

# Čvrstoća polimernog laminata pri složenom opterećenju

---

Lacković, Vesna; Krolo, Joško; Ožbolt, Joško

Source / Izvornik: **Građevinar, 2011, 63, 25 - 34**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:239230>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-13**

Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)



# Čvrstoća polimernog laminata pri složenom opterećenju

Vesna Lacković, Joško Krolo, Joško Ožbolt

## Ključne riječi

polimer,  
polimerni laminat,  
ojačanje vlaknima,  
modeliranje,  
čvrstoća laminata,  
ekvivalentno naprezanje,  
staklena vlakna

## Key words

polymer,  
polymer laminate,  
fibre strengthening,  
modelling,  
laminata strength,  
equivalent stress,  
glass fibres

## Mots clés

polymère,  
stratifié de polymère,  
renforcement par fibres,  
modélisation,  
résistance de stratifié,  
contrainte équivalente,  
fibres de verre

## Ключевые слова

полимер,  
полимерный ламинат,  
усиление волокнами,  
моделирование,  
прочность ламината,  
эквивалентное  
напряжение,  
стеклянные волокна

## Schlüsselworte

Polymer,  
Polymerlaminat,  
Verstärkung mit Fasern,  
Modellieren,  
Festigkeit des Laminats,  
äquivalente Spannung,  
Glasfasern

V. Lacković, J. Krolo, J. Ožbolt

Izvorni znanstveni rad

## Čvrstoća polimernog laminata pri složenom opterećenju

U radu je istaknuto da je postupak modeliranja i predviđanja čvrstoće vlaknima ojačanih polimernih laminata, zbog njihove anizotropije vrlo složen. Teškoće su osobito izražene u predviđanju ekvivalentnog naprezanja, odnosno čvrstoće laminata pri složenom opterećenju. Prikazan je model određivanja čvrstoće pri složenom opterećenju staklenim vlaknima ojačanog polimera. Postupak je moguće primijeniti za proračun čvrstoće polimernih laminata, bez obzira na vrstu matrice i vlakna.

V. Lacković, J. Krolo, J. Ožbolt

Original scientific paper

## Strength of polymer laminate subjected to complex testing

It is emphasized that the modelling of fibre-reinforced polymer laminates, and prediction of their strength, is a highly complex task namely because of their anisotropy. Difficulties are especially pronounced in the prediction of equivalent stress, i.e. the strength of laminate when subjected to complex load. The model for defining the strength of glass-fibre reinforced polymers subjected to complex load is presented. The procedure can be applied in the analysis of strength of polymer laminates, regardless of the type of matrix and fibre.

V. Lacković, J. Krolo, J. Ožbolt

Ouvrage scientifique original

## Résistance du stratifié de polymère soumis à l'essai complexe

Il est souligné que la modélisation des stratifiés de polymère renforcés par fibres, et la prédiction de leur résistance, est tout à fait complexe à cause de leur anisotropie. Les difficultés sont surtout prononcées dans la prédiction de la contrainte équivalente, c'est-à-dire de la résistance du stratifié quand il est soumis à une charge complexe. Le modèle visant à définir la résistance à une charge complexe des polymères renforcés par fibres de verre est présenté. La procédure peut être appliquée dans l'analyse de résistance des stratifiés de polymère, quel que soit le type de matrice et de fibre.

В. Лацкович, Й. Кроло, Й. Ожболт

Оригинальная научная работа

## Прочность полимерного ламината при сложной нагрузке

В работе указывается, что процедура моделирования и прогнозирования прочности полимерных ламинатов, усиленных волокнами, из-за их анизотропии является очень сложной. Особые трудности появляются при прогнозировании эквивалентного напряжения и прочности ламината при сложной нагрузке. Приведена модель определения прочности при сложной нагрузке на полимер, усиленный стеклянными волокнами. Процедура может быть применена для расчета прочности полимерных ламинатов независимо от вида матрицы и волокна.

