problem nastaje kada se promjenom gustoće sila mijenja ravnotežna konfiguracija, pa s time i duljina štapnih elemenata.

tražena vrijednost sile  $\bar{S}$  može se razlikovati od vrijednosti sila u drugim štapovima, no za poopćenu minimalnu mrežu, sile u štapovima moraju biti jednake.

Da bi se ispoštovala jednakost vrijednosti sila u kabelima, zadaje se izraz:

$$\frac{q_{\{i,j\}}}{S_{\{i,j\}}} = \frac{1}{l_{\{i,j\}}}$$

Pa se gustoća sila može računati:

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{\bar{S}_{i,j}}{l_{i,j}^{(k-1)}}$$

## 4.2. UVOĐENJE KINEMATIČKIH OGRANIČENJA

Kinematička ograničenja se uvode u situacijama klizanja dvaju ili više čvorova u jednu prostornu točku. Najčešće se dešava u rubnim kabelima neovisno o silama u njima. Uvođenjem kinematičkih ograničenja osigurava se zahtijevana duljina štapnih elemenata.

Propisana duljina  $l_{i,j}$  štapnog elementa (i,j) osigurava se izrazom:

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{S_{i,j}^{(k-1)}}{l_{i,j}}$$

Uz uvjet da su sile nepromijenjene i da je gustoća sila obrnuto proporcionalna duljini štapova dobiva se izraz:  $\frac{q_{i,j}^{(k)}}{q_{i,j}^{(k-1)}} = \frac{l_{i,j}^{(k-1)}}{l_{i,j}^{(k)}}$ .

Iz toga slijedi da je koeficijent kojim se množi gustoća sila iz prethodnog koraka

$\frac{l_{i,j}^{(k-1)}}{l_{i,j}^{(k)}}$ , te iz  $q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} * \frac{l_{i,j}^{(k-1)}}{l_{i,j}^{(k)}}$  i  $S_{i,j} = q_{i,j} * l_{i,j}$  dobiva izraz

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{S_{i,j}^{(k-1)}}{l_{i,j}}$$

Prednost ovog iteracijskog proširenja jest ta što nije potrebno pretpostavljati početnu aproksimaciju rješenja jer su jednadžbe linearne, pa se može rješavati direktnim postupcima te je postupak relativno brz.

Uz to, mreža je iz svakog koraka ove metode u ravnoteži, što nije slučaj kod ostalih iteracijskih metoda.

## 5. IDEJNO RJEŠENJE MREŽE OD PREDNAPETIH KABELA

### 5.1. Program za određivanje oblika

**FALCON** (*Form-finding Algorithm for Linear Constrained Optimisation of Networks*) skup je specijaliziranih komponenata za traženje oblika i određivanje unutarnjih sila prostornih rešetkastih konstrukcija u vlaku i tlaku. Pronalazak oblika temelji se na iteracijskoj primjeni metode gustoća sila.

Za idejno rješenje mreže od prednapetih kabela FALCON će se koristiti u sklopu CAD alata *Rhinoceros* uz pomoć programa za vizualno programiranje *Grasshopper*.

### 5.2. Lokacija konstrukcije „Primjer 1“

Za lokaciju montaže vlačne konstrukcije od mreže prednapetih kabela odabrana je velika pozornica u parku Maksimir. Jedna od poznatijih simbola parka, zajedno sa 60 hrastovih klupa i šest metara visokom “čeličnom čipkom” koristi se kao podij za izvođače ljetnih zagrebačkih večeri.

Idejno rješenje natkrivanja gledališta pozornice će se obrađivati pomoću CAD alata *Rhinoceros* i *Grasshopper*.



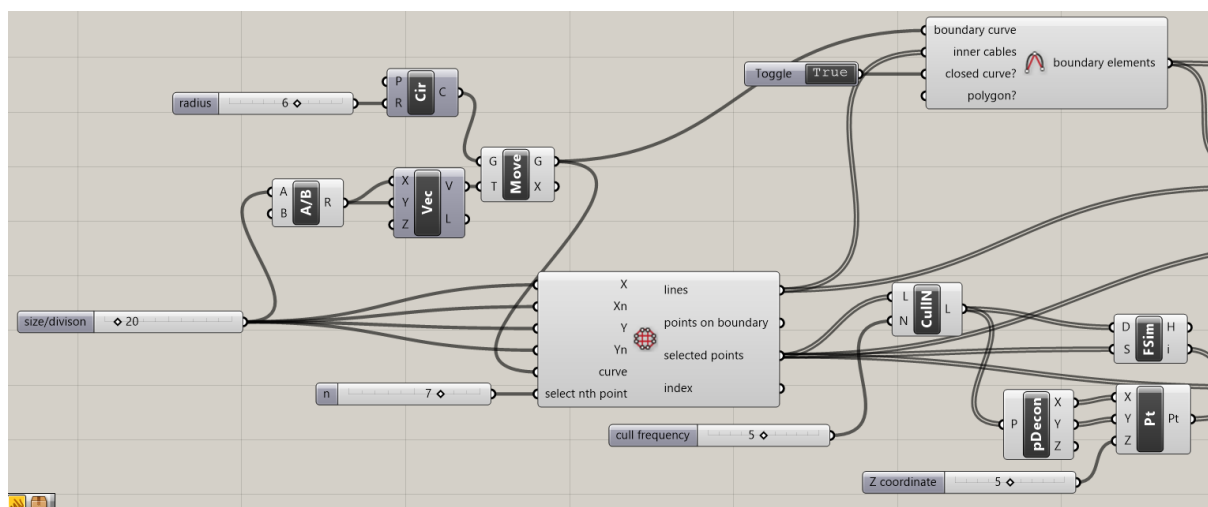
Slika 14: Pozornica Maksimir [12]

## 5.2.1. Zadavanje oblika „Primjer 1“

Prvi korak je zadavanje geometrije mreže kabela (topologije). Funkcijom „*Net with boundary curve*“ stvara se pravokutna mreža unutar krivulje i vraća ležajne točke duž krivulje s opcijom odabira svakog n-tog ležaja.

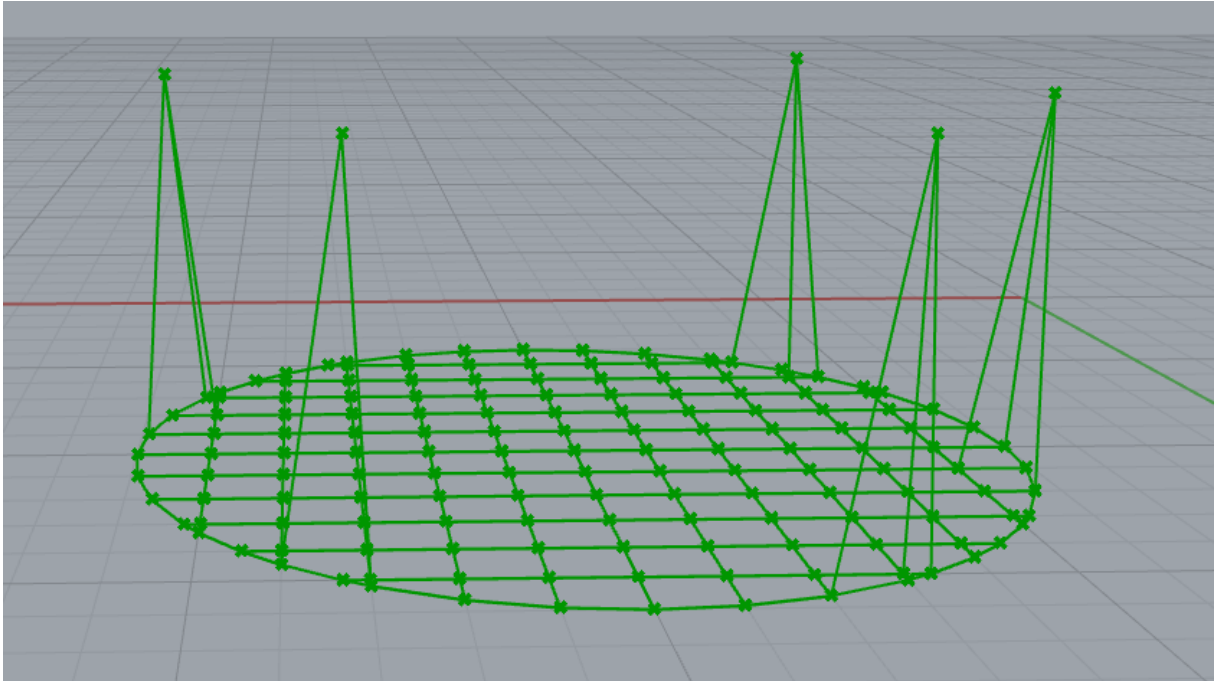
Zatim se zadaju parametri „*size/divison*“ i „*n*“ koji parametarski mijenjaju veličinu i broj elemenata. Nadalje, funkcijom „*CullN*“ i parametarskim klizačem zadajemo broj, odnosno frekvenciju razmaka točaka.

Sljedeće je formiranje kružnice korištenjem funkcije „*Circle*“, a zajedno sa definiranjem „*Vector*“ i „*Move*“ ulazi u „*Move*“ funkciju kojom objedinjujemo sve u jednu komponentu.



