

# Mehanizmi loma betona

---

**Rešetar, Tomislav**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:715098>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-24**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu  
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Tomislav Rešetar

MEHANIZMI LOMA BETONA

Diplomski rad

Zagreb, 2024.

Sveučilište u Zagrebu

Građevinski fakultet Zagreb

Diplomski studij smjer Teorija i modeliranje konstrukcija

## **MEHANIZMI LOMA BETONA**

**Diplomski rad**

Tomislav Rešetar

Mentor: izv. prof. dr. sc. Marko Bartolac

Zagreb, 2024.



## TEMA DIPLOMSKOG RADA

Ime i prezime studenta: **Tomislav Rešetar**

JMBAG: **0135233334**

Diplomski rad iz predmeta: **Osnove mehanike loma**

Naslov teme diplomskog rada:	HR	<b>Mehanizmi loma betona</b>
	ENG	<b>Concrete Fracture Mechanisms</b>

Opis teme diplomskog rada:

Diplomski rad treba sadržavati sljedeće:

- Popunjen i potpisan Obrazac 2,
- Sažetak rada i ključne riječi na hrvatskom i engleskom jeziku,
- Obradenu temu o mehanizmima loma betona ovisno o prirodi opterećenja (vlak, tlak, posmik, kombinacije),
- Popis literature.

Datum: **17. 04. 2023.**

Komentor:

(Ime i prezime komentora)

Mentor:

**Marko Bartolac**

(Ime i prezime mentora)

(Potpis mentora)

## **Sažetak:**

Mehanika loma je tehnička i znanstvena disciplina koja proučava nastanak i propagaciju pukotina u materijalima. Zbog pojave pukotina, odnosno defekata, stvarna čvrstoća materijala može biti nekoliko puta manja od teorijske čvrstoće dobivene po principima klasične mehanike. Cilj mehanike loma je razumijevanje polja naprezanja i deformacija oko vrha pukotine te definiranje uvjeta koji utječu na njeno daljnje širenje.

Beton je heterogeni kompozitni materijal koji je zbog svog sastava pun različitih defekata. Iako se pri projektiranju beton smatra krhkim materijalom zanemarive vlačne čvrstoće, u stvarnosti se ponaša kvazi-krhko. Pri vlačnom naprezanju na otvaranje pukotina troši se energija, što betonu daje određenu žilavost koja se često ne uzima u obzir u klasičnoj teoriji čvrstoće betona. Mehanika loma betona proučava pojavu i širenje pukotina u betonu te definira modele kojima bi se što preciznije prikazalo ponašanje betonskih elemenata i konstrukcija.

U radu su opisani parametri mehanike loma i pojave koje se događaju prilikom loma betona. Nadalje, obrađeni su modeli kojima se opisuje ponašanje betona pri vlačnom naprezanju i eksperimentalne metode kojima se dobivaju parametri loma betona. Za kraj riješeno je nekoliko praktičnih primjera.

**Ključne riječi:** Mehanika loma, beton, pukotina, zona procesa loma, energija loma

## **Abstract:**

Fracture mechanics is a technical and scientific discipline that studies the initiation and propagation of cracks in materials. Due to the occurrence of cracks, or defects, the actual strength of materials can be several times lower than the theoretical strength obtained according to the principles of classical mechanics. The goal of fracture mechanics is to understand the stress and deformation fields around the crack tip and to define conditions that influence its further propagation.

Concrete is a heterogeneous composite material filled with different defects due to its composition. Although concrete is considered to be a brittle material with negligible tensile strength, it behaves quasi-brittle in reality. During tensile stress, energy is consumed on openings of cracks, giving concrete a certain toughness often not considered in classical concrete strength theory. Concrete fracture mechanics study the occurrence and propagation of

cracks in concrete, defining models to more precisely depict the behavior of concrete elements and structures.

The paper describes fracture mechanics parameters and phenomena that occur during concrete fracture. Furthermore, models describing concrete behavior under tensile stress and experimental methods for obtaining concrete fracture parameters are discussed. Finally, several practical examples are solved.

**Keywords:** Fracture Mechanics, Concrete, Crack, Fracture Process Zone, Fracture Energy

# SADRŽAJ

1. Uvod.....	1
2. Uvodno o mehanici loma .....	3
2.1. Razvoj mehanike loma .....	4
3. Linearno elastična mehanika loma .....	6
3.1. Učinak koncentracije naprezanja na vrhu pukotine.....	6
3.2. Energetski pristup .....	7
3.3. Koeficijent intenziteta naprezanja .....	9
3.4. Koncept R-krivulje .....	13
4. Elasto-plastična mehanika loma.....	14
4.1. Otvaranje pukotine u vrhu ( <i>CTOD</i> ).....	16
4.2. Konturni J-integral Rice-a .....	19
5. Mehanika loma betona .....	21
5.1. Lokalizacija naprezanja .....	22
5.2. Zona procesa loma.....	24
5.3. Utjecaj veličine ( <i>Size Effect</i> ).....	25
5.3.1. Utjecaj veličine betonskih materijala .....	26
5.3.2. Utjecaj veličine betonskih elemenata .....	27
5.4. Model fiktivne pukotine ( <i>Fictitious Crack Model - FCM</i> ).....	28
5.5. Model trakastih pukotina ( <i>Crack Band Model - CBM</i> ) .....	30
5.6. Dvo parametarski model loma ( <i>Two-Parameter Fracture Model – TPFM</i> ).....	32
5.7. Model utjecaja veličine ( <i>Size Effect Model-SEM</i> ).....	34
6. Eksperimentalno određivanje parametara mehanike loma betona.....	37
6.1. Određivanje specifične energije loma <i>GF</i> testom savijanja u tri točke .....	39
6.1.1. Rezultati ispitivanja i proračun [13].....	40
6.2. Određivanje parametara <i>KIcs</i> i <i>CTODc</i> .....	42
6.2.1. Rezultati ispitivanja i proračun [13].....	45

6.3.	Određivanje parametara $Gf$ i $cf$ na temelju Bažantovog modela utjecaja veličine..	47
6.3.1.	Rezultati ispitivanja i proračun [13].....	48
7.	Riješeni primjeri problema mehanike loma .....	52
8.	Zaključak.....	63
9.	Literatura .....	64
10.	Popis slika .....	66
11.	Popis tablica .....	68



## 1. Uvod

Mehanika loma je tehnička i znanstvena disciplina koja proučava nastanak i propagaciju pukotina u materijalima. Zbog pojave pukotina, odnosno defekata, stvarna čvrstoća materijala može biti nekoliko puta manja od teorijske čvrstoće dobivene po principima klasične mehanike. Prve teorije mehanike loma obuhvaćale su ponašanje krhkih materijala kod kojih je odnos naprezanja i deformacije linearan te do loma dolazi pri maksimalnom naprezanju. Opisivanje ponašanja takvih materijala obuhvaćeno je linearno elastičnom mehanikom loma (*LEFM*). Daljnjim razvojem industrije i sve većom uporabom metala javlja se i potreba za primjenom mehanike loma na duktilne materijale te dolazi do razvoja nove grane mehanike loma - elasto plastične mehanike loma (*EPFM*). Kod takvih materijala karakteristična je značajna plastična deformacija nakon dosezanja maksimalnog opterećenja. Bez obzira na vrstu materijala, cilj mehanike loma je razumijevanje polja naprezanja i deformacija oko vrha pukotine te definiranje uvjeta koji utječu na njeno daljnje širenje.

Beton je heterogeni kompozitni materijal koji je zbog svog sastava pun različitih defekata. Iako se pri projektiranju beton smatra krhkim materijalom zanemarujući vlačne čvrstoće, u stvarnosti se ponaša kvazi-krhko. Pri vlačnom naprezanju na otvaranje pukotina troši se energija, što betonu daje određenu žilavost koja se često ne uzima u obzir u klasičnoj teoriji čvrstoće betona. Iako se može postaviti pitanje zašto je uopće potrebno promatrati beton kroz pristup mehanike loma, to je jedini način kako bi se objasnile pojave poput zone procesa loma i utjecaja veličine konstrukcije za koje principi klasične mehanike nemaju odgovor. Problem mehanike loma betona leži u tome što se njegovo ponašanje ne može dobro opisati ni u okviru *LEFM-a* (vrijedi za jako velike konstrukcije) ni u okviru *EPFM-a* (vrijedi za male uzorke).

Cilj ovoga rada je prikazati problematiku mehanike loma betona, procese koji se pri tome događaju i modele kojima se nastoji što bolje opisati ponašanje betonskih elemenata i konstrukcija pri vlačnom naprezanju.

U drugom poglavlju dana je definicija mehanike loma i kratki pregled razvoja ove relativno nove tehničke discipline. U trećem poglavlju opisani su parametri *LEFM-a* kojima se opisuje ponašanje krhkih materijala, dok su u četvrtom opisani principi *EPFM-a*. Peto poglavlje opisuje procese koji se događaju pri lomu betona i modele kojima se ti procesi opisuju. U šestom poglavlju opisane su tri eksperimentalne metode dobivanja parametara mehanike loma koje su preporučene od strane *RILEM-a* (franc. *Réunion Internationale des Laboratoires et Experts*

*des Matériaux, systèmes de construction et ouvrages*), dok je u sedmom analitički riješeno nekoliko praktičnih problema.

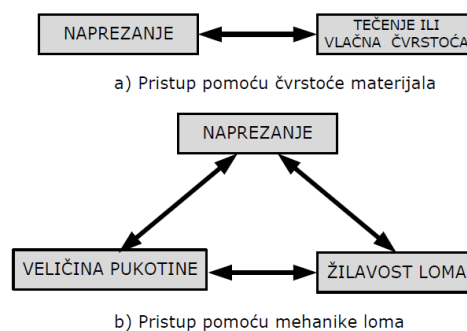
## 2. Uvodno o mehanici loma

Pukotine, odnosno defekti sa vrhom u kojemu je radijus blizak nuli, karakteristične su za svaki materijal, a posebice beton koji zbog svoje prirode i kompozitnog sastava sadrži pukotine različitih veličina. Upravo zbog pojave pukotina, stvarna čvrstoća materijala može biti nekoliko puta manja od teorijske čvrstoće koja se koristi u klasičnoj mehanici. Pri vrhu pukotina javlja se koncentracija naprezanja, što dovodi do njenog širenja, a u konačnici i do loma konstrukcije. To naprezanje oko vrha pukotine ovisi o dimenzijama pukotine, orijentaciji pukotine u odnosu na smjer djelovanja opterećenja i fizikalno-mehaničkim svojstvima materijala [1].

Mehanika loma (*Fracture Mechanics*) je tehnička i znanstvena disciplina, temeljena na principima primijenjene mehanike i znanosti o materijalima, a koja za svrhu ima razumijevanje polja naprezanja i deformacija oko vrha pukotine [2]. Mehanika loma definira kriterij za nastanak pukotine, uvjete njezinog daljnjeg nestabilnog ili stabilnog širenja i zaustavljanja. Uz koncentraciju naprezanja, mogući razlozi za nastanak pukotine mogu biti utjecaj korozije, zamor materijala, greške u samom materijalu itd. [1]

Kod klasičnog pristupa čvrstoći materijala, pretpostavlja se da naprezanja u blizini otvora, zareza i ostalih geometrijskih prekida kontinuiteta mogu prijeći granicu tečenja materijala što dovodi do preraspodjele naprezanja i plastične deformacije. Kod mnogih materijala to nije točno jer ne dolazi do raspodjele naprezanja nego zbog velike koncentracije naprezanja dolazi do nestabilnog širenja pukotine i loma kod naprezanja koja su manja od granice tečenja materijala. [1]

Kao što je prikazano na slici 1., kod klasičnog pristupa pouzdanosti, čvrstoća konstrukcije ili njenog dijela je glavni kriterij, dok se kod mehanike loma u obzir uzima i veličina pukotine. Žilavost loma (*Fracture Toughness*) je karakteristika materijala, a zamjenjuje čvrstoću materijala.



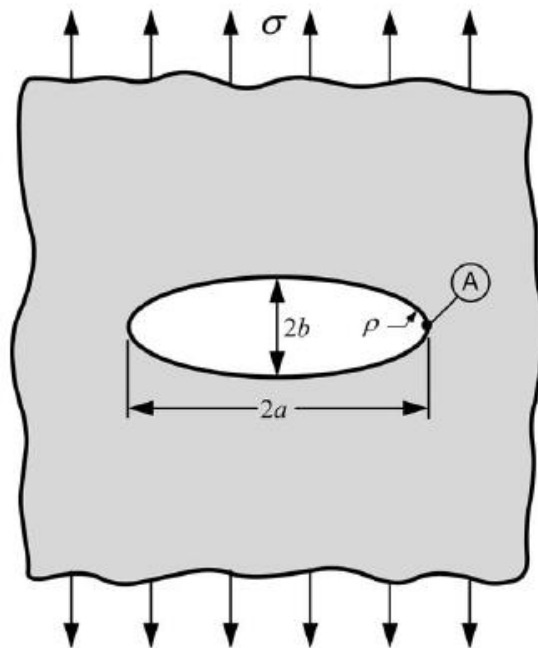
Slika 1. Razlika pristupa određivanja pouzdanosti preko čvrstoće materijala u odnosu na mehaniku loma [1]

## 2.1. Razvoj mehanike loma

Postupke određivanja čvrstoće možemo pratiti sve do *Leonarda da Vinci* koji u svojim bilješkama opisuje eksperiment u kojemu se testira čvrstoća čeličnih šipki različitih duljina. Rezultati eksperimenta upućuju na ovisnost između veličine uzorka i broja imperfekcija u njemu (*Size Effect Law*), što je jedan od najvažnijih koncepata mehanike loma betona [3].

Do kraja 19. stoljeća, utjecaj pukotina na čvrstoću materijala bio je poznat koncept, ali još nisu postajala istraživanja koja bi točno opisala zakonitosti o stanju naprezanja oko pukotine niti o samom utjecaju pukotine na čvrstoću.

*C.E. Inglis* u svojem radu objavljenom 1913. godine opisuje istraživanja koja je radio na staklenim pločama sa eliptičnom dvodimenzionalnom pukotinom u sredini. Za potrebe istraživanja staklena ploča se smatra beskonačno velikom dok je pukotina iznimno mala u odnosu na nju. Shematski prikaz elementa opisanog u istraživanju dan je na slici 2. Ono što je *Inglis* dobio za rezultat je koncentracija naprezanja u točki A kada je ploča opterećena vlačno u oba smjera, okomito na pukotinu. Isto tako primijetio je da ukoliko se odnos duljine i širine  $a/b$  povećava, odnosno pukotina postaje dulja i tanja, naprezanje u točki A raste [4].



Slika 2. Staklena ploča s eliptičnom pukotinom u sredini [5]

*Alan Arnold Griffith* prvi daje kvantitativnu vezu između čvrstoće materijala i veličine pukotine i smatra ga se utemeljiteljem moderne mehanike loma [1]. U svojem radu, objavljenom 1920.

godine opisuje istraživanja provedena na staklenim uzorcima s pukotinom te postavlja energetski pristup širenja pukotine. Primjenom analize naprezanja uzorka s pukotinom baziranom na *Inglisovom* radu, uz primjenu prvog zakona termodinamike došao je do zaključka kako pukotina postaje nestabilna, odnosno počinje se širiti do loma, kada promjena energije deformacije uslijed inkrementalnog prirasta pukotine postane veća od površinske energije materijala. *Griffith-ov* model pokazao se točnim za predviđanje utjecaja pukotine na čvrstoću krhkih materijala, ali nije pokazao zadovoljavajuće rezultate za materijale kod kojih se pojavljuje zona plastifikacije u okolini vrha pukotine [5]. Važno je napomenuti kako za beton *Griffith-ov* model daje više ili manje dobre rezultate, što najviše ovisi o veličini promatranog uzorka. Ograničenja linearno elastične mehanike loma pri promatranju pukotina u betonu bit će opisana u sljedećim poglavljima.

Daljnem razvoju mehanike loma uvelike su pridonijele i havarije koje su se događale u vremenu kada je primjena metala u konstrukcijama postajala sve učestalija. Kao čest primjer navode se lomovi brodova "*Liberty*" i tankera tipa "*T*" proizvedenih za vrijeme Drugog svjetskog rata. Primijećeno je da se na većini konstrukcija javljaju slična oštećenja, što je dovelo u pitanje ne samo valjanost konstruktivnih rješenja, nego i kvalitetu materijala koji su korišteni [1].

*George R. Irwin* sa svojim je timom dao veliki doprinos implementaciji dotad poznate *Griffith-ove* teorije na metale, odnosno uveo temelje nove grane mehanike loma koja je primjenjiva i na metale za zonom plastifikacije u području pukotine. Daljnji razvoj mehanike loma išao je u smjeru proučavanja nelinearnosti materijala pri vrhu pukotine, što je uz sve sofisticiranije modele ponašanja materijala dovelo i do normiranih postupaka ispitivanja metala [1].

Većina istraživanja i normativa, pogotovo u zemljama u kojima su istraživanja u području mehanike loma razvijana, primjerice Americi, Japanu i Indiji, odnose se na metalne i polimerne materijale. Prva eksperimentalna istraživanja u području mehanike loma betona proveo je *Kaplan* 1961. godine, a opsežnija proučavanja počinju se intenzivno razvijati od 80-tih godina prošloga stoljeća, što je uvelike potpomognuto razvojem numeričkih modela i softverskih rješenja.

### 3. Linearno elastična mehanika loma

U ovome poglavlju biti će ukratko objašnjeni principi i zakoni linearno elastične mehanike loma (*Linear Elastic Fracture Mechanics -LEFM*). Ova grana mehanike loma primjenjiva je na materijale koji se ponašaju prema *Hooke-ovom* zakonu, odnosno između deformacije i naprežanja postoji linearni odnos. Takve materijale naziva se krhkim materijalima koji se lome pri dostizanju kritičnog opterećenja bez pojave plastične deformacija oko pukotine. Iako beton nije idealno krhki materijal i područje primjene *LEFM-a* je ograničeno, korisno je poznavati pristupe mehanici loma preko faktora intenziteta naprežanja i energetskog pristupa jer su modifikacijom tih metoda napravljena prva istraživanja utjecaja pukotina na čvrstoću betona.

#### 3.1. Učinak koncentracije naprežanja na vrhu pukotine

*Inglis* je u svojem radu prvi opisao pojavu koncentracije naprežanja na vrhu pukotine, izvodeći eksperimente na staklenoj ploči sa eliptičnom rupom u sredini kao što je shematski prikazano na slici 2. Prema izrazu (3.1)  $\sigma_A$  predstavlja iznos naprežanja na vrhu pukotine,  $\sigma$  predstavlja vlačno naprežanje na ploču, dok su  $a$  i  $b$  dulja odnosno kraća os (dimenzija) pukotine [5].

$$\sigma_A = \sigma \cdot \left(1 + \frac{2a}{b}\right) \quad (3.1)$$

Kada se glavna os povećava u odnosu na os  $b$ , eliptična rupa poprima oblik oštre pukotine. Zbog pojednostavljenja izvoda, *Inglis* uvodi radijus zakrivljenosti pukotine  $\rho$  u jednadžbu. Stoga novi izraz (3.2) za naprežanje u točki A glasi:

$$\sigma_A = \sigma \cdot \left(1 + 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{\rho}}\right) \quad (3.2)$$

Gdje je, prema izrazu (3.3)  $\rho$  jednak:

$$\rho = \frac{b^2}{a} \quad (3.3)$$

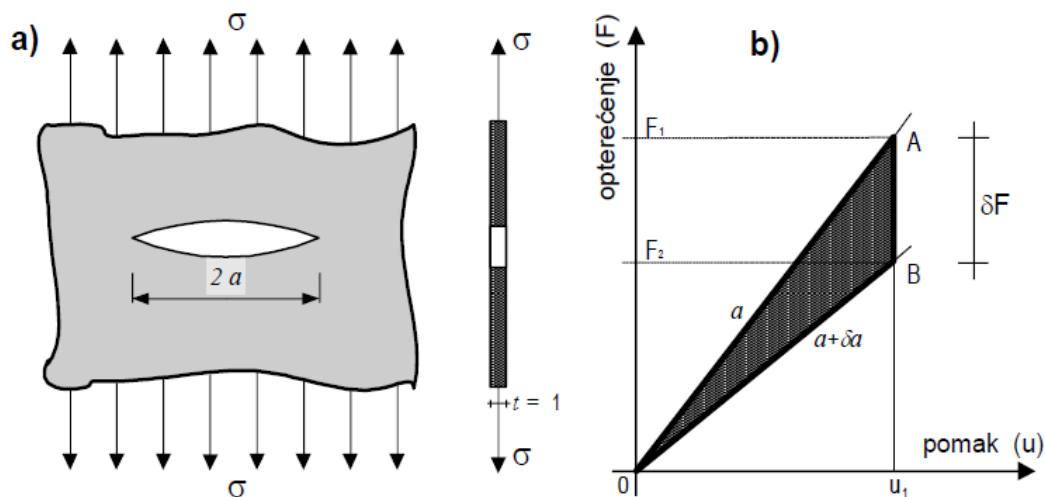
Ukoliko  $a \gg b$  izraz (3.2) možemo zapisati kao (3.4):

$$\sigma_A = 2\sigma \cdot \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (3.4)$$

Problem sa izrazom (3.2) je u tome što za oštre pukotine, gdje je  $\rho = 0$ , dobivamo beskonačno velika naprezanja na vrhu pukotine (odnosno u točki A), što kod realnih materijala nije moguće. Ovaj paradoks motivirao je *Griffith-a* da razvije teoriju baziranu na energetske pristupu, umjesto da uzima u obzir lokalna naprezanja pri vrhu pukotine [5].

### 3.2. Energetski pristup

*Griffith* je pretpostavio da se lom u idealno krhkim materijalima događa kada oslobođena elastična energija na vrhu pukotine postane jednaka ili veća od energije potrebne za stvaranje novih slobodnih površina pukotine [3]. Pri tome se elastična energija  $G$  (energija pretpostavljena površinom ispod krivulje naprezanja i deformacije) troši na stvaranje novih površina i dok postoji kontinuirano opterećenje, one će nastajati sve dok ne dođe do sloma materijala. Ukupna energija sustava se pri širenju pukotine smanjuje. Slika 3 a) prikazuje *Griffith-ov* model prema kojemu je ploča beskonačne duljine opterećena vlačnim naprezanjem i sadrži pukotinu duljine  $2a$  u sredini, dok je na slici 3 b) prikazana promjena elastične energije prilikom povećanja duljine pukotine za  $\delta a$ . Povećanjem pukotine smanjuje se krutost i opterećenje pada s  $F_1$  na  $F_2$ . Oslobođena elastična energija slijeva se u vrhove pukotine, u mjesta koncentracije naprezanja i dodaje se površinskoj energiji [6].



Slika 3. Griffith-ov model ploče s pukotinom [6]

*Griffith* je pri tome formulirao izraz (3.5) za uvjet razvoj pukotine pri krhkom lomu na temelju zakona o očuvanju energije.

$$U = U_0 - U_a + U_\gamma = W \quad (3.5)$$

Gdje su:  $U_0$  - potencijalna energija deformacije neopterećene neraspucane ploče (konstantna vrijednost),  $U_a$  - promjena potencijalne energije deformacije uzrokovana pojavom pukotine duljine  $2a$ .  $U_\gamma$  - elastična površinska energija u ploči s pukotinom duljine  $2a$ , dok je  $W$  - mehanički rad vanjskih sila [6].