V. Lacković, J. Krolo, J. Ožbolt

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

## Festigkeit von Polymerlaminat bei zusammengesetzter Belastung

Im Artikel wird hervorgehoben dass das Verfahren des Modellierens und des Vorhersehens der Festigkeit von faserverstärkten Polymerlaminaten wegen deren Anisotropie sehr kompliziert ist. Die Schwierigkeiten sind beim Vorhersehen der äquivalenten Spannung, bzw. der Festigkeit der Laminata bei zusammengesetzter Belastung besonders ausgedrückt. Dargestellt ist ein Modell der Festigkeitsbestimmung von mit Glasfasern verstärktem Polymer bei zusammengesetzter Belastung. Das Verfahren ist anwendbar für die Festigkeitsberechnung von Polymerlaminaten, ohne Rücksicht auf die Art der Matrix und der Fasern.

Autori: Dr. sc. **Vesna Lacković**, dipl. ing. fiz., Institut IGH d.d., Zagreb; prof. dr. sc. **Joško Krolo**, dipl. ing. grad., Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet, Zagreb; prof. dr. sc. **Joško Ožbolt**, dipl. ing. grad., Institute of Construction Materials, University of Stuttgart, Germany & Institut IGH d.d., Zagreb

## 1 Uvod

Vlaknima ojačani polimerni laminati su kompozitni materijali s izraženom anizotropijom, no najčešće su ortotropni [7, 10]. Zbog različitosti mehaničkih svojstava u svim smjerovima, kod analize njihova ponašanja pri složenom opterećenju potrebno je eksperimentalno odrediti osnovna mehanička svojstva u karakterističnim smjerovima [3, 9] i prema rezultatima eksperimenata odabrati i prilagoditi odgovarajući kriterij čvrstoće za ocjenjivanje graničnog stanja (popuštanja ili sloma) u elementu materijala. Nakon toga se odabrani kriterij čvrstoće, ako je moguće izvesti eksperiment složenog opterećenja, provjerava na modelima na kojima je moguće kontroliranim opterećenjem postići složeno stanje naprezanja.

U ovom je radu prikazano određivanje ekvivalentnog naprezanja vlaknima ojačanog polimera određene matrice (poliester) i disperzne faze (staklena vlakna) preko polinomnog kriterija čvrstoće. Nakon toga je eksperimentalno, pokusom složenog opterećenja elementa cijevnoga oblika potvrđen način predviđanja ponašanja anizotropnog kompozita pri složenom opterećenju.

Polinomni kriterij, proizašao iz Goldenblat – Kopnovljeve teorije čvrstoće, jedan je od malobrojnih postojećih kriterija, koji uzima u obzir specifičnosti materijala i vlačna, tlačna i posmična naprezanja, za različite smjerove vlakana u odnosu na opterećenje. Različitost svojstava uvjetovana je strukturom i količinom vlakana u kompozitu.

Ekvivalentno naprezanje određivano je eksperimentalno i numerički. Eksperimentalno i analitički su obrađena dva materijala različitih obujamskih udjela vlakana u kompozitu. U prvom koraku ispitane su tlačne i vlačne čvrstoće za smjerove vlakana okomito, paralelno i za kutove  $30^{\circ}$ ,  $45^{\circ}$  i  $60^{\circ}$  prema smjeru jednoosnog opterećenja. Također su ispitane posmične čvrstoće uzoraka za navedene smjerove vlakana prema opterećenju i posmične čvrstoće u ravninama jednako nagnutim k osnovnim smjerovima (dijagonalnim ravninama). Postupak se odnosio na materijal s vlaknima usmjerenim usporedno s glavnom osi anizotropije  $L(x)$ .

U drugom koraku, uvrštavanjem eksperimentalno dobivenih vrijednosti čvrstoća pri jednoosnim pokusima te eksperimentalno određenih posmičnih čvrstoća u polinomni kriterij, proračunano je relativno ekvivalentno naprezanje kompozitnog materijala, odnosno kriterij čvrstoće materijala koji su bili označeni oznakama E i F. Dobiveni su izrazi praktično primjenjivi za procjenu ponašanja elementa materijala pri složenom opterećenju za različite kombinacije djelovanja glavnih naprezanja pri ravninskom stanju naprezanja [2].

