

Analiza zajedničke vjerojatnosti pojave velikih voda na ušćima primjenom bivarijatnih kopula

Gilja, Gordon; Ocvirk, Eva; Kuspilić, Neven

Source / Izvornik: **Građevinar, 2018, 70, 267 - 275**

Journal article, Published version

Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)

<https://doi.org/10.14256/JCE.2173.2017>

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:237:254476>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-05**

Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,
University of Zagreb](#)



Primljen / Received: 13.7.2017.

Ispravljen / Corrected: 22.2.2018.

Prihvaćen / Accepted: 10.3.2018.

Dostupno online / Available online: 10.5.2018.

Analiza zajedničke vjerojatnosti pojave velikih voda na ušćima primjenom bivarijatnih kopula

Autori:

Doc.dr.sc. **Gordon Gilja**, dipl.ing.građ.Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet
ggilja@grad.hrIzv.prof.dr.sc. **Eva Ocvirk**, dipl.ing.građ.; dipl.ing.mat.Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet
ocvirk@grad.hrProf.dr.sc. **Neven Kuspilić**, dipl.ing.građ.Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet
kuspa@grad.hr

Izvorni znanstveni rad

Gordon Gilja, Eva Ocvirk, Neven Kuspilić

Analiza zajedničke vjerojatnosti pojave velikih voda na ušćima primjenom bivarijatnih kopula

Procjena opasnosti od poplava za hidrološki događaj zadanog povratnog razdoblja jest temelj projektiranja građevina namjenjenih sustavu obrane od poplava. Učestalo pojavljivanje velikih voda u kratkom razdoblju upozorava kako treba preispitati tradicionalne pristupe procjenjivanju vjerojatnosti njihovog pojavljivanja. U ovom radu procijenjena je opasnost od istovremene pojave velike vode na rijeci Savi i njezinom pritoku za dva ušća. Rezultati pokazuju da se trend protoka procijenjenih bivarijatnom kopulom poklapa s mjerjenjima protoka velike vode 2014. godine.

Ključne riječi:

opasnost od poplava, obrana od poplava, bivarijatne kopule, rijeka Sava, ušće

Original scientific paper

Gordon Gilja, Eva Ocvirk, Neven Kuspilić

Joint probability analysis of flood hazard at river confluences using bivariate copulas

Estimation of flood hazard associated with return period of a hydrologic event is the basis for design of flood protection structures. More frequent occurrence of flood events in recent history has imposed the need to reconsider traditional hydrological approaches to estimation of high flow events. This paper focuses on estimation of peak flood discharge at two confluences of the Sava River. The results show that the peak discharge trend estimated using bivariate copulas is comparable to the values measured during an extreme flood event in 2014.

Key words:

flood hazard, flood protection, bivariate copulas, Sava River, confluence

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

Gordon Gilja, Eva Ocvirk, Neven Kuspilić

Analyse der gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten des Auftretens von Hochwasser an Mündungen durch Anwendung bivariater Copula

Die Einschätzung der Hochwassergefahr für hydrologische Ereignisse des festgelegten Rückkehrzeitraums ist die Grundlage für die Planung von Gebäuden, die für das Hochwasserschutzsystem gedacht sind. Das häufige Auftreten von Hochwasser in einem kurzen Zeitraum weist darauf hin, dass die traditionellen Ansätze der Einschätzung der Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens überprüft werden müssen. In dieser Abhandlung wird für zwei Mündungen die Gefahr eines gleichzeitigen Auftretens von Hochwasser am Fluss Save und ihrem Nebenfluss eingeschätzt. Die Ergebnisse zeigen, dass sich der Trend des Durchflusses, eingeschätzt anhand bivariater Copula, mit den Messungen des Durchflusses des Hochwassers von 2014 deckt.

Schlüsselwörter:

Hochwassergefahr, Hochwasserschutz, bivariate Copula, Fluss Save, Mündungen

1. Uvod

Vodni val nastaje interakcijom brojnih varijabli kao što su: intenzitet oborina, trajanje i prostorna raspodjela kiše na porječju, karakteristike porječja i korištenje zemljišta, režim rada akumulacija, itd. Maksimalni vršni protok vodnog vala je samo jedna od njegovih karakteristika, ali najvažnija s aspekta zaštite od poplava. Stoga je maksimalni protok najčešće korištena varijabla u univarijantnim metodama analize učestalosti za procjenu opasnosti od poplava prilikom projektiranja hidrotehničkih građevina [1]. Rezultat hidroloških analiza je izračun vrijednosti projektnih varijabli za korištenje u proračunu konstrukcije i proračunu funkcionalnosti u procesu projektiranja. Multivarijantna priroda vodnog vala podrazumijeva da je za potpun opis njenih karakteristika potrebno uzeti u obzir istovremeno prekoračenje kritičnih vrijednosti koreliranih varijabli kako bi vjerojatnost prekoračenja projektnog protoka odražavala najnepovoljniju kombinaciju s drugim varijablama za traženu namjenu [2]. U brojnim radovima od 1980-ih godina su primjenjivane bivarijantne i multivarijantne metode analize vjerojatnosti za izračun varijabli mjerodavnih za opasnost od poplave pod uvjetnom distribucijom, čiji su se rezultati znatno razlikovali od onih izračunanih univarijantnim metodama [3]. Pokazano je da pri nailasku vodnog vala postoji korelacija između njegovog maksimalnog protoka, volumena i trajanja, što se različito odražava na zahtjeve kada treba projektirati ovisno o namjeni hidrotehničke građevine [4]. Zajednička funkcija distribucije maksimalnog protoka i volumena vodnog vala primjenjuje se za projektiranje retencija [2], procjenu parametara sintetičkog hidrograma [1, 5], projektiranje sustava za zaštitu od poplava [6, 7] ili akumulacija [8]. Zajednička funkcija distribucije maksimalnih protoka dviju rijeka primjenjuje se za modeliranje istovremene pojave velikih voda u složenim riječnim sustavima [9].