Izraz (3.6) za kritično naprezanje pri kojemu se lom dalje odvija bez dodatnog utroška energije glasi:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E'\gamma}{\pi a}} \quad (3.6)$$

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (3.7)$$

Gdje su:  $\sigma_c$  - kritično vlačno naprezanje,  $\gamma$  - energija površinske napetosti po jedinici debljine ploče (energija potrebna za stvaranje dvije nove površine loma) [7].  $\nu$  – *Poisson-ov* koeficijent,  $a$  - polovica duljine pukotine,

Vrijednost *Young-ovog* modula elastičnosti je:  $E' = E$  za ravninsko stanje naprezanja, a  $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$  za ravninsko stanje deformacija.

Na temelju *Griffith-ove* teorije energetskog pristupa, *Irwin* daje ekvivalentno rješenje, ali ono koje je prikladnije inženjerskim problemima [1]. On definira pojam brzine oslobađanja energije  $G$  (*Energy Release Rate*) dan izrazom (3.8).

$$G = \frac{\pi \sigma^2 a}{E} \quad (3.8)$$

U trenutku loma kritična brzina oslobođene energije je  $G = G_c$  i opisuje kritičnu kombinaciju naprezanja i veličine pukotine opisano izrazom (3.9).

$$G_c = \frac{\pi \sigma_c^2 a_c}{E} \quad (3.9)$$



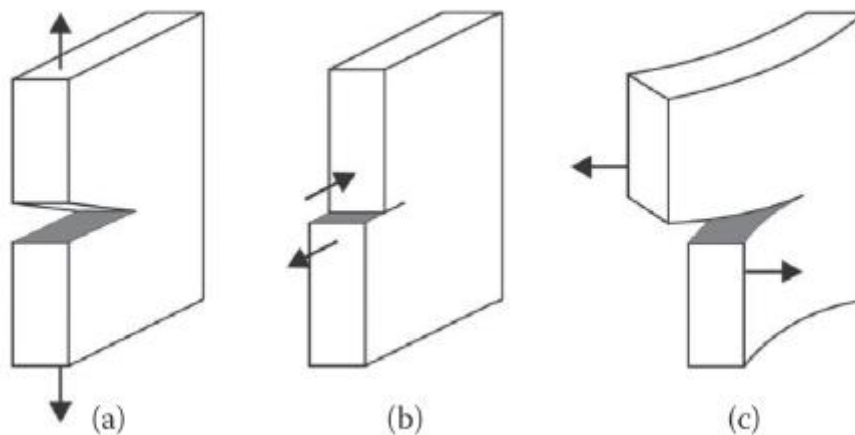
Dok je izrazom (3.10) dana vrijednost kritičnog napreznja.

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{G_c E}{\pi a}} \quad (3.10)$$

Za konstantnu kritičnu vrijednost  $G_c$ , vrijednost napreznja  $\sigma_f$  se mijenja sa  $1/\sqrt{a}$ . Prema analogiji s čvrstoćom materijala, brzina oslobađanja energije  $G$  predstavlja silu koja pokreće lom, dok njenu kritičnu vrijednost  $G_c$  možemo shvatiti kao otpornost materijala na lom [1].

### 3.3. Koeficijent intenziteta napreznja

U mehanici loma, otkazivanje uzoraka pri vlačnom napreznju može se opisati sa jednim od tri tipa otkazivanja prikazanim na slici 4. [8].

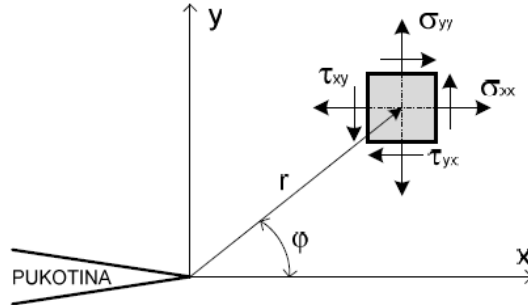


Slika 4. Tipovi otkazivanja uzorka [8]

- a) Tip I – razvoj pukotine otvaranjem (*Opening*)
- b) Tip II – pukotina se širi klizanjem (*In-Plane Shear*)
- c) Tip III – lom rascjepkavanjem (*Out-of-Plane Shear*)

Za sve tipove otkazivanja definirana su ispitivanja i načini određivanja faktora intenziteta napreznja. Faktor intenziteta napreznja  $K$  je konstanta koja definira stanje napreznja u blizini pukotine. Tip I je najopasniji oblik nastanka pukotine te se on najčešće i proučava. Svi oblici razvoja pukotine u domeni su ravninskih problema teorije elastičnosti i za njih

vrijedi ravninsko stanje naprezanja ili ravninsko stanje deformacija [1]. Na slici 5 prikazano je stanje naprezanja za Tip I u blizini pukotine:



Slika 5. Stanje naprezanja elementa u blizini pukotine [1]

Veličine pripadajućih komponenti naprezanja zadane su općim izrazima (3.11), (3.12), (3.13) [1].

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left[1 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right] \quad (3.11)$$

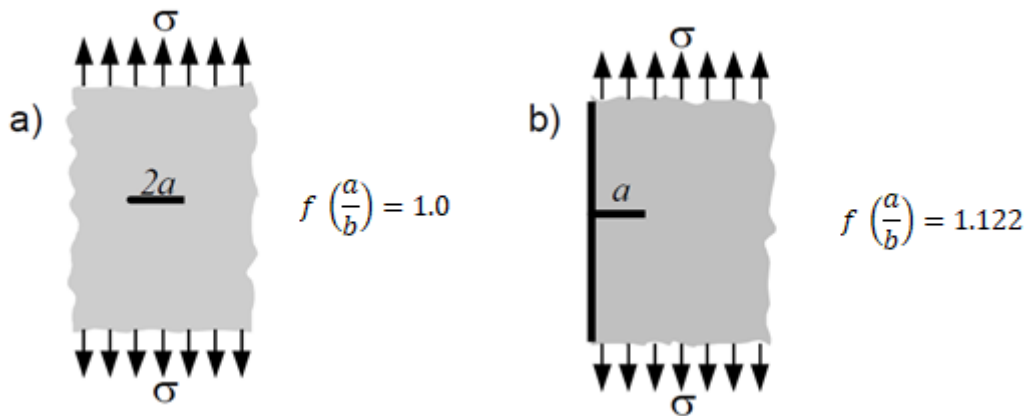
$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left[1 + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right] \quad (3.12)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \quad (3.13)$$

Svaka komponenta naprezanja ovisna je o faktoru  $K_I$  stoga se može zaključiti da je polje naprezanja u blizini vrha pukotine proporcionalno faktoru intenziteta naprezanja. Ako pretpostavimo da materijal popušta lokalno pri kritičnoj kombinaciji naprezanja i deformacija, tada proizlazi da će se lom dogoditi pri kritičnoj vrijednosti koeficijenta naprezanja  $K_I = K_{Ic}$  i tada tu vrijednost možemo smatrati mjerom žilavosti loma. Žilavost loma karakteristika je materijala i u slučaju *LFEM*-a ne ovisi o obliku i dimenzijama promatranog elementa. Izraz (3.14) predstavlja vrijednost  $K_I$ , iskazuje se u dimenzijama  $MPa\sqrt{m}$  [10].

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi a} \cdot f\left(\frac{a}{b}\right) \quad (3.14)$$

Parametar  $a$  odnosi se na duljinu pukotine, na slici 6 prikazano je kako se u slučaju središnje pukotine, njena duljina označava sa  $2a$ , dok se duljina pukotine na rubu elementa označava sa  $a$ . Parametar  $b$  predstavlja referentnu dimenziju elementa. Parametar  $f\left(\frac{a}{b}\right)$  predstavlja funkciju geometrije oblika, a njena vrijednost za slučaj beskonačne ploče dana je na slici 6.



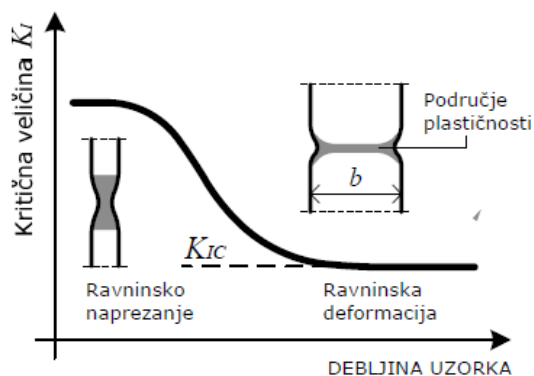
Slika 6. Funkcija geometrije oblika za beskonačnu ploču [6]

Kada je riječ oblicima koji se koriste u eksperimentima, postoji nekoliko rješenja dobivenih temeljem različitih matematičkih metoda. [6]. U sedmom poglavlju bit će prikazane konkretne funkcije geometrije oblika potrebne za rješavanje određenih problema.

Kod linearno elastičnih materijala, pristup preko intenziteta naprezanja i energetski pristup su ekvivalentni i odnos između parametara je dan izrazom (3.15) [1]:

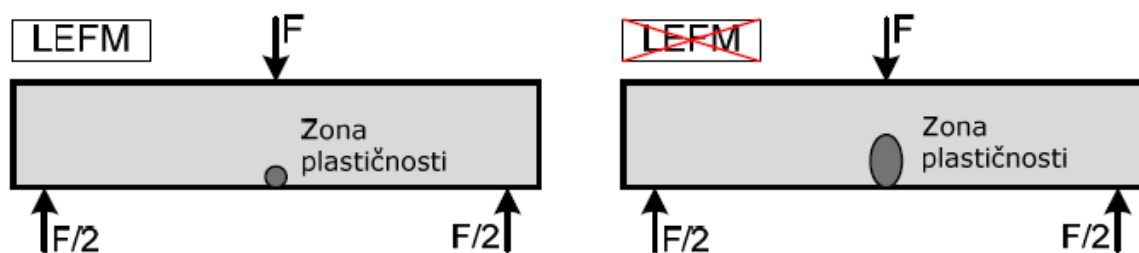
$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad (3.15)$$

Kao što je gore navedeno  $K_{Ic}$  kao mjera žilavosti loma vrijedi u okviru *LEFM*-a. Kako se većina materijala ipak ne ponaša elastično i krhko, potrebno je uvesti određene uvjete kako bi se  $K_{Ic}$  mogao koristiti kao mjerodavna karakteristika kod materijala s ograničenom zonom plastične deformacije pri vrhu pukotine. Kako bi se mogla primijeniti *LEFM* na materijal sa zonom plastičnosti, ta zona mora biti mala u odnosu na dimenzije uzorka. Na slici 7 prikazan je odnos između debljine uzorka i kritične vrijednosti koeficijenta naprezanja. Kada je debljina uzorka dovoljno velika da zona plastičnosti nema utjecaj na žilavost loma, možemo pričati o ravninskom stanju deformacija pri kojemu vrijedi *LEFM*.



Slika 7. Odnos  $K_{Ic}$  i debljine uzorka [1]

Osim debljine uzorka i ostale dimenzije moraju biti dovoljno velike kako bi se osiguralo područje singularnosti u blizini vrha pukotine. Na slici 8 shematski je prikazan odnos između veličine zone plastičnosti i dimenzija uzorka.



Slika 8. LEFM vrijedi ako je zona plastičnosti puno manja u odnosu na ostale dimenzije [1]

Norma ASTM (*American Society for Testing and Materials*) daje uvjete koji moraju biti zadovoljeni kako bi vrijedilo ravninsko stanje deformacija i linearno elastično ponašanje pri vrhu pukotine [1].

$$t \geq 2.5 \cdot \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_T}\right)^2 \quad (3.16)$$

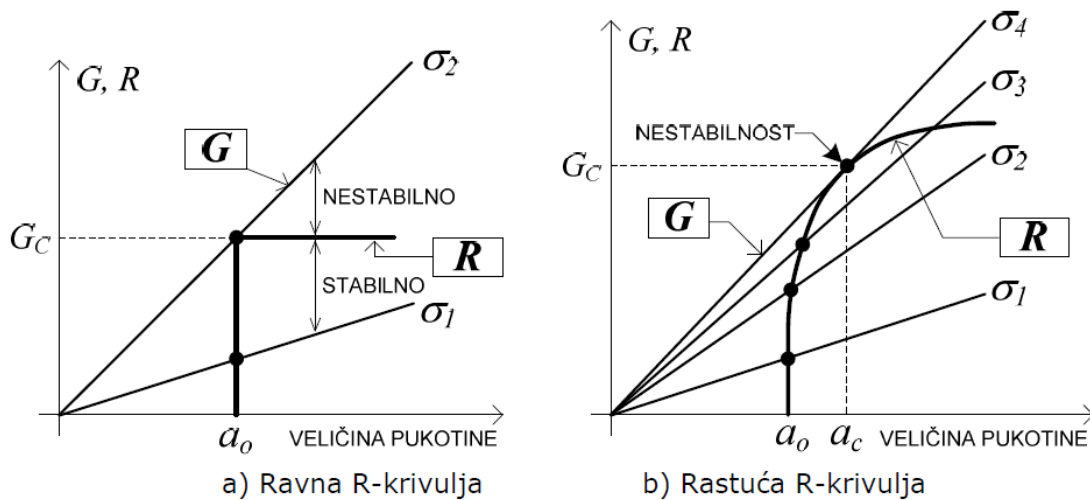
$$a \geq 2.5 \cdot \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_T}\right)^2 \quad (3.17)$$

$$(b - a) \geq 2.5 \cdot \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_T}\right)^2 \quad (3.18)$$

Izraz (3.16) predstavlja zahtjev za debljinom uzorka kako bi vrijedilo ravninsko stanje deformacija, a uvjeti dani izrazima (3.17) i (3.18) osiguravaju linearno elastično ponašanje.

### 3.4. Koncept R-krivulje

Kao što je navedeno u prethodnom poglavlju, brzina oslobađanja energije  $G$  predstavlja mjeru raspoložive energije potrebne za daljnji razvoj pukotine. Prema konceptu  $R$ -krivulje, širenje pukotine se događa kada je  $G$  jednak  $R$ , gdje  $R$  predstavlja otpor materijala prema širenju pukotine. Odnos između parametara  $G$  (ili  $K$ ) i odgovarajuće veličine pukotine  $a_0$ , moguće je prikazati krivuljom koja se naziva krivulja otpornosti materijala širenju pukotine (*Resistance Curve*) [10]. Na slici 9 prikazane su krivulje otpornosti  $R$  i krivulje širenja pukotine  $G$  za različite materijale.



Slika 9. Shematski prikaz  $R$  krivulje [1]

Ravna  $R$ -krivulja karakteristična je za idealno krhke materijale, gdje je pukotina stabilna između napreznja  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , a nestabilni lom nastaje za napreznja veća od  $\sigma_2$ . Nestabilno širenje pukotine događa se jer se sila širenja pukotine povećava sa prirastom pukotine, dok otpornost ostaje ista. Rastuća  $R$ -krivulja opisuje duktilne materijale kod kojih je širenje pukotine stabilno, sve do granice kada prirast širenja  $G$  ne postane veći od nagiba  $R$ -krivulje. [1].

Matematički se odnosi  $R$ -krivulje mogu opisati izrazima (3.19), (3.20), (3.21) [10]:

$$\frac{dG}{da} < \frac{dR}{da} - \text{stabilni prirast pukotine} \quad (3.19)$$

$$\frac{dG}{da} = \frac{dR}{da} - \text{dosegnuta kritična sila širenja pukotine} \quad (3.20)$$

$$\frac{dG}{da} > \frac{dR}{da} - \text{nestabilni prirast pukotine} \quad (3.21)$$

## 4. Elasto-plastična mehanika loma

Većina materijala ne ponaša se krhko, stoga se linearno elastična mehanika loma ne može primijeniti na materijale s ograničenim područjem plastičnosti oko vrha pukotine.

*Irwin* je predložio modifikaciju *Griffith-ove* elastične teorije kako bi se ona mogla primijeniti i na materijale kod kojih se lom ne događa u jednoj točki nego se odvija u malom području koje je nazvao zonom procesa loma [1]. Prema izrazu (3.22) normalno naprezanje  $\sigma_y$  u ravni pukotine za linearno elastične materijale je:

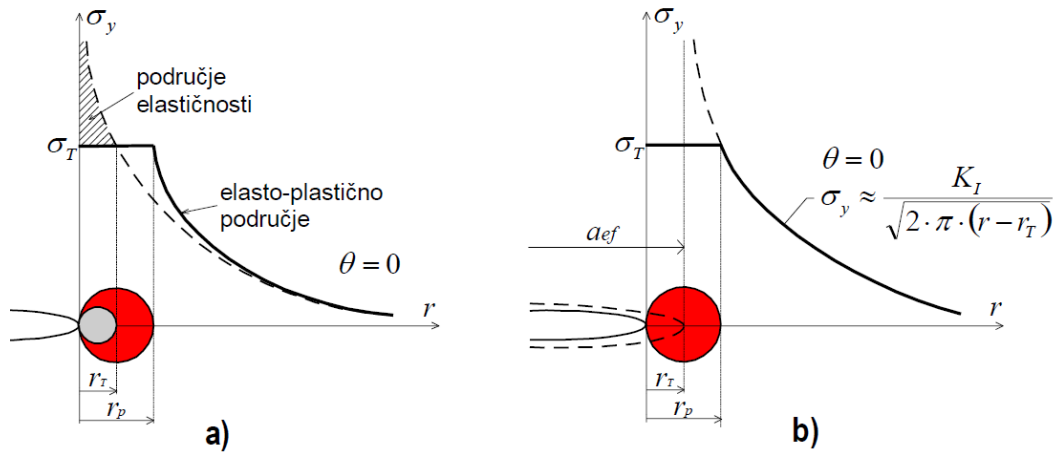
$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \quad (3.22)$$

Na granici između elastičnog i plastičnog ponašanja materijala naprezanje odgovara granici tečenja, odnosno  $\sigma_y = \sigma_T$  dobiva se veličina korigiranog plastičnog područja  $r_T$  (radijus kružne pukotine) prema izrazu (3.23):

$$r_T = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left( \frac{K_I}{\sigma_T} \right)^2 \quad (3.23)$$

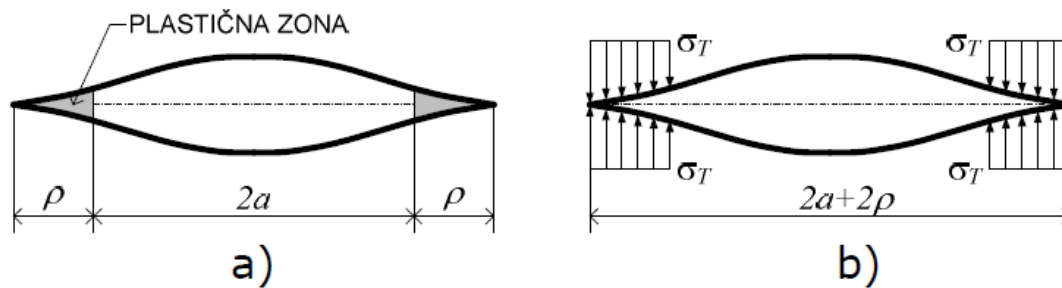
*Irwin* je pretpostavio da će se početna pukotina produljiti za veličinu plastičnog područja to je uveo njenu korekciju  $a_{eff} = a + r_T$ . Preko ravnoteže sila dobiva se vrijednost druge iteracije veličine plastičnog područja  $r_p = 2 \cdot r_T$  [6].

Na slici 10 prikazana je raspodjela naprezanja zbog korekcije, odnosno povećanje plastične deformacije zbog toga što naprezanje ne može preći granicu tečenja pa se „višak“ energije troši na otvaranje pukotine.



Slika 10. Korekcija područja plastičnosti [6]

Još jedan model kojim se pokušava uzeti u obzir plastično područje je i *Dudgale-Barenblattov* model (*Strip Yield Model*) koji opisuje usko i dugačko plastično područje u materijalu bez ojačanja u slučaju ravninskog stanja naprezanja. Slika 11 shematski prikazuje plastičnu zonu i raspodjelu tlačnog naprezanja na granici tečenja [1].



Slika 11. Dudgale-Barenblattov model [1]

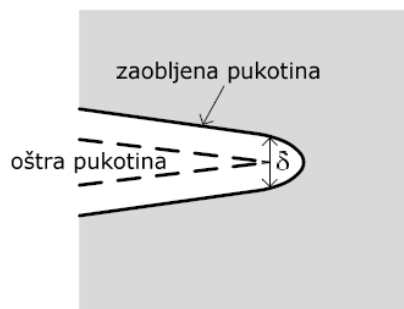
Zbog toga što su naprezanja u plastičnom području konačna, odnosno ne prelaze granicu tečenja, nema pojave singularnosti u vrhu pukotine.

Iako postoje modeli kojima se elastična mehanika loma može primijeniti i na materijale sa ograničenim područjem nelinearne deformacije oko pukotine, ipak za većinu materijala koji nisu idealno krhki, ona ne daje prikladne rezultate. Zahtjev za što boljim opisivanjem polja naprezanja i deformacija oko pukotine doveo je do razvoja drugih grana mehanike loma, među

kojima je i elasto-plastična mehanika loma (*Elasto Plastic Fracture Mechanics - EPFM*). *EPFM* je primjenjiva za materijale kod kojih dolazi do vremenski nezavisne plastične deformacije pri rubu pukotine. Prema Irwin-u, proces loma nije koncentriran u jednoj točki nego se proteže preko područja konačne veličine koje se naziva zona proces loma (*Fracture Process Zone – FPZ*). Dva nova parametra koji se mogu koristiti kao kriterij loma su: otvaranje pukotine u vrhu (*Crack Tip Opening Displacement - CTOD*) i J konturni integral *Rice-a*. Kritične veličine tih parametara su mjera žilavosti materijala. Određivanje *CTOD* i J integrala ne ovisi o veličini uzorka, ni o veličini plastične zone [5].

#### 4.1. Otvaranje pukotine u vrhu (*CTOD*)

Kod materijala s plastičnom deformacijom pri vrhu pukotine, karakteristično je postojanje konačnog pomaka pri vrhu pukotine  $\delta$  (*CTOD*), kao što je prikazano na slici 10. Inicijalno oštra pukotina zaobljava se pri plastičnoj deformaciji do konačnog pomaka  $\delta$ . To širenje je stabilno te se može zaključiti da su stupanj zaobljenja i žilavost materijala proporcionalni. Postoji više modela koji opisuju parametar otvaranja pukotine *CTOD*.