Alternativa teorijskom modelu su financijski i vremenski zahtjevnija eksperimentalna istraživanja elemenata na

kojima je moguće postići složeno stanje naprezanja [1]. U radu je opisan eksperiment dvoosnog opterećivanja cijevi od vlaknima ojačanog polimernog kompozita, uz provjeru relativnoga ekvivalentnog naprezanja za dva smjera opterećenja prema smjeru vlakana od  $30^{\circ}$  i  $45^{\circ}$  od materijala s većim udjelom vlakana u kompozitu (E) i od materijala s manjim udjelom vlakana u kompozitu (F). Uvrštavanjem eksperimentalno dobivenih glavnih naprezanja u kriterij čvrstoće proračunani su koeficijenti sigurnosti za cijevi pri istodobnom opterećivanju torzijom i savijanjem.

## 2 Polinomni kriterij čvrstoće

Teorijska analiza i proračun čvrstoće elementa materijala temeljili su se na već spomenutom polinomnom kriteriju čvrstoće, proizašlom iz Goldenblat – Kopnovljeve teorije.

### 2.1 Teorijske pretpostavke modeliranja ekvivalentne čvrstoće

Goldenblat - Kopnovljeva teorija [3] pripada teorijama čvrstoće II. grupe. Iz te je teorije u novije vrijeme proizašlo nekoliko kriterija [6, 8]. Za analizu ponašanja anizotropnih polimernih kompozita ovdje je odabran polinomni kriterij, zbog mogućnosti uzimanje u obzir anizotropije materijala.

Kriterij se može jednostavno izraziti u obliku polinoma od tenzora čvrstoće raznih redova i komponentata tenzora naprezanja svakog smjera. Taj je kriterij pogodan za ocjenu graničnog stanja naprezanja anizotropnih materijala s različitim čvrstoćama pri tlaku i tlaku i svakom smjeru, a također s različitom posmičnom čvrstoćom u ovisnosti o smjeru tangencijalnih naprezanja u svakoj danoj ravnini.

Kriterij u najopćenitijem obliku glasi:

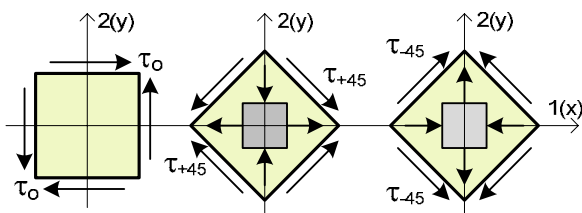
$$\left(\Pi_{ik} \cdot \sigma_{ik}\right)^{\alpha} + \left(\Pi_{pqmn} \cdot \sigma_{pq} \cdot \sigma_{mn}\right)^{\beta} + \left(\Pi_{rstlmn} \cdot \sigma_{rs} \cdot \sigma_{tl} \cdot \sigma_{mn}\right)^{\gamma} + \dots \leq 1 \quad (1)$$

gdje su  $\Pi_{ik}$ ,  $\Pi_{pqmn}$ ,  $\Pi_{rstlmn}$ , ... tenzori čvrstoće drugoga, četvrtoga, ... reda, koji ne ovise o polju naprezanja,  $\sigma_{ik}$ ,  $\sigma_{pq}$ , ... su komponente tenzora naprezanja u tijelu, a  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  su pozitivni realni eksponenti (bezdimenzijske konstante). Autori ove teorije preporučuju  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1/2$  i  $\gamma = 1/3$ .

Uz ograničenje na linearni i kvadratni član od komponentata tenzora naprezanja, kriterij čvrstoće (1) može se napisati u sljedećem obliku:

$$\Pi_{ik} \cdot \sigma_{ik} + \sqrt{\Pi_{pqrs} \cdot \sigma_{pq} \cdot \sigma_{rs}} \leq 1. \quad (2)$$