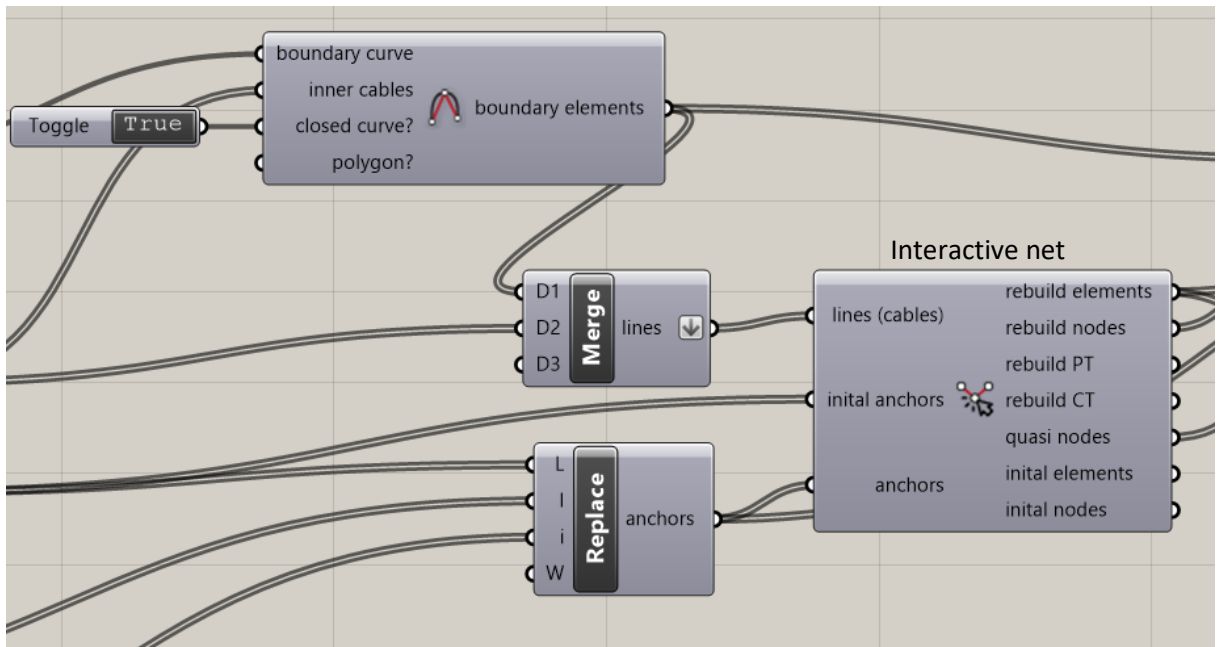
Slika 15: Određivanje početne topografije u programu Grasshopper

Drugi korak je spajanje funkcije „*Net with boundary curve*“ i gore opisanog parametra kružnice sa funkcijom „*Elements from boundary curve*“ kojom se dijeli krivulja na elemente prema kabelima mreže. Odnosno funkcija razlikuje otvorenu i zatvorenu krivulju od poligona.



Slika 16: Vizualizacija „Elements from boundary curve“ i „Net with boundary curve“

Sljedeći korak je zadavanje funkcije „Interactive net“ koja stvara mrežu elemenata od kabela te ju održava interaktivnom u skladu s izmjenama na ležajnim čvorovima.

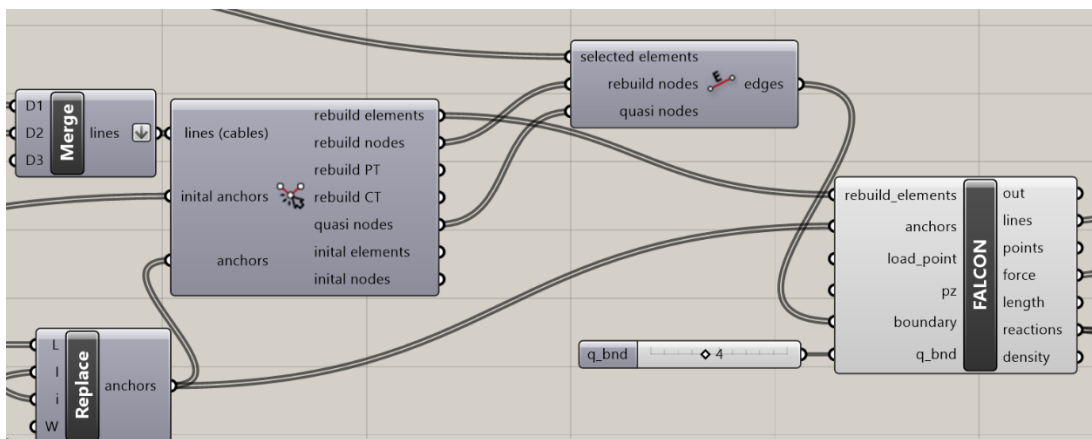


Slika 16: Vizualizacija funkcije „Interactive net“



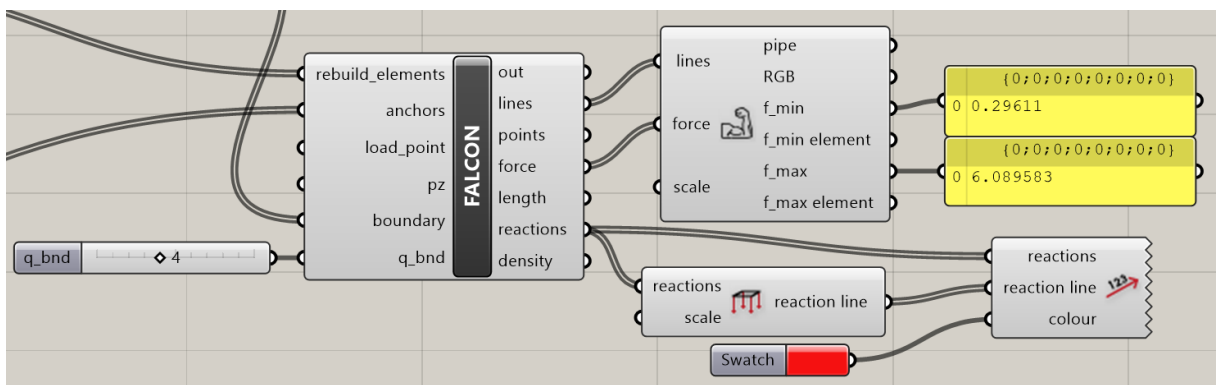
Zatim se „Elements from boundary curve“ povezuje u „Interactive element“ koja sa funkcijom „Interactive net“ zatim ulazi kao komponenta u sljedeću pozvanu funkciju „FALCON“.

Ulazni podatci za korištenje „form-finding“ FALCON funkcije su geometrija elemenata mreže i ležajevi, te gustoća sila. „Rebuild elements i anchors“ se odnose na komponente geometrije mreže, dok se „boundary“ i „q\_bnd“ (koji je povezan parametarskim klizačem vrijednosti 4.0) odnose na rubne kabele koji najčešće imaju veći omjer vlačne sile u štapu i njegove duljine (gustoće sila) od unutarnjih kabela čija vrijednost iznosi 1.0 za ovaj primjer. Aktiviranjem funkcije, program daje koordinate mreže koja je u ravnoteži.

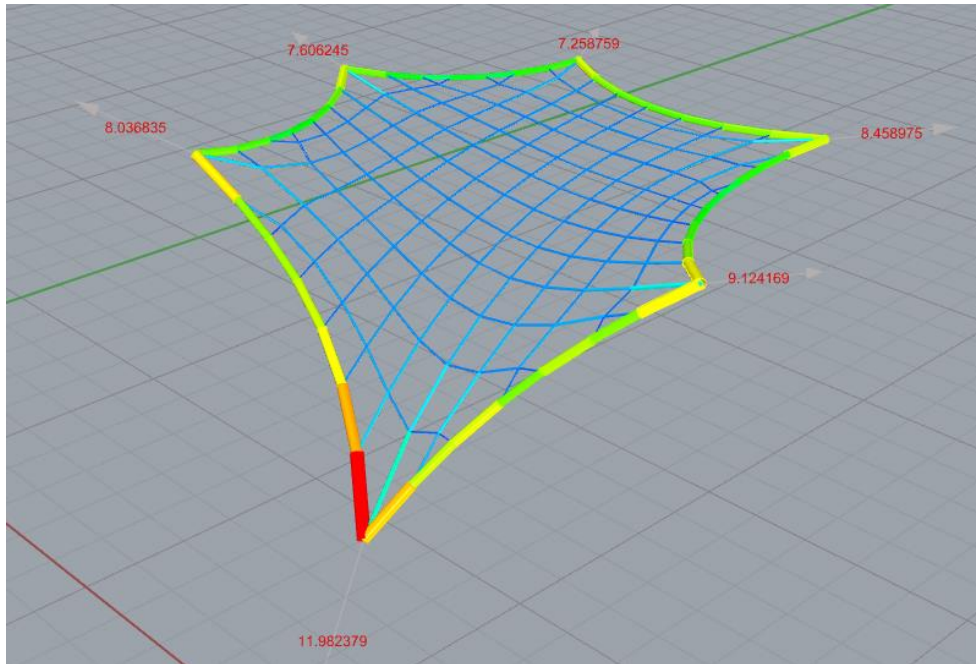


Slika 17: Pozivanje „FALCON“ funkcije

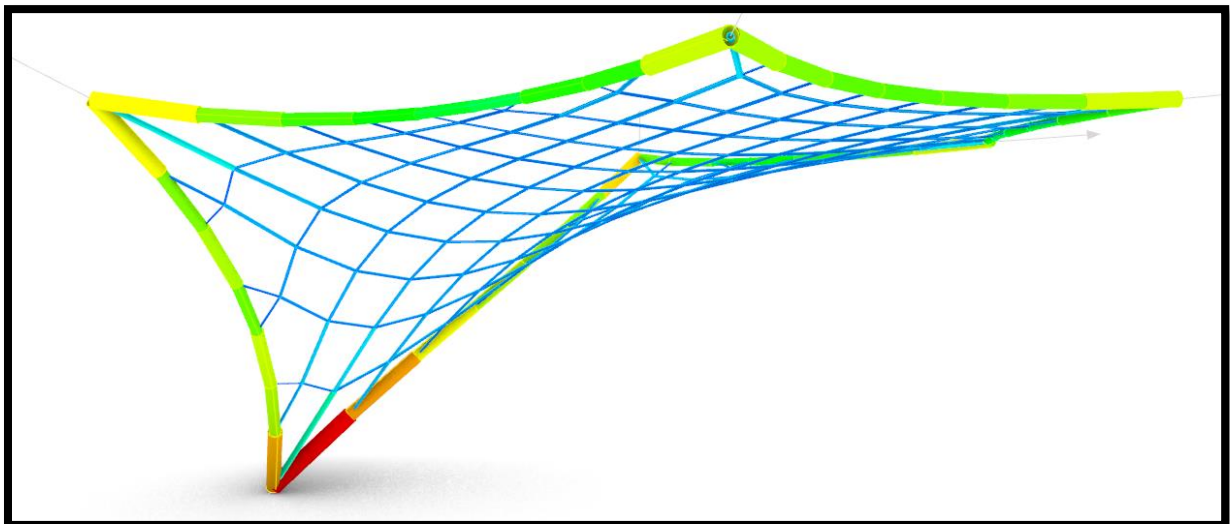
Za kraj, uvode se dvije funkcije vizualizacije reakcija i same mreže prednapetih kabela korištenjem funkcija „Force visualisation“, „Reaction value“ i „Reaction vector“. Uvođenjem „Panel“ dobiva se uvid u numeričke vrijednosti sila svih elemenata. Na (Slika 18) prikazane su minimalne i maksimalne vrijednosti unutarnjih sila u mreži kabela.