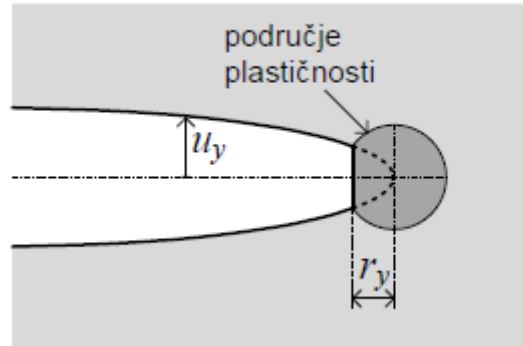


Slika 12. Širenje vrha pukotine -*CTOD* [1]

*Wells* je proveo analizu koja je povezivala *CTOD* s koeficijentom intenziteta napreznja  $K_{Ic}$  u slučaju ograničenog područja plastičnosti [1]. Uzevši u obzir *Irwin-ovu* teoriju prema kojoj se, zbog plastičnosti, pukotina ponaša kao da je malo duža, procijenio je *CTOD* određivanjem pomaka u vrhu početne pukotine uz pretpostavku efektivne duljine pukotine  $a_{eff} = a + r_y$ . Korištenjem poznatog izraza (4.1) pomak  $u_y$  za I oblik otvaranja pukotine, kada je kut napreznja  $\varphi = 0$ , dobije se pomak na mjestu udaljenom za  $r_y$  od vrha efektivne pukotine. Parametar  $a$  predstavlja duljinu početne pukotine, dok je  $r_y$  korekcija područja plastičnosti kao što je prikazano na slici 13.



$$u_y = \frac{\kappa + 1}{2 \cdot \mu} \cdot K_I \cdot \sqrt{2\pi r_y} \quad (4.1)$$



Slika 13. Područje plastičnosti pri vrhu pukotine [1]

Prema Irwin-u, korekcija područja plastičnosti dana je izrazom (4.2), dok su koeficijenti  $\kappa = 3 - 4\nu$  za ravninsku deformaciju i  $\mu = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_T}\right)^2 \quad (4.2)$$

Stoga ako se izraz (4.2) i koeficijenti uvrste u izraz (4.1) dobije se izraz (4.3) za vrijednost CTOD-a .

$$CTOD = 2 \cdot u_y = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{K_I^2}{\sigma_T \cdot E'} \quad (4.3)$$

$$CTOD = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{G}{\sigma_T}$$

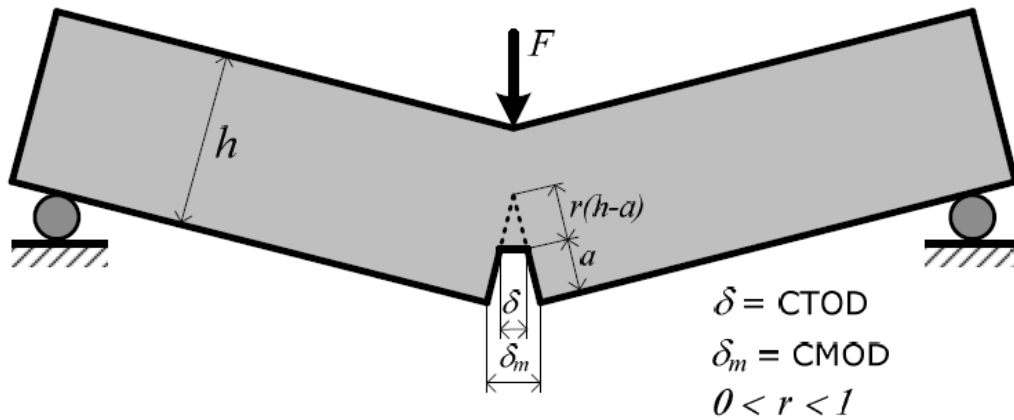
Gdje je  $E' = E$  za ravninsko stanje naprežanja, a  $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$  za ravninsko stanje deformacija.

Za slučaj ograničenog područja plastičnosti ( $\sigma \ll \sigma_T$ ) CTOD je povezan sa koeficijentom intenziteta naprežanja  $K_I$  i brzinom oslobađanja energije  $G$  prema izrazu (4.4)

$$CTOD = \frac{K_I^2}{m \cdot \sigma_T \cdot E} \cdot \frac{G}{m \cdot \sigma_T} \quad (4.4)$$

Gdje je  $m$  konstanta koja ima vrijednost 1 za ravninsko stanje naprežanja i 2 za ravninsko stanje deformacija. [6].

Ekperimentalno mjerenje *CTOD-a* obavlja se testom savijanja u tri točke, kao što je prikazano na slici 14.



Slika 14. Savijanje uzorka u tri točke [1]

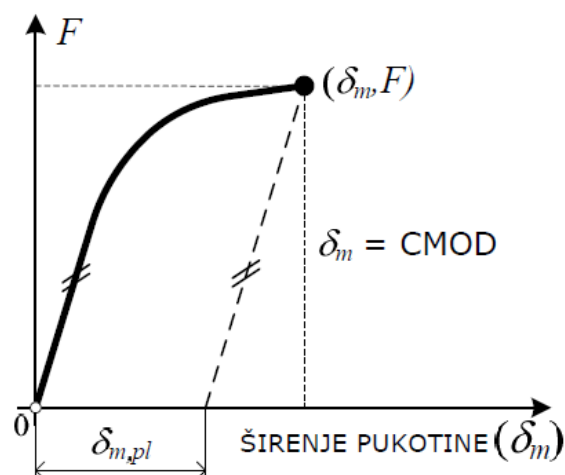
Radi jednostavnosti uređaj za mjerenje mjeri pomak *CMOD* ( $\delta_m$ ), dok se *CTOD* ( $\delta$ ) određuje iz sličnosti trokuta, uz pretpostavku da su lijeva i desna polovica uzorka krute te da rotiraju oko plastičnog zgloba. Tada se dobije izraz (4.5) [1].

$$\delta = \frac{r \cdot (h - a) \cdot \delta_m}{r \cdot (h - a) + a} \quad (4.5)$$

Gdje je  $r$  koeficijent rotacije, bezdimenzionalni parametar s vrijednošću između 0 i 1.

U slučaju kada su pomaci dominantno elastični, potrebno je prilagoditi model, tako da se pomaci razdvajaju na elastični i plastični dio. Na slici 15 prikazana je tipična krivulja koja se dobije testom određivanja *CTOD-a*, ukoliko se pukotina ne povećava za vrijeme testa, izraz (4.6) daje vrijednost *CTOD-a*. [1]

$$\delta = \delta_{el} + \delta_{pl} = \frac{K_I^2}{m \cdot \sigma_T \cdot E'} \frac{r \cdot (h - a) \cdot \delta_m}{r \cdot (h - a) + a} \quad (4.6)$$

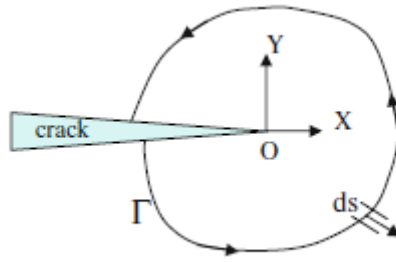


Slika 15. Plastični dio širenja pukotine [1]

Važno je napomenuti navedene jednadžbe vrijede za materijale kod kojih je plastična deformacija dominantna, kao na primjer metale. Navedeni izrazi ne mogu se direktno primijeniti na kvazi-krhke materijale kao što su beton i kamen te su potrebne određene modifikacije. Ipak, postoji nekoliko eksperimentalnih metoda kojima se određuje *CTOD* kod betona koje će biti prikazane u nastavku rada.

#### 4.2. Konturni J-integral Rice-a

*Rice* je uveo novi parametar - J-integral za analizu propagacije pukotine. Prednost ovog pristupa je u tome što se elastično-plastična deformacija može idealizirati kao nelinearno elastična, što je dovelo do proširivanja područja primjene mehanike loma [1]. Vrijednost J-integrala jednaka je brzini oslobađanja energije  $G$  (energetski pristup u *LEFM-u*) u nelinearno elastičnom materijalu s pukotinom. On se može promatrati i kao energetski parametar i kao parametar intenziteta naprežanja. Kada dođe do razvoja pukotine pri kritičnom naprežanju, J-integral dostiže kritičnu vrijednost  $J = J_c$ . Na slici 16 je prikazan proizvoljan put integracije  $\Gamma$  u smjeru obrnutom od kazaljke na satu (jer J-integral nije ovisan o putu integracije), dok je izrazom (4.7) dana njegova vrijednost [10]:



Slika 16. Konturni J- integral [10]

$$J = \int_{\Gamma} \left( W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) \quad (4.7)$$

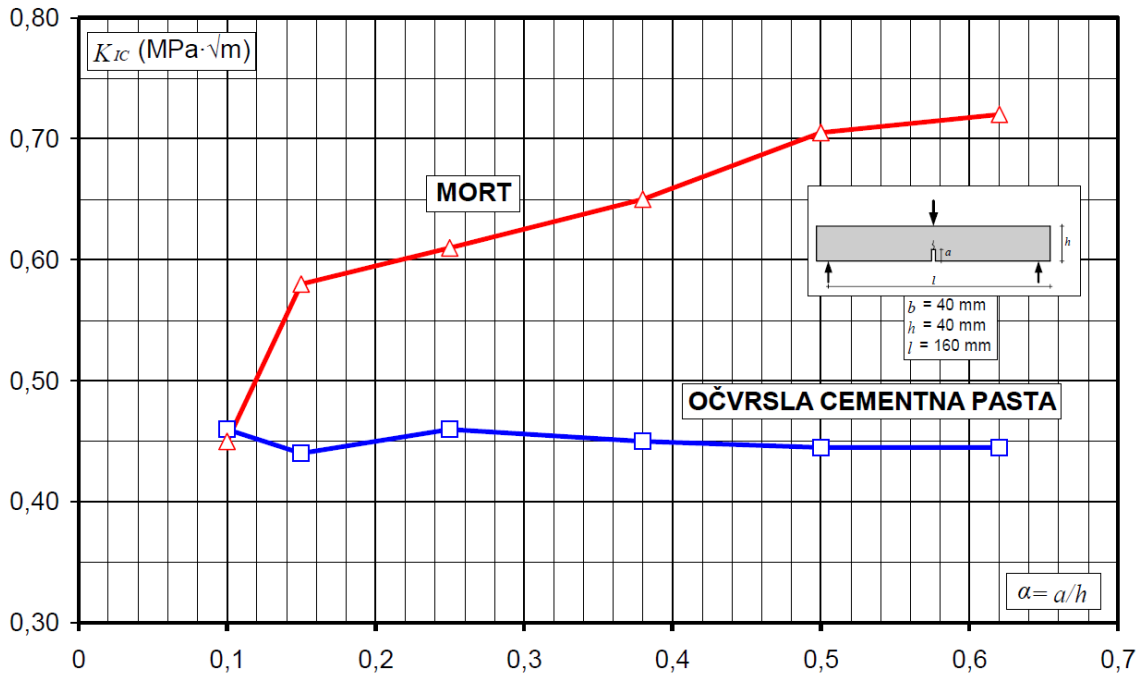
Gdje su:  $W$  – gustoća energije deformacije,  $T_i$  – komponenta vektora vuče okomitog na na put integracije  $\Gamma$ ,  $u_i$  – komponente vektora pomaka,  $ds$  – duljina inkrementa po putu integracije [10].

## 5. Mehanika loma betona

Beton, anizotropni, nehomogeni kompozit, najkorišteniji je građevinski materijal na svijetu [9]. Klasični beton smatra se krhkim materijalom, dok se u stvarnosti ponaša kvazi-krhko. Beton je materijal pun defekata kao što su pore, šupljine nastale procjednom vodom, mikropukotine uzrokovane skupljanjem betona itd. Pri vlačnom naprezanju na otvaranje tih pukotina se troši energija, što betonu daje određenu žilavost koja se često ne uzima u obzir u klasičnoj teoriji čvrstoće betona. Kako bi dobili što točnije rezultate ispitivanja čvrstoće betona i ponašanja betonskih elemenata i konstrukcija, potrebno je uvesti ispitivanja i modela u okviru mehanike loma.

Prva ispitivanja u okviru linearno elastične mehanike loma na betonu provodio je *Kaplan* 1961. godine. Provodeći ispitivanja betonskih greda sa zarezom na savijanje u konfiguracijama u tri i četiri točke, pokušao je odrediti kritičnu brzinu oslobađanja energije betona. Na temelju dobivenih rezultata zaključio je da su parametri  $K_{Ic}$  i  $G_c$  ovisni o geometriji uzorka. U narednim godinama nekoliko je znanstvenika došlo do sličnih rezultata [10]. Raznim ispitivanjima utvrđeno je da na faktor intenziteta naprezanja  $K_{Ic}$  utječu sastav betona, veličina i volumni udio agregata, veličina zareza (pukotine) te veličina uzorka koja se opisuje pojmom efekta veličine (*Size Effect*).

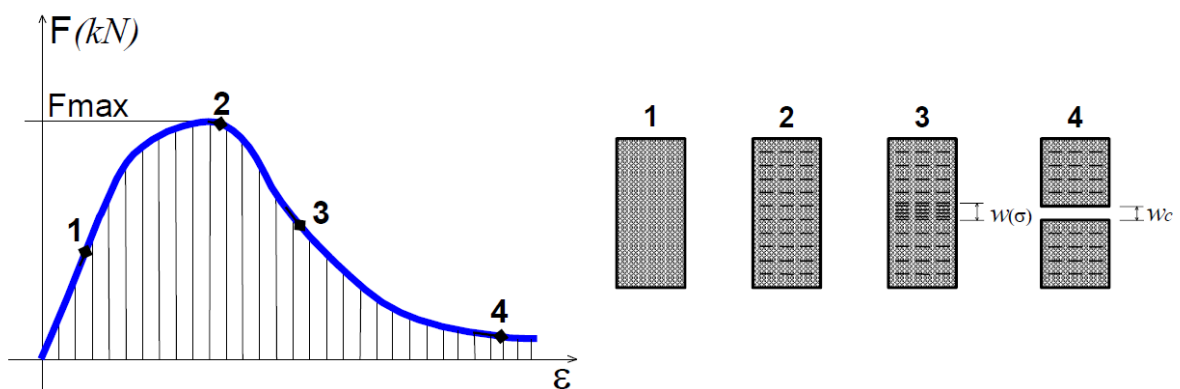
Na slici 17 prikazani su rezultati ispitivanja koje su proveli *Gjørvi* 1977 i *Ohgishi* 1986. [6]. Prema rezultatima vidljivo je da već korištenjem pijeska male granulacije, vrijednost  $K_{Ic}$  značajno odstupa od *LEFM*-a. U tom smislu *LEFM* ima određena ograničenja u primjeni na beton, odnosno, kako bi *LFEM* bio primjenjiv, zona procesa loma (*Fracture Process Zone - FPZ*) mora biti mala u odnosu na dimenzije. U praktičnom smislu *LEFM* je primjenjiv za velike krhke konstrukcije od betona kao što su betonske brane, mostovi velikih raspona, lukobrani itd. Kako bi se dobili točniji rezultati za manje uzorke, koje se može praktično ispitivati razvijeni su modeli bazirani na elasto-plastičnoj mehanici loma. [9].



Slika 17. Promjena  $K_{Ic}$  sa veličinom početnog zareza [6]

### 5.1. Lokalizacija naprežanja

Kao što je spomenuto u poglavlju 3.3., *tip I* je najopasniji oblik razvoja pukotine kada je uzorak opterećen vlačnim naprežanjem, stoga je potrebno promotriti ponašanje betona pri vlačnom opterećenju. Na slici 18 prikazan je dijagram naprežanja i deformacije za betonski uzorak u vlaku.



Slika 18. Dijagram opterećenje-deformacija betona [6]

Raznim eksperimentalnim metodama utvrđeno je da beton ima značajnu zonu nelinearnosti prije dosezanja granične čvrstoće. Na slici 18 radni dijagram betona opisan je sa 4 karakteristične točke: U točki 1 dosegnuto je otprilike 30 % maksimalne nosivosti i u području

od 0 do 1 uzorak se ponaša linearno elastično i utjecaj propagacije pukotina je zanemariv. Točka 2 predstavlja dostizanje nosivosti na vlak, a uzorak pokazuje umjereno očvršćivanje u području od 1 do 2. U tom području pojavljuju se izolirane i nasumične pukotine u volumenu uzorka. Također u tom području vlačna sila je jednoliko raspoređena duž uzorka u smjeru opterećenja. Do točke 2, odnosno do vršnog napreznja otvaranje pukotina je stabilno, što znači da one rastu kada se povećava sila i uzorak se ponaša približno linearno elastično uz umjereno očvršćivanje. Kada je dosegnuta maksimalna nosivost, u dijelu uzorka počinje se stvarati zona loma (*Fracture Zone*). Nakon dosizanja nosivosti, vlačno napreznje raste unutar zone loma, dok se ostatak uzorka rasterećuje. Područje 2-4 naziva se krivulja omekšanja (*Softening Curve*). Odnos napreznja i produljenja za zonu pucanja može se dobiti oduzimanjem elastičnog pomaka od ukupnog pomaka [10].

Izraz (5.1) predstavlja ukupno produljenje uzorka duljine  $l$ :

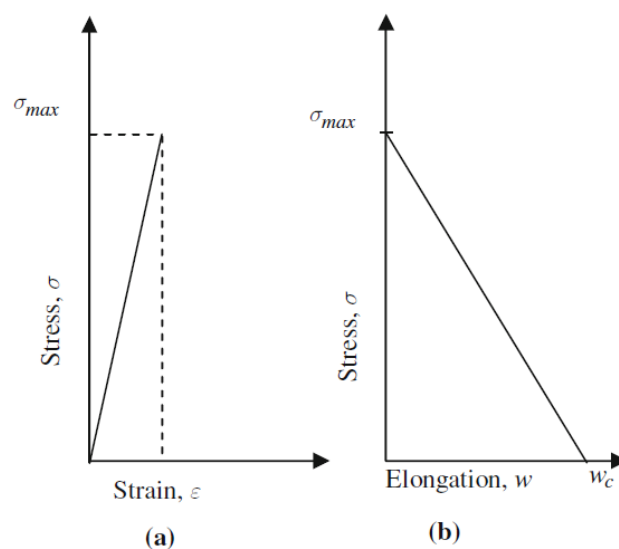
$$\Delta l = \varepsilon_0 \cdot l + w \quad (5.1)$$

Gdje su:  $\Delta l$  – ukupno produljenje uzorka

$\varepsilon_0 l$  – produljenje u linearnom dijelu

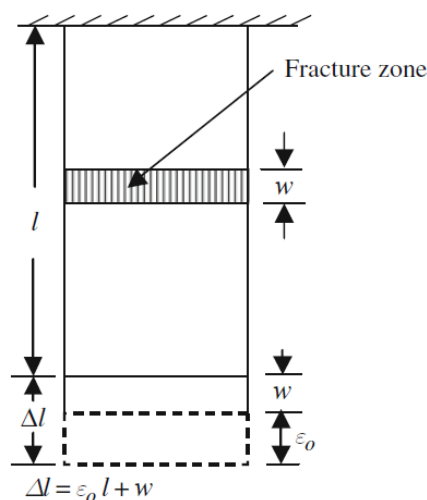
$w$  - duljina zone loma

Ponašanje betona pri vlačnom napreznju može se opisati sa dva dijagrama prikazana na slici 19.



Slika 19. Dijagrami ponašanja betona pri vlačnom napreznju [10]

Prvi dijagram predstavlja linearan odnos naprezanja i deformacije izvan zone loma, dok drugi prikazuje linearnu vezu naprezanja i pomaka betona u zoni loma uzorka. Na slici 20 shematski je prikazana pojava lokalizacije naprezanja, odnosno zone loma u betonskom uzorku dok je iz izraza (5.2) vidljivo da srednja deformacija  $\varepsilon_m$  ovisi o duljini uzorka, što dovodi do zaključka kako dijagram naprezanja i deformacije nije karakteristika materijala, nego se može razlikovati ovisno o geometriji [10].



Slika 20. Lokalizacija naprezanja u betonskom uzorku [10]

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon_0 + \frac{w}{l} \quad (5.2)$$

## 5.2. Zona procesa loma

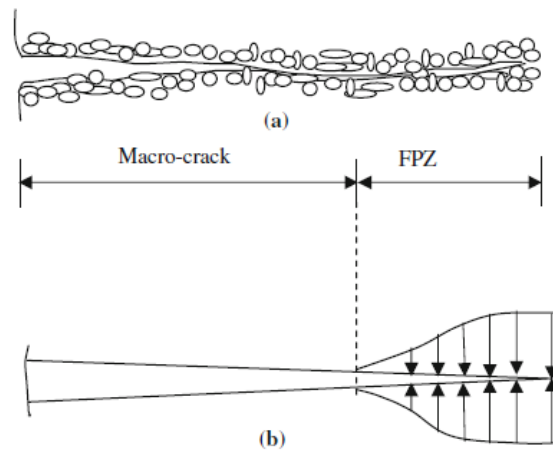
Prilikom lokalizacije naprezanja, ispred vrha pukotine razvijaju se mikro pukotine tvoreći tako zonu procesa loma. Zbog tog svojstva u betonu se ne događa krhki lom, već se energija troši na otvaranje mikro pukotina u zoni procesa loma i zbog tog svojstva se beton naziva kvazi-krhkim materijalom. Postoji više mehanizama trošenja energije prilikom širenja pukotina, a najvažniji su [10]:

- Izvlačenje vlaknaca u betonima armiranim vlaknima (*Fibre Pullout*)
- Premošćivanje agregata (*Agregate Bridging*) – ukoliko u zoni loma postoje zrna agregata koja stoje na „putu“ širenju pukotine, energija se troši kako bi se ona iščupala



- Odbijanje pukotina (engl. *Crack Deflection*) – ukoliko su zrna agregata prevelika, širenje pukotine mijenja smjer širenja i zaobilazi zrna agregata.

Na slici 21 shematski je prikazana zona procesa loma i raspodjela naprezanja u njoj. Pod a) je shematski prikazana zona procesa loma koja se širi između zrna agregata, dok je pod b) prikazana raspodjela naprezanja u zoni.

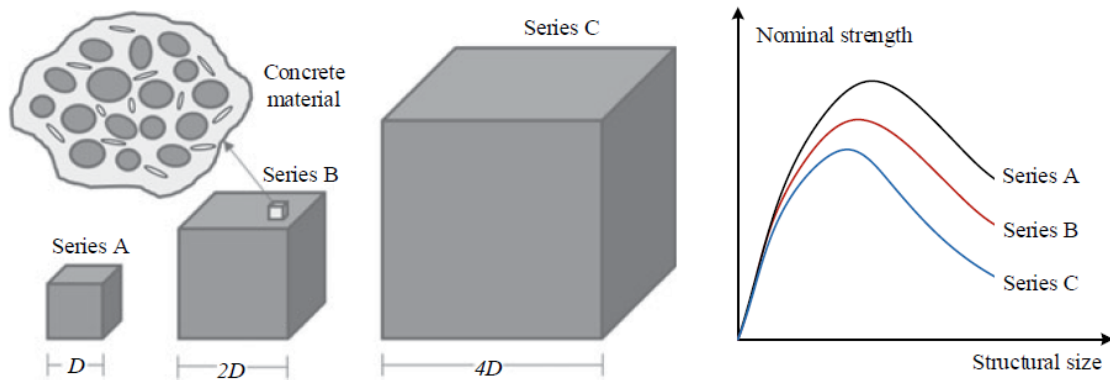


Slika 21. Zona procesa loma [10]

Veličina zone procesa loma određuje žilavost betona. Što je veća zona, znači da se više energije troši na širenje pukotine i beton ima veću vrijednost kritičnog faktora intenziteta naprezanja. Usporedbe radi, duljina zone loma za staklo (krhki materijal) iznosi  $10^{-6} \text{ mm}$  dok je kod betona normalne čvrstoće između 200 i 500 mm [6].