Ako se ograničimo samo na ravninsko stanje napreznja bit će:  $i, k, p, q, r, s = 1(x), 2(y)$ . Tenzori čvrstoće  $\Pi_{ik}$  i  $\Pi_{pqrs}$  mogu se tada izraziti pomoću čvrstoće na vlak i tlak u prvom i drugom osnovnom smjeru, posmičnom čvrstoćom u osnovnim smjerovima  $\tau_0$  i posmičnom čvrstoćom u ravninama jednako nagnutim k osnovnim smjerovima (dijagonalnim ravninama)  $\tau_{xy}^{+45}$  i  $\tau_{xy}^{-45}$ . Na slici 1. prikazane su: posmična čvrstoća  $\tau_0$ , posmična čvrstoća pod kutom  $+45^\circ$  ( $\tau_{xy}^{+45}$ ) i posmična čvrstoća pod kutom  $-45^\circ$  ( $\tau_{xy}^{-45}$ ). Os  $1(x)$  uvijek se bira u smjeru veće čvrstoće.



Slika 1. Posmična čvrstoća anizotropnog materijala

Tenzori čvrstoće  $\Pi_{ik}$  i  $\Pi_{pqrs}$  i komponente kritičnih napreznja povezani su sljedećim izrazima:

$$\Pi_{11} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{\sigma_{xv}} - \frac{1}{\sigma_{xt}} \right),$$

$$\Pi_{22} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{\sigma_{yv}} - \frac{1}{\sigma_{yt}} \right), \Pi_{12} = 0 \quad (3)$$

$$\Pi_{1111} = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{\sigma_{xv}} + \frac{1}{\sigma_{xt}} \right)^2, \quad \Pi_{2222} = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{\sigma_{yv}} + \frac{1}{\sigma_{yt}} \right)^2 \quad (4)$$

$$\Pi_{1122} = \frac{1}{8} \cdot \left[ \left( \frac{1}{\sigma_{yv}} + \frac{1}{\sigma_{yt}} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sigma_{xv}} + \frac{1}{\sigma_{xt}} \right)^2 - \left( \frac{1}{\tau_{xy}^{+45}} + \frac{1}{\tau_{xy}^{-45}} \right)^2 \right] \quad (5)$$

$$\Pi_{1212} = \frac{1}{8 \cdot \tau_0^2}, \quad (6)$$

gdje su:

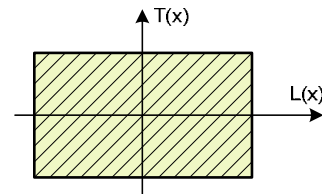
$\sigma_{xv}, \sigma_{xt}$  - vlačna i tlačna čvrstoća u osnovnom smjeru x

$\sigma_{yv}, \sigma_{yt}$  - vlačna i tlačna čvrstoća u osnovnom smjeru y

$\tau_{xy}^{+45}$  i  $\tau_{xy}^{-45}$  - posmične čvrstoće pod kutovima  $+45^\circ$  i  $-45^\circ$

$\tau_0$  - posmična čvrstoća u osnovnim smjerovima.

Za ravninsko stanje napreznja pretpostavlja da je  $\tau_0 = 0$ . Osnovni smjerovi x i y su ujedno smjerovi glavnih osi anizotropije L i T, gdje vlakna osnovnog sloja laminata mogu biti pod bilo kojim kutom od  $0^\circ$  do  $90^\circ$  prema osima anizotropije (slika 2.).



Slika 2. Glavne osi anizotropije

Važno je napomenuti da se postupak predviđanja ekvivalentne čvrstoće odnosi na jedan smjer vlakana u odnosu na osi anizotropije. U ovom radu on je opisan za smjer vlakana usporedno s osi anizotropije L(x), za materijal prema slici 8.

Vrijednosti komponenta napreznja tenzora čvrstoće  $\Pi_{1112}$  i  $\Pi_{2221}$ , kod prostornog stanja napreznja, određuju se eksperimentalno, primjerice kod istovremenog opterećenja uzorka na vlak i posmik. Ostale komponente tenzora čvrstoće nalazimo iz uvjeta simetrije:

$$\Pi_{ik} = \Pi_{ki}, \quad \Pi_{pqrs} = \Pi_{qprs}, \quad \Pi_{pqrs} = \Pi_{pqsr}, \quad \Pi_{pqrs} = \Pi_{rspq} \quad (7)$$