Bivarijantna analiza učestalosti velikih voda omogućuje beskonačno mnogo kombinacija utjecajnih varijabli duž slojnice koja predstavlja njihovo zajedničko povratno razdoblje. Za praktičnu primjenu bivarijantnog pristupa potrebno je unutar velikog broja informacija o mogućem ishodu hidrološkog događaja izdvojiti podskup mjerodavnih događaja za traženu primjenu. Kombinacije vrijednosti varijabli uz rubove slojnice su manje vjerojatne zato što je povećanje jedne varijable kompenzirano smanjenjem druge varijable, uvjetovano smanjenjem vjerojatnosti njihove koincidencije [1]. Volpi i Fiori su predložili praktičnu metodologiju kojom je moguće identificirati mjerodavne kombinacije varijabli s podskupa slojnice za korištenje pri projektiranju [2]. Bivarijantna analiza učestalosti maksimalnog protoka u kombinaciji s drugom varijablom kao što je trajanje ili volumen vodnog vala primjenjuje se najčešće za projektiranje akumulacija [4, 10], dok u riječnim potezima, čiji režim voda odražava prirodni hidrološki ciklus, volumen vodnog vala ne pokazuje značajnu korelaciju s njegovim maksimalnim protokom [6]. Izračun opasnosti od poplava na ušću dviju rijeka predstavlja izazov jer svaka

rijeka pridonosi ukupnoj opasnosti od poplava uzrokovanjem uspora, a time većoj nepouzdanosti izračuna konsumpcijske krivulje, jer je nemoguće odrediti jednoznačan funkcijski odnos vodostaja i protoka. Analiza učestalosti velikih voda na ušćima je važna zbog projektiranja nasipa koji se moraju nadvisiti kako bi osigurali nesmetan prolazak vodnog vala u slučaju koincidencije velikih voda na glavnoj rijeci i njenom pritoku. Potrebno je iznaći ujedno točan i praktičan pristup za izračun opasnosti od poplave na ušću, uz istovremeno premašenje koincidentnih protoka na riječnom paru upotrebom zajedničke funkcije distribucije protoka.

U ovom radu analizirana je učestalost koincidentnih velikih voda rijeke Save i njenih protoka za izračun zajedničke funkcije distribucije protoka na istraženim ušćima koristeći izmjerene podatke o protocima. Procjena zajedničke funkcije distribucije koincidentnih velikih voda temelji se na identificiranim marginalnim distribucijama maksimalnih godišnjih protoka parova rijeka na dvama ušćima koristeći bivarijantne kopule. Postavljena hipoteza glasi: moguće je razviti pristup metode kopule za točnu procjenu maksimalnog protoka hidrološkog događaja primjenom zajedničke funkcije distribucije koincidentnih velikih voda glavne rijeke i njenog pritoka. Za analizu su poslužila dva ušća na rijeci Savi: ušće rijeke Kupe i ušće rijeke Une. Glavni je cilj rada prikazati praktični pristup za procjenu projektnih uvjeta velikih voda koji je primjenjiv za hidrološki problem zajedničke vjerojatnosti prekoračenja kritičnih protoka na riječnim ušćima. Podaci o protocima preuzeti su s vodomjernih postaja uzvodno od ušća na rijeci Savi i njenom pritoku. Izbor podataka za analizu vođen je pretpostavkom da se više informacija o hidrološkom događaju može uzeti u obzir ako se svaku rijeku promatra kroz njezin režim voda, a zatim se njihov zajednički utjecaj kvantificira kroz informaciju o zajedničkom povratnom razdoblju premašenja para protoka na ušću. Za provedbu predloženog pristupa primjenjena je sljedeća metodologija:

- određivanje funkcije distribucije maksimalnih godišnjih protoka na rijeci Savi i pritoku
- određivanje zajedničke funkcije distribucije za parove maksimalnih godišnjih protoka na ušću koristeći funkciju kopule
- usporedba najnepovoljnije kombinacije protoka određene zajedničkom vjerojatnošću prekoračenja s tradicionalnim univarijantnim analizama učestalosti velikih voda na temelju izmjerenih podataka o protoku rijeke Save nizvodno od ušća
- usporedba izračunanih podataka s nedavnim mjerenjem protoka izmjerenog tijekom pojave značajnog hidrološkog događaja okarakteriziranog kao 1000-godišnja velika voda od strane Državnog hidrometeorološkog zavoda (DHMZ).

2. Teorijska polazišta

Modeli za multivarijantnu analizu učestalosti velikih voda zahtijevaju više ulaznih podataka od univarijantnih, što je nedostatak u slučaju analize hidroloških serija jer su one

često ograničene intervalom prikupljanja podataka, dužinom rada vodomjerne postaje od njenog uspostavljanja te su pod utjecajem promjena u režimu voda uvjetovanim prirodnim ili antropogenim djelovanjem. Ograničenje modela multivarijantnih distribucija vjerojatnosti je u tome što zahtijevaju da marginalne distribucije prate istu teorijsku distribuciju. Ovaj uvjet je teško ispuniti zbog različitih karakteristika utjecajnih varijabli koje se odražavaju na njihovu distribuciju. Uzimajući u obzir ta ograničenja, primjena multivarijantne analize koreliranih slučajnih varijabli u praksi se svodi najčešće na bivarijantni slučaj [6]. Za multivarijantno modeliranje hidroloških varijabli, uključujući izračun zajedničke funkcije distribucije koreliranih slučajnih varijabli, mogu se primijeniti kopule. Kopule su funkcije koje sjedinjuju više univarijantnih marginalnih kumulativnih funkcija distribucije u zajedničku kumulativnu funkciju distribucije. Najveća prednost kopula je njihova fleksibilnost, tj. mogućnost određivanja multivarijantne distribucije nezavisno od vrste marginalnih distribucija [2, 3]. Detaljniji opis teorije kopula može se naći u radu Sklara (1959) i Nelsena (2006). Prema Sklarovom teoremu, bilo koja n -dimenzionalna funkcija distribucije F se može formulirati pomoću kopule i njenih marginalnih distribucija, a može se zapisati kao

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_n}(x_n)) \quad (1)$$

gdje su $F_{X_i}(x)$, $i = 1, \dots, n$ marginalne distribucije slučajnog vektora (X_1, X_2, \dots, X_n) .

Ako su te marginalne distribucije kontinuirane, onda postoji jedna kopula funkcija C , koja se može zapisati kao

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = F(F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2), \dots, F_{X_n}^{-1}(u_n)) \quad (2)$$

Uvjetna funkcija distribucije može se izračunati nakon odabira prikladne kopula funkcije. Uvjetna funkcija distribucije varijable U_1 , ako je $U_2 = u_2$, može se izraziti kao:

$$C_{(U_1|U_2=u_2)}(u_1) = C(U_1 \leq u_1 | U_2 = u_2) \\ = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{C(u_1, u_2 + \Delta u) - C(u_1, u_2)}{\Delta u} = \left(\frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2) \Big|_{U_2 = u_2} \right) \quad (3)$$

Nadalje, uvjetna funkcija distribucije varijable U_1 , ako je $U_2 < u_2$, može se izraziti kao:

$$C_{(U_1|U_2 \leq u_2)}(u_1) = C(U_1 \leq u_1 | U_2 \leq u_2) = \frac{C(u_1, u_2)}{u_2} \quad (4)$$

Funkcija distribucije vjerojatnosti kopula funkcije može se izraziti kao:

$$c_{U_1, U_2} = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} \quad (5)$$

Kopula C se naziva distribucija ekstremnih vrijednosti ako postoji kopula C_F takva da:

$$C_F(u_1^{1/n}, \dots, u_d^{1/n})^n \rightarrow C(u_1, \dots, u_d) \quad n \rightarrow \infty \quad (6)$$

Za sve $(u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$.