### 5.3. Utjecaj veličine (*Size Effect*)

Pri konstituiranju zakona klasične mehanike materijala, polazi se od pretpostavke da su svojstva promatranog elementa materijalna konstanta i ne ovise o geometriji, odnosno mogu se točno ili približno izračunati laboratorijskim testiranjem uzoraka. Ipak, istraživanja su pokazala da se neki rezultati mijenjaju u ovisnosti o veličini promatranog uzorka. Taj fenomen naziva se utjecaj veličine i odnosi se na promjenu mehaničkih svojstava i karakteristične čvrstoće u odnosu na veličinu uzorka. Utjecaj veličine karakterističan je kod kvazi-krhkih materijala kao što su kamen, beton i većina kompozita [11]. Na slici 22 prikazan je odnos čvrstoće i veličine za tri betonska uzorka.



Slika 22. Efekt veličine za betonske uzorke [11]

Kada se radi o betonu, istraživanja pokazuju da se utjecaj veličine može gledati na dvije razine: utjecaj veličine betonskih materijala i utjecaj veličine betonskih elemenata.

### 5.3.1. Utjecaj veličine betonskih materijala

Problematika utjecaja veličine na materijalnoj razini proizlazi iz čimbenika vezanih za veličinu i distribuciju agregata, odnose količina mješavine, klasu betona i početne imperfekcije u betonu.

*Bažant* i *Planas* opisali su nekoliko faktora koji utječu na utjecaj veličine u materijalu:

- Učinak graničnog sloja ili utjecaj zida (*Boundary Layer Effect, Wall Effect*) –Prilikom izlivanja betona, krupna zrna agregata imaju tendenciju raspoređivanja po središnjem dijelu uzorka, dok se manja zrna raspoređuju po graničnom sloju uzorka, što dovodi do toga da je granični sloj neovisan o veličini uzorka. Debljina graničnog sloja ovisi o veličini najvećeg zrna agregata, stoga površinski sloj, čija je debljina neovisna o veličini strukture i istog je reda veličine kao najveća zrna agregata, ima drugačija svojstva. Utjecaj veličine se javlja zbog činjenice da kod manjeg uzorka granični sloj zauzima veći dio poprečnog presjeka, dok se taj udio smanjuje povećanjem dimenzija uzorka. U većini slučajeva, utjecaj veličine koji se formira zbog ovog faktora nije očit. Druga vrsta učinka graničnog sloja je razlika u elastičnim svojstvima između graničnog sloja i središnjeg dijela uzorka koja proizlazi iz razlike u svojstvima agregata i cementne matrice. Normalno naprezanje, paralelno s graničnim slojem, stvara poprečna naprezanja u unutrašnjosti, a takvog naprezanja nema u graničnom sloju. Treća vrsta ovog učinka je povezana s *Poisson-ovim* efektom. Granični sloj uzorka može se nalaziti u ravninskom stanju naprezanja uzrokovanom bočnim širenjem, dok se unutrašnjost

nalazi u ravninskom stanju deformacija. Time se stvara singularno polje naprezanja na kraju prednjeg ruba pukotine [12].

- Proces difuzije – učinak difuzije na utjecaj veličine je u tome što su poluvremena difuzije (poluvremena hlađenja, grijanja, sušenja...) razmjerna kvadratu veličine strukture. Provođenje topline ili prijenos vodene pare kroz pore prilikom difuzije mijenja svojstva materijala i dovodi do nastanka zaostalih naprezanja koja uzrokuju neelastično ponašanje i pucanje. Zbog razlika u vremenu difuzije ovisno o veličini uzorka može se pričati o utjecaju veličine [11].
- Toplina hidratacije ili drugi fenomeni povezani s kemijskim reakcijama – ova pojava povezana je s difuzijom po tome što je i vrijeme disipacije topline hidratacije proizvedene u betonskom uzorku proporcionalno kvadratu debljine uzorka. Što je veći uzorak, to je viša unutarnja temperatura. Tako neravnomjerna raspodjela temperature unutar uzorka uzrokuje pucanje ili promjenu materijalnih svojstava [11].

Prilikom izvođenja praktičnih ispitivanja, neki od učinaka koji uzrokuju utjecaj veličine betonskih materijala mogu se eliminirati. Tako prvi izvor utjecaja veličine može biti zanemariv za dovoljno velike uzorke, drugi se može neutralizirati tako da se uzorci drže zatvorenima na konstantnoj temperaturi kako bi spriječili difuziju, dok treći izvor ima značajan doprinos za vrlo masivne strukture kao što su brane. Uz navedene izvore utjecaja veličine, razvijeno je nekoliko zakona utjecaja veličine od kojih se najviše primjenjuje *Bažant-ov* na kojem se temelji *Size Effect* modelu (SEM) i prema kojem se eksperimentalno određuju parametri mehanike loma betona [11].

### 5.3.2. Utjecaj veličine betonskih elemenata

Na utjecaj veličine utječu dva čimbenika [11]:

- Heterogenost i mehanička nelinearnost betonskih materijala – razlog složenosti modela i pristupa problematici mehanike loma betona i zbog toga za uzorke manjih dimenzija nije praktično koristiti linearno elastičnu mehaniku loma.
- Interakcija između različitih materijala – odnosi se na beton s ojačanjima kao što su armaturne šipke, mikro armatura i FRP materijali.

Ovi čimbenici i dalje su predmet brojnih istraživanja te je njihov utjecaj je i dalje relativno nepoznat. Razlog tome je upravo u složenosti interakcije različitih materijala i njihovih svojstava.

#### 5.4. Model fiktivne pukotine (*Fictitious Crack Model - FCM*)

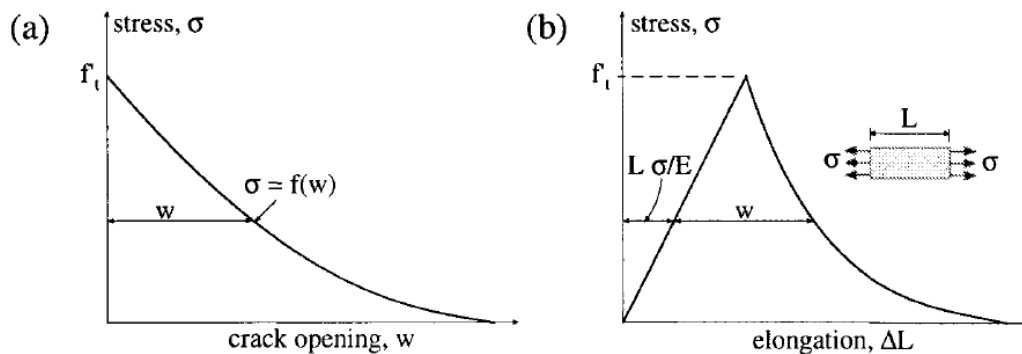
Modeli koji opisuju lom koristeći principe *LEFM-a* ograničeni su na procese koji se događaju samo na vrhu oštre pukotine i ne uzimaju u obzir zonu procesa loma. Kako bi dobili točnije informacije o procesima loma u betonu, potrebno je koristiti modele koji opisuju nastanak i propagaciju pukotine uzimajući u obzir i zonu procesa loma, bez obzira koliko mala ona bila u odnosu na uzorak. Jedna skupina modela utemeljenih na *EPFM-u* su i modeli fiktivne pukotine. Oni se temelje na pretpostavci da je zona procesa loma zamijenjena jednom linijskom pukotinom preko uzorka i opisana odnosom naprezanja i pomaka sa tendencijom omekšavanja. Modeli ove vrste mogu opisati zonu procesa loma u smjeru širenja pukotine, ali ne daju rezultate po širini zone procesa loma [12]. Kod najjednostavnijih takvih modela, cijeli volumen uzorka se ponaša linearno i odgovor strukture sa obje strane pukotine može se opisati kao linearno elastičan. Nelinearnost se uvodi kod graničnih uvjeta na rubovima pukotine. *Hillerborg* i kolege [12] razvili su model koji se temelji na ranije opisanom fenomenu lokalizacije naprezanja. Na temelju eksperimentalnih rezultata ispitivanja uzoraka direktnim vlakom kojima su dobivene krivulje naprezanja i rastezanja zone lokalizacije naprezanja, dali su vezu između tih dvaju parametara izrazom (5.3) [12].

$$\sigma = f(w) \quad (5.3)$$

Gdje se  $f(w)$  naziva krivulja omekšavanja (*Softening Curve*) i ovisi o materijalu te se dobiva eksperimentalno. Ako se izraz (5.3) uvrsti u izraz (5.1) dobiva se izraz (5.4) koji daje vrijednost poslijekritičnog produljenja. [12]

$$\Delta l = l \cdot \frac{\sigma}{E} + w = l \cdot \frac{f(w)}{E} + w \quad (5.4)$$

Ako su modul elastičnosti i krivulja omekšavanja poznati, tada možemo dobiti krivulju naprezanja i produljenja koja je ovisna o tim parametrima. Na slici 23 su shematski prikazane a) krivulja omekšavanja i b) krivulja naprezanja i produljenja za betonski uzorak.

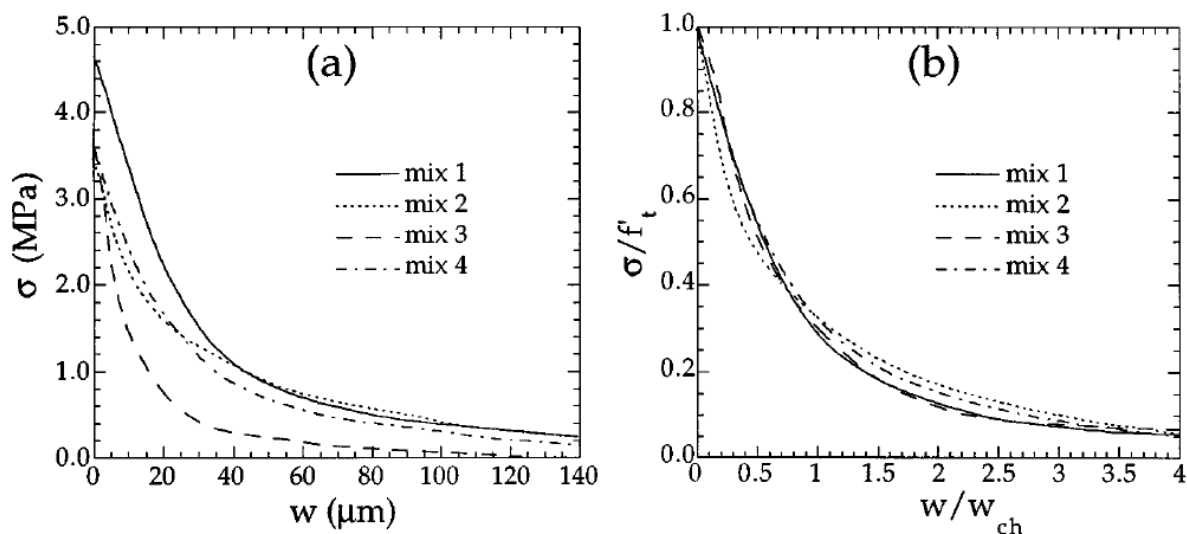


Slika 23. Krivulja omekšavanja i krivulja naprezanja i produljenja [12]

Uz modul elastičnosti, za opisivanje fiktivnog modela pukotine potrebne su vrijednosti jednoosne vlačne čvrstoće  $f_t$  i specifične energije loma  $G_F$ .  $G_F$  predstavlja količinu energije potrebne za nastanak jedinične površine pukotine, a geometrijski je jednak površini ispod krivulje omekšavanja, što prikazuje izraz (5.5) [10]:

$$G_F = \int_0^{\infty} \sigma dw = \int_0^{\infty} f(w) dw \quad (5.5)$$

Krivulja omekšavanja može se smatrati pandanom krivulji naprezanja i deformacije za teoriju plastičnosti. Tehnički svaki materijal pa tako i svaka mješavina betona ima svoju krivulju omekšavanja te ne postoji univerzalna krivulja za sve betone. Unatoč tome, brojni eksperimenti su pokazali da su krivulje omekšavanja slične za obične betone. *Petersson* je provodeći stabilne vlačne testove na betonu prvi uočio tu sličnost [12].

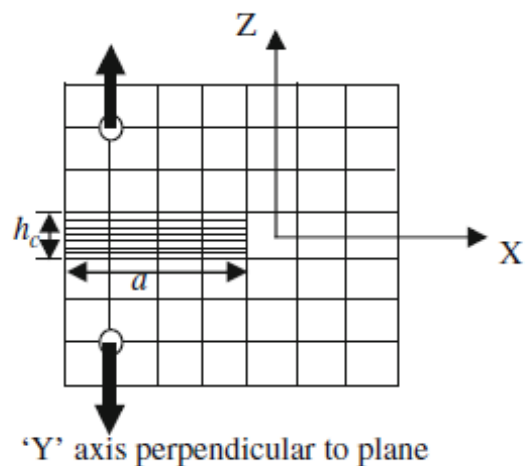


Slika 24. Krivulje omekšavanja za različite betone [12]

Na slici 24 prikazane su krivulje omekšavanja za četiri mješavine betona dobivene savijanjem greda sa zarezom u tri točke. Na slici 24 a) prikazan je odnos naprezanja i izmjerenog pomaka iznad zareza. Vidljivo je da krivulje omekšavanja imaju različite vrijednosti za različite mješavine betona. Na slici 24 b) prikazane bezdimenzionalne vrijednosti i krivulje omekšanja se praktički poklapaju. Eksperimentalno dobivena krivulja betona je glatka i nelinearna, stoga je za neke probleme moguće koristiti jednostavnije krivulje kao što su pravokutna ili linearna krivulja, koje imaju svoja ograničenja, ali mogu pojednostaviti analizu. Važno je da površine budu jednake, odnosno da vrijednost specifične energije bude jednaka [12].

### 5.5. Model trakastih pukotina (*Crack Band Model - CBM*)

Model su predložili *Bažant, Bažant i Cedolin, Bažant i Oh*. Ovaj pristup pretežno se koristi u analizi betonskih elemenata metodom konačnih elemenata. Razlika u odnosu na *FCM* je u tome što je zona loma prikazana sa beskonačno mnogo paralelnih pukotina beskonačno malog otvora kontinuirano raspoređenih po konačnom elementu [12]. Ponašanje materijala okarakterizirano je konstitutivnom odnosom između naprezanja i deformacije. Na slici 25 prikazan je model zone pukotine Kartezijevom koordinatnom sustavu. Pretpostavljeno je da je zona loma (širina trake u kojoj su smještene sve mikro-pukotine)  $h_c$  na kraju elementa konačna i do tri puta veća od veličine agregata ( $h_c \approx 3d_a$ ). Širina se drži konstantnom kako ne bi došlo do lažne osjetljivosti mreže. Odnos  $h_c/3d_a$  uzima se kao mjera homogenosti betona, što je taj odnos manji, materijal homogeniji i ponaša se krhko [6]. Veličina širine loma dobiva se eksperimentalno. Tako se osigurava da disipacija energije uslijed loma po jedinici duljine pukotine bude jednaka energiji loma materijala. Pukotina se po ovom modelu modelira promjenom izotopne matrice modula elastičnosti u ortotropnu, čime se smanjuje krutost u smjeru normalnom na ravninu pukotine. Omekšavanje betona dobiva se zbrajanjem deformacije loma  $\varepsilon_f$  i elastične deformacije [10].



Slika 25. Model zone pukotine [10]

U nastavku je dan kratki matematički opis modela, iako su istraživanja koja se bave proučavanjem i implementacijom mnogo opsežnija [10].

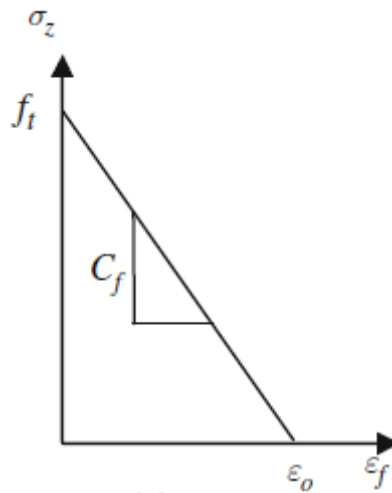
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_f \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

Izraz (5.6) predstavlja troosno stanje naprezanja i deformacija kada se beton idealizira kao homogeni materijal.  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  su naprezanja u smjeru koordinatnih osi, dok su  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  deformacije u smjeru koordinatnih osi. Kao što je gore navedeno  $\varepsilon_f$  predstavlja defomaciju uslijed otvaranja pukotine. Širenje pukotina u materijalu ne utječe na deformacije u smjeru X i Y koordinatnih osi.  $\varepsilon_f$  je određena zbrajanjem defromacija i otvora pojedinačnih mikro pukotina. Izraz (5.7) prikazuje sumu otvora pojedinačnih pukotina koje presjedaju oz Z na području širine zone loma  $h_c$ .

$$\delta_f = \sum_i \delta_f^i \quad (5.7)$$

Proces loma započinje kada se na vrhu pukotine dosegne vlačna čvrstoća  $f_t$  i tada počinje rasti deformacija uzrokovana rastom pukotine te naprezanje u smjeru osi Z počinje padati. Odnos

između naprezanja i deformacije pri lomu može se prikazati linearno kao što je prikazano na slici 26.



Slika 26. Odnos naprezanja i deformacije pri otvaranju pukotina [10]

Deformacija loma može se prikazati kao funkcija naprezanja  $\sigma_z$  prema izrazu (5.8)

$$\varepsilon_f = f(\sigma_z) = \frac{1}{C_f} (f_t - \sigma_z) \quad (5.8)$$

Gdje je:  $C_f$  - odnos između vlačne čvrstoće  $f_t$  i deformacije  $\varepsilon_0$ , odnosno maksimalne deformacije u trenutku kada  $\sigma_z$  nestane.

Pri tome je specifična energija loma  $G_F$ , slično kao i kod prethodnog modela, jednaka površini ispod krivulje naprezanja i deformacije pri lomu, uz dodatak širine zone loma  $h_c$ , što je prikazano izrazom (5.9) [10].

$$G_F = h_c \int_0^{\infty} \sigma_z(\varepsilon) d\varepsilon \quad (5.9)$$

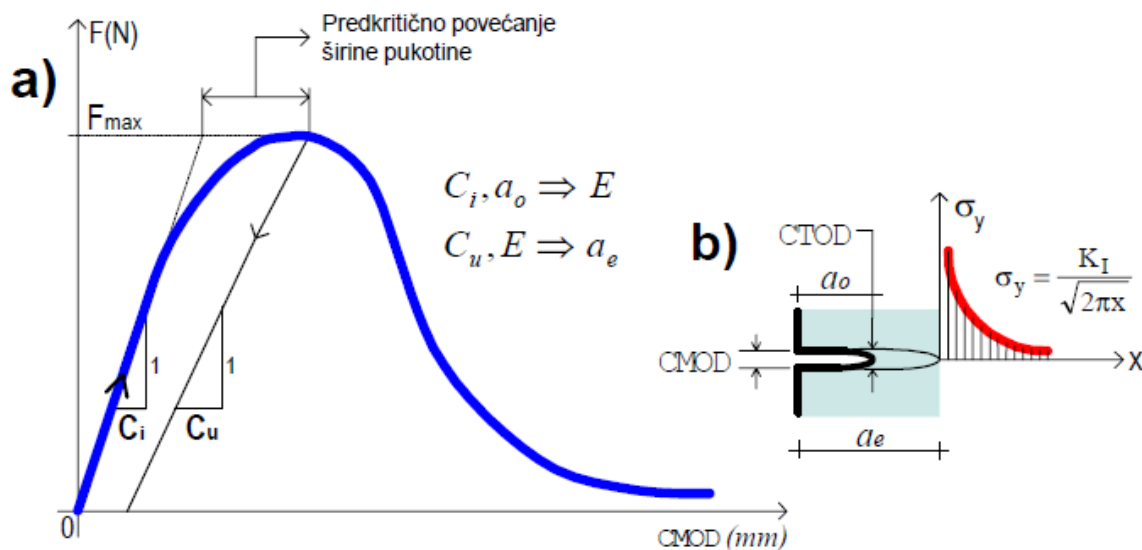
## 5.6. Dvo parametarski model loma (*Two-Parameter Fracture Model – TPFM*)

Ovaj model predložili su *Jenq i Shah* temeljen na elastičnom odgovoru strukture na lom [13]. Modelom se uzima u obzir nelinearno ponašanje betonskog elementa sa početnim zarezom koji sadrži efektivnu pukotinu  $a_e$  koja je veća od početne pukotine  $a_0$  u elastičnom području. Zbog heterogenosti, postojanja zračnih šupljina i ostalih imperfekcija u betonu, uvijek postoji pred



kritični stabilni rast pukotine prije dostizanja kritičnog opterećenja. Kada se dosegne kritično opterećenje, pukotina će se širiti pri kritičnom koeficijentu naprezanja  $K_{IC}^S$ . Uz to, na vrhu originalne pukotine mjeri se otvaranje vrha pukotine koje pri kritičnom opterećenju dostiže kritičnu vrijednost  $CTOD_c$ . Testom savijanja u tri točke moguće je odrediti ova dva parametra koji se smatraju materijalnom konstantom, stoga kada su njihove vrijednosti poznate, moguće je izračunati otpornost betona na lom ako su zadovoljeni izrazi (5.10) [6].

$$\begin{aligned} K_I &= K_{IC}^S \\ CTOD &= CTOD_c \end{aligned} \quad (5.10)$$



Slika 27. a) Krivulja naprezanje-CMOD dobivena testom savijanja u tri točke b) Prikaz CMOD i CTOD [6]

Zbog praktičnosti, prilikom testa mjeri se pomak otvora pukotine  $CMOD_c$  koji se sastoji se od elastične komponente pomaka  $CMOD_c^e$  i plastične komponente  $CMOD_c^p$  kao što je prikazano izrazom (5.11).

$$CMOD_c = CMOD_c^e + CMOD_c^p \quad (5.11)$$

Očitane vrijednosti kritičnog naprezanja i elastične komponente  $CMOD_c^e$  mogu se koristiti u jednadžbama LEFM-a kako bi se dobile vrijednosti kritičnog koeficijenta intenziteta naprezanja

$K_{IC}^S$ , veličine kritične pukotine  $a_c$ , i kritična vrijednost širenja vrha pukotine  $CTOD_c$  prema izrazima (5.12), (5.13), (5.14) [13]:

$$K_{IC}^S = \sigma_c \sqrt{\pi a_c} g_1 \left( \frac{a_c}{b} \right) \quad (5.12)$$

$$CMOD_c^e = \frac{4\sigma_c a_c}{E} g_2 \left( \frac{a_c}{b} \right) \quad (5.13)$$

$$CTOD_c^e = CMOD_c^e g_3 \left( \frac{a_c}{b}, \frac{a_0}{a_c} \right) \quad (5.14)$$

Funkcije geometrije oblika  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  svojstvene vrsti uzorka, a njihove vrijednosti za test savijanjem u tri točke biti će prikazane u sljedećem poglavlju u kojemu će biti opisan postupak određivanja parametara mehanike loma betona.