Slika 18: Funkcije: „Force visualisation“, „Reaction value“ i „Reaction vector“



*Slika 19. Konačne sile od mreže prednapetih kabela*

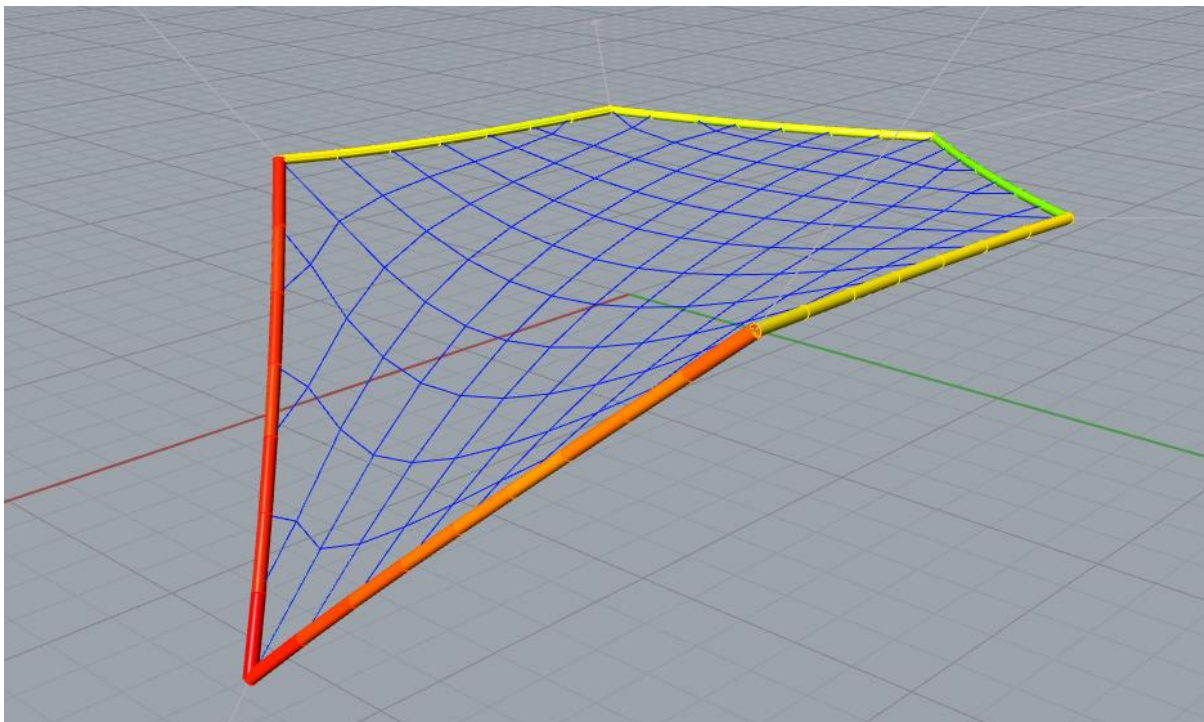


*Slika 20: Idejno rješenje nadstrešnice od mreže prednapetih kabela*

Ovaj ravnotežni oblik je odabran zbog toga što je raspored unutarnje mreže relativno ujednačen, zadovoljava estetski i funkcionalni uvjet projektanta.

Nedostatak ovog oblika mreže je što u lijevom donjem kabelu povezanog s podlogom dolazi do prevelike razlike u unutarnjim silama pa će se morati projektirati za nosivost najkritičnijeg dijela, tj. razlikovati će se u promjeru kabela u odnosu na ostale kabele što donosi određeno povećanje troškova materijala i smanjenje iskoristivosti istog.

Oblik bi se mogao poboljšati izmjenom ulaznih parametara (povećanjem vrijednosti gustoće sila rubnih elemenata sa 4 na 20) kojom bi se ujednačili iznosi unutarnjih sila kroz kabele.

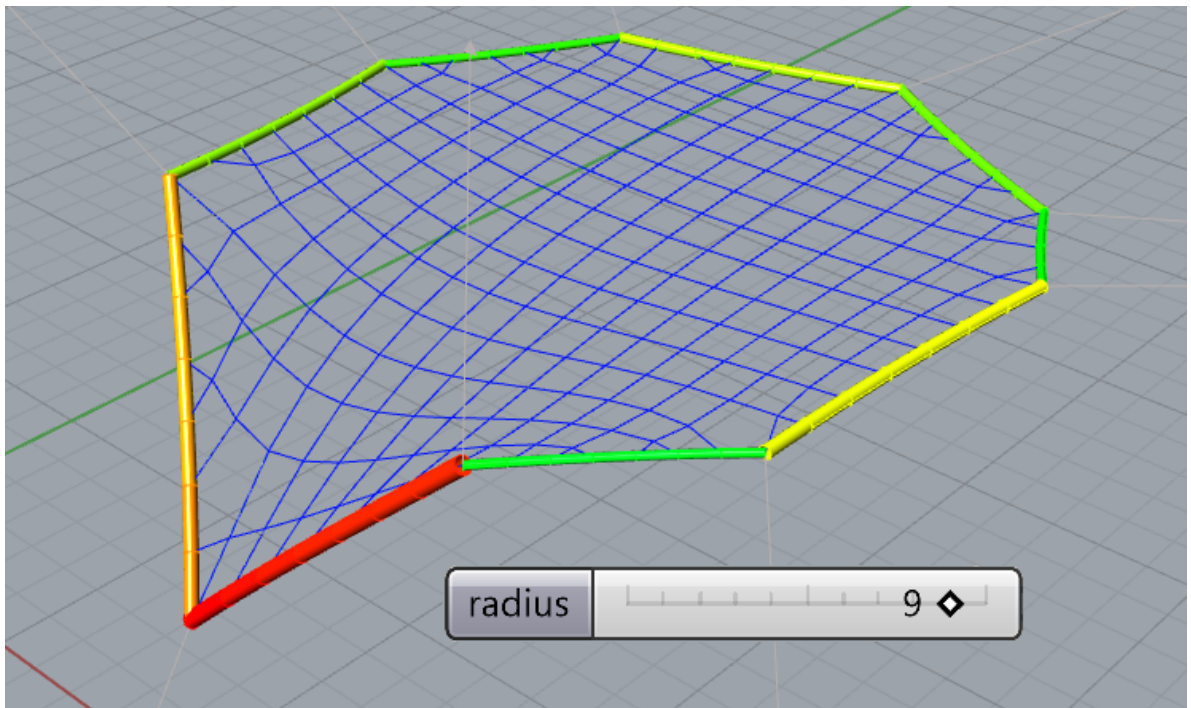
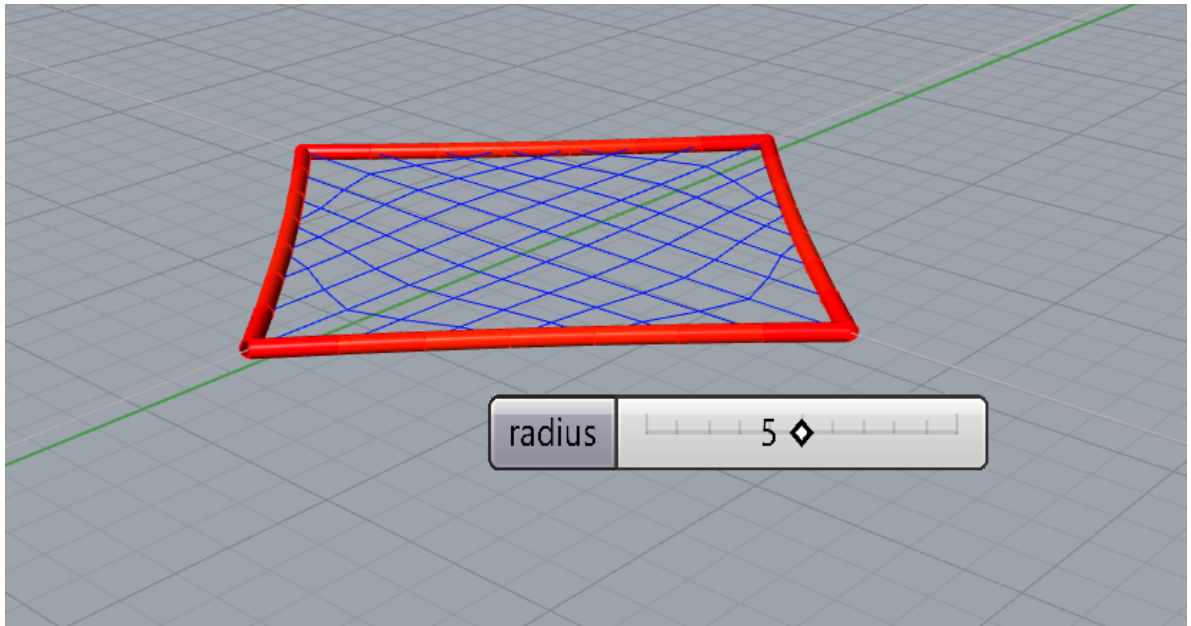


*Slika 21: Prikaz promjene unutarnjih sila promjenom veličine gustoće sila*

Isto tako, izmjenom rubnih čvorova mreže parametarskim mijenjanjem „*Radius*“ klizača povećava se, odnosno smanjuje veličina mreže, no mora se obratiti pozornost jer premalim postavljanjem radijusa, konstrukcija postaje plošna bez kontakta kabela sa podlogom i gubi se izvorni oblik konstrukcije.