Pri problematici modeliranja ekstremnih vrijednosti potrebno je primijeniti max-stabilne distribucije i definirati ograničenja za korištene kopule [11]. Nakon izbora prikladne funkcije kopule koja ispunjava tražene uvjete, zajednička funkcija distribucije može biti izračunana [12, 13].

Najveći utjecaj na rezultate kopula funkcije ima odabir marginalnih distribucija jer ih je moguće definirati neovisno za svaku korištenu varijablu, kao i njihovu zajedničku funkciju distribucije. Najčešće korištene varijable vezane uz multivarijantnu hidrološku analizu primjenom kopula jesu maksimalni godišnji protoci vodnih valova te njihov pripadajući volumen i trajanje.

Izbor prikladne kopula funkcije je u istraživan brojnim studijama koje su rezultirale prijedlozima korištenja kopula za razne hidrološke probleme. Volpi i Fiori [2] su primijenili Gumbel-Hougaardovu kopulu za modeliranje zavisnosti između maksimalnog protoka i volumena vodnog vala. Gräler i dr. [1] su primijenili sintetizirani set podataka da bi prikazali razlike u rezultatima 2D i 3D kopula za različite kombinacije hidroloških varijabli. Xu i dr. [5] su usporedili četiri kopule iz Arhimedove obitelji kopula za određivanje projektnog hidrograma. Bender i dr. [14] su primijenili Gumbelovu kopulu za bivarijantnu analizu koincidentnih protoka na ušću, Bender i dr. [15] su nastavili istraživati bivarijantnu analizu protoka na ušćima na kojima velike vode ne koincidiraju. Szolgay i dr. [16] su procijenili primjenjivost različitih tipova kopula na zavisnost maksimalnog protoka i volumena vodnog vala za više podslivova u Austriji zajedno s analizom duljine niza korištenih podataka na rezultate kopula. Šraj i dr. [17] su usporedili tri obitelji kopula za bivarijantnu analizu učestalosti poplava za rijeku Savu u Sloveniji. Ozga-Zielinski i dr. [18] sugeriraju da za vodne valove nastale otapanjem snijega Gumbel-Hougaardova kopula daje točnije rezultate od Gaussove kopule.

Arhimedova obitelj kopula je najpoželjnija za hidrološku analizu jer je većinu njenih kopula lako konstruirati, a mogu opisati i pozitivnu i negativnu korelaciju između korištenih varijabli [17]. Prema dostupnoj literaturi, najčešće korištene jednoparametarske kopule iz Arhimedove obitelji su Gumbel-Hougaardova, Ali-Mikhail-Haqova, Frankova i Cook-Johnsonova kopula. Za Gumbel-Hougaardovu kopulu odnos Kendallovog koeficijenta i funkcije pokazuje da samo pozitivna zavisnost između varijabli može biti analizirana - maksimalni protok i volumen vodnog vala pozitivno su korelirani te se njihova zavisnost može opisati ovom kopulom [5, 19]. Trajanje vodnog vala i maksimalni protok najčešće su negativno korelirani te stoga nije primjereno upotrebljavati Gumbel-Hougaardovu kopulu za određivanje njihove zajedničke funkcije distribucije. Sve navedeno vrijedi i za Cook-Johnsonovu kopulu. Ali-Mikhail-Haqova kopula se može primijeniti i za pozitivno

i negativno korelirane varijable, ali ne u slučajevima kada se iznos Kendallovog koeficijenta približava vrlo visokim ili vrlo niskim vrijednostima. Frankova kopula se može primijeniti i za pozitivno i negativno korelirane varijable, bez obzira na iznos Kendallovog koeficijenta. Gumbel-Hougaardovu kopulu, uz to što ne dopušta negativnu zavisnost, karakterizira čvrsta zavisnost za desni rep i slaba zavisnost za lijevi rep. Ako je poznato da među varijablama postoji čvrsta zavisnost pri većim vrijednostima i relativno slaba zavisnost pri manjim vrijednostima, Gumbel-Hougaardova kopula je prikladan izbor [3]. Stoga je u ovom radu odabrana Gumbel-Hougaardova kopula za modeliranje zavisnosti između maksimalnog protoka rijeke Save i njezinih pritoka. Parametar kopule je izračunan na temelju Kendallovog koeficijenta tau.

Početni zadatak pri izgradnji bivarijatne kopule je odrediti marginalne distribucije koreliranih varijabli. Usporedba distribucije populacije maksimalnih godišnjih protoka s nekom od parametarskih distribucija može se provesti primjenom npr. hi-kvadrat testa [5] ili Anderson-Darlingovog testa [14]. Nakon određivanja marginalnih funkcija distribucije, može se pomoću kopule izračunati zajednička funkcija distribucije procijenjena primjerice na temelju Cramér-von-Misesova kriterija [15]. Primjenom prilagođenih marginalnih funkcija distribucije, podaci o protoku se transformiraju u uniformno distribuirane varijable za koje se metodom odabrane kopule računa zajednička funkcija distribucije. Nakon što se odredi zajednička funkcija distribucije, podaci se ponovno transformiraju iz uniformnih varijabli u njihovu osnovnu domenu koristeći inverznu funkciju [2]. Detaljan opis odabira marginalnih distribucija i procjena parametara kopule navode se u radu Grälera i dr. [1].

3. Predmetna dionica

Rijeka Sava nastaje spajanjem Save Dolinke i Save Bohinjke u Radovljici u Sloveniji. Nastavlja teći kroz Hrvatsku gdje tvori granicu s Bosnom i Hercegovinom te naposljetku utječe u Dunav

u Srbiji, slika 1. Rijeka Sava je desni pritok Dunava, najveći prema ukupnoj duljini (990 km) i volumenu (prosječni protok na ušću je $1564 \text{ m}^3/\text{s}$) te drugi najveći prema veličini porječja (95419 km^2). Rijeka Sava ima peripanonski kišno-snežni režim s pojavom velikih voda tijekom jeseni i zime, od kolovoza do veljače. Za analizu su odabrana dva ušća desnih pritoka rijeke Save, rijeka Kupe (rkm 576+000) i Une (rkm 500+000). Ukupna površina porječja Kupe iznosi 10605 km^2 , a površina porječja Save do ušća Kupe kod Siska iznosi 22852 km^2 . Vodni režim Kupe karakteriziraju proljetne i jesenske velike vode, u skladu s njenim kišno-snežnim režimom [20]. Rijeka Una je ukupne duljine 214 km, ukupne površine porječja 10816 km^2 , a površina porječja rijeke Save do ušća Une kod Jasenovca iznosi 38953 km^2 . Vodni režim rijeke Une je posavska varijanta kišno-snežnog režima koji karakteriziraju velike vode u travnju te ožujku, travnju, svibnju i studenom [21].