### 5.7. Model utjecaja veličine (*Size Effect Model-SEM*)

*Bažant* je 1984. predložio zakon utjecaja veličine koji se temelji na oslobađanju energije loma i zasniva na modelu zone pukotine. On je pokazao da je utjecaj veličine betonskih elemenata uzrokovan stalnim rastom makro pukotina ili velikom zonom procesa loma koja sadrži mikro pukotine i prije nego što beton dosegne maksimalno naprezanje. To zapravo znači da je utjecaj veličine uzrokovan disipacijom energije deformacije koja se troši tijekom širenja makro pukotina. *Bažant* je stoga zaključio da se energetska ravnoteža u materijalu može postići samo uz zaključak da čvrstoća betonskog elementa pada s povećanjem dimenzija. Matematička formulacije zakona utjecaja veličine dana je izrazom (5.15) [11]:

$$\sigma_{Nu} = \frac{B f_t'}{\sqrt{1 + h/h_0}} \quad (5.15)$$

Gdje su:  $\sigma_{Nu}$  – nominalno naprezanje pri maksimalnom opterećenju,  $f_t'$  – vlačna čvrstoća uzorka standardnih dimenzija,  $h$  – karakteristična dimenzija uzroka,  $B$  – bezdimenzionalni parametar ovisan o geometriji,  $h_0$  – prijelazna veličina ovisna o dimenziji uzorka.

Nominalno naprezanje pri lomu dobiva se preko izraza (5.16) za dvodimenzionalnu sličnost i (5.17) za trodimenzionalnu sličnost u kojima je  $F_{max}$  maksimalna sila pri lomu uzorka.

$$\sigma_{Nu} = k \cdot \frac{F_{max}}{b \cdot h} \quad (5.16)$$

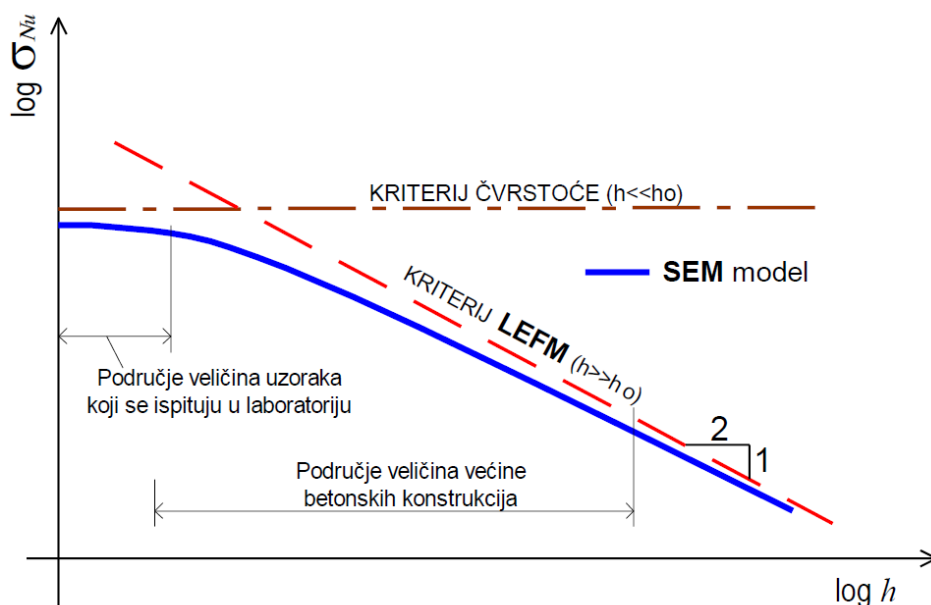
$$\sigma_{Nu} = k \cdot \frac{F_{max}}{h^2} \quad (5.17)$$

Koeficijent  $k$  karakteristika je geometrije uzroka, a za grede sa zarezom koje se ispituju savijanjem u tri točke vrijednost je dana izrazom (5.17):

$$k = k \cdot \frac{3 \cdot S}{2 \cdot h \cdot (1 - \alpha_0)^2} \quad (5.18)$$

Gdje su:  $S$  – raspon grede i  $\alpha_0$  – omjer početne pukotine i visine grede  $a_0/h$ .

Parametar  $\beta = \frac{h}{h_0}$  naziva se broj lomljivosti (*Brittleness number*), kada vrijednost  $\beta$  teži prema beskonačnosti, tada je riječ o krhom materijalu, a kada teži prema nuli, tada se radi o plastičnom ponašanju materijala.



Slika 28. Odnos čvrstoće i veličine uzorka u bi-logaritamskom mjerilu [6]

Slika 28. prikazuje bi-logaritamsku krivulju zakona utjecaja veličine. Kao što je vidljivo, što su veće dimenzije promatranih uzoraka to se oni ponašaju bliže pretpostavkama *LEFM*-a.

U sljedećem poglavlju bit će opisan postupak određivanja energije loma prema modelu utjecaja veličine.

Ovaj model utjecaja veličine koristi se zbog jednostavnosti i prilagodljivosti jer se za njega mogu koristiti podaci dobiveni iz vlačnih testova, kao i testova savijanjem. Ipak postoje određene pretpostavke [11]:

- Širenje zone pukotine zahtjeva da energija koja se troši po jedinici površine pukotine bude približno jednaka.
- Energija oslobođena zbog širenja pukotine ili zone pukotine je funkcija koja se može opisati duljinom loma ili veličine zone procesa loma.
- Načini sloma geometrijski sličnih uzoraka s različitim strukturnim veličinama su isti.
- Ne dolazi do sloma na početku opterećenja.

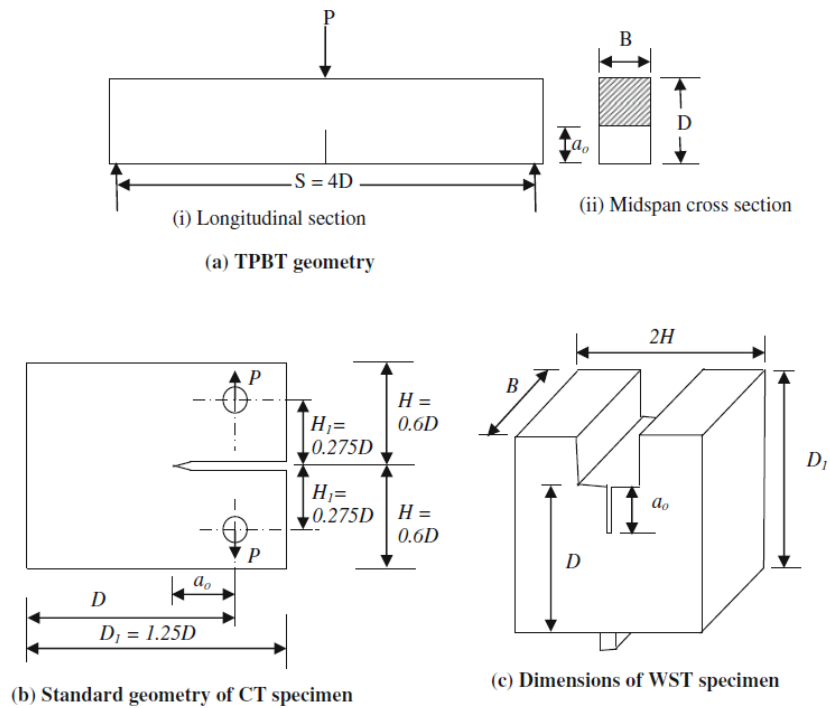
## 6. Eksperimentalno određivanje parametara mehanike loma betona

U prošlosti su korištene različite geometrije uzoraka za izvođenje ispitivanja loma kvazi krhkog materijala poput betona. Jednoosno vlačno ispitivanje s kontroliranim pomakom jedna je od prvih takvih metoda. Međutim, ovaj test je teško izvesti zbog toga što je u heterogenom materijalu teško predvidjeti mjesto stvaranja i propagacije pukotine. Stoga se za određivanje parametara loma općenito koristi neizravna metoda pomoću različitih geometrijskih oblika. Obično korištene metode za provođenje neizravnih ispitivanja su ispitivanje savijanjem u tri točke (*Three Point Bending Test-TPBT*), ispitivanje razvlačenjem (*Compact tension-CT*) i ispitivanje klinastim cijepanjem (*Wedge Splitting test-WST*) [10]. Na slici 29 prikazana je geometrija za svaki od testova dok je na slici 30 pokazan način opterećenja WST uzorka.

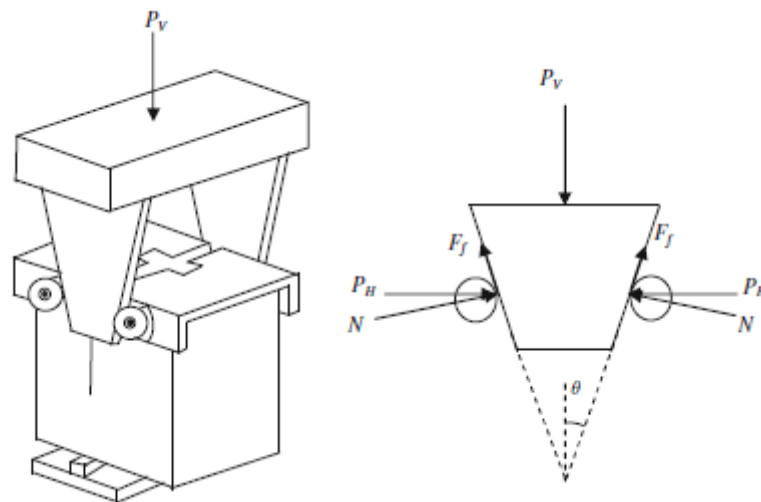
Geometrija *TPBT* uobičajena je metoda koja se koristi za određivanje parametara loma primjenom različitih modela loma. Ispitivanje loma na *TPBT* uzorku ima prednost u tome što se ispitivanje može izvesti sa standardnim strojevima za ispitivanje i lakše je izvesti ispitivanje stabilnog savijanja na prethodno napuknutim gredama. Za konstrukcije velikih dimenzija, kod kojih vlastita težina uzorka ima značajan utjecaj, nemoguće je izvoditi *TPBT* zbog problema rukovanja s tako velikim uzorcima i zbog problema koji se javljaju u analizi. Također, još jedno ograničenje ove metode je i to što se ne mogu koristiti uzorci uzeti s postojeće konstrukcije (odnosno, vrlo teško izvedivo u praksi) [10]

*CT* uzorci imaju slična ograničenja kao i uzorci za *TPBT*. Ne mogu se koristiti uzorci prikupljeni in-situ, testovi se moraju izvoditi sa kontrolom otvaranja pukotine. Pri izvođenju testova na *WST* uzorcima promatra se pomak otvora pukotine (*Crack Mouth Opening Displacement – CMOD*). Korištenje *WST* uzoraka za stabilni lom s kontrolom pomaka na betonu sve više dobiva na značaju zbog nekoliko prednosti [10]:

- Uzorci su manji i kompaktni što zahtjeva manje materijala.
- Vlastita težina uzorka utječe na rezultate manje nego kod prethodno navedenih vrsta uzoraka.
- Postiže se veća stabilnost za vrijeme ispitivanja loma.
- Geometrija uzorka može biti cilindričnog ili kvadratnog oblika, što omogućava primjenu na uzorcima uzetima s konstrukcije.



Slika 29. Dimenzije standardnih uzoraka [10]



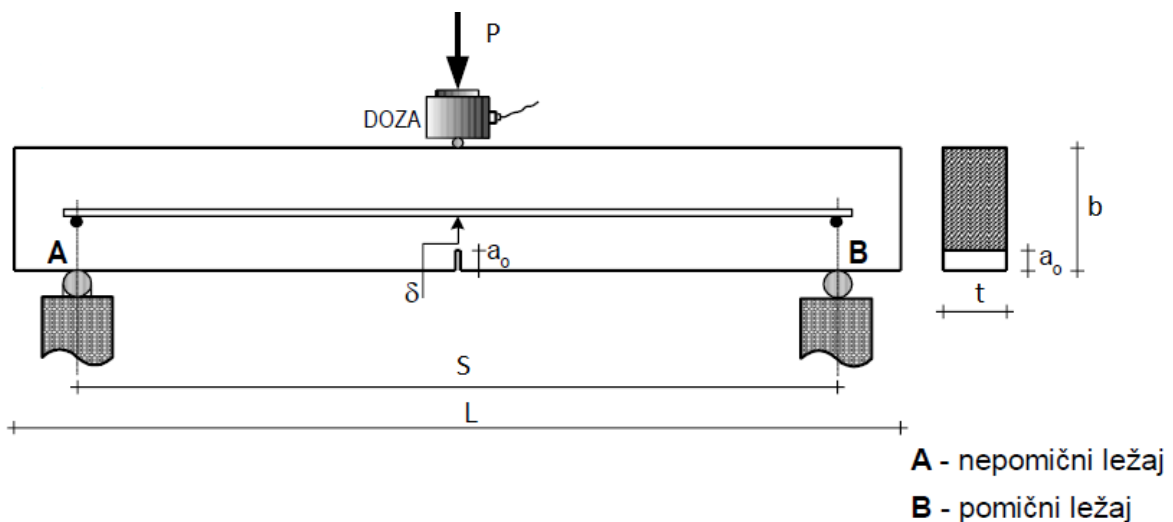
Slika 30. Način opterećenja WST uzorka [10]

U petom su poglavlju opisani neki od modela koji opisuju nelinearno ponašanje betona pri nastajanju i propagaciji pukotina. U svakom od tih modela postoje određeni parametri mehanike loma betona koji opisuju svojstva loma, bez obzira na geometriju i veličinu uzorka. Potrebno je odrediti te parametre kako bi modeli nelinearne mehanike loma betona bili upotrebljivi. U ovome poglavlju bit će predstavljene neke od metoda određivanja parametara mehanike loma. Ukratko će biti predstavljena tri nacrtta preporuka za

određivanje parametara mehanike loma od strane *RILEM-a (Réunion Internationale des Laboratoires et Experts des Matériaux, systèmes de construction et ouvrages)* [14]

### 6.1. Određivanje specifične energije loma $G_F$ testom savijanja u tri točke

Test određivanja specifične energije loma temelji se na *Hillerborg-ovom* modelu fiktivne pukotine, a procedura je opisana nacrtu preporuke *RILEM Tehnical Committee 50-FMC* iz 1985. godine. Kao što je opisano u prethodnom poglavlju, model fiktivne pukotine sadrži tri parametra: specifičnu energiju loma  $G_F$ , vlačnu čvrstoću materijala  $f_t$  i kritični pomak odvajanja pukotine  $w_c$ . Poznavanjem  $G_F$ , analitičkim postupom moguće je dobiti ostale parametre. Na slici 31 prikazana je geometrija uzorka za ispitivanje savijanjem u tri točke dok su u tablici 1 dane karakteristične vrijednosti uzoraka. Veličina grede ovisi o veličini agregata  $d_a$ , dubina zarezaja jednaka je polovici visine grede  $\pm 5$  mm, a širina zarezaja ne bi trebala biti veća od 10 mm [13].



Slika 31. Dimenzije standardnih uzoraka [6]

Tablica 1. Karakteristične dimenzije uzorka

Maksimalna veličina agregata, $d_a$ (mm)	Visina, b (mm)	Širina, t (mm)	Duljina, L (mm)	Raspon, S (mm)
1-16	$100 \pm 5$	$100 \pm 5$	$840 \pm 5$	$800 \pm 5$
16.1-32	$200 \pm 5$	$100 \pm 5$	$1190 \pm 5$	$1130 \pm 5$
32.1-48	$300 \pm 5$	$150 \pm 5$	$1450 \pm 5$	$1385 \pm 5$
48.1-64	$400 \pm 5$	$200 \pm 5$	$1640 \pm 5$	$1600 \pm 5$

Za vrijeme stvrdnjavanja uzorak se drži na sobnoj temperaturi od  $20 \pm 2$  °C, a nakon vađenja iz kalupa mora se držati u vapnom zasićenju vodi do 30 minuta prije ispitivanja.

Prilikom testiranja potrebno je pratiti odnos između opterećenja i pomaka točke u kojoj se nanosi opterećenje. Deformacija se mjeri s točnošću od barem 0.01 mm, a opterećenje s 2% od maksimalnog predviđenog testom. Također preporuka opisuje da bi uređaj kojim se obavlja testiranje trebao biti dovoljno krut kako bi rezultati prikazali dio omekšavanja krivulje naprezanja i pomaka [13].

### 6.1.1. Rezultati ispitivanja i proračun [13]

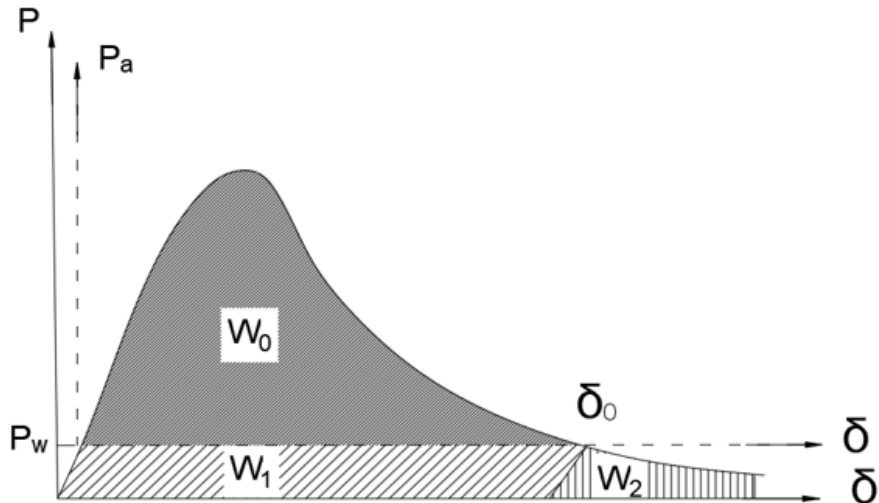
Na temelju krivulje opterećenja i pomaka može se izračunati specifična energija loma  $G_F$ . Prilikom testa savijanja grede sa zarezom u tri točke, vlastita težina uzorka doprinosi ukupnom opterećenju. Njen utjecaj se ne dobiva mjerenjem pomaka pri opterećenju jer je testna oprema kalibrirana tako da na početku testa opterećenje bude jednako nuli. Kako bi prikazali utjecaj vlastite težine koristi se analitička korekcija. Energija loma računa se prema izrazu (6.1):

$$G_F = \frac{W_t}{A_{netto}} = \frac{W_0 + 2 \cdot m \cdot g \cdot \delta_0}{(b - a_0) \cdot t} \quad (6.1)$$

Gdje su:  $W_t$  – ukupni rad utrošen za lom uzorka,  $W_0$  – dio energije od stroja ja nanošenje opterećenja,  $m$  – suma mase uzorka ( $m_1$ ) i dvostruke mase dijelova koji se naslanjaju na uzorak ( $m_2$ ), ( $m_1 + 2 \cdot m_2$ ),  $g$  – gravitacijsko ubrzanje,  $\delta_0$  – pomak zabilježen prilikom loma,  $a_0$  – početna duljina pukotine (zareza),  $b$  – visina uzorka.

Utjecaj vlastite težine može se prikazati kao dodatna sila koja djeluje na gredu (u tu vrijednost uzeta je u obzir i težina dijelova mjernog uređaja)  $P_w$  tako da ukupna sila koja djeluje na gredu predstavlja sumu:  $P = P_w + P_a$  gdje je  $P_a$  iznos opterećenja koje se nanosi na gredu. Na slici 32 prikazan je dijagram opterećenja i pomaka.





Slika 32. Eksperimentalno dobiven dijagrama naprezanja i pomaka

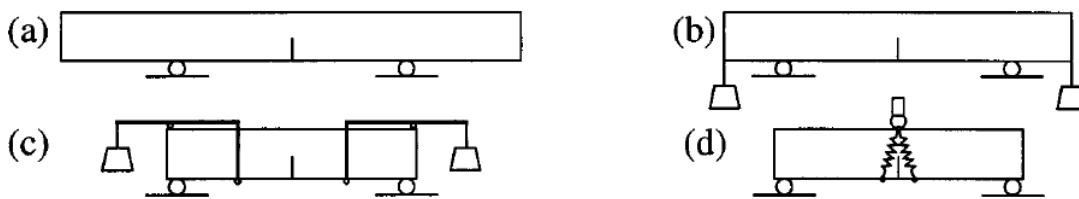
Površina ispod  $P-\delta$  krivulje predstavlja ukupnu utrošenu energiju prilikom propagacije pukotine do sloma. Testom je moguće dobiti dio  $P_a-\delta$ , a u slučaju da se ne radi korekcija zbog utjecaja vlastite težine,  $\delta_0$  bi predstavljao pomak nakon kojeg dolazi do nestabilnog loma pod utjecajem vlastite težine grede. Površina ispod krivulja označena je sa  $W$  i podijeljena u tri dijela.  $W_0$  predstavlja dio koji se dobije testom, dok su  $W_1$  i  $W_2$  približno jednaki i iznose  $W_{1,2} = P_w \delta_0$ . Izraz (6.2) predstavlja zbroj površina, odnosno ukupnu energiju loma grede, dok se izrazom (6.3) dobije energiju loma po jedinici novonastale površine pukotine, ako se pretpostavi da se sva energija troši na otvaranje pukotine [13].

$$W_t = W_0 + 2P_w \delta_0 \quad (6.2)$$

$$G_F = \frac{W_t}{(b - a_0)t} = \frac{W_0 + 2P_w \delta_0}{(b - a_0)t} \quad (6.3)$$

U testu je moguće napraviti modifikacije kako bi se utjecaj vlastite težine zanemario, a na slici 33 su prikazana moguća rješenja:

- a) Dulji uzorci
- b) Utezi na krajevima grede
- c) Poluga s utezima
- d) Korištenje opruge



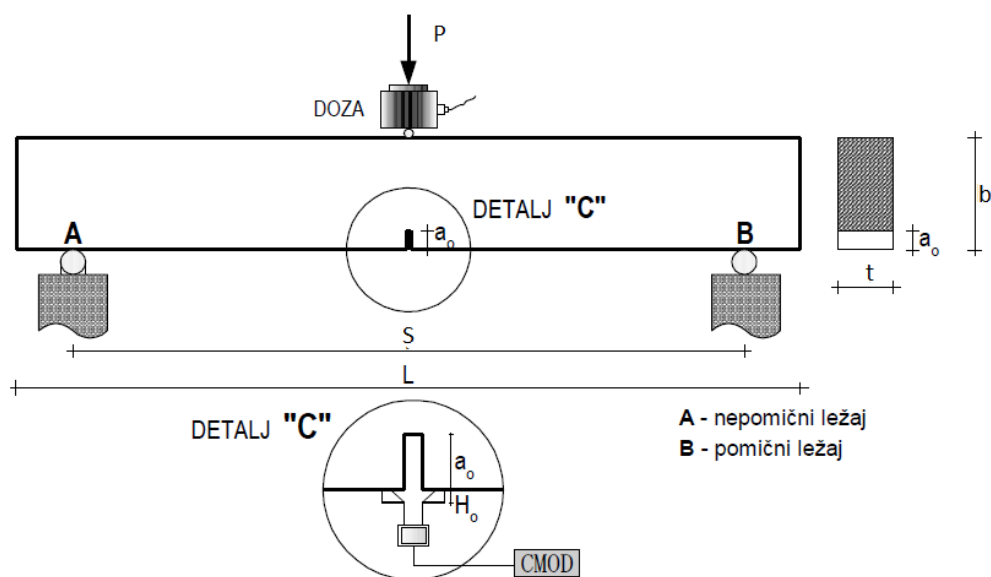
Slika 33. Načini kompenzacije utjecaja vlastite težine [12]

Prve tri metode temelje se na postizanju kontra teže na vanjskim dijelovima grede, dok je krutost opruge jednaka vlastitoj težini grede tako da novo ravnotežno stanje bude ono gdje vlastita težina ne utječe na gredu prije nanošenja opterećenja [12].