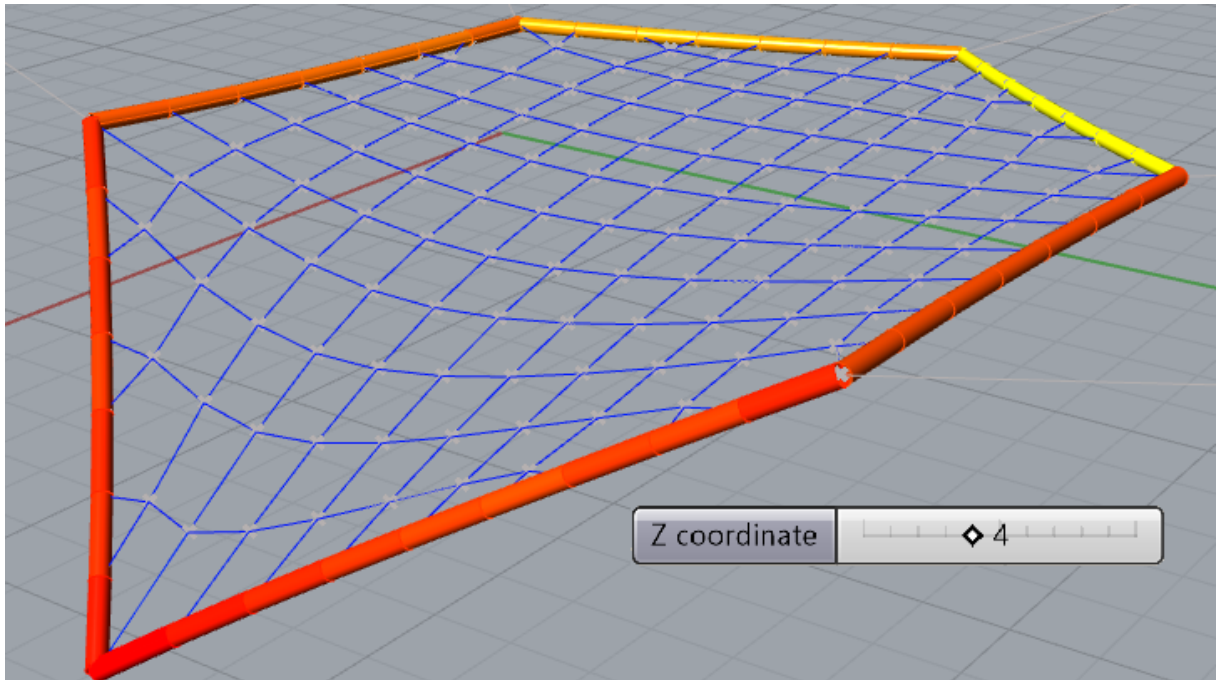
Izmjenom visine koordinata čvorova rubnih kabela „*Z coordinate*“ parametarskog klizača utječe se na veličinu unutarnjih sila u vanjskim elementima. Time se prikazuje osjetljivost geometrijskog parametra na izgled konstrukcije, ekonomičnost i iskoristivost kabela. Također, treba voditi računa i o zamoru materijala koji se sprječava redovnim pregledom konstrukcije radi mogućih popuštanja sidara što posljedično uzrokuje smanjenje prednaponske sile u kabelima.

Ovim izmjenama primjera prikazuje se ovisnost samog oblika mreže o ulaznim podacima geometrije i gustoće sila u elementima, te jednostavnost izmjene istih unutar programskog alata FALCON.



Slika 22: Prikaz promjene ravnotežnog oblika mreže izmjenom broja rubnih čvorova





*Slika 23: Prikaz promjene unutarnjih sila rubnih kabela izmjenom visine rubnih čvorova*

Za učvršćivanje čvora u podlogu koristila bi se veza kabel-podloga sa sidrom ili bi se sidrila u betonski temelj. Dok bi se ostale točke prednapinjale vezom kabela za betonske ili čelične stupove. Time bi se osigurala dostatna prednaponska sila kojom bi mreža ostala u ravnotežnom položaju.

U kombinaciji sa mrežom prednapetih kabela, kao zaštitna funkcija može se navući vrsta pokrova od sintetičkog materijala ili tekstila.

## 5.3. Lokacija konstrukcije „Primjer 2“

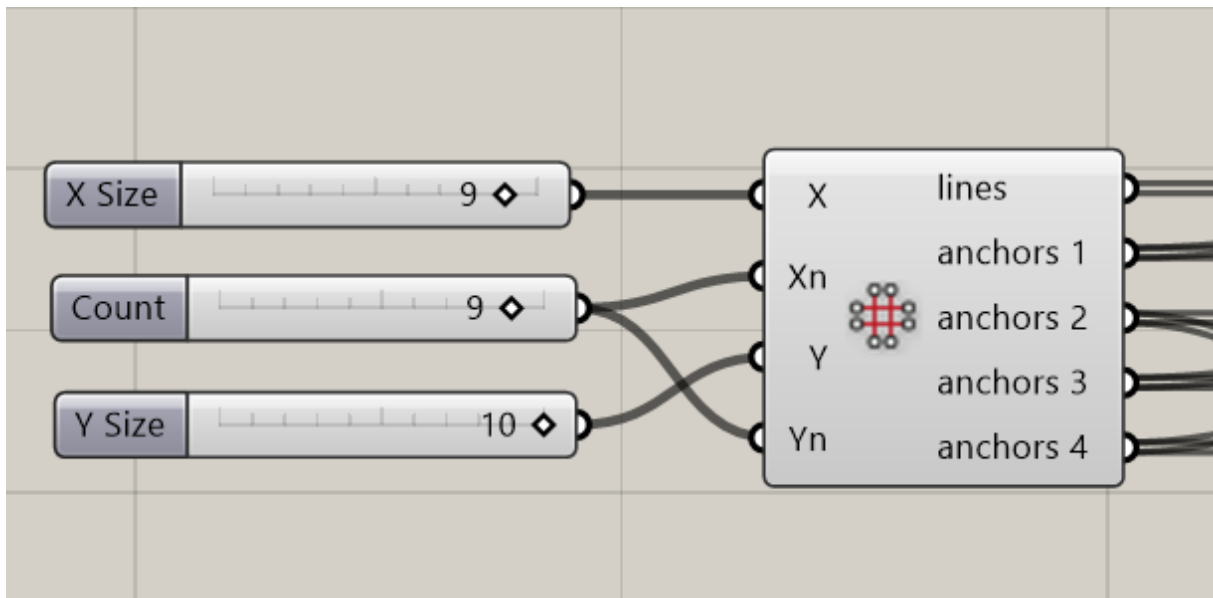
Sljedeći primjer natkrivanja prostora mrežom prednapetih kabela će se nalaziti na amfiteatru (odnosno pozornici) na jezeru Bundek. Ovaj tip mreže će se vezati direktno na čeličnu konstrukciju i za podlogu.



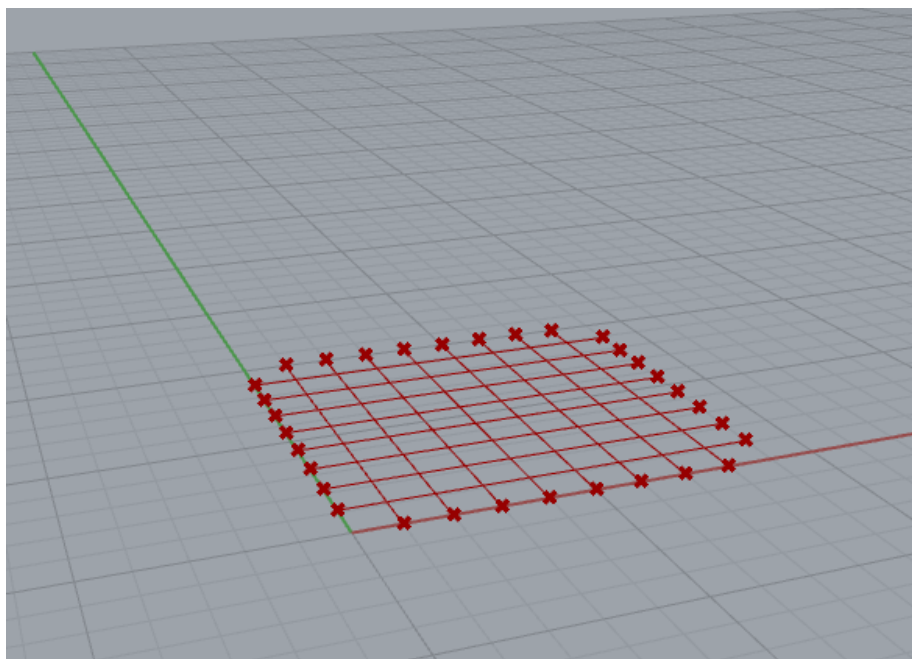
*Slika 24: Amfiteatar na jezeru Bundek [12]*

### 5.3.1. Zadavanje oblika „Primjer 2“

Kao i u prošlom primjeru prvo se zadaje funkcija geometrije mreže. Za početak poziva funkcija „Net with fixed edges“ koja stvara pravokutnu mrežu i vraća ležajne čvorove duž svake stranice pravokutnika, unošenjem parametarskih klizača kojima određujemo ulazne podatke „X i Y Size“ označava veličinu modela, dok „Count“ označava razmak gustoću razmaka između linija.