Za analizu opasnosti od poplava potrebno je raspolagati kontinuiranim zapisom protoka ili vodostaja s vodomjerne postaje koja odražava režim voda na promatranj dionici. Protoci, koji su primarni generator opasnosti od poplava, mogu se izračunati iz izmjerenih vodostaja primjenjujući kalibriranu konsumpcijsku krivulju. Analizirana ušća rijeka Kupe i Une su hidrološki izučena ušća za koja su dostupni dugi nizovi mjerenja vodostaja i protoka. Režim voda rijeke Save kod ušća Kupe prati se na VP Strelečko uzvodno od ušća i VP Crnac nizvodno, a režim voda rijeke Kupe prati se na VP Farkašić. Sve tri vodomjerne postaje mjere podatke od 1955. godine naovamo, s prekidom u razdoblju od 1991. do 2000. godine. Protok se mjeri na VP Farkašić i VP Crnac, pa su protoci na VP Strelečko izračunati oduzimanjem mjerenja s VP Farkašić od onog s VP Crnac. Režim voda rijeke Save kod ušća Une prati se na VP Jasenovac uzvodno od ušća i VP Gradiška nizvodno, a režim voda rijeke Une prati se na VP Dubica. Sve tri vodomjerne postaje mjere podatke od 1926. godine naovamo, s prekidom u razdoblju od 1991. g. do 2005. g. Rijeke Una i Kupa imaju sličan režim voda sa srednjim protokom $Q_{SR,KUPA} = 195 \text{ m}^3/\text{s}$ i $Q_{SR,UNA} = 227 \text{ m}^3/\text{s}$; i maksimalnim



Slika 1. Pregledna karta porječja rijeke Save [22]

Tablica 1. Karakteristični protoci na analiziranim vodomjernim postajama

Rijeka	Vodomjerna postaja	Udaljenost od ušća [rkm]	Karakteristični protoci	
			Q_{SR} [m ³ /s]	Q_{MAX} [m ³ /s]
Sava	Strelečko	581+000	427	1544
Kupa	Farkašić	47+150	195	1585
Sava	Crnac	575+000	622	2359
Sava	Jasenovac	500+500	781	2671
Una	Dubica	20+100	227	1808
Sava	Gradiška	453+400	792	3493

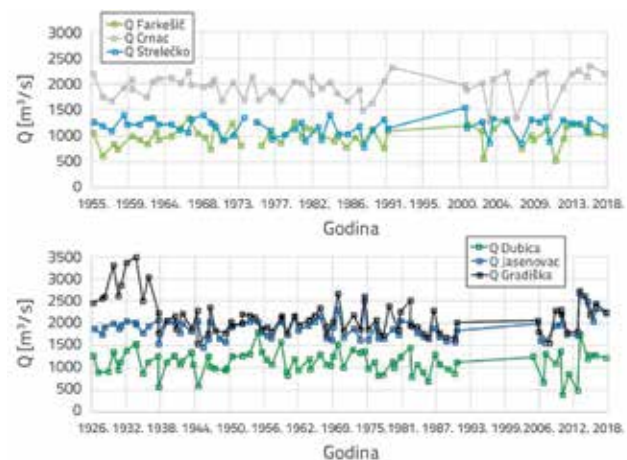
protokom $Q_{MAX,KUPA} = 1585$ m³/s i $Q_{MAX,UNA} = 1808$ m³/s. Niz mjerenja na vodomjernim postajama uz ušće Une je duži (1926.-2017.) nego uz ušće Kupe (1955.-2017.), što se može odraziti na izračunane parametre režima voda. Protok se mjeri na sve tri postaje: VP Jasenovac i VP Gradiška na rijeci Savi i VP Dubica na rijeci Uni. Karakteristični protoci, izmjereni ili izračunani, na svim vodomjernim postajama prikazani su u tablici 1.

U prethodnih deset godina zabilježen je povećan broj velikovodnih događaja na poriječju rijeke Save: 2010. godine zabilježen je najviši vodostaj nakon poplave 1964. godine; 2014. godine je na Kupi kod Karlovca izmjeren protok 100-godišnjeg povratnog razdoblja. Naposljetku, u svibnju 2014. u donjem toku rijeke Save zabilježen je protok 1000-godišnjeg povratnog razdoblja. Povećanu učestalost i intenzitet velikih voda na rijeci Savi i njenim pritocima ne može se više ignorirati, osobito nakon svibnja 2014. kada je popustio nasip nakon višednevnog trajanja velikih voda i uzrokovao katastrofalne posljedice i evakuaciju stanovništva iz više naselja. Statističkom analizom je utvrđeno da izmjereni maksimalni protok vodnog vala ($Q = 6000$ m³/s, mjereno 17. 5. 2014.) nizvodno od ušća rijeke Bosne u Savu odgovara 1000-godišnjem povratnom razdoblju [23]. Na dionici rijeke uzvodno, od Jasenovca do Slavanskog Broda, protok je odgovarao nižem, 100-godišnjem povratnom razdoblju. Postalo je očito jasno da su na poplavu 2014. najveći utjecaj imali pritoci rijeke Bosne. Iako protok rijeke Save uzvodno nije bio ekstremno, koincidencija dva vodna vala je rezultirala najvećim protokom ikad izmjerenim na rijeci Savi nizvodno od ušća rijeke Bosne. Abdulaj i dr. usporedili su teoretsku univarijatnu funkciju distribucije prilagođenu na podatke o izmjerenim protocima u vremenu duljem od 100 godina i zaključili da čak i u slučaju odabira najpovoljnije funkcije distribucije izmjereni protok odgovara 1000-godišnjoj velikoj vodi [23]. Zbog svoje nagle pojave i posljedica koje je izazvao, ovaj velikovodni događaj je potaknuo niz novih analiza i preispitivanje tradicionalnih pristupa procjeni velikih voda rijeke Save.