Hillerborg je opisao *Round Robin* testove provedene u raznim laboratorijima diljem svijeta kako bi se odredila vrijednost kritične energije loma  $G_F$  na uzorcima različitih dimenzija. Kako je  $G_F$  materijalni parametar loma, ona nebi trebala ovisiti o veličini ispitivanih greda. Ipak, pokazano je da se vrijednost  $G_F$ , prosječno, povećava 20%, odnosno 30%, s povećanjem visine greda faktorom 2, odnosno 3. Kao razlog tome navedena je disipacija energije van zone procesa loma (npr. pri trenju oko ležajeva, pri deformaciji ostatka uzorka) koja je izraženija, što su veći uzorci. *Guinea* i kolege u svojem su radu pokazali da ukoliko se uzme u obzir ta disipacija energije, vrijednost  $G_F$  postaje približno jednaka za različite uzorke. Utjecaj širine i visine uzorka te trošenja energije van zone procesa loma na vrijednost  $G_F$  predmet je kontinuiranih istraživanja [13]

## 6.2. Određivanje parametara $K_{Ic}^S$ i $CTOD_c$

Test opisan u ovom poglavlju temelji se na dvo parametarskom modelu loma spomenutom u prethodnom poglavlju. Smjernice za izvođenje testa dane su od strane *RILEM Technical Committee 89-FMT* iz 1990. godine, a njime se određuju parametri mehanike loma, kritični faktor intenziteta naprežanja  $K_{Ic}^S$  i kritični pomak vrha pukotine  $CTOD_c$  savijanjem grede u tri točke. Prema ovom testu ta dva faktora, uz *Young-ov* modul elastičnosti  $E$  dovoljni su za određivanje otpornosti na lom i disipaciju energije betona. Slika 34 predstavlja shematski prikaz grede, dok su u tablici 2 dane karakteristične vrijednosti uzoraka (za zrno agregata veličine do 50 mm) [13].



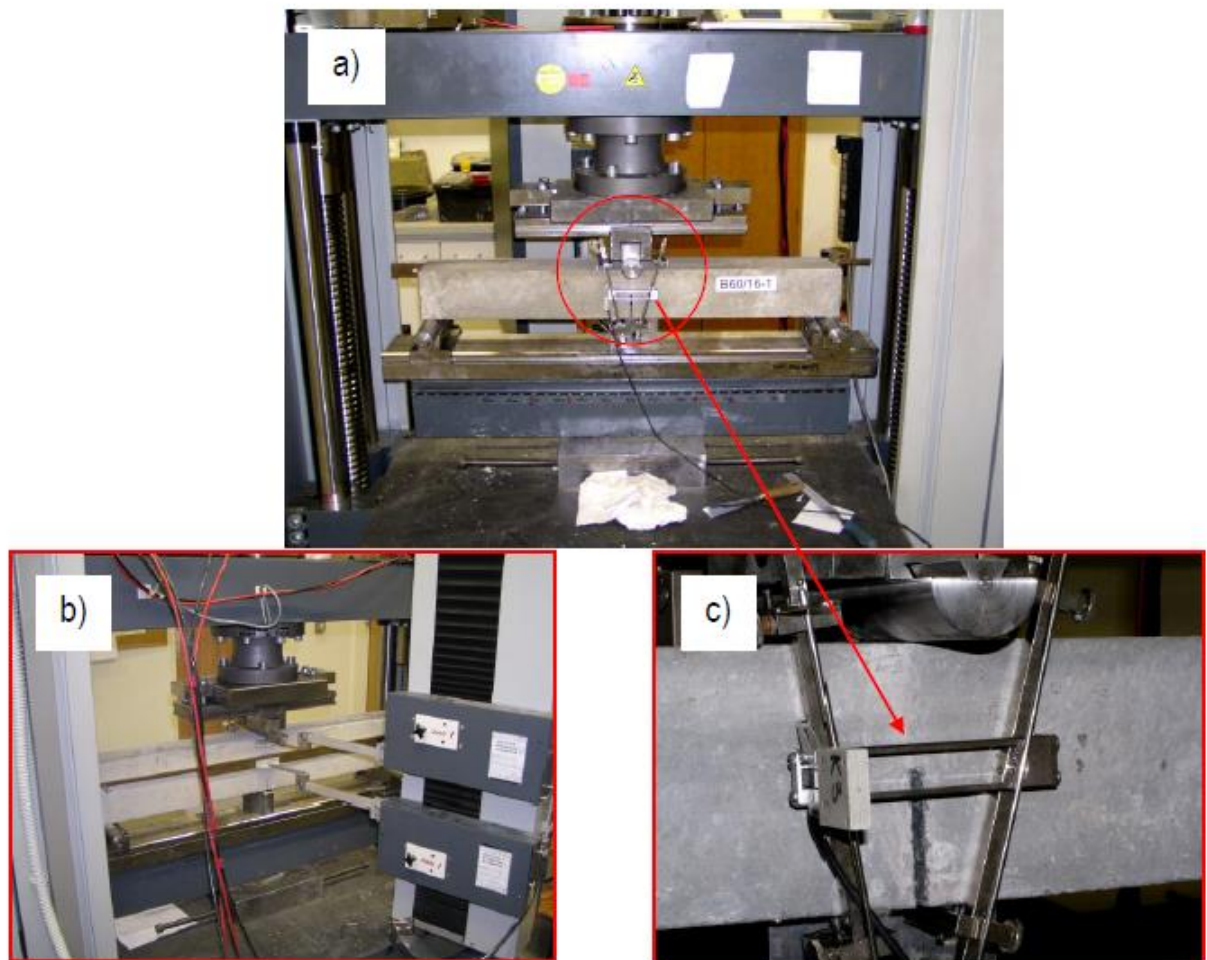
Slika 34. Konfiguracija testa [6]

Tablica 2. Karakteristične dimenzije uzorka

Maksimalna veličina agregata, $d_a$ (mm)	Visina, $b$ (mm)	Širina, $t$ (mm)	Duljina, $L$ (mm)	Raspon, $S$ (mm)
1-25	$150 \pm 5$	$80 \pm 5$	$700 \pm 5$	$600 \pm 5$
25.1-50	$250 \pm 5$	$150 \pm 5$	$1100 \pm 5$	$1000 \pm 5$

Greda je dimenzija takvih da vrijedi odnos  $\frac{S}{b} = 4$ , a odnos između veličine zarez a visine greda jednak je  $\frac{1}{3}$ . Širina zarez a ne bi trebala biti manja od 5 mm. Nakon izrade, greda se pokrije vlažnom krpom ili drži u uvjetima 100% vlažnosti zraka na  $23 \pm 2$  °C prvih 24 sata. Uzorak se tako njeguje do 4 sata prije testa. Minimalno 4 uzorka su potrebna za svaku vrstu materijala. Za mjerenje pomaka koristi se stroj za ispitivanje sa zatvorenom petljom koja mjeri pomake otvora pukotine (*CMOD*). Pomak otvora pukotine i opterećenje koje se nanosi moraju se kontinuirano mjeriti. *CMOD* se mjeri u sredini zarez a kako bi se smanjile moguće greške uzrokovane ekscentricitetom. Preporuča se mjerenje *CMOD*-a pomoću *Clip Gauge*, ali je moguće i koristiti *LVDT* uređaj sa što manjom mjernom duljinom. Oslonci i način opterećenja moraju biti takvi da se sile koje djeluju na gredu mogu odrediti statički, odnosno da sustav bude statički određen.

Brzina nanošenja opterećenja kontrolira se konstantnom stopom povećanja pomaka otvora pukotine tako da se vršno opterećenje postigne za otprilike 5 minuta. Greda se monotono opterećuje do vrijednosti 95% maksimalno opterećenja, nakon čega se rasterećuje do nule i tada započinje novi ciklus opterećenja. Na slici 36 prikazan je karakteristični dijagram koji se dobije ispitivanjem. Brzina opterećenja i rasterećenja može se mijenjati po ciklusima, a jedan ciklus traje oko 1 min [13]. Na 35 a) prikazan je stroj za nanošenje sile s kontroliranim pomakom. Slika 35 b) prikazuje uređaj za mjerenje progiba, a slika 35 c) prikazuje način mjerenja otvora pukotine [6].



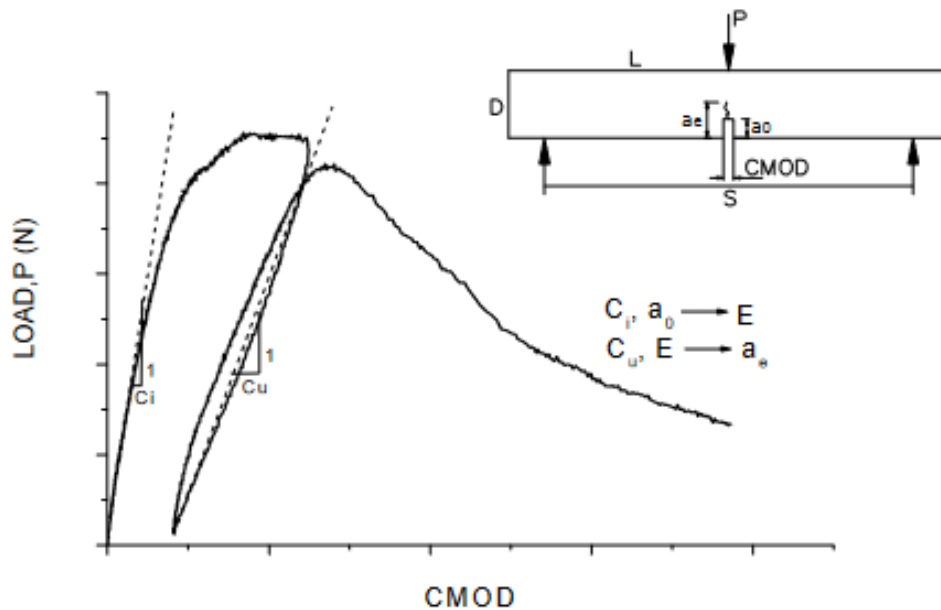
Slika 35. Hidraulična preša s kontrolom pomaka [6]

### 6.2.1. Rezultati ispitivanja i proračun [13]

Iz dijagrama naprezanje-CMOD prikazanog na slici 37 mogu se odrediti *Young-ov* modul elastičnosti  $E$ , kritični koeficijent intenziteta naprezanja  $K_{Ic}^S$  i kritična vrijednost pomaka vrha pukotine  $CTOD_c$ . Youngov modul elastičnosti se računa prema izrazu (6.5).

$$E = \frac{6Sa_0g_2(\alpha_0)}{C_i b^2 t} \quad (6.5)$$

Gdje su:  $C_i$  – početna popustljivost izračunata iz krivulje naprezanje-CMOD,  $g_2(\alpha_0)$  – geometrijska funkcija predstavljena izrazom (6.6):



Slika 36. Eksperimentalno dobiven dijagram P-CMOD [13]

$$g_2(\alpha_0) = 0.76 - 2.28\alpha_0 + 3.87\alpha_0^2 - 2.04\alpha_0^3 + \frac{0.66}{(1 - \alpha_0)^2} \quad (6.6)$$

Gdje su:  $S$ ,  $b$ ,  $t$  dimenzije grede,  $H_0$  je udaljenost *Clip Gauge* od ruba grede (slika 32),  $\alpha_0 = \frac{a_0 + H_0}{b + H_0}$  predstavlja odnos između geometrijskih parametara.

Kritična duljina pukotine  $a_c$  određena je iz modula elastičnosti  $E$  izračunatog iz izraza (6.5) i popustljivosti rasterećenja  $C_u$  izmjerene pri najvećem opterećenju. Korištenjem iteracijskog postupaka kritična efektivna duljina pukotine  $a_c$  dobije se kada je zadovoljen izraz (6.7).

$$E = \frac{6S a_c g_2(\alpha_c)}{C_u b^2 t} \quad (6.7)$$

Geometrijska funkcija  $g_2(\alpha_c)$  izračuna se istim postupkom kao i  $g_2(\alpha_0)$ , uz korištenje vrijednosti  $a_c$  umjesto  $a_0$ .

Ako se izjednače izrazi za modul elastičnosti (6.5) i (6.7) dobije se izraz (6.8) kojim se dobije vrijednost kritične pukotine  $a_c$ , a postupak računanja je također iterativan.

$$a_c = a_0 \frac{C_u g_2(\alpha_0)}{C_i g_2(\alpha_c)} \quad (6.8)$$

Izrazom (6.9) računa se kritična vrijednost faktora intenziteta naprezanja:

$$K_{Ic}^S = 3(P_c + 0.5W_h) \frac{S \sqrt{\pi a_c} g_1(a_c/b)}{2b^2 t} \quad (6.9)$$

Gdje su:  $P_c$  - kritično opterećenje,  $W_h = \frac{W_{h0} S}{L}$ ,  $W_{h0}$  - vlastita težina grede,  $g_1\left(\frac{a_c}{b}\right)$  - geometrijska funkcija izračunata prema izrazu (6.10)

$$g_1\left(\frac{a_c}{b}\right) = \frac{1.99 - \left(\frac{a_c}{b}\right) \left(1 - \frac{a_c}{b}\right) \left[2.15 - \frac{3.93 a_c}{b} + 2.70 \left(\frac{a_c}{b}\right)^2\right]}{\sqrt{\pi} \left(1 + 2 \frac{a_c}{b}\right) \left(1 - \frac{a_c}{b}\right)^2} \quad (6.10)$$

Kritični pomak otvaranja vrha pukotine računa se prema izrazu (6.11):

$$CTOD_c = \frac{6(P_c + 0.5W_h) S a_c g_2\left(\frac{a_c}{b}\right)}{E b^2 t} \cdot \left[ (1 - \beta_0)^2 + \left(1.081 - 1.149 \frac{a_c}{b}\right) (\beta_0 - \beta_0^2) \right]^{1/2} \quad (6.11)$$

Gdje su:  $\beta_0 = \frac{a_0}{a_c}$  i  $g_2\left(\frac{a_c}{b}\right)$  se računa prema izrazu (6.6) sa vrijednosti  $\frac{a_c}{b}$ .

Indirektno je moguće dobiti vrijednost kritične energije loma po jedinici novonastale površine pukotine iz izraza (6.12):

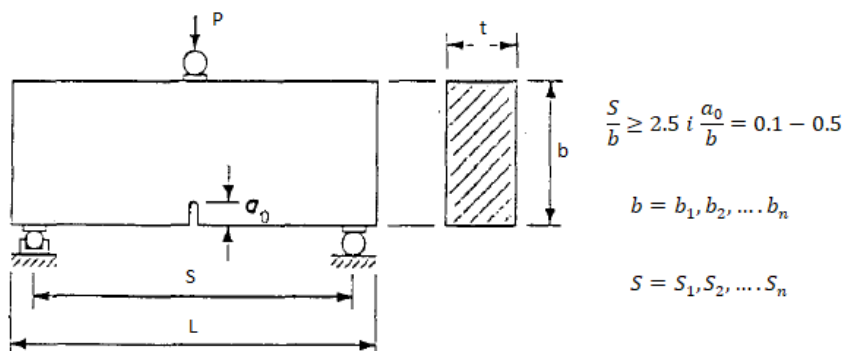
$$G_{Ic}^s = \frac{(K_{Ic}^s)^2}{E} \quad (6.12)$$

*Karihaloo* i *Nallathambi* su sakupili rezultate testova savijanja greda u tri točke od ispitivanja koja su proveli: *Catalno i Ingraffea*, *Jenq i Shah*, *John i Shah*. Prema tim testovima pokazalo se da je razlika u vrijednosti  $K_{Ic}^s$  za grede od 50 do 800 mm otprilike 30%. Za grede visine od 400 mm na više  $K_{Ic}^s$  je skoro konstantan. Zbog toga je opće prihvaćeno da je  $K_{Ic}^s$  parametar neovisan o dimenzijama ispitivanih greda. S druge strane, isti testovi pokazuju veća odstupanja vrijednosti  $CTOD_c$ , ovisno o veličini uzorka. *Shah* navodi da su mogući razlozi tome greške pri mjerenju, utjecaj vlastite težine na uzorcima većih dimenzija, kao i utjecaj plastičnog dijela pomaka vrha pukotina koji je izraženiji kod manjih uzorka gdje zona procesa ima veći utjecaj. Mnoga istraživanja bave se utjecajem veličine uzoraka na  $CTOD_c$  [13].

### **6.3. Određivanje parametara $G_f$ i $c_f$ na temelju Bažantovog modela utjecaja veličine**

RILEM *Technical Committee* 89-FMT predložio je 1990. nacrt preporuke za mjerenje energije loma materijala  $G_f$  pomoću testa savijanja grede u tri točke. Ova se metoda temelji na modelu utjecaja veličine *Bažanta* i kolega (*SEM*), koji je opisan u prethodnom poglavlju. Rezultat ispitivanja je specifična energija loma  $G_f$ , odnosno energija po jedinici površine ravnine pukotine koja je potrebna za rast pukotine u beskonačno velikom uzorku. U teoriji taj parametar je neovisan o veličini i obliku uzorka [13].

Grede koje se koriste u ispitivanju trebaju imati omjer raspona i visine ne manji od 2,5, a početni omjeri zarez a i dubine trebaju biti između 0,15 i 0,5 kao što je prikazano na slici 37. Širina zarez a treba biti što je moguće manja i ne smije prelaziti 0,5 puta najveću veličinu agregata  $d_a$ . Širina i visina grede ne smiju biti manje od  $3d_a$  [13].



Slika 37. Uzorak za test savijanja u tri točke [13]

Testiranje se obavlja na barem tri skupine uzoraka različitih dimenzija, dok bi u svakoj skupini trebalo biti tarem tri identična uzorka. Odnosi  $S/b$ ,  $a_0/b$  i  $L/b$  moraju biti jednaki za sve uzorke, a debljina  $t$  mora biti konstantna. Uzroci se opterećuju konstantnim prirastom pomaka, a maksimalno opterećenje postiže se za oko 5 minuta. Prednost ovog testa je što se za ispitivanje može koristiti jednostavan stroj za nanošenje jednoosnog opterećenje jer jedini važan parametar koji se dobije ispitivanje maksimalna sila. Prilikom izvođenja testa, potrebno je obratiti pažnju na to da se svi uzorci opterećuju na identičan način.

### 6.3.1. Rezultati ispitivanja i proračun [13]

Kako bi se odredio parametar loma  $G_f$ , potrebno je znati samo maksimalna opterećenja za svaki od uzoraka i modul elastičnosti  $E$  materijala. Nakon što se testom dobiju maksimalna opterećenja, potrebno je napraviti korekciju vrijednosti u odnosu na vlastitu težinu uzorka što je prikazano izrazom (6.13).

$$P_j^0 = P_j + \frac{2S_j - L_j}{2S_j} g m_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (6.13)$$

Gdje su:  $m_j$ -masa uzorka  $j$ ,  $g$ -gravitacijsko ubrzanje,  $P_j$ -maksimalno izmjereno opterećenje za uzorak  $j$ ,  $n$ - broj uzoraka u testu.

Odnos između geometrije i maksimalne sile za uzorke  $j = 1, 2, \dots, n$  može se prikazati izrazom (6.14)

$$Y_j = \left( \frac{b_j t}{P_j^0} \right)^2 \quad X_j = b_j \quad (6.14)$$



$Y = A_B X + C_B$  predstavlja pravac linearne regresije, gdje su vrijednost nagiba pravca  $A_B$  i odsječak pravca  $C_B$  dani izrazima (6.15) i (6.16). Ukoliko pravac regresije nije barem približno linearan to ukazuje na moguće greške pri izvođenju testa

$$A_B = \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})(Y_j - \bar{Y})}{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2} \quad (6.15)$$

$$C_B = \bar{Y} - A_B \bar{X} \quad (6.16)$$

$\bar{X}$  i  $\bar{Y}$  predstavljaju srednje vrijednosti podataka i računaju se prema izrazu (6.17).

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \quad (6.17)$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j$$

Bezdimenzionalna vrijednost brzine oslobađanja energije  $g(\alpha_0)$  računa se prema izrazu (6.18).

$$g(\alpha_0) = \left(\frac{S}{b}\right)^2 \pi \alpha_0 [1.5 g_1(\alpha_0)]^2 \quad (6.18)$$

Gdje su :  $\alpha_0 = \frac{\alpha_0}{b}$ , a geometrijska funkcija  $g_1(\alpha_0)$  određena je omjerom  $S/b$ . Vrijednosti  $g_1(\alpha_0)$  mogu se pronaći u *RILEM* preporuci [13].