Goldenblat – Kopnovljev kriterij čvrstoće (2) za ravninsko stanje napreznja u razvijenom obliku glasi:

$$\Pi_{11} \cdot \sigma_x + \Pi_{22} \cdot \sigma_y + \sqrt{(\Pi_{1111} \cdot \sigma_x^2 + \Pi_{2222} \cdot \sigma_y^2 + 2\Pi_{1122} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y + 4 \cdot \Pi_{1212} \cdot \tau_{xy}^2)} \leq 1 \quad (8)$$

U slučaju ravninskog stanja napreznja, kada se osi glavnih napreznja poklapaju s osima anizotropije materijala:  $\sigma_1 = \sigma_x, \sigma_2 = \sigma_y$  i  $\tau_{12} = 0$ , kriterij čvrstoće (2) u razvijenom obliku jest:

$$\Pi_{11} \cdot \sigma_1 + \Pi_{22} \cdot \sigma_2 + \sqrt{(\Pi_{1111} \cdot \sigma_1^2 + \Pi_{2222} \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot \Pi_{1122} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2)} \leq 1 \quad (9)$$

Poznavajući komponente tenzora čvrstoće  $\Pi_{ik}$  i  $\Pi_{pqrs}$  u osnovnom koordinatnom sustavu koji se podudara s osima anizotropije, mogu se jednostavno odrediti kritična napreznja u proizvoljnom koordinatnom sustavu zarotiranom u odnosu na osnovni koordinatni sustav. Transformacija komponenta tenzora čvrstoće  $\Pi_{ik}$  i  $\Pi_{pqrs}$  provodi se prema zakonima tenzorskog računa za transformiranje komponenta tenzora drugog odnosno četvrtoga reda:

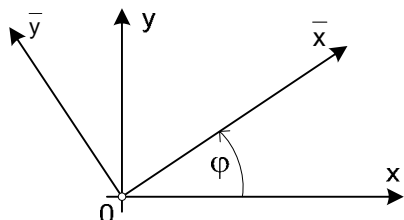
$$\Pi_{ik} = \alpha_{ip} \cdot \alpha_{pq} \cdot \Pi_{pq} \quad (10)$$

$$\Pi_{pqrs} = \alpha_{pi} \cdot \alpha_{qp} \cdot \alpha_{rm} \cdot \alpha_{sn} \cdot \Pi_{ikmn}, \quad (11)$$

gdje su  $\alpha_{ip}$ ,  $\alpha_{pq}$ , ..., kosinusi kutova između osi osnovnog i zarotiranog sustava.

U tom slučaju, pri zaokretu osi koordinatnog sustava u odnosu na osnovne osi anizotropije za kut  $\varphi$ , Goldenblat-Kopnovljev kriterij čvrstoće (2) dan je izrazom:

$$\frac{\alpha_{ip} \cdot \alpha_{kq} \cdot \Pi_{pq} \cdot \sigma_{pq} + \dots}{\sqrt{\alpha_{pi} \cdot \alpha_{qk} \cdot \alpha_{rm} \cdot \alpha_{sn} \cdot \Pi_{ikmn} \cdot \sigma_{ik} \cdot \sigma_{mn}}} \leq 1 \quad (12)$$



Slika 3. Osnovni i zarotirani koordinatni sustav

Tako je, za ravninsko stanje napreznja u materijalu, pri zaokretu koordinatnog sustava oko osi z za kut  $\varphi$  (slika 3.), u ravnini  $(x, y)$ , uz transformacije:  $m = \cos \varphi$  i  $n = \sin \varphi$ , vlačna čvrstoća  $\sigma_{xv}$  u pravcu osi  $\bar{x}$  određena izrazom:

$$\frac{1}{\sigma_{xv}} = \Pi_{11} \cdot m^2 + \Pi_{22} \cdot n^2 + \frac{2 \cdot (\Pi_{1212} + \Pi_{1122}) \cdot m^2 \cdot n^2}{\sqrt{\Pi_{1111} \cdot m^4 + \Pi_{2222} \cdot n^4 + 2 \cdot (\Pi_{1212} + \Pi_{1122}) \cdot m^2 \cdot n^2}} \quad (13)$$