4. Rezultati i rasprava

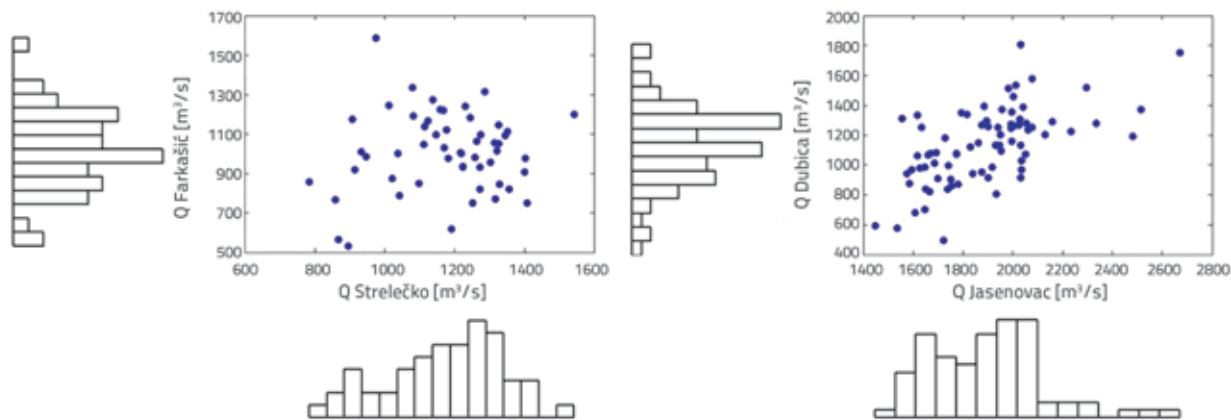
Uzevši u obzir režim voda porječja rijeke Save, očekuje se da će prilikom nailaska velikih voda doći do koincidencije vodnih valova Save i jednog ili više njezinih pritoka. Koincidencija velikih voda može posljedično uzrokovati vodni val čija će razina

nadvisiti postojeće nasipe i poplaviti branjeno područje, što je u potvrđeno u više nedavnih događaja. Koincidencija vodnih valova, analizirana u ovom radu, provedena je na podacima o maksimalnim godišnjim protocima u vremenskom nizu za cijelo razdoblje rada vodomjerne postaje (slika 2.). Parovi maksimalnih godišnjih protoka rijeke Save i njenih pritoka pokazuju da u 22 % slučajeva za ušće Kupe i 44 % slučajeva za ušće Une dolazi do koincidencije velikih voda obiju rijeka, uzevši u obzir kriterij da vremenska razlika pojave vrha vodnog vala na glavnoj rijeci i njenom pritoku nije veća od 7 dana. Relativno mala vremenska razlika pojave vodnih valova na glavnoj rijeci i njenom pritoku upućuje na opravdanost korištenja parova maksimalnih godišnjih protoka za bivarijatnu analizu učestalosti velikih voda.



Slika 2. Maksimalni godišnji protoci vodnih valova za ušće Kupe (gore) i ušće Une (dolje)

Iz vremenske serije izmjerenih maksimalnih godišnjih protoka vodnih valova za cijelo razdoblje mjerenja uočava se da maksimalni protoci rijeke Kupe ne koincidiraju često s onima rijeke Save (slike 2. i 3.). U razdoblju prije 1990. godine velike vode rijeke Save najčešće su koincidirale s malim vodama rijeke Kupe, i obratno. U razdoblju nakon 1990. maksimalni protoci dviju rijeka koincidiraju gotovo svake godine. Ovaj režim nailaska vodnih valova jasno se vidi na dijagramu rasipanja parova maksimalnih godišnjih protoka za VP Strelečko i VP Farkašić (slika 3.). Dijagram rasipanja pokazuje da bilo koji maksimalni



Slika 3. Parovi maksimalnih godišnjih protoka vodnih valova: a) ušće Kupe, b) ušće Une

godišnji protok na VP Strelečko može koincidirati s cijelim rasponom protoka na VP Farkašić, i obratno. Uzvodno od ušća Kupe obje rijeke imaju slične karakteristične protoke (Slika 2.) – veći maksimalni godišnji protoci se javljaju na Savi, no apsolutni maksimum tijekom razdoblja mjerenja je sličan za obje rijeke (tablica 1.).

Sklonost prema pojavi maksimalnih godišnjih protoka na ušću Une znatno se razlikuje od one na ušću Kupe: protoci Save i Une koincidiraju i pri velikim i malim vodama (Slika 2., Slika 3.). Najgornja desna točka na slici 3. predstavlja poplavni događaj iz 2013. godine, kada je najveći ikad zabilježeni protok na VP Jasenovac koincidirao s drugim najvećim ikad zabilježenim protokom na VP Dubica. Iako je u razdoblju od 1976. do 1982. zabilježeno nekoliko sličnih događaja, navedeni događaj je imao najveći zbrojeni protok od 1936. godine. Tijekom događaja iz 2013. vodostaj na VP Crnac uzvodno je dosegao apsolutni maksimum od uspostavljanja mjerenja, što je potaknulo postavljanje privremenih nadvišenja nasipa kako bi se spriječilo prelijevanje preko nasipa i osiguralo zaobalje od poplave. Slične je naravi i već spomenuti događaj iz 2014. kada je došlo do pucanja nasipa nizvodno od Županje, pri čemu je iste godine na VP Jasenovac zabilježen treći najveći ikad zabilježeni protok. Tada prilikom nailaska vodnog vala nije došlo do koincidencije velikih voda Save i Une, što je posljedično utjecalo na manju opasnost

od poplava nizvodno. Uzevši u obzir učestalu koincidenciju maksimalnih godišnjih protoka pri kojima se javljala potreba za privremenim mjerama nadvišenja nasipa, javlja se sumnja u opravdanost tradicionalnog pristupa određivanju opasnosti od poplava na riječnim ušćima.

4.1. Primjena tradicionalnog pristupa određivanja distribucije maksimalnih godišnjih protoka univarijatnom metodom

Na podatke o maksimalnim godišnjim protocima sa svih vodomjernih postaja prilagođene su teorijske funkcije distribucije kako bi se utvrdili protoci za karakteristična povratna razdoblja tradicionalnim pristupom uspoređujući ih s metodom kopule. Za svaki niz podataka s vodomjerne postaje prilagođene su sljedeće funkcije distribucije: lognormalna, gama, Pearsonova i Weibullova. Pri ocjenjivanju oblika distribucije populacije četiri navedene parametarske distribucije primjenjen je Kolmogorov-Smirnov (K-S) test radi provjere hipoteze da podaci o maksimalnim godišnjim protocima prate teorijsku distribuciju. Kriterij korišten u testu o obliku distribucije populacije je *p*-vrijednost na način da je definiran prag signifikantnosti za odbacivanje postavljene hipoteze o distribuciji. Ako je *p*-vrijednost veća od praga signifikantnosti ($p \geq 0,05$), odabrana

Tablica 2. Sažetak prilagođenih univarijatnih teorijskih funkcija distribucije i pripadni protoci za karakteristična povratna razdoblja

Vodomjerna postaja	Prilagođena distribucija	<i>p</i> -vrijednost	Q ^{PR} [m ³ /s]					Q _{MAX} [m ³ /s]	
			Q ⁵⁰	Q ¹⁰⁰	Q ²⁰⁰	Q ⁵⁰⁰	Q ¹⁰⁰⁰	Izmjereno	Povratno razdoblje [godina]
Strelečko	gama	0,58	1547	1603	1655	1720	1766	1544	48
Farkašić	gama	0,18	1475	1548	1617	1703	1765	1585	145
Crnac	gama	0,11	2507	2591	2669	2765	2834	2359	17
Jasenovac	lognormalna	0,18	2405	2485	2561	2655	2724	2671	585
Dubica	gama	0,10	1767	1871	1970	2094	2184	1808	65
Gradiška	lognormalna	0,56	3093	3250	3402	3595	3737	3493	306

teorijska distribucija dobro opisuje podatke o protocima. K-S test pokazuje da hipoteza ne može biti odbačena na 5-postotnoj razini signifikantnosti za sve prilagođene distribucije te su one s najvećom p -vrijednošću odabrane za opis podataka. Rezultati K-S testa su prikazani u tablici (tablica 2.) samo za odabrane distribucije, zajedno s pripadajućim karakterističnim protocima za raspon povratnih razdoblja. Protoci za odabrana povratna razdoblja izračunani su kao recipročna vrijednost vjerojatnosti prekoračenja protoka.