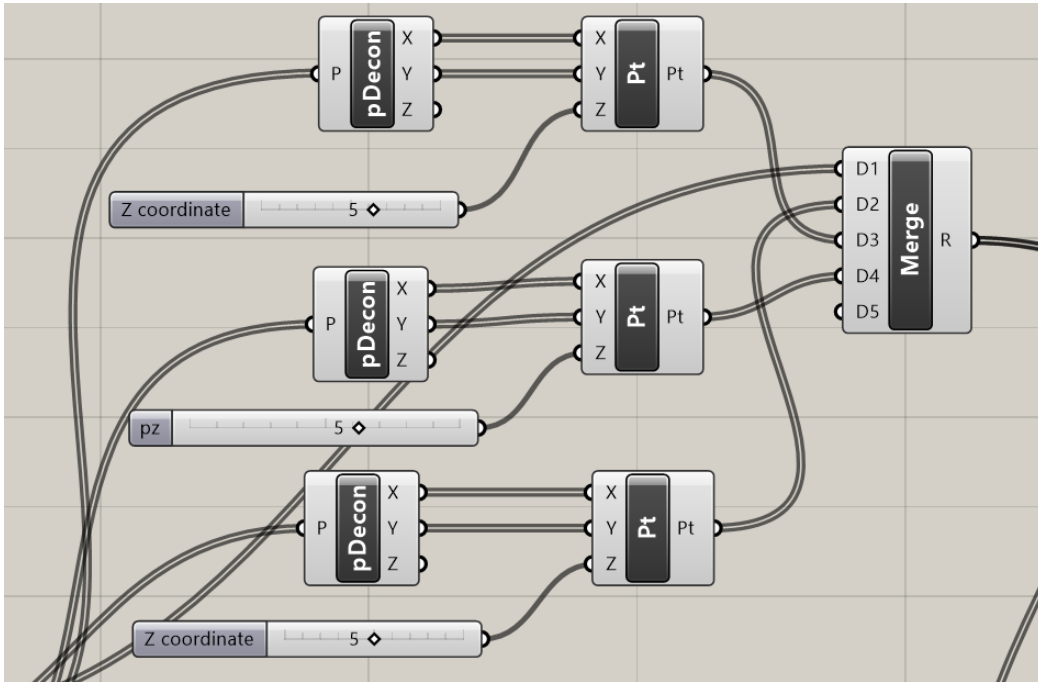
Slika 25: funkcija „Net with fixed edges“ i parametarski klizači



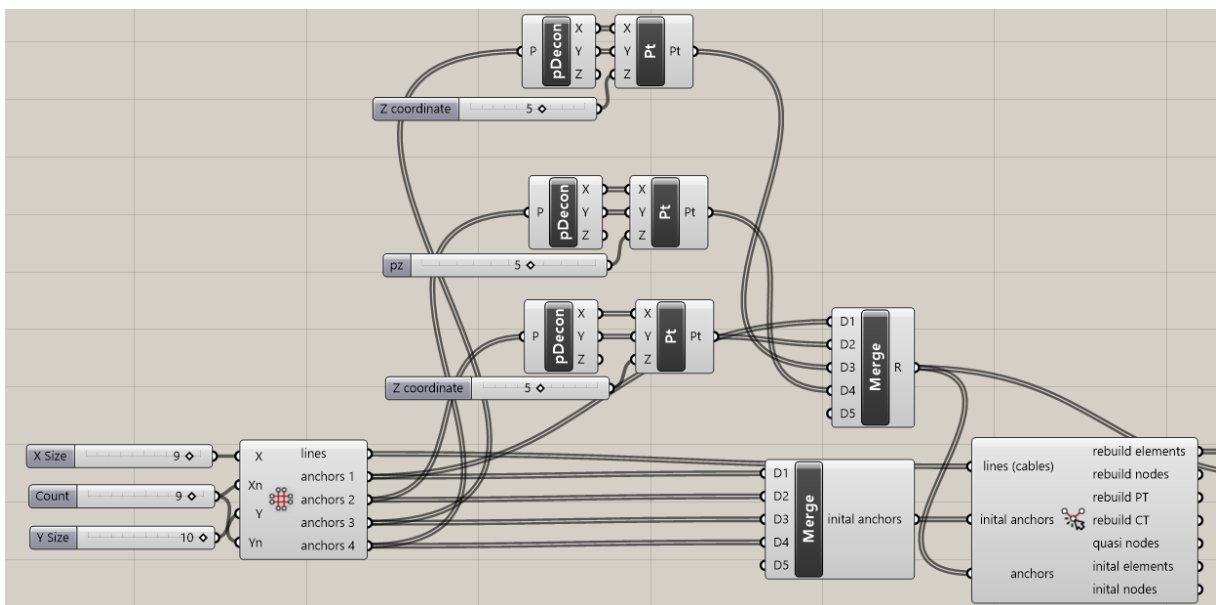
Slika 25: Vizualni pregled početne topologije

Sljedeći korak je definiranje visinske z koordinate točaka funkcijama *“Deconstruct point i construct point”* i parametarskim klizačem kojom označavamo visinu koordinate točaka.

Funkcijom *„Interactive net“* stvaramo mrežu elemenata, spajajući argumente svih povezanih visinskih točaka (koristeći funkciju *„Merge“*) i ležajnih rubnih točaka duž četvrte stranice.

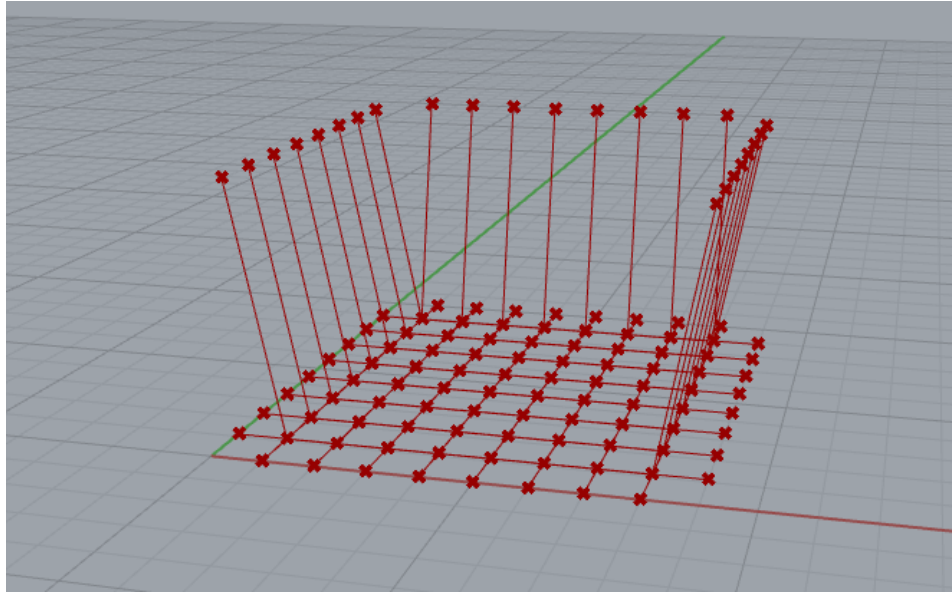


Slika 26: Definiranje visinske koordinate točaka



Slika 27: Pozivanje funkcije *„Interactive net“*

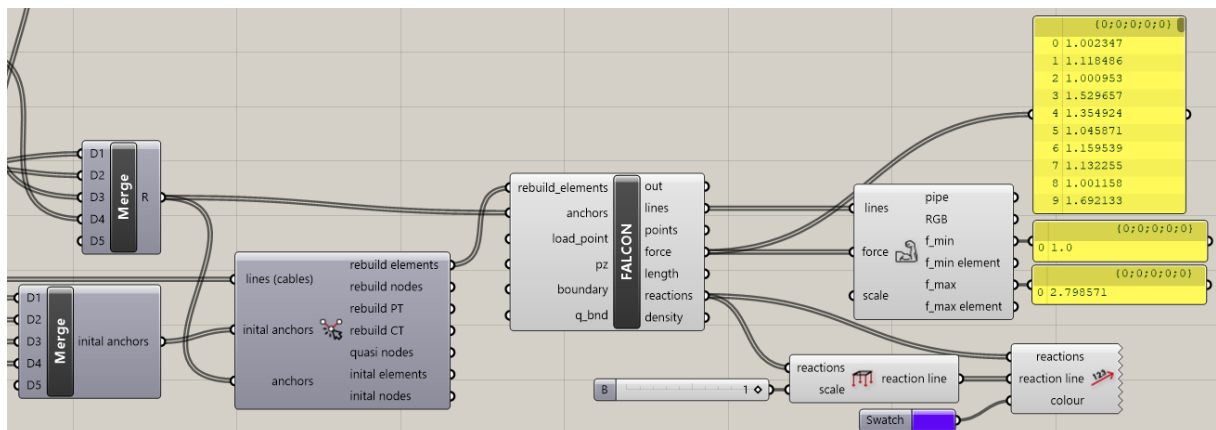




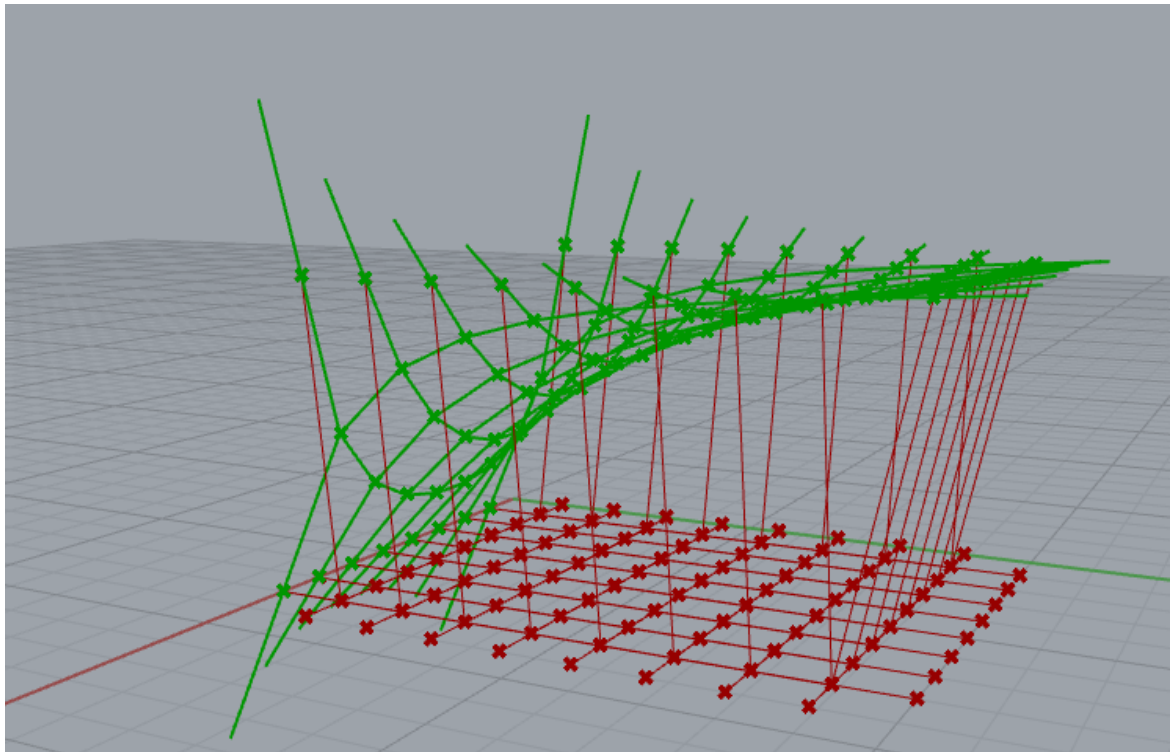
Slika 28: Vizualni pogled učinka funkcije „Interactive net“

Pozivanjem funkcije „FALCON“ obavlja se jedan korak metode gustoće sile. Ulazni podatci za funkciju „FALCON“ su elementi geometrije mreže (iz komponente „interactive net“ i komponente „merge“ kojom obuhvaćamo uzdignute ležajne točke) i gustoće sile (ili koeficijent sile) koja je zadana u ovom primjeru za sve elemente i iznosi 1.0.