Tlačna čvrstoća u pravcu osi  $\bar{x}$  u tom slučaju određena je izrazom:

$$\frac{1}{\sigma_{xt}} = -\Pi_{11} \cdot m^2 - \Pi_{22} \cdot n^2 + \frac{2 \cdot (\Pi_{1212} + \Pi_{1122}) \cdot m^2 \cdot n^2}{\sqrt{\Pi_{1111} \cdot m^4 + \Pi_{2222} \cdot n^4 + 2 \cdot (\Pi_{1212} + \Pi_{1122}) \cdot m^2 \cdot n^2}} \quad (14)$$

a izrazi za posmične čvrstoće glase:

$$\frac{1}{\tau_{xy}^{+45}} = (\Pi_{11} - \Pi_{22}) \cdot \sin 2\varphi + \frac{2 \cdot \Pi_{1212} \cos^2 2\varphi}{\sqrt{(\Pi_{1111} + \Pi_{2222} - 2 \cdot \Pi_{1122}) \cdot \sin^2 2\varphi + 4 \cdot \Pi_{1212} \cos^2 2\varphi}} \quad (15)$$

$$\frac{1}{\tau_{xy}^{-45}} = -(\Pi_{11} - \Pi_{22}) \cdot \sin 2\varphi + \frac{2 \cdot \Pi_{1212} \cos^2 2\varphi}{\sqrt{(\Pi_{1111} + \Pi_{2222} - 2 \cdot \Pi_{1122}) \cdot \sin^2 2\varphi + 4 \cdot \Pi_{1212} \cos^2 2\varphi}} \quad (16)$$

U radu je modelirana ekvivalentna čvrstoća elementa materijala oznaka E i F s vlaknima usmjerenim usporedno s glavnom osi anizotropije L(x), tako da se transformacijske relacije nisu rabile.

### 3 Materijal

#### 3.1 Fizikalno-mehanička svojstva sastavnica kompozita

Eksperimentalna istraživanja mehaničkih svojstava provedena su na kompozitnom laminatu [6], proizvedenom postupkom strojnog namatanja (*Filament Winding*). Za matricu kompozitnog laminata odabrana je nezasićena poliesterska smola ENDUR M 105 TB, koja je pogodna za proizvodnju laminata debljine 2-10 mm. Fizikalno-mehanička svojstva matrice prikazana su u tablici 1.

Tablica 1. Svojstva poliesterske smole

Karakteristike polimerizirane smole	Nazivna vrijednost	Mjerna jedinica	Norma za ispitivanje
Gustoća	1,12	g/cm <sup>3</sup>	-
Tvrdoća	45	Barcol	ASTM D2583
HDT	65	°C	ISO 75/2
Čvrstoća na savijanje	90	MPa	ISO 178
Modul elastičnosti pri savijanju (E <sub>s</sub> )	4,1	GPa	ISO 178
Vlačna čvrstoća	55	MPa	HRN EN 527
Modul elastičnosti pri vlaku (E <sub>v</sub> )	3,8	GPa	HRN EN 527
Izduženje pri kidanju	2	%	HRN EN 527

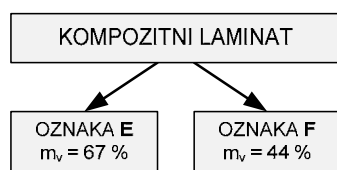
Za disperznu fazu kompozitnog laminata izabrana su staklena vlakna čija su svojstva, prema deklaraciji proizvođača, navedena u tablici 2.