Distribucija maksimalnih godišnjih protoka prati gama ili lognormalnu distribuciju na svim vodomjernim postajama, no s različitim vrijednostima parametara distribucije za svaku postaju. Maksimalni protoci rijeke Kupe i rijeke Save uzvodno od ušća Kupe prate slične teorijske distribucije, što je očekivano uzevši u obzir sličnost njihovog režima voda. Na VP Crnac su godišnji maksimalni protoci grupirani u uskom području što čini njihovu teorijsku distribuciju uskom, dok je istovremeno nekolicina godišnjih maksimalnih protoka manjeg iznosa ($<1900 \text{ m}^3/\text{s}$) pomiče ulijevo. Takvo grupiranje protoka rezultira relativno niskom procjenom protoka velikih povratnih razdoblja. Kada se za maksimalni ikad izmjereni protok Q_{MAX} iz teorijske funkcije distribucije izračuna povratno razdoblje, dobije se da je ono samo 17 godina (tablica 2.). Režim rijeke Save uzvodno od ušća na VP Strelečko pokazuje slične karakteristike za čiji je Q_{MAX} povratno razdoblje 48 godina, dok je povratno razdoblje za Q_{MAX} rijeke Kupe 145 godina. Za razliku od ušća Kupe, na ušću Une maksimalni godišnji protoci rijeke Save prate lognormalnu distribuciju, a protoci rijeke Une prate gama distribuciju (tablica 2.). Maksimalni godišnji protoci rijeke Une usko su grupirani, s malim brojem nižih vrijednosti protoka, a maksimalni godišnji protoci rijeke Save prate teorijsku distribuciju s vrlo velikim protocima na repu distribucije. Kada se za maksimalni ikad izmjereni protok Q_{MAX} iz teorijske funkcije distribucije izračuna povratno razdoblje, dobije se značajna razlika: 585 godina za rijeku Savu i 65 godina za rijeku Unu, što odražava razlike prilagođenih funkcija distribucije. Za VP Gradiška nizvodno povratno razdoblje Q_{MAX} je usporedivo s VP Jasenovac i iznosi 306 godina. Ovi rezultati potvrđuju analizu koincidencije maksimalnih godišnjih protoka vodnih valova kojom je pokazano da često koincidiraju, pomičući histogram izmjerenih podataka prema repu distribucije.

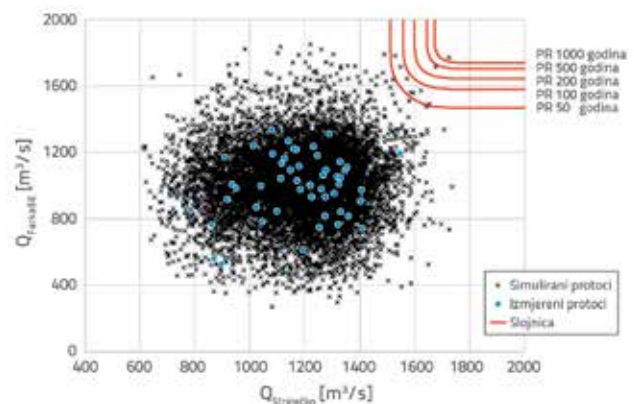
4.2. Zajednička funkcija distribucije maksimalnih godišnjih protoka izračunana Gumbel-Hougaardovom kopulom

Gumbel-Hougaardova kopula primjenjena je za određivanje zajedničke funkcije distribucije maksimalnih godišnjih protoka u svrhu izračuna zajedničkog povratnog razdoblja premašenja za parove protoka na razmatranim ušćima pri koincidenciji vodnih valova na glavnoj rijeci i pritoku. Za analizu su odabrani maksimalni godišnji protoci rijeke Save i pritoka iz niza mjerenja na vodomjernim postajama. Kao što je pokazano u prethodnom

poglavlju, maksimalni godišnji protoci rijeke Save ne koincidiraju uvijek s onima rijeke Kupe, dok s onima rijeke Une u pravilu koincidiraju sve češće (slika 3.). Prethodna analiza je provedena na parovima maksimalnih godišnjih protoka, bez utvrđivanja jesu li maksimalni godišnji protoci rijeke Save i pritoka za pojedinu godinu posljedica istoga hidrološkog događaja ili različitih hidroloških događaja. Korelacija između parova maksimalnih godišnjih protoka rijeke Save i pritoka procijenjena je primjenom Kendallovog neparametarskog koeficijenta korelacije, koji ne ovisi o distribuciji varijabli i nije osjetljiv na netipične vrijednosti parova podataka. Rezultati pokazuju da postoji pozitivna veza između protoka rijeke Save i pritoka za oba ušća: Kendallov tau iznosi 0,07 za parove protoka na ušću Kupe (Strelečko-Farkašić) i 0,40 za parove protoka na ušću Une (Jasenovac-Dubica).

Zajedničko povratno razdoblje korespondentnih maksimalnih godišnjih protoka na razmatranim ušćima na Savi izračunano je pomoću Gumbel-Hougaardove kopule koja je u dostupnoj literaturi okarakterizirana kao jedina max-stabilna Arhimedova kopula [11, 12, 24]. Slojnice zajedničke kumulativne funkcije distribucije maksimalnih godišnjih protoka koje predstavljaju zajedničko povratno razdoblje, prikazane su na slikama 4. i 5. za ušće Kupe i Une. Zajedničko povratno razdoblje izračunano pomoću kopule može poslužiti za izračun opasnosti od poplave za niz kombinacija velikih voda, uzimajući u obzir istovremeno premašenje koincidentnih protoka na riječnom paru.

Na slici 4. je za ušće Kupe prikazan dijagram rasipanja parova izmjerenih maksimalnih godišnjih protoka i 10000 simuliranih parova protoka pomoću modela kopule zajedno sa slojnicama zajedničkog povratnog razdoblja maksimalnih godišnjih protoka. Vidljiv je trend gdje se vrijednost uvjetne funkcije distribucije maksimalnih godišnjih protoka prilikom povećanja na jednoj rijeci smanjuje na drugoj. Takva korelacija maksimalnih godišnjih protoka pokazuje da je vjerojatnost istovremenog prekoračenja ekstremnih protoka na obje rijeke manja od vjerojatnosti prekoračenja ekstremnog protoka na samo jednoj od rijeka.