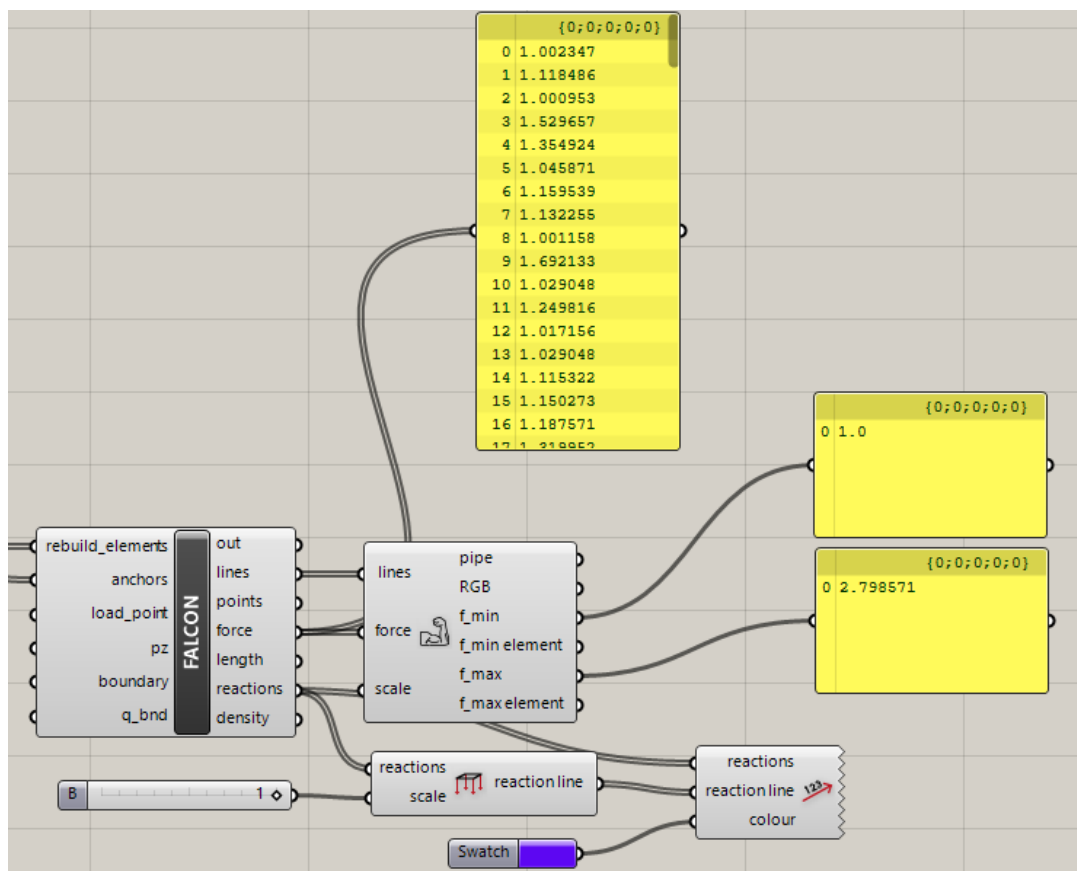
Adekvatnim povezivanjem svih argumenata pronalazimo oblik mreže, a pozivanjem funkcija „Force visualisation“, „Reaction value“ i „Reaction vector“, dobiva se vizualni prikaz smjera i veličine sile u krajnjim kabelima. Podatke sila unutar elemenata ili samo u krajnjim kabelima možemo prikazati vizualno (izravno na modelu) te u samom Grasshopper programu koristeći „Panel“. Uz to se može samo zapisati maksimalna i/ili minimalna sila u modelu, što nam omogućava puno bolji pogled u samo ponašanje konstrukcije.