Tablica 2. Svojstva staklenih vlakana

Srednja gustoća	$\rho = 2520,34 \text{ kg/m}^3$
Vlačna čvrstoća	$\sigma_v = 917,3 \text{ MPa}$
Modul elastičnosti	$E_v = 50 \text{ GPa}$

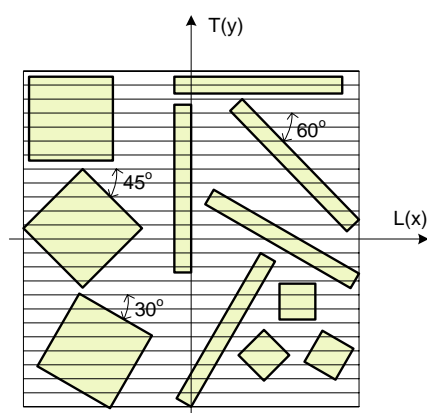
Od navedenih su komponenta izrađeni kompozitni laminati koji su se razlikovali po količini staklenih vlakana u kompozitu. Različite su se strukture dobile rezanjem uzoraka iz laminata tako da se dobiju različite orijentacije vlakana u odnosu na glavnu (unaprijed određenu) os anizotropije.

Ploče kompozitnog laminata iz kojih su se rezali uzorci za ispitivanja fizikalno-mehaničkih svojstava, debljine osnovnog sloja 1,6 - 2,6 mm, označene su slovima E i F (slike 4. i 5.). One su bile sastavljene od osnovnog sloja koji je dobiven namatanjem neprekinutih vlakana pretходно natopljenih smolom. Postupak se, u odnosu na uvjete temperature i tlaka nije razlikovao od postupka pri proizvodnji konstrukcijskih elemenata.



Slika 4. Odabrane vrste laminata

Pri izradi ploča određen je i kontroliran maseni udio vlakna i smole. Iz masenih udjela proračunani su obujamski udjeli vlakna u kompozitu. Rezanjem uzoraka iz ploča E i F kod raznih kutova (paralelno s vlaknom, okomito na vlakno, pod kutovima  $30^{\circ}$ ,  $45^{\circ}$  i  $60^{\circ}$ ) dobiveni su uzorci za ispitivanja različitih struktura (geometrije) vlakana (slika 5.). Za svaku strukturu i količinu te za svako predviđeno opterećenje izrezana su po tri uzorka.



Slika 5. Način rezanja uzoraka za ispitivanja pri jednoosnim opterećenjima

Tablica 3. Maseni i obujamski udjeli polimernog kompozita

Oznaka kompozita	Svojstva polimernog kompozita					
	Gustoća vlakana $\rho_v$ (g/cm <sup>3</sup> )	Gustoća matrice $\rho_m$ (g/cm <sup>3</sup> )	Maseni udjel vlakana $m_v$ (%)	Maseni udjel matrice $m_m$ (%)	Volumni udjel vlakana $V_v$ (%)	Volumni udjel matrice $V_m$ (%)
E	2,52	1,12	67 %	33 %	47,43 %	52,57 %
F			44 %	56 %	25,88 %	74,12 %

Uzorci su posebno označeni:

- E1, F1 – vlakno okomito na glavnu os anizotropije L(x)
- E2, F2 – vlakno paralelno s glavnom osi anizotropije L(x)
- E30, F30 – vlakno pod kutom od  $30^{\circ}$  prema osi L(x)
- E45, F45 – vlakno pod kutom od  $45^{\circ}$  prema osi L(x)
- E60, F60 – vlakno pod kutom od  $60^{\circ}$  prema osi L(x).

### 3.2 Obujamski udjeli vlakana i matrice u polimernom kompozitu

Pri izradi ploča za uzorake i modele cijevi kontroliran je maseni udio vlakana i smole - matrice ( $m_v$  i  $m_m$ ) u polimernom kompozitu. Poznavajući gustoće vlakana i

matrice ( $\rho_v$  i  $\rho_m$ ) proračunani su njihovi obujamski udjeli ( $V_v$  i  $V_m$ ), prema izrazima:

$$m_v = V_v \cdot \rho_v \quad m_m = V_m \cdot \rho_m \quad (17)$$

$$\frac{V_v}{V_m} = \frac{\frac{m_v}{\rho_v}}{\frac{m_m}{\rho_m}} \Rightarrow V_v = V_m \cdot \frac{\rho_m \cdot m_v}{\rho_v \cdot m_m} \quad (18)$$