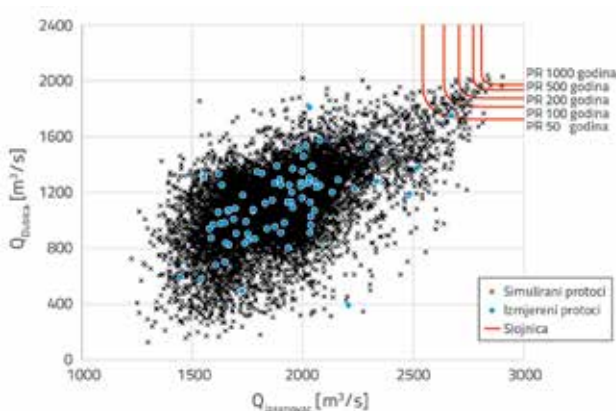
Slika 4. Dijagram rasipanja izmjerenih parova maksimalnih godišnjih protoka i parova protoka simuliranih iz modela kopule za ušće Kupe

Na slici 5. za ušće Une prikazan je dijagram rasipanja parova izmjerenih i simuliranih protoka zajedno sa slojnicama analogan

Tablica 3. Usporedba karakterističnih protoka izračunanih univarijatnom funkcijom distribucije i kopulom

Q^{PR} [m ³ /s]	Ušće Kupe VP Crnac			Ušće Une VP Gradiška		
	Univarijatna	Kopula	Razlika [%]	Univarijatna	Kopula	Razlika [%]
Q^{50}	2507	3338	+33	3093	4627	+50
Q^{100}	2591	3385	+30	3250	4717	+45
Q^{1000}	2834	3502	+24	3737	4878	+31

onom za ušće Kupe. Rezultati se znatno razlikuju od onih za ušće Kupe (slika 4). To je posljedica značajne razlike u marginalnim distribucijama protoka Save i Une, što nije slučaj na ušću Kupe gdje Sava i Kupa imaju sličan režim voda i posljedično distribucije maksimalnih godišnjih protoka.



Slika 5. Dijagram rasipanja izmjerenih parova maksimalnih godišnjih protoka i parova protoka simuliranih iz modela kopule za ušće Une

U tablici 3 je prikazana usporedba maksimalnih godišnjih protoka na ušćima rijeke Save, izračunanih pomoću tradicionalne univarijatne metode s onima izračunanim bivarijatnom kopulom. U tradicionalnom pristupu protok zadanog povratnog razdoblja izračunan je kao recipročna vrijednost vjerojatnosti premašenja iz kumulativne funkcije distribucije. Protok izračunan metodom kopule može biti jedna od beskonačnih kombinacija protoka glavne rijeke i pritoka duž slojnice koja predstavlja njihovo zajedničko povratno razdoblje. Za hidrološki problem opasnosti od poplava na ušću je mjerodavan ekstremni scenarij, pa su zato iz modela kopule izračunane vrijednosti najvećega zbrojenog protoka rijeke Save i njenog pritoka. Protoci izračunani metodom kopule znatno su veći od onih izračunanih univarijatnom metodom. Uzevši u obzir da do koincidencije maksimalnih protoka rijeke Save i njenih pritoka ne dolazi redovito svake godine, što se odražava na podatke snimljene na vodomjernim postajama nizvodno od ušća, ovakav je ishod očekivan. Na ušću Kupe protok izračunan modelom kopule je veći u odnosu na tradicionalnu metodu u rasponu od 33 % do 24 % za 50-godišnje povratno razdoblje, odnosno

1000-godišnje povratno razdoblje. Oblik zajedničke funkcije distribucije za ušće Kupe nalikuje nagnutoj ravlini što u konačnici rezultira linearnim povećanjem protoka u odnosu na protoke istovjetnog povratnog razdoblja izračunane tradicionalnom metodom. Na ušću Une protok izračunan modelom kopule je veći u odnosu na tradicionalnu metodu u rasponu od 50 % do 31 % za 50-godišnje povratno razdoblje, odnosno 1000-godišnje povratno razdoblje. Zajednička funkcija distribucije za ušće Une ima veću zakrivljenost nego ona za ušće Kupe, pa su razlike u protocima u odnosu na tradicionalnu metodu nelinearne. Usporedimo li maksimalni protok vodnog vala izmjeren 2014. godine s prilagođenim funkcijama distribucije [23], on je veći od očekivanog u rasponu od 25 % do 66 %, ovisno o promatranoj distribuciji. Analizom navedenog hidrološkog događaja iz 2014. na nizvodnom potezu rijeke Save kod ušća rijeke Drine, koristeći kumulativnu funkciju raspodjele dvodimenzionalne slučajne varijable, Prohaska i Ilić su zaključili da je vjerojatnost koincidencije izmjerenih protoka 2000-godišnja velika voda [25]. Usvojimo li stoga pretpostavku da je navedeni hidrološki događaj vodni val 1000-godišnjeg povratnog razdoblja na potezu rijeke Save gdje je došlo do proboja nasipa, može se tvrditi da bi se on mogao predvidjeti ako se za analizu opasnosti od poplava primjeni predloženi pristup kopula za proračun koincidencije vodnih valova na riječnim ušćima.

5. Zaključak

Provedenim istraživanjem pokazano je da opasnost od poplava na rijeci Savi može biti podcijenjena ako se primjenjuje tradicionalni univarijatni pristup. Pojava katastrofalne poplave 2014. godine dodatno je potvrdila ekstremne uvjete koji nastaju u slučaju koincidencije velikih voda rijeke Save i njenih pritoka, čak i kada protok Save nije uzrokovan rijetkim događajem. U ovom radu primjenjene su mogućnosti modela kopule za modeliranje hidroloških varijabli u bivarijatnoj analizi učestalosti velikih voda. Za analizu je korištena Gumbel-Hougaardova kopula na parovima maksimalnih godišnjih protoka rijeke Save i njenih pritoka. Rezultati pokazuju da su protoci izračunani metodom kopule znatno veći od onih izračunanih tradicionalnom univarijatnom metodom. Uzevši u obzir da do koincidencije maksimalnih protoka rijeke Save i njenih pritoka ne dolazi redovito svake godine, što se odražava na podatke snimljene na vodomjernim postajama

nizvodno od ušća, takav je ishod očekivan. Rezultati pokazuju da u usporedbi s mjerenim podacima, predloženi pristup metode kopule daje točniju procjenu poplavnog događaja od tradicionalne univarijantne metode. Stoga se može tvrditi kako se protok vodnog vala 2014. godine mogao predvidjeti da se je za analizu opasnosti od poplava primijenio predloženi pristup kopula za proračun koincidencije vodnih valova na riječnim

ušćima. Bivarijantni model kopule se može uspješno primijeniti na riječnim dionicama gdje je prisutna znatna neujednačenost u režimu voda, ili gdje na intenzitet vodnog vala utječe više varijabli kao što je slučaj na riječnim ušćima. Na ušćima marginalne distribucije protoka dviju rijeka rijetko prate sličnu distribuciju, što čini model kopule posebno korisnim za procjenu opasnosti od poplava.