Vrijednost energije loma materijala  $G_f$  računa se prema izrazu (6.19), a vrijednost drugog parametra koji se može dobiti ovim testom, duljine zone procesa loma za beskonačno veliki uzorak  $c_f$  (efektivna duljina pukotine) dobije se prema izrazu (6.20). Ovaj parametar predstavlja duljinu ekvivalentne linearno elastične pukotine koja daje jednaku popustljivost rasterećenja kao i stvarna pukotina u beskonačno velikom uzorku pri vršnom opterećenju.

$$G_f = \frac{g(\alpha_0)}{A_B E} \quad (6.19)$$

$$c_f = \frac{g(\alpha_0)}{g'(\alpha_0)} \left(\frac{C_B}{A_B}\right) \quad (6.20)$$

Gdje je  $g'(\alpha_0)$  prva derivacija geometrijske funkcije  $g(a/b)$  za vrijednost  $a/b$  pri  $a=a_0$ . Nakon što su dobivene vrijednosti parametara mehanike loma, potrebno je izračunati statističke parametre kako bi se potvrdila linearna regresija rezultata. U nastavku su dani izrazi kojima se dobivaju statistički parametri:

$$s_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2$$

$$s_Y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2$$
(6.21)

$$s_{X|Y}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^n (Y_j - Y_j^*)^2 = \frac{n-1}{n-2} \sum_{j=1}^n (s_Y^2 - A_B^2 s_X^2)$$
(6.22)

$$\omega_{X|Y} = \frac{s_{X|Y}}{\bar{Y}} \quad \omega_X = \frac{s_X}{\bar{X}}$$
(6.23)

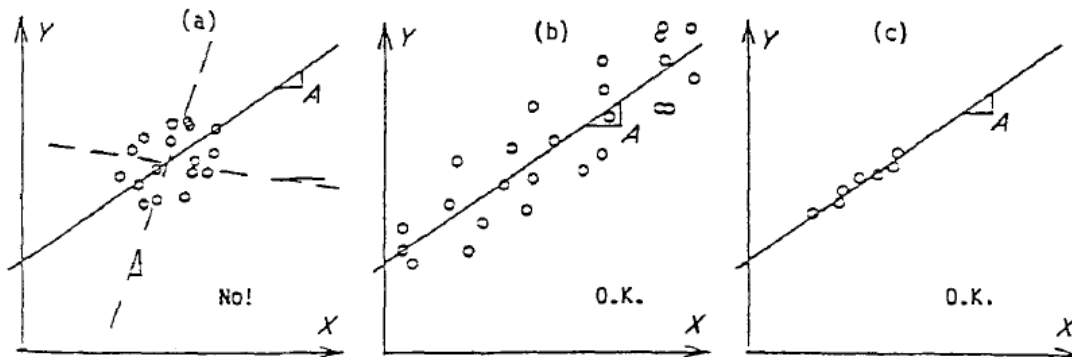
$$\omega_A = \frac{s_{Y|X}}{A_B s_X \sqrt{n-1}} \quad \omega_C = \frac{s_{Y|X}}{C_B \sqrt{n-1}} \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_X^2}} \quad m = \frac{\omega_{Y|X}}{\omega_X}$$
(6.24)

$$\omega_G^2 \approx \omega_A^2 + \omega_E^2$$
(6.25)

Gdje su:  $X_j$ -veliĉine uzoraka,  $Y_j$ -izmjerene toĉke bazirane na dobivenim podacima testa ( $Y_j - Y_j^*$ )- devijacija rezultata od krivulje regresije,  $\omega_X$ -koeficijent varijacije izabranih veliĉina,  $\omega_A$ - koeficijent varijacije nagiba pravca,  $\omega_{X|Y}$ -koeficijent varijacije grešaka,  $m$ - relativna širina područja rasipanja podataka,  $\omega_E$ - koeficijent varijacije vrijednosti modula elastiĉnosti,  $\omega_C$ - koeficijent varijacije presjeka krivulje

Koeficijent varijacije energije loma  $G_f$  pretpostavljen je sa  $\omega_G$  ukoliko vrijednosti  $E$  i  $G_f$  nisu u korelaciji, a sa  $\omega_A$  kada je se pretpostavi da su  $E$  i  $G_f$  potpuno korelirani. Za beton koeficijent energije loma negdje u izmeĉu vrijednosti  $\omega_A$  i  $\omega_G$ .

Kako bi se rezultati mogli smatrati relevantnima, vrijednost  $\omega_A$  ne smije biti veća od 0.1, dok vrijednost  $m$  i  $\omega_C$  ne smije prelaziti 0.20. Na slici 38 shematski su prikazani mogući slučajevi rasipanja rezultata, ovisno i točnosti testa i proračuna.



Slika 38. Skica rasipanja rezultata [13]

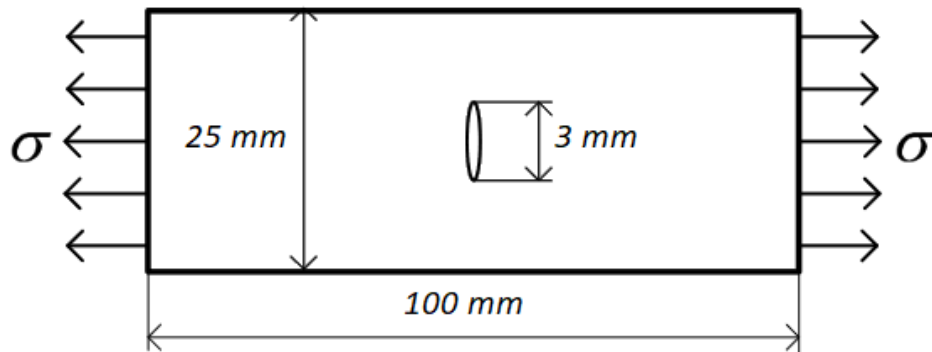
Na slici 38 a) prikazan je slučaj kada su varijacije rezultata prevelike, odnosno korišteni raspon veličina uzoraka ne „prati“ krivulju regresije. Na slici 38 a) i 38 c) rezultati odabranih raspona uzoraka zadovoljavaju granice odstupanja od krivulje regresije.

## 7. Riješeni primjeri problema mehanike loma

U ovome poglavlju bit će predstavljeno nekoliko zadataka u području mehanike loma sa rješenjima.

### ZADATAK 1.

Čelična traka širine  $25\text{ mm}$ , debljine  $t = 2\text{ mm}$  i duljine  $l = 100\text{ mm}$ , sa središnjom pukotinom veličine  $3\text{ mm}$  vlačno je opterećena naprezanjem okomito na pukotinu. Ako pretpostavimo da je čelik od kojega je traka izrađena krhki materijal i ima modul elastičnosti  $E = 207000\text{ MPa}$ , granicu tečenja  $\sigma_T = 1500\text{ MPa}$  i koeficijent intenziteta naprezanja pri kritičnom vlačnom naprezanju  $K_{Ic} = 70\text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ . Potrebno je odrediti kritično vlačno naprezanje  $\sigma_c$  i kritičnu brzinu oslobađanja energije  $G_{Ic}$ .



Za ovaj primjer koristimo sljedeće oznake:  $2a = 3\text{ mm}$ ,  $2b = 25\text{ mm}$

Stanje ravninske deformacije vrijedi ako je zadovoljen uvjet:

$$t \geq 2.5 \cdot \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_T} \right)^2$$
$$t \geq 2.5 \cdot \left( \frac{70}{1500} \right)^2 = 0.0054\text{ mm} < t = 2\text{ mm}$$

Prema *Irwinu*, popravna funkcija za geometriju trake je:

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \sqrt{\frac{2 \cdot b}{\pi \cdot a} \cdot \tan\left(\frac{\pi \cdot a}{2 \cdot b}\right)}$$

Za  $a = 1.5\text{ mm}$  i  $b = 12.5\text{ mm}$  dobivamo odnos  $a/b = 0.12$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \sqrt{\frac{2 \cdot 12.5}{\pi \cdot 1.5} \cdot \tan \cdot \left(\frac{\pi \cdot 1.5}{2 \cdot 12.5}\right)} = 1.005$$

Izraz (3.14) daje vrijednost  $K_I$ :

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi a} \cdot f\left(\frac{a}{b}\right) \quad (3.14)$$

Preko njega je moguće dobiti vrijednost kritičnog vlačnog napreznja:

$$\sigma_c = \frac{K_{Ic}}{f\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \sqrt{\pi a}}$$

$$\sigma_c = \frac{70}{1.005 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0.0015}} = 1014.64 \text{ MPa}$$

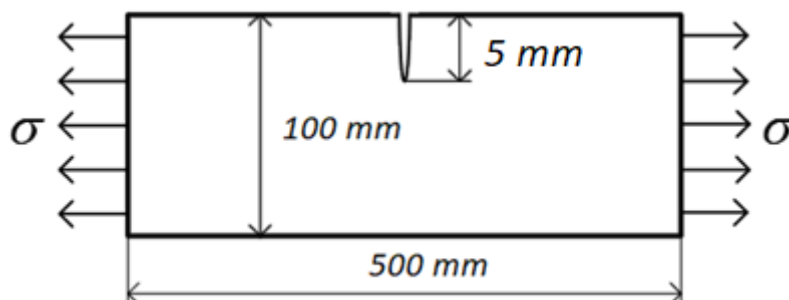
Kritična brzina oslobađanja energije računa se prema izrazu (3.15):

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad (3.15)$$

$$G_{Ic} = \frac{70^2}{207000} = 23671.5 \frac{\text{N}}{\text{m}} = 23.67 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

## ZADATAK 2.

Element pravokutnog poprečnog presjeka širine  $b = 100 \text{ mm}$ , debljine  $t = 10 \text{ mm}$ , duljine  $l = 500 \text{ mm}$  izrađen je od legure aluminija. Prilikom rada, element je opterećen vlačnim napreznjem. Prilikom pregleda, primijećena je jednostruka pukotina kroz cijelu debljinu, veličine  $a = 5 \text{ mm}$ . Potrebno je odrediti maksimalnu vlačnu silu na element ako je faktor sigurnosti  $f_s = 1.5$ .

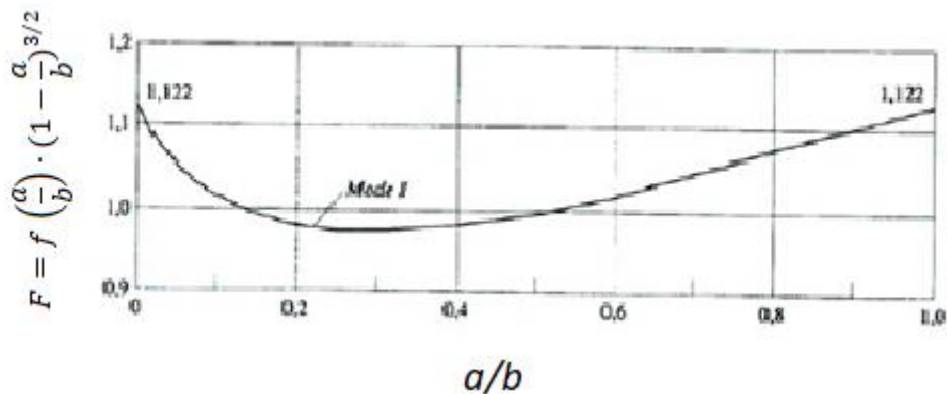


Stanje ravninske deformacije vrijedi ako je zadovoljen uvjet:

$$t \geq 2.5 \cdot \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_T}\right)^2$$

Za korišteni materijal  $K_{Ic} = 28 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ , dok je naprezanje na granici tečenja  $\sigma_T = 517 \text{ MPa}$ .

$$t \geq 2.5 \cdot \left(\frac{28}{517}\right)^2 = 7.33 \text{ mm} < t = 10 \text{ mm}$$



Prema dijagramu na slici 35 vrijednost popravne funkcije za geometriju  $f\left(\frac{a}{b}\right)$  za  $a/b = 5/100 = 0.05$  je i očitana vrijednost  $F = 1.02$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{F}{\left(1 - \frac{a}{b}\right)^{3/2}}$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1.02}{\left(1 - 0.05\right)^{3/2}} = 1.102$$

Kao i u prethodnom zadatku, kritičnu vrijednost naprezanja možemo dobiti iz izraza za kritični koeficijent intenziteta naprezanja:

$$\sigma_c = \frac{K_{Ic}}{f\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \sqrt{\pi a}}$$

$$\sigma_c = \frac{28}{1.102 \cdot \sqrt{\pi} \cdot 0.005} = 202.73 \text{ MPa}$$

Maksimalna dopuštena sila računa se prema izrazu:

$$F_{f,dop} = \frac{\sigma_c}{f_s} \cdot A$$

$$F_{f,dop} = \frac{202.73}{1.5} \cdot 10 \cdot 100 = 135.15 \text{ kN}$$

Drugi način otkazivanja ovog elementa može biti i dostizanje sile na granici tečenja pa se može izračunati njena vrijednost:

$$F_{t,dop} = \frac{\sigma_T}{f_s} \cdot A_n$$

Gdje je  $A_n$  neto površina presjeka:

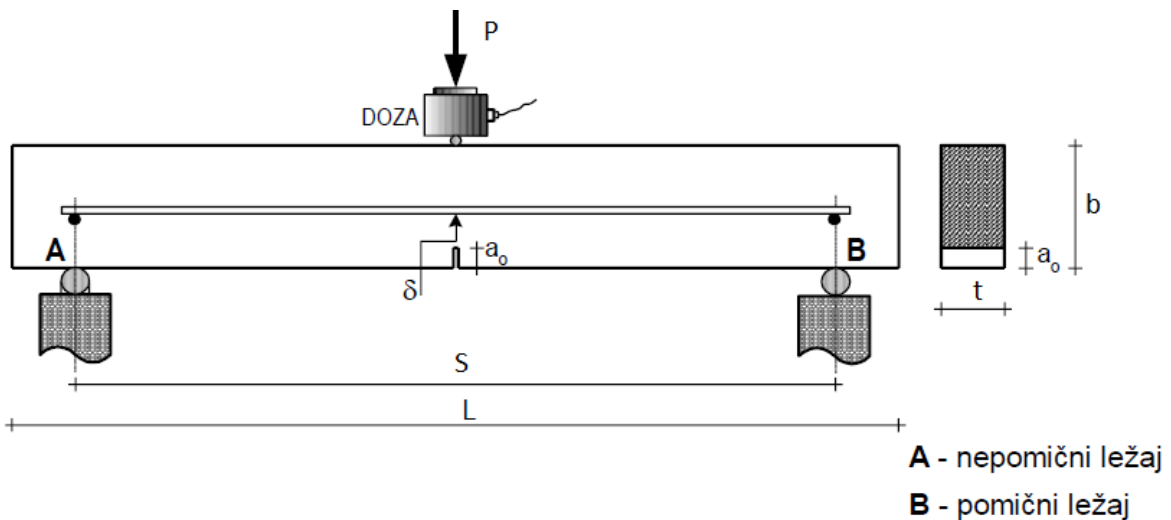
$$A_n = 10 \cdot (100 - 5) = 950 \text{ mm}^2$$

$$F_{t,dop} = \frac{517}{1.5} \cdot 950 = 327.43 \text{ kN}$$

Ako se usporede dobiveni rezultati, vidljivo je da je dopuštena vlačna sila pri krhkom lomu zbog pukotine gotovo dva i pol puta manja te je stoga otkazivanje pri krhkom lomu mjerodavno u ovom slučaju.

### ZADATAK 3.

Odrađeno je ispitivanje grede savijanjem u tri točke kako bi se odredila specifična energija loma  $G_F$ . Dimenzije grede su:  $L = 840 \text{ mm}$ ,  $S = 800 \text{ mm}$ ,  $b = 100 \text{ mm}$ ,  $t = 100 \text{ mm}$ . Početni zarez grede je  $a_0 = 50 \text{ mm}$ . Izmjerene su vrijednosti energije i pomaka pri nestabilnom lomu  $W_0 = 650 \text{ N}\cdot\text{mm}$ ,  $\delta_0 = 1.5 \text{ mm}$ . Gustoća betona je  $\rho = 2300 \text{ kg/m}^3$ . Potrebno je izračunati specifičnu energiju loma  $G_F$ . Uzorak je postavljen da na ispitivanje utječe samo masa grede unutar raspona između oslonaca.



Specifična energija loma  $G_F$  računa se prema izrazu (6.4):

$$G_F = \frac{W_t}{(b - a_0)t} = \frac{W_0 + P_w \delta_0}{(b - a_0)t} \quad (6.4)$$

$P_w$  predstavlja silu ekvivalentnu utjecaju vlastite težine i računa se kao:

$$P_w = m \cdot g = L \cdot b \cdot t \cdot \rho \cdot g$$

$$P_w = 0.84 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot 2300 \cdot 9.81 = 189.53 \text{ kN}$$

Stoga je vrijednost  $G_F$ :

$$G_F = \frac{0.65 + 189.53 \cdot 0.0015}{(0.1 - 0.05) \cdot 0.1} = 186.86 \text{ N/m}$$

Na sljedećim slikama predstavljeni su rezultati *Round Robin* testova izvedenih u laboratorijima diljem svijeta [13]

**Table 6-2 Values of  $G_F$  from Three-Point Bend Beams from RILEM Round-Robin Test**

Series Number	Dimensions (mm)			w/c	Cement Content (kg/m <sup>3</sup> )	$d_a$ (mm)	Age (days)	Curing <sup>a</sup>	Number of Beams Tested	$a_0/b$	E (GPa)	$f_t$ (MPa)	$G_F$ (N/m)
	S	b	t										
1	600	100	100	0.59	—	16	100	B	5	0.5	33.5	3.02	178
	600	100	150	0.59	—	16	100	B	4	0.5	33.5	3.02	173
	600	150	100	0.59	—	16	100	B	4	0.5	33.5	3.02	184
2	800	100	100	0.50	250	13	100	C	3	0.2	24.6	2.10	113
	800	100	100	0.50	250	13	100	C	3	0.3	24.6	2.10	133
	800	100	100	0.50	250	13	100	C	3	0.4	24.6	2.10	113
	800	100	100	0.50	250	13	100	C	3	0.5	24.6	2.10	156
	450	150	150	0.50	250	13	100	C	3	0.2	24.6	2.10	176
	450	150	150	0.50	250	13	100	C	3	0.3	24.6	2.10	170
	450	150	150	0.50	250	13	100	C	3	0.4	24.6	2.10	174
	450	150	150	0.50	250	13	100	C	3	0.5	24.6	2.10	202
	800	150	150	0.50	250	13	100	C	3	0.2	24.6	2.10	164
	800	150	150	0.50	250	13	100	C	3	0.3	24.6	2.10	170
	800	150	150	0.50	250	13	100	C	3	0.4	24.6	2.10	178
	800	150	150	0.50	250	13	100	C	3	0.5	24.6	2.10	170
3	800	100	100	0.40	400	16	28	A	10	0.5	36.7	3.37	152
	800	100	100	0.58	315	32	28	A	10	0.5	30.4	2.34	168
	800	100	100	0.45	350	30	7	A	8	0.5	29.6	3.13	112
4	800	100	100	0.58	300	30	7	A	6	0.5	24.7	2.43	81
	800	100	100	0.50	400	8	7	A	8	0.5	22.4	3.32	85

**Table 6-2 (Continued)**

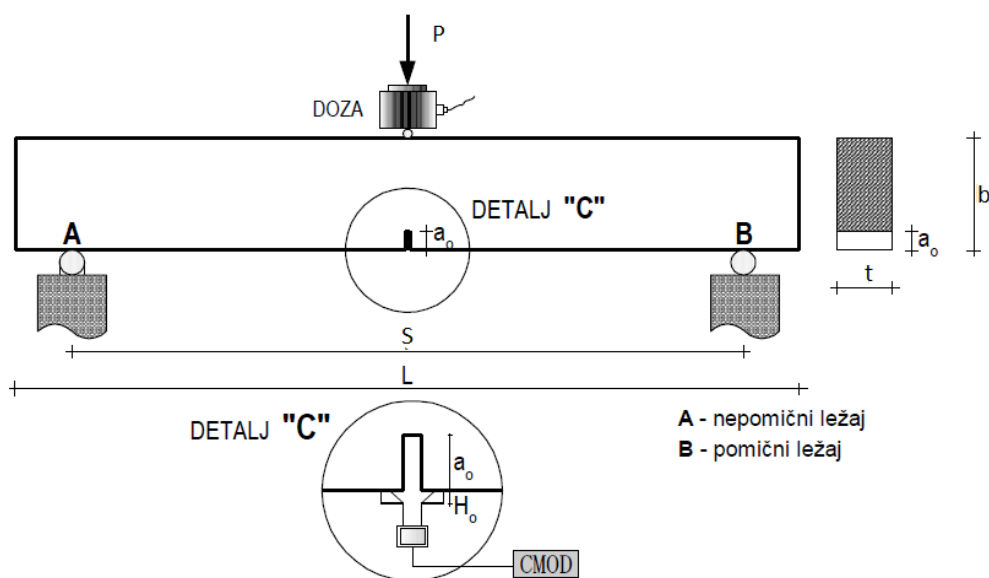
Series Number	Dimensions (mm)			w/c	Cement Content (kg/m <sup>3</sup> )	$d_a$ (mm)	Age (days)	Curing <sup>a</sup>	Number of Beams Tested	$a_0/b$	E (GPa)	$f_t$ (MPa)	$G_F$ (N/m)	
	S	b	t											
4 (cont.)	800	100	100	0.50	400	3	7	A	7	0.5	20.4	3.04	62	
	800	100	100	0.40	400	3	7	A	3	0.5	24.4	3.55	79	
	800	100	100	0.40	400	8	7	A	3	0.5	26.5	4.10	78	
	800	100	100	0.58	300	30	34	A	6	0.5	29.1	3.81	105	
	800	100	100	0.48	350	30	33	A	8	0.5	32.7	4.27	120	
	800	100	100	0.40	400	30	30	A	9	0.5	35.1	4.41	146	
5	800	100	100	0.48	423	9.5	30	A	7	0.5	33.9	2.96	99	
	800	100	100	0.58	350	9.5	30	A	7	0.5	31.0	2.34	109	
	800	100	100	0.68	300	9.5	30	A	7	0.5	29.9	1.93	101	
	800	100	100	0.48	364	19	30	A	13	0.5	42.2	3.79	188	
	800	100	100	0.58	302	19	30	A	14	0.5	39.9	2.45	200	
	800	100	100	0.68	259	19	30	A	14	0.5	35.7	2.27	193	
	6	450	100	100	0.50	375	8	28	D	5	0.5	30.0	2.90	113
	7	800	100	100	0.40	524	25	28	A	13	0.5	26.3	4.03	112

Source: From ref. 7.  
<sup>a</sup>A = moist cured 1 day, then in lime-saturated water; B = in water 8 days, then in 65% RH; C = covered with wet burlap for 1 day, then exposed to air; D = demolding after 3 days, then in 95% RH.



#### ZADATAK 4.

Odrađeno je ispitivanje grede savijanjem u tri točke kako bi se odredile vrijednosti modula elastičnosti  $E$ , kritični faktor intenziteta naprezanja  $K_{Ic}^S$  i kritični pomak vrha pukotine  $CTOD_c$ . Dimenzije grede su:  $S = 600 \text{ mm}$ ,  $b = 150 \text{ mm}$ ,  $t = 180 \text{ mm}$ . Početni zarez grede je  $a_0 = 50 \text{ mm}$ . Izmjerene su vrijednosti početne popustljivosti  $C_i = 7 \cdot 10^{-6} \text{ mm/N}$ , popustljivosti pri rasterećenju  $C_u = 9 \cdot 10^{-6} \text{ mm/N}$ , kritično opterećenje  $P_c = 3500 \text{ N}$ . Gustoća betona je  $\rho = 2300 \text{ kg/m}^3$ . Uz pretpostavku da je  $H_0 = 0$ , potrebno je izračunati vrijednosti  $E$ ,  $K_{Ic}^S$ ,  $CTOD_c$  na temelju dvoparametarskog modela loma.