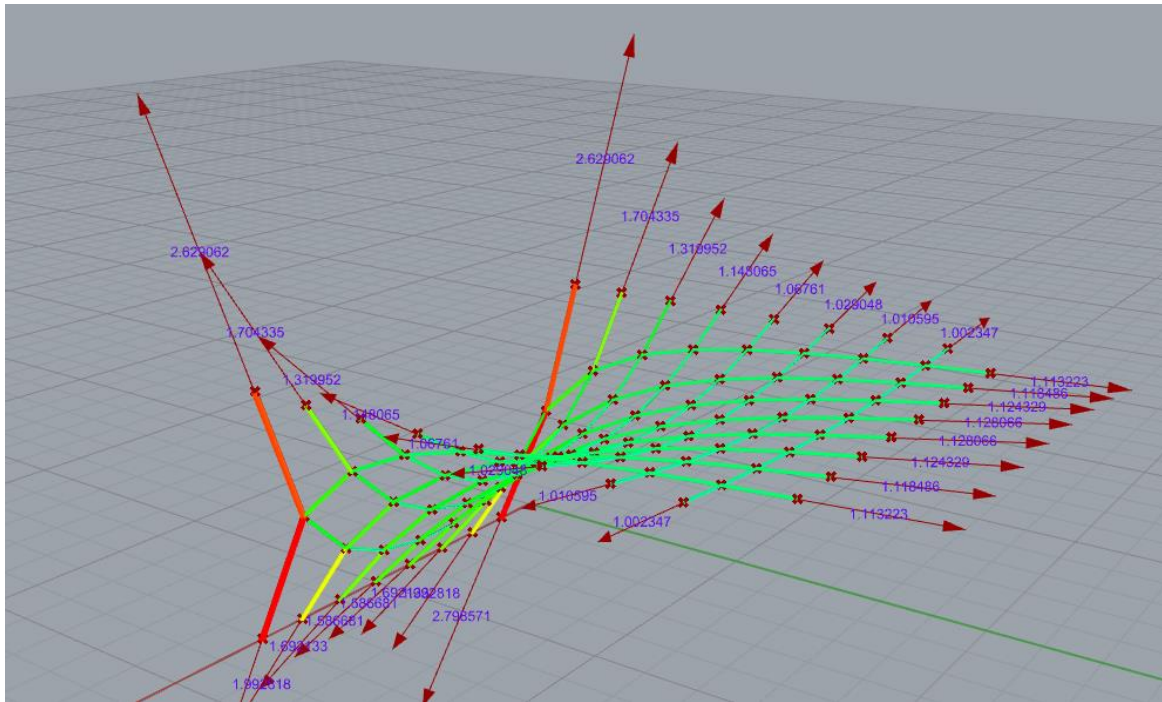
Slika 29: Pozivanje funkcije „FALCON“



Slika 30: Pogled učinka funkcije FALCON u Rhino programu



Slika 31: Numeričko prikazivanje veličina sila

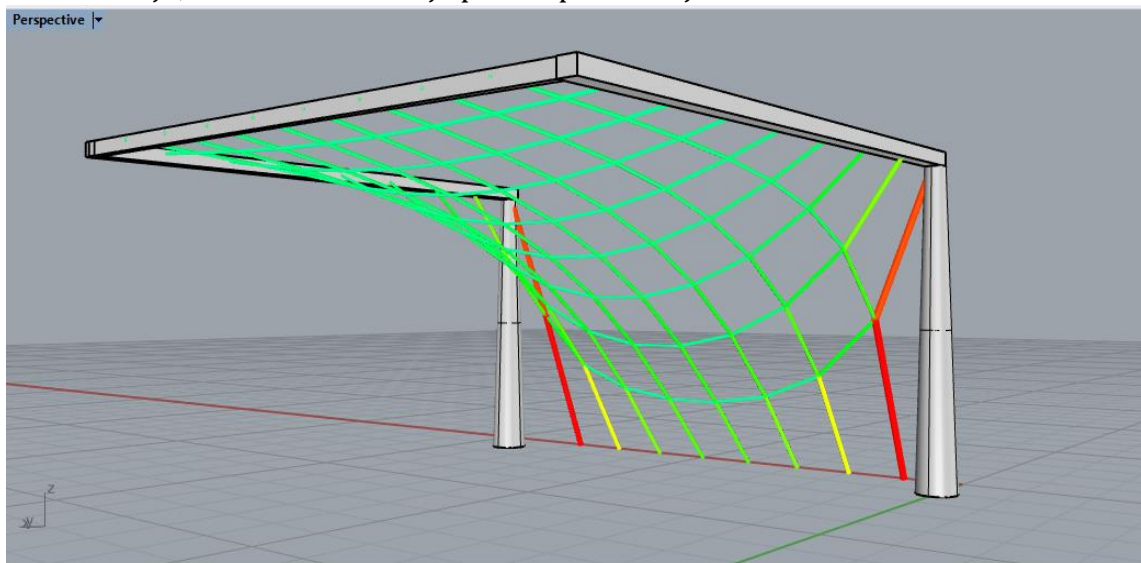


Slika 32: Vizualno prikazivanje veličina i smjera sila

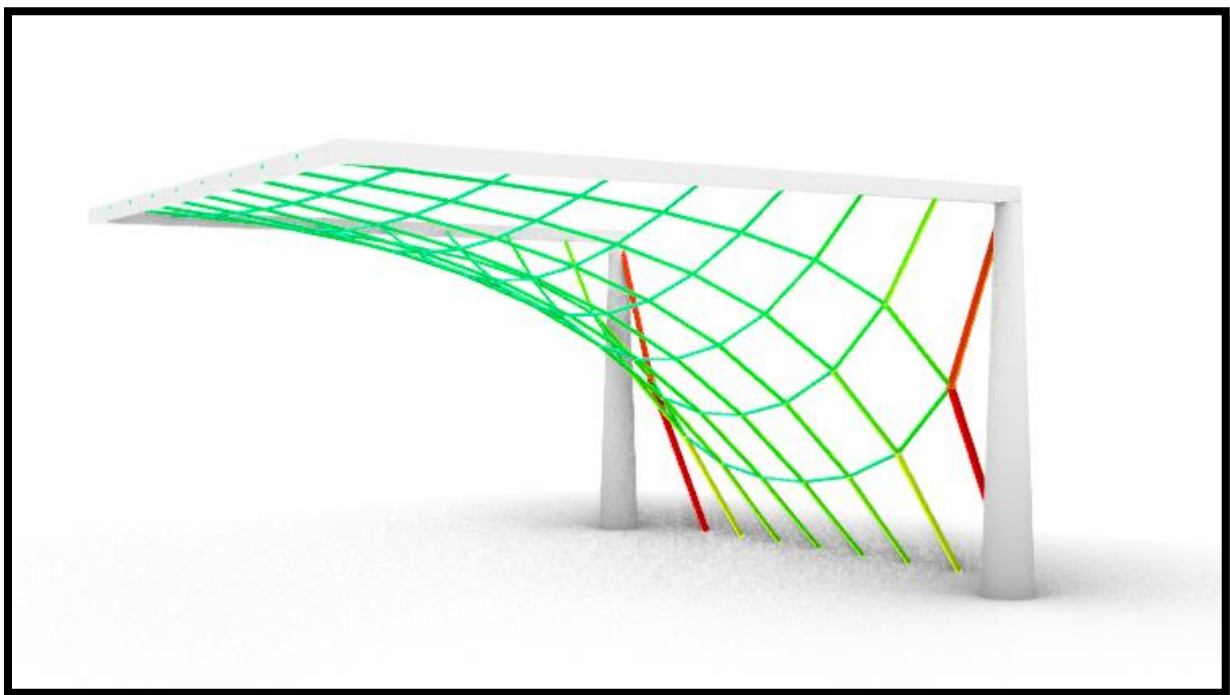
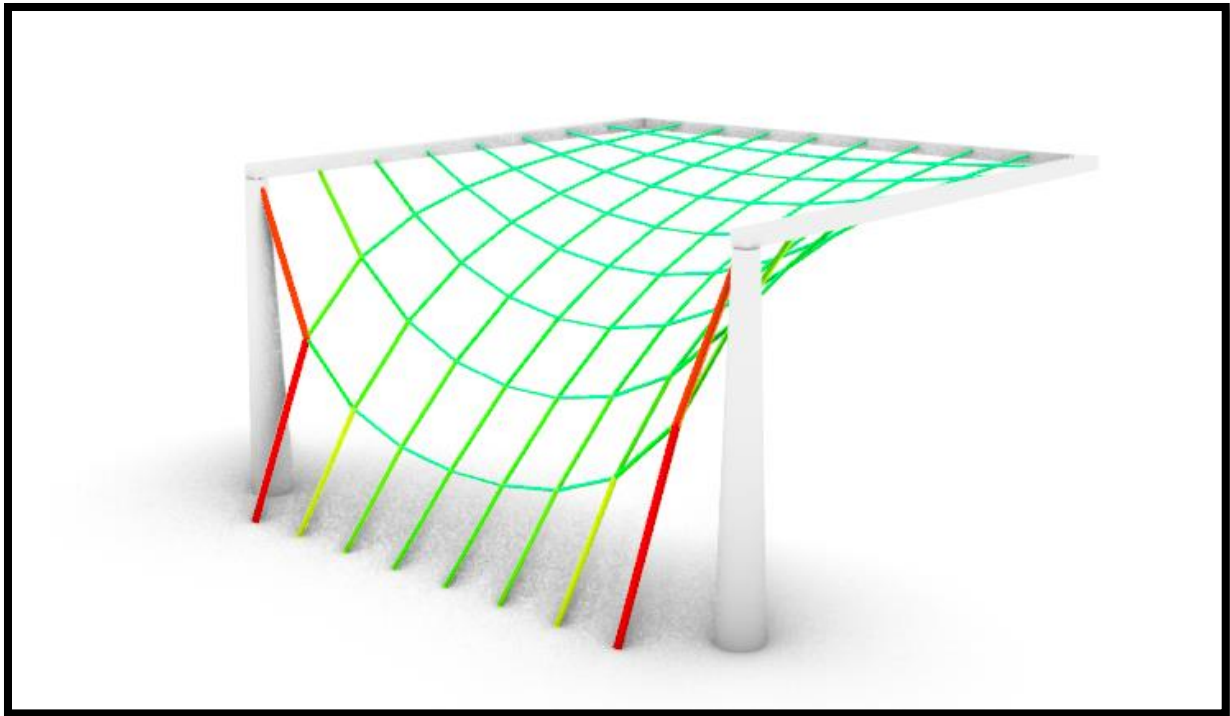
Odabrani ravnotežni oblik mreže je ovog oblika zbog toga što su vrijednosti unutarnjih sila najveće na kraju mreže gdje se spaja s tлом i konstrukcijom, a time će zahtijevana nosivost, a posljedično tome i promjer užadi na tom mjestu će biti najveća, pa je zadovoljen estetski i funkcionalni uvjet same konstrukcije.

Nedostatak ovakve vrste mreže je broj vezova sa podlogom i konstrukcijom čime se dosta otežava samo sidrenje mreže. Moguće rješenje jest korištenje funkcije „*Net with edge cables*“ kojom bi se stvorila mreža sa rubnim kabelima i ležajnim točkama u glovima.

Kako bi se mreža mogla privezati za nešto, ovaj idejno rješenje prikazuje čeličnu konstrukciju. Mreža se na jednoj strani privezuje za podlogu, a sa tri na čeličnu konstrukciju, čime održava svoje prednapeto stanje.



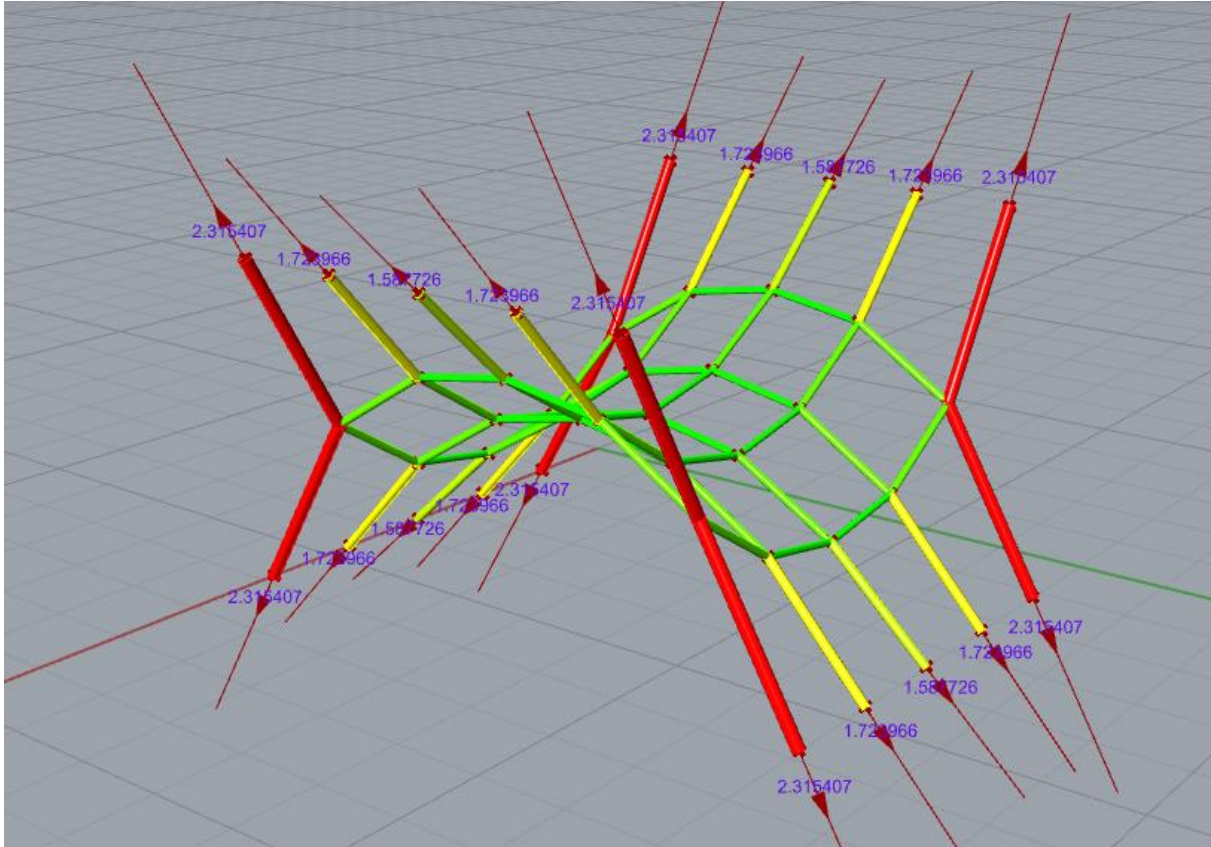
Slika 33: Dodavanje čeličnog okvira



Slika 34. Idejno rješenje natkrivanja „Primjer 2“

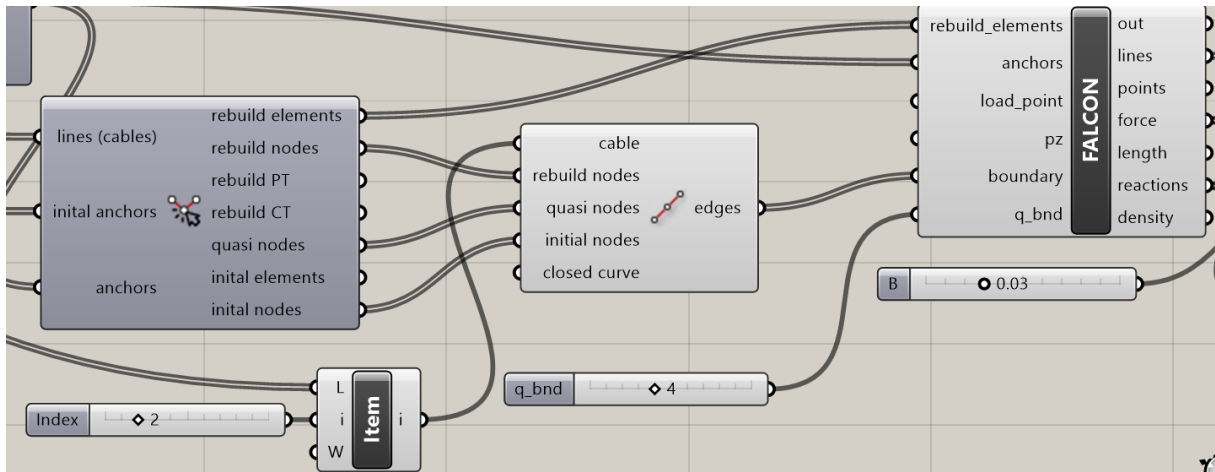


Parametarskom izmjenom početnih rubnih koordinata čvorova i elemenata, te smanjivanjem broja čvorova ovaj tip mreže se pretvara u „sedlastu konstrukciju“ pri kojoj rubni kabeli u krajnjim dijelovima konstrukcije imaju najveće unutarnje sile i smanjuju se prema sredini.