LITERATURA

- [1] Gräler, B., van den Berg, M. J., Vandenbergh, S., et al.: Multivariate return periods in hydrology: a critical and practical review focusing on synthetic design hydrograph estimation, *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 17 (2013), pp. 1281-1296, <https://doi.org/10.5194/hess-17-1281-2013>
- [2] Volpi, E., Fiori, A.: Design event selection in bivariate hydrological frequency analysis, *Hydrological Sciences Journal - Journal des Sciences Hydrologiques*, 57 (2012) 8, pp. 1506-1515.
- [3] Wang, C.: A joint probability approach for the confluence flood frequency analysis, Iowa State University, 2007.
- [4] Yue, S., Rasmussen P.: Bivariate frequency analysis: discussion of some useful concepts in hydrological application, *Hydrological Processes*, 16 (2002), pp. 2881-2898, <https://doi.org/10.1002/hyp.1185>
- [5] Xu, C., Yin, J., Guo, S., Liu, Z., Hong, X.: Deriving Design Flood Hydrograph Based on Conditional Distribution: A Case Study of Danjiangkou Reservoir in Hanjiang Basin, *Mathematical Problems in Engineering*, (2016), Article ID 4319646, 16 pages.
- [6] Klein, B., Pahlow M., Hundecha, Y., Schumann, A.: Probability Analysis of Hydrological Loads for the Design of Flood Control Systems Using Copulas, *Journal of Hydrologic Engineering*, 15 (2010) 5, pp. 360-369.
- [7] Papaioannou, G., Kohnová, S., Bacigál, T., Szolgay, J., Hlavčová, K., Loukas, A.: Joint modelling of flood peaks and volumes: A copula application for the Danube River, *J. Hydrol. Hydromech.*, 64 (2016) 4, pp. 382-392.
- [8] Requena, A. I., Mediero, L., Garrote, L.: A bivariate return period based on copulas for hydrologic dam design: accounting for reservoir routing in risk estimation, *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 17 (2013), pp. 3023-3038, <https://doi.org/10.5194/hess-17-3023-2013>
- [9] Ilić, A., Prohaska, S.: Multiple Coincidence of Flood Waves in Complex River Systems, *Water & Environmental Dynamics - 6th International Conference on Water Resources and Environment Research*, Koblenz, Germany, pp. 94-113, 2013.
- [10] Dung, N. V., Merz, B., Bárdossy, A., Apel H.: Handling uncertainty in bivariate quantile estimation - An application to flood hazard analysis in the Mekong Delta, *Journal of Hydrology*, 527 (2015), pp. 704-717, <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2015.05.033>
- [11] Ribatet, M., Sedki, M.: Extreme value copulas and max-stable processes, *Journal of Société Française de Statistique (special edition on copulas)*, 153 (2012) 3, pp. 138-150.
- [12] Fan, Y. R., Huang, W. W., Huang, G. H., Li Y. P., Huang, K., Li Z.: Hydrologic risk analysis in the Yangtze River basin through coupling Gaussian mixtures into copulas, *Advances in Water Resources*, 88 (2016), pp. 170-185, <https://doi.org/10.1016/j.adwatres.2015.12.017>
- [13] Volpi, E., Fiori, A.: Hydraulic structures subject to bivariate hydrological loads: Return period, design, and risk assessment, *Water Resources Research*, 50 (2014), pp. 885-897, <https://doi.org/10.1002/2013WR014214>
- [14] Bender, J., Wahl, T., Mundersbach, C., Jensen, J.: Flood Frequency Analysis at River Confluences - Univariate vs. Multivariate Extreme Value Statistics, *Water & Environmental Dynamics - 6th International Conference on Water Resources and Environment Research*, Koblenz, Germany, pp. 316-328, 2013.
- [15] Bender, J., Wahl, T., Müller, A., Jensen, J.: A multivariate design framework for river confluences, *Hydrological Sciences Journal - Journal des Sciences Hydrologiques*, 61 (2016) 3, pp. 471-482.
- [16] Szolgay, J., Gaál, L., Bacigál, T., et al.: A regional comparative analysis of empirical and theoretical flood peak-volume relationships, *Journal of hydrology and hydromechanics*, 64 (2016) 4, pp. 367-381.
- [17] Sraj, M., Bezak, N., Brilly, M.: Bivariate flood frequency analysis using the copula function: a case study of the Litija station on the Sava River, *Hydrol. Process.*, 29, pp. 225-238, 2015, <https://doi.org/10.1002/hyp.10145>
- [18] Ozga-Zielinski, B., Ciupak, M., Adamowski, J., Khalil, B., Malard, J.: Snow-melt flood frequency analysis by means of copula based 2D probability distributions for the Narew River in Poland, *Journal of Hydrology: Regional Studies*, 6 (2016), pp. 26-51, <https://doi.org/10.1016/j.ejrh.2016.02.001>
- [19] Li, T., Guo, S., Liu, Z., Xiong, L., Yin, J.: Bivariate design flood quantile selection using copulas, *Hydrology Research*, (2016), Article ID nh2016049, 17 pages.
- [20] Čanjevac, I.: Tipologija protočnih režima rijeka u Hrvatskoj, *Hrvatski geografski glasnik*, 75 (2013) 1, pp. 23-42.
- [21] Korjenić, A.: Basic characteristics water regime and water balance of the river Una, *Acta geographica Bosniae et Herzegovinae*, 2 (2014), pp. 65-75.
- [22] ISRBC: Sava River Basin Analysis Summary, International Sava River Basin Commission, Zagreb, Croatia, 2010.
- [23] Abdulaj, R., Miković, N., Oskoruš, D., Vujnović, T.: Velike vode donjeg toka rijeke Save tijekom svibnja 2014., *Hrvatska vodoprivreda*, 207 (2014), pp. 14-17.
- [24] Klein, B., Pahlow, M., Gattke, C., Hundecha, Y., Schumann, A.: Probabilistic analysis of hydrological loads to optimize the design of flood control systems, 4th International Symposium on Flood Defence: Managing Flood Risk, Reliability and Vulnerability, Toronto, Canada, 2008.
- [25] Prohaska, S., Ilić, A.: Koincidencija velikih voda Save i Drine, *Hrvatske vode*, 24 (2016) 95, pp. 1-18.