Uz pretpostavku da je  $H_0 = 0$ ,  $\alpha_0 = \frac{a_0 + H_0}{b + H_0} = \frac{50}{150} = 0.33$ . Vrijednost popravne funkcije geometrije dobiva se prema izrazu (6.6):

$$g_2(\alpha_0) = 0.76 - 2.28\alpha_0 + 3.87\alpha_0^2 - 2.04\alpha_0^3 + \frac{0.66}{(1 - \alpha_0)^2} \quad (6.6)$$

$$g_2(\alpha_0) = 0.76 - 2.28 \cdot 0.33 + 3.87 \cdot 0.33^2 - 2.04 \cdot 0.33^3 + \frac{0.66}{(1 - 0.33)^2} = 1.83$$

Vrijednost modula elastičnosti dobije se uvrštavanjem poznatih parametara u izraz (6.5):

$$E = \frac{6Sa_0g_2(\alpha_0)}{C_i b^2 t} \quad (6.5)$$

$$E = \frac{6 \cdot 600 \cdot 50 \cdot 1.83}{7 \cdot 10^{-6} \cdot 150^2 \cdot 80} = 26142.86 \text{ MPa}$$

Izjednačavanjem izraza (6.5) i (6.7) dobiva se izraz koji povezuje kritičnu duljinu zarez a i odgovarajuće geometrijske funkcije:

$$a_c \cdot g_2(\alpha_c) = 117.64$$

Vrijednost kritične duljine zarez a možemo „pogoditi“ iterativnim postupkom korištenjem izraza (6.6) uz supstituciju parametra  $\alpha_0$  sa  $\alpha_c = \frac{a_0 + HO}{b + HO}$ . Na taj način određena je duljina kritične pukotine  $a_c = 57.09 \text{ mm}$ , dok je vrijednost  $g_2(\alpha_c) = 2.06$

Kako bi mogli izračunati  $K_{Ic}^S$  potrebno je izračunati parametar  $W_h = \frac{W_{h0}S}{L}$ , gdje je  $W_{h0}$  vlastita težina dijela grede ( $W_{h0} = S \cdot b \cdot t \cdot \rho \cdot g$ ) između oslonaca prema izrazu:

$$W_h = \frac{S^2 \cdot b \cdot t \cdot g \cdot \rho}{L} = \frac{0.6^2 \cdot 0.15 \cdot 0.08 \cdot 9.81 \cdot 2300}{0.7} = 140 \text{ N}$$

Funkcija geometrije  $g_1\left(\frac{a_c}{b}\right)$  računa se prema izrazu (6.10) za  $a_c/b = 0.38$ :

$$g_1\left(\frac{a_c}{b}\right) = \frac{1.99 - \left(\frac{a_c}{b}\right)\left(1 - \frac{a_c}{b}\right)\left[2.15 - \frac{3.93a_c}{b} + 2.70\left(\frac{a_c}{b}\right)^2\right]}{\sqrt{\pi}\left(1 + 2\frac{a_c}{b}\right)\left(1 - \frac{a_c}{b}\right)^2} \quad (6.10)$$

$$g_1\left(\frac{a_c}{b}\right) = \frac{1.99 - (0.38) \cdot (1 - 0.38) \cdot [2.15 - 3.93 \cdot 0.38 + 2.70 \cdot (0.38)^2]}{\sqrt{\pi}(1 + 2 \cdot 0.38)(1 - 0.38)^2} = 1.14$$

Prema izrazu (6.9) dobije se vrijednost kritičnog faktora intenziteta naprezanja:

$$K_{Ic}^S = 3(P_c + 0.5W_h) \frac{S\sqrt{\pi a_c} g_1(a_c/b)}{2b^2 t} \quad (6.9)$$

$$K_{Ic}^S = 3 \cdot (3500 + 0.5 \cdot 140) \cdot \frac{0.6 \cdot \sqrt{\pi \cdot 57.09 \cdot 10^{-3}} \cdot 1.14}{2 \cdot 0.15^2 \cdot 0.08} = 0.862 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$$

Vrijednost  $CTOD_c$  računa se po izrazu (6.11), uz vrijednost faktora  $\beta_0 = \frac{a_0}{a_c} = 0.86$

$$CTOD_c = \frac{6(P_c + 0.5W_h)Sa_c g_2 \left(\frac{a_c}{b}\right)}{Eb^2 t} \cdot \left[ (1 - \beta_0)^2 + \left(1.081 - 1.149 \frac{a_c}{b}\right) (\beta_0 - \beta_0^2) \right]^{1/2} \quad (6.11)$$

$$CTOD_c = \frac{6 \cdot (3500 + 0.5 \cdot 140) \cdot 600 \cdot 57.09 \cdot 2.06}{26142.86 \cdot 150^2 \cdot 80} \cdot [(1 - 0.86)^2 + (1.081 - 1.149 \cdot 0.38) (0.86 - 0.86^2)]^{1/2} = 0.0091 \text{ mm}$$

Na slici su prikazani rezultati ispitivanja savijanjem u tri točke koje su proveli *Jenq i Shah* te *John i Shah* [13].

**Table 6-7 Values of  $K_{Ic}^*$  and  $CTOD_c$  from Three-Point Bend Beams Tested by Jenq and Shah and John and Shah**

Test Number <sup>a</sup>	Dimensions (mm)			$f'_c$ (MPa)	$w/c$	$d_a$ (mm)	$E$ (GPa)	$a_0/b$	$a_c/b$	$K_{Ic}^*$ (MPa m <sup>1/2</sup> )	$CTOD_c$ (mm) <sup>c</sup>	$G_{Ic}^*$ (N/m) <sup>b</sup>
	$S$	$b$	$t$									
1	305	76	29	25.2	0.65	19	33.6	0.293	0.531	1.127	0.0231	46.63
2	305	76	29	25.2	0.65	19	33.6	0.293	0.535	0.989	0.0198	35.91
3	305	76	29	25.2	0.65	19	33.6	0.293	0.548	0.891	0.0180	29.14
4	305	76	29	25.2	0.65	19	33.6	0.293	0.498	0.968	0.0196	34.40
5	609	152	57	25.2	0.65	19	33.6	0.324	0.511	1.001	0.0269	36.78
6	609	152	57	25.2	0.65	19	33.6	0.318	0.377	0.787	0.0089	22.74
7	914	229	86	25.2	0.65	19	33.6	0.333	0.385	0.940	0.0122	32.43
8	914	229	86	25.2	0.65	19	33.6	0.333	0.347	1.106	0.0076	44.91
9	305	76	29	27.2	0.65	4.8	25.4	0.293	—	0.708	0.0077	19.74
10	609	152	57	27.2	0.65	4.8	25.4	0.324	—	0.719	0.0118	20.35
11	914	229	86	27.2	0.65	4.8	25.4	0.333	—	0.693	0.0083	18.95
12	305	76	29	39.4	0.45	4.8	32.4	0.293	—	0.897	0.0084	24.77
13	609	152	57	39.4	0.45	4.8	32.4	0.324	—	0.966	0.0085	28.75
14	914	229	86	39.4	0.45	4.8	32.4	0.333	—	1.010	0.0121	31.39
15	305	76	29	27.6	0.45	Paste	20.8	0.293	—	0.601	0.0076	17.41
16	609	152	57	27.6	0.45	Paste	20.8	0.324	—	0.599	0.0062	17.27
17	914	229	86	27.6	0.45	Paste	20.8	0.333	—	0.654	0.0068	20.63
18	203	76	25	110	0.22	8	56.6	0.329	—	2.130	0.0112	80.23

### ZADATAK 5. [13]

Četiri različite veličine geometrijski sličnih greda ispitane su savijanjem u tri točke kako bi se izmjerila vrijednost energije loma materijala  $G_f$  za beton. Za svaku veličinu grede ispitana su tri identična uzorka. Sve grede imaju debljinu  $t = 38 \text{ mm}$  i omjer  $S/b = 2.5$ . Omjer  $a_0/b = 0.17$  je korišten za sve grede. Dobivena maksimalna opterećenja i dimenzije greda su dane u tablici 4. Posebno je izmjerena vrijednost modula elastičnosti  $E = 27700 \text{ MPa}$ . Potrebno je odrediti energiju loma materijala  $G_f$  i efektivnu duljinu zone procesa loma za beskonačno veliki uzorak  $C_f$ .

U tablici 3 prikazana su maksimalna opterećenja za svaku gredu i njihove srednje vrijednosti za grede istih dimenzija.

Tablica 3 Maksimalna izmjerena opterećenja

Visina, b (mm)	Maksimalna opterećenja P° (N)			
	Uzorak 1	Uzorak 2	Uzorak 3	$\bar{\Sigma}$
38	1800	1810	1850	<b>1820</b>
76	3010	3140	3160	<b>3103</b>
152	4400	4630	4880	<b>4637</b>
305	7730	7740	7890	<b>7787</b>

U tablici 4 prikazane su vrijednosti koeficijenta sile i geometrije

Tablica 4 Koeficijent sile i geometrije

Visina, b (mm)	$Y_j = \left(\frac{bt}{P_j^\circ}\right)^2 [MPa^{-2}]$			
	Uzorak 1	Uzorak 2	Uzorak 3	$\bar{\Sigma}$
38	0.644	0.636	0.609	<b>0.630</b>
76	0.921	0.846	0.835	<b>0.864</b>
152	1.723	1.556	1.401	<b>1.560</b>
305	2.248	2.242	2.158	<b>2.216</b>

Kako bi mogli izračunati parametar  $G_f$  potrebno odrediti pravac linearne regresije

$Y = A_B X + C_B$ . Srednje vrijednosti podataka računaju se prema izrazu (6.17):

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j$$
(6.17)

$$\bar{X} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 (38 + 76 + 152 + 305) = 142.75$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^3 (0.630 + 0.864 + 1.560 + 2.216) = 1.318$$

Za određivanje nagiba pravca i odsjeka na ordinati koriste se izrazi (6.15) i (6.16):

$$A_B = \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})(Y_j - \bar{Y})}{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} A_B &= \frac{(-104.75) \cdot (-0.688) + (-66.75) \cdot (-0.454) + 9.25 \cdot 0.242 + 162.25 \cdot 0.898}{104.75^2 + 66.75^2 + 9.25^2 + 162.25^2} \\ &= 0.00598 \text{ mm}^{-1} \text{ MPa}^{-2} \end{aligned}$$

$$C_B = \bar{Y} - A_B \bar{X} \quad (6.16)$$

$$C_B = 1.318 - 0.00598 \cdot 142.75 = 0.465 \text{ MPa}^{-2}$$

Vrijednost funkcije geometrije oblika za  $\alpha_0 = a_0/b = 0.17$  i  $S/b = 2.5$  dana je u preporuci RILEM-a [13]:

$$g_1\left(\frac{a_0}{b}\right) = \frac{1.0 - 2.5 \cdot \alpha_0 + 4.49 \cdot \alpha_0^2 - 3.98 \cdot \alpha_0^3 + 1.33 \cdot \alpha_0^4}{(1 - \alpha_0)^{3/2}} \quad (6.10)$$

$$g_1\left(\frac{a_0}{b}\right) = \frac{1.0 - 2.5 \cdot 0.17 + 4.49 \cdot 0.17^2 - 3.98 \cdot 0.17^3 + 1.33 \cdot 0.17^4}{(1 - 0.17)^{3/2}} = 0.907$$

Sada se prema izrazu (6.18) možemo izračunati bezdimenzionalnu vrijednost oslobađanja energije koja je potreban za dobivanje vrijednosti  $G_f$ .

$$g(\alpha_0) = \left(\frac{S}{b}\right)^2 \pi \cdot \alpha_0 \cdot [1.5 \cdot g_1(\alpha_0)]^2 \quad (6.18)$$

$$g(\alpha_0) = (2.5)^2 \cdot \pi \cdot 0.17 \cdot (1.5 \cdot 0.907)^2 = 6.17$$

Izraz (6.19) daje vrijednost energije loma:

$$G_f = \frac{g(\alpha_0)}{A_B \cdot E} \quad (6.19)$$

$$G_f = \frac{6.17}{0.00598 \cdot 27700} = 37.24 \text{ N/m}$$

Efektivna duljina pukotine  $c_f$  dobije se prema izrazu (6.20) uz vrijednost prve derivacije funkcije  $g'_1(\alpha_0) = -0.069$  i tada je  $g'(\alpha_0)$ :

$$g'(\alpha_0) = \left(\frac{S}{b}\right)^2 \cdot \pi \cdot 1.5^2 \cdot [g_1(\alpha_0)^2 \cdot \alpha_0 \cdot 2 \cdot g'_1(\alpha_0)]$$

$$g'(\alpha_0) = (2.5)^2 \cdot \pi \cdot 1.5^2 \cdot [0.907^2 \cdot 0.17 \cdot 2 \cdot (-0.069)] = 35.31$$

$$c_f = \frac{g(\alpha_0)}{g'(\alpha_0)} \cdot \left(\frac{C_B}{A_B}\right) \quad (6.20)$$

$$c_f = \frac{6.17}{35.31} \cdot \left(\frac{0.465}{0.00598}\right) = 13.59 \text{ mm}$$

Na slici su prikazani rezultati ispitivanja savijanjem u tri točke koja su proveli *Bazant i Pfeiffer* [13].

**Table 6-8 Values of  $G_f$  from Three-Point Bend Beams Tested by Bazant and Pfeiffer<sup>a</sup>**

Series Number <sup>b</sup>	Dimensions (mm)			$f'_c$ (MPa)	$w/c$	$d_a$ (mm)	$E$ (GPa)	$a_0/b$	$A_B$ ( $\text{mm}^{-1} \text{MPa}^{-2}$ )	$G_f$ (N/m)	$\omega_A$	$m$
	$S$	$b$	$t$									
1	95	38	38	34.1	0.60	13	27.7	0.167	0.00598	36.60	0.067	0.144
2	191	76	38	34.1	0.60	13	27.7	0.167	0.00598	36.60	0.067	0.144
3	381	152	38	34.1	0.60	13	27.7	0.167	0.00598	36.60	0.067	0.144
4	762	305	38	34.1	0.60	13	27.7	0.167	0.00598	36.60	0.067	0.144
5	95	38	38	47.6	0.50	5	32.9	0.167	0.00873	23.67	0.031	0.048
6	191	76	38	47.6	0.50	5	32.9	0.167	0.00873	23.67	0.031	0.048
7	381	152	38	47.6	0.50	5	32.9	0.167	0.00873	23.67	0.031	0.048
8	762	305	38	47.6	0.50	5	32.9	0.167	0.00873	23.67	0.031	0.048

Source: From ref. 27.

<sup>a</sup>For a valid test, the value of  $\omega_A$  should not exceed about 0.10 and  $m$  should be about 0.20 according to the RILEM proposal.

<sup>b</sup>Three beams were tested for each series.

## 8. Zaključak

Općenito se smatra da beton ima zanemarivu vlačnu čvrstoću ili da se lomi krhko pri malim vlačnim naprezanjima. Dok su naprezanja u strukturi mala, ova pretpostavka je razumna. Međutim, trendovi što učinkovitijeg korištenja građevinskih materijala, pa tako i betona, dovode do izlaganja betonskih elemenata većim naprezanjima. U mnogim slučajevima, kao primjerice kod: neojačanih greda, masivnih konstrukcija poput brana, proboja betonskih ploča, kod armaturnih veza i sidrišta te betonskih cijevi, vlačni slom može utjecati na čvrstoću. Zbog utjecaja veličine nije moguće točno odrediti faktore koji utječu na čvrstoću koristeći samo principe klasične čvrstoće materijala.

Pri proračunu betonskih konstrukcija gotovo se nikada obzir ne uzima vlačna otpornost. Promatrano kroz praksu u projektiranju, beton nije materijal koji prenosi vlačana opterećenja i u tu svrhu dodaje mu se armatura. Ipak, potrebno je istraživati ponašanje betona i njemu sličnih materijala pri vlačnom naprezanju kako bi mogli što bolje razumjeti pojave do kojih pri tome dolazi. Razvijanjem točnijih modela mehanike loma betona dolazi se do novih saznanja o materijalu, a koja se mogu koristiti i u drugim tehničkim granama poput otpornosti materijala i dinamičke mehanike loma, a sve u svrhu što boljeg poznavanja i korištenja materijala.

Problem primjene *LEFM-a* je u tome što se pokazalo da parametri  $K_{Ic}$  i  $G_F$  nisu konstante materijala nego se mijenjaju s geometrijom i sastavom betona. U radu je prikazano nekoliko modela nelinearne mehanike loma kojima se pokušava opisati ponašanje betona. Na temelju tih modela opisane su tri eksperimentalne metode određivanja parametara mehanike loma savijanjem u tri točke koje su preporučene od strane *RILEM-a*. Iako su to najjednostavniji testovi koji se mogu izvesti, njihova ograničenja leže u osjetljivosti uzoraka pri opterećenju i potrebi za vrlo preciznim mjerenjima (pomaka, *CTOD-a*, nanošenja sile) i velikim rasipanjem rezultata zbog same strukture betona. Preporuke *RILEM-a* opisane u radu zastarjele su te organizacija preporuča nove, kao npr. novi *RILEM standard: testing methods for determination of the double-K criterion for crack propagation in concrete using wedge-splitting tests and three-point bending beam tests, recommendation of RILEM TC265-TDK* iz 2021. godine.

Bez obzira na trenutna ograničenja i probleme u mehanici loma betona, ova tehnička grana razvija se velikom brzinom. U potrazi za što realnijim modelom loma pukotine uz pomoć eksperimenata i softverskih rješenja moguće je predvidjeti da će se u budućnosti „otkriti“ karakteristični parametri mehanike loma betona. Takav napredak omogućio bi širu primjenu mehanike loma u praktične svrhe.

## 9. Literatura

- [1] Krolo J. *Osnove mehanike loma* [Skripta s predavanjima na kolegiju Osnove mehanike loma]. Zagreb: Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu; 2009.
- [2] Mlikota M. *Numerička simulacija napredovanja pukotina u pločama izloženim cikličkom vlačnom opterećenju*. Diplomski rad. Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu; 2010.
- [3] Shukla A. *Practical Fracture Mechanics in Design, Second Edition, Revised and Expanded*. Boca Raton: Taylor & Francis Group. 2004.
- [4] Cornell Edu. SimScience. Dostupno:  
<https://sethna.lassp.cornell.edu/SimScience/cracks/advanced/history1.html> [Pristupljeno: 20. studenog 2023.].
- [5] Anderson T.L. *Fracture Mechanics Fundamentals and Applications, Third Edition*. Boca Raton: Taylor & Francis Group. 2005.
- [6] Krolo J. *Utjecaj nehomogenosti betona na osnovne parametre mehanike loma*. Doktorska disertacija. Zagreb: Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu; 2004.
- [7] Sivonjić Lj. *Ispitivanje polja pomaka vrška pukotine pomoću višeskalne digitalne korelacije slike*. Diplomski rad. Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu; 2011.
- [8] Mier J. G. M. van. *Fracture processes of concrete: assessment of material parameters for fracture models*. Boca Raton: Taylor & Francis Group. 1997.
- [9] Ulfkær J.P. *Fracture Mechanics of Concrete*. Aalborg: Dept. of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University. 1992.
- [10] Kumar S., Barai S. V. *Concrete Fracture Models and Applications*. Berlin: Springer. 2011.
- [11] Du X., Jin L. *Size Effect in Concrete Materials and Structures*. Berlin: Springer. 2021.
- [12] Bažant Z P., Planas J. *Fracture and Size Effect in Concrete and other Quasibrittle Materials*. (1st ed.). Boca Raton: Taylor & Francis Group. 1998.



[13] Shah S. P., Swartz S. E., Ouyang C. *Fracture Mechanics of Concrete: Applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rock and Other Quasi-Brittle Materials*. New York: Wiley. 1995.

[14] RILEM. Dostupno: <https://www.rilem.net/> [Pristupljeno: 1. prosinca 2023.].

[15] Zongjin L., Xianyu J., Chen L. *Fracture Toughness and Microstructure of Concrete at early-ages*. Dostupno: <https://www.rilem.net/images/publis/pro071-013.pdf> [Pristupljeno: 15. Siječnja 2024.].

[15] Prvi RILEM

[16] RILEM Draft Recommendations. *Determination of Parameters of Plain Concrete Using Three-Point Bend Tests*. Materials and Structures. 23. pp. 457-600

[17] RILEM Draft Recommendations. *Determination of Parameters of Plain Concrete Using Three-Point Bend Tests*. Materials and Structures. 23. pp. 457-600

[18]

## 10. Popis slika

Slika 1. Razlika pristupa određivanja pouzdanosti preko čvrstoće materijala u odnosu na mehaniku loma [1] .....	3
Slika 2. Staklena ploča s eliptičnom pukotinom u sredini [5].....	4
Slika 3. Griffith-ov model ploče s pukotinom [6].....	7
Slika 4. Tipovi otkazivanja uzorka [8] .....	9
Slika 5. Stanje naprezanja elementa u blizini pukotine [1] .....	10
Slika 6. Funkcija geometrije oblika za beskonačnu ploču [6].....	11
Slika 7. Odnos $KIc$ i debljine uzorka [1] .....	12
Slika 8. LEFM vrijedi ako je zona plastičnosti puno manja u odnosu na ostale dimenzije [1].....	12
Slika 9. Shematski prikaz R krivulje [1].....	13
Slika 10. Korekcija područja plastičnosti [6] .....	15
Slika 11. Dugdale-Barenblattov model [1] .....	15
Slika 12. Širenje vrha pukotine -CTOD [1] .....	16
Slika 13. Područje plastičnosti pri vrhu pukotine [1].....	17
Slika 14. Savijanje uzorka u tri točke [1] .....	18
Slika 15. Plastični dio širenja pukotine [1] .....	19
Slika 16. Konturni J- integral [10] .....	20
Slika 17. Promjena $KIc$ sa veličinom početnog zarezca [6] .....	22
Slika 18. Dijagram opterećenje-deformacija betona [6] .....	22
Slika 19. Dijagrami ponašanja betona pri vlačnom naprezanju [10] .....	23
Slika 20. Lokalizacija naprezanja u betonskom uzorku [10] .....	24
Slika 21. Zona procesa loma [10].....	25
Slika 22. Efekt veličine za betonske uzorke [11] .....	26
Slika 23. Krivulja omekšavanja i krivulja naprezanja i produljenja [12].....	29
Slika 24. Krivulje omekšavanja za različite betone [12].....	29
Slika 25. Model zone pukotine [10] .....	31
Slika 26. Odnos naprezanja i deformacije pri otvaranju pukotina [10] .....	32
Slika 27. a) Krivulja naprezanje-CMOD dobivena testom savijanja u tri točke b) Prikaz CMOD i CTOD [6] .....	33
Slika 28. Odnos čvrstoće i veličine uzorka u bi-logaritamskom mjerilu [6].....	35
Slika 29. Dimenzije standardnih uzoraka [10] .....	38

Slika 30. Način opterećenja WST uzorka [10].....	38
Slika 31. Dimenzije standardnih uzoraka [6] .....	39
Slika 32. Eksperimentalno dobiven dijagrama naprezanja i pomaka.....	41
Slika 33. Načini kompenzacije utjecaja vlastite težine [12].....	42
Slika 34. Konfiguracija testa [6] .....	43
Slika 35. Hidraulična preša s kontrolom pomaka [6].....	44
Slika 36. Eksperimentalno dobiven dijagram P-CMOD [13] .....	45
Slika 37. Uzorak za test savijanja u tri točke [13].....	48
Slika 38. Skica rasipanja rezultata [13].....	51

## 11. Popis tablica

Tablica 1. Karakteristične dimenzije uzorka.....	39
Tablica 2. Karakteristične dimenzije uzorka.....	43
Tablica 3. Maksimalna imjerena opterećenja.....	60
Tablica 4. Koeficijent sile i geometrije .....	60