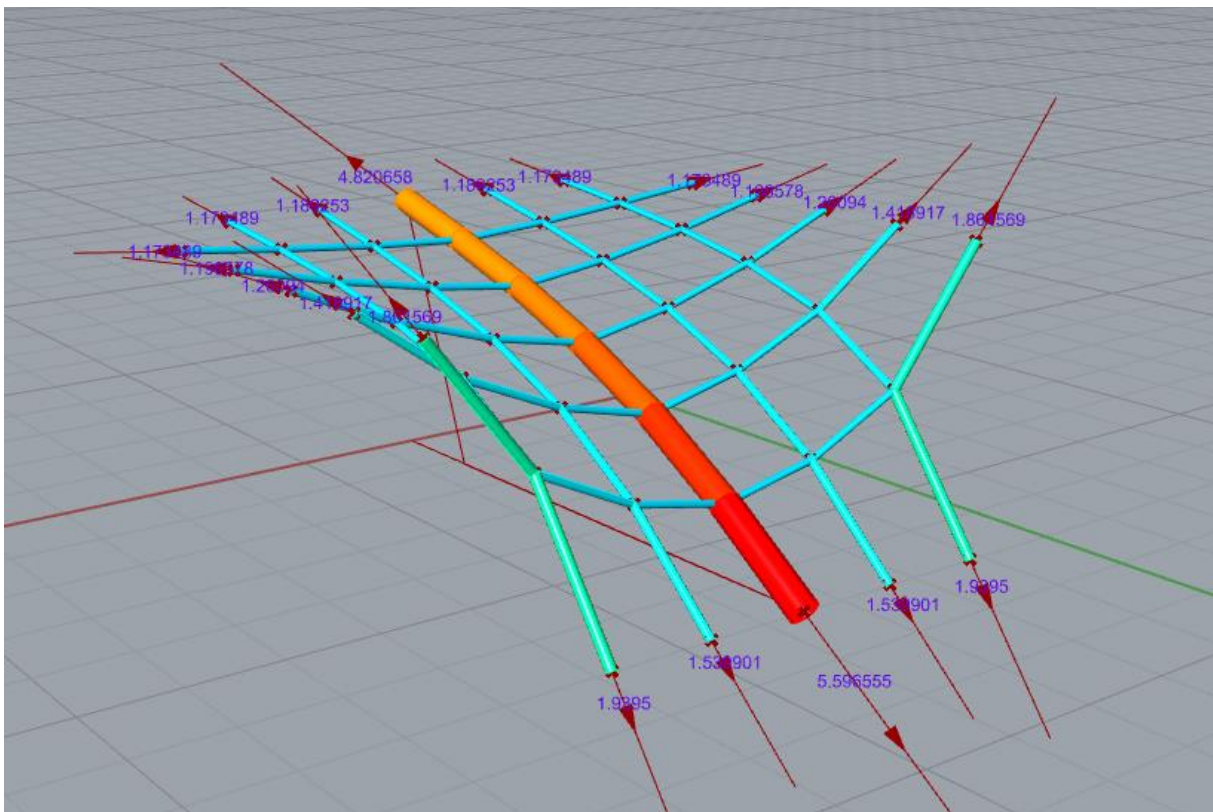


Slika 35: Promjena oblika mreže izmjenom početnih rubnih čvorova

Isto tako, ako se želi sačuvati oblik konstrukcije „Primjera 2“, a i dalje utjecati na unutarnje sile u mreži, promjenom vrijednosti gustoće sila klizačem „ $q_{bnd}$ “ središnjeg kabela pozivanjem funkcije „*Elements on cable*“ čiji parametri se dobivaju iz komponente „*Interactive net*“ i spajanjem sa funkcijom „*FALCON*“. Ovim postupkom središnji kabel ima najveće unutarnje sile konstrukcije i postaje glavnim kabelom konstrukcije koji je većeg poprečnog presjeka i proračunava se za veću nosivost od ostalih dijelova mreže.



Slika 36: Prikaz dodavanje komponente za izmjenu gustoće sila u odabranom kabelu



Slika 37: Vizualni prikaz prednapete mreže sa glavnim središnjim kabelom

## 6. ZAKLJUČAK

Vlačne konstrukcije su korištene od prapovijesti, ali njihov najznačajniji razvoj se dešava tek 70tih godina prošlog stoljeća i nastavlja se razvijati dolaskom novih tehnologija, programa i alata koji omogućuju kvalitetnije rješavanje njihova oblika. Glavna razlika konstrukcija užadi, u odnosu na masivne konstrukcije, je što njezin oblik i okvirne dimenzije nisu unaprijed poznate, već ih trebamo pronaći.

Jedan od tih alata koji omogućuje pronalazak oblika, i korišten je u izradu ovog rada, je FALCON u sklopu Rinoceros programa uz pomoć programa za vizualno programiranje, u Python jeziku, Grasshopper. Ovim radom se postupak nalaženja oblika temeljio na metodi gustoći sila. Metoda gustoće sila, iako razvijena prije više od pola stoljeća, jedinstvena je metoda s pomoću koje se kretanjem iz „loše“ zadane inicijalne geometrije pronalazi ravnotežno stanje konstrukcije.

Danas se može pronaći veći broj programa i alata koji na temelju različitih metoda omogućuju interaktivan pronalazak oblika najčešće koristeći metodu dinamičke relaksacije. Prednost ovog alata je interaktivno traženje oblika koristeći metodu gustoće sila te uvid u samu funkciju koja se koristi, a s time i bolje razumijevanje pronalaska oblika.

## 7. LITERATURA:

- 1) K. Fresl: Građevna statika 2. , Predavanja , Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet
- 2) P. Gidak, R. Vrančić: Prednapete gipke konstrukcije od užadi kao uvod u geometrijsku nelinearnost str. 145-187
- 3) P. Gidak: „Primjena metode gustoće sila na oblikovanje prednapetih mreža“, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2011., magistarski rad
- 4) J. Dvornik, D. Lazarević: Prednapregnute gipke konstrukcije od užadi i tkanine Građevinar 47 (1995)
- 5) K. Gabrić: Konstrukcije od užadi, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2014., završni rad (Str. 5)
- 6) P. Gidak, E. Šamec, K. Fresl, J. Vukadin: „Traženje oblika vlačnih konstrukcija u nastavi na Građevinskom fakultetu“
- 7) [https://en.wikipedia.org/wiki/Frei\\_Otto](https://en.wikipedia.org/wiki/Frei_Otto)
- 8) <https://www.randers-reb.com/fishing-rope/rope-technology/the-basic-elements-of-steel-wire-rope>
- 9) Leksikografski zavod Miroslav Krleža, enciklopedija.hr
- 10) <https://parametrighthouse.com/architecture-design-1-2/>

### Korištenje programa

```
@misc{falcon,  
  title = {{FALCON}: {F}orm-finding {A}lgorithm for {L}inear  
{C}onstrained {O}ptimisation of {N}etworks.},  
  author = {Elizabeta \v{S}amec and Kre\v{s}imir Fresl},  
  note   = {http://www.grad.hr/nastava/gf/falcon/falcon.html},  
  year   = {2021}  
}
```



## 8. IZVORI SLIKA:

- [1] <https://zkm.de>
- [2] [https://www.google.com/search?q=Roof+for+Olympic+Stadium%2C+Munich%2C+Germany&oq=Roof+for+Olympic+Stadium%2C+Munich%2C+Germany&gs\\_lcrp=EgZjaHJvbWUyBggAEEUYOdIBBzU2MWowajeoAgCwAgA&sourceid=chrome&ie=UTF-8#imgrc=6QsCgaTgnMrSoM&imgdii=090J1owQHEKjWM](https://www.google.com/search?q=Roof+for+Olympic+Stadium%2C+Munich%2C+Germany&oq=Roof+for+Olympic+Stadium%2C+Munich%2C+Germany&gs_lcrp=EgZjaHJvbWUyBggAEEUYOdIBBzU2MWowajeoAgCwAgA&sourceid=chrome&ie=UTF-8#imgrc=6QsCgaTgnMrSoM&imgdii=090J1owQHEKjWM)
- [3] <https://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=63589>
- [4] <https://www.google.com/search?q=Redaelli+Locked+Coil+Rope&tbm=isch&hl=en&gl=US>
- [5] <https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fwww.bug.hr%2Fenergetika%2Fu-sad-u-uskoro-zapocinje-s-radom-prvi-novi-nuklearni-reaktor-nakon-vise-od-3029799&psig=AOvVaw2fMFJQc 1R202iagxzZhhr&ust=1694606369102000&source=images&cd=vfe&opi=89978449&ved=0CBAQjRxqFwoTCICXLeCpYEDFQAAAAAdAAAAABAE>
- [6] [https://www.researchgate.net/figure/Model-of-the-Raleigh-Arena-designed-by-Nowicki-and-Severud-completed-in-1953\\_fig2\\_321490250](https://www.researchgate.net/figure/Model-of-the-Raleigh-Arena-designed-by-Nowicki-and-Severud-completed-in-1953_fig2_321490250)
- [7] <http://pixelizam.com/khan-shatyr-najveci-sator-na-svijetu/>
- [8] K. Fresl: Građevna statika 2. Predavanja, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2017. (str.153/ str.158)
- [9] A.Vlašić: Nosive strukture u mostovima, Predavanja, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu
- [10] P. Gidak, E.Šamec, K. Fresl, J.Vukadin: *Traženje oblika vlačnih konstrukcija u nastavi na Građevinskom fakultetu*, Građevinar 73 (2021) 4, 349-363
- [11] K. Gabrić: Konstrukcije od užadi, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2014., završni rad
- [12] <https://www.google.com/maps/@45.824088,16.0195471,86m/data=!3m1!1e3?entry=ttu>