Za  $V_v = 100 - V_m$  iz izraza (18) dobije se:

$$V_m = \frac{100}{1 + \frac{\rho_m \cdot m_v}{\rho_v \cdot m_m}} \quad (19)$$

Za gustoće  $\rho_v = 2,52$  g/cm<sup>3</sup> i  $\rho_m = 1,12$  g/cm<sup>3</sup> iz izraza (19) dobije se:

- za kompozit s većim masenim sadržajem vlakana oznake E:  $m_v = 67$  %  $m_m = 33$  %

$$V_m = \frac{100}{1 + \frac{1,12 \cdot 67}{2,52 \cdot 33}} = 52,57 \%$$

$$V_v = 100 - V_m = 47,43 \%$$

- za kompozit s manjim masenim sadržajem vlakana oznake:  $m_v = 44$  %  $m_m = 56$  %

$$V_m = \frac{100}{1 + \frac{1,12 \cdot 44}{2,52 \cdot 56}} = 74,12 \%$$

$$V_v = 100 - V_m = 25,88 \%$$

U tablici 3. prikazane su gustoće vlakana i matrice te proračunski maseni i obujamski udjeli vlakana i matrice za dvije odabrane vrste polimernog kompozita E i F.

### 4 Ekvivalentna čvrstoća vlaknima ojačanoga polimernog laminata

Ekvivalentna čvrstoća polimernog laminata određena je iz rezultata ispitivanja mehaničkih svojstava na uzorcima prethodno navedenih oznaka za različite smjerove opterećenja prema smjeru vlakana.

4.1 Rezultati ispitivanja uzoraka kompozitnog laminata

Prema teorijsko-analičkim pretpostavkama, već prije iznesenim, za određivanje kriterija čvrstoće anizotropnoga polimernog laminata, potrebno je poznavati vlačnu, tlačnu i posmičnu čvrstoću osnovnog sloja čija su vlakna usmjerena usporedno, okomito i pod kutom od 45° prema glavnim osima anizotropije L(x) i T(y).

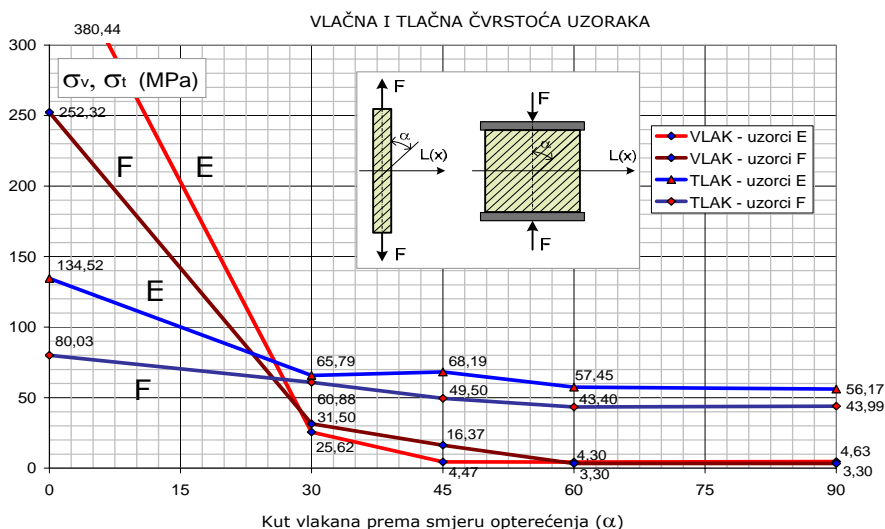
Na dijagramima na slikama 6. i 7. prikazani su rezultati eksperimentalnih istraživanja provedenih u laboratoriju Zavoda za tehničku mehaniku Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu [4]. Iz dijagrama su za proračun kriterija čvrstoće (8) odabrane vrijednosti mehaničkih svojstava za prethodno navedene smjerove vlakana prema glavnim osima anizotropije: tlačna, vlačna i posmična čvrstoća.

Vrijednosti mehaničkih svojstava koje su bile potrebne za određivanje relativne ekvivalentne čvrstoće polimernog laminata oznake E (veća količina vlakana) i onoga oznake F (manja količina vlakana) sadržane su u tablici 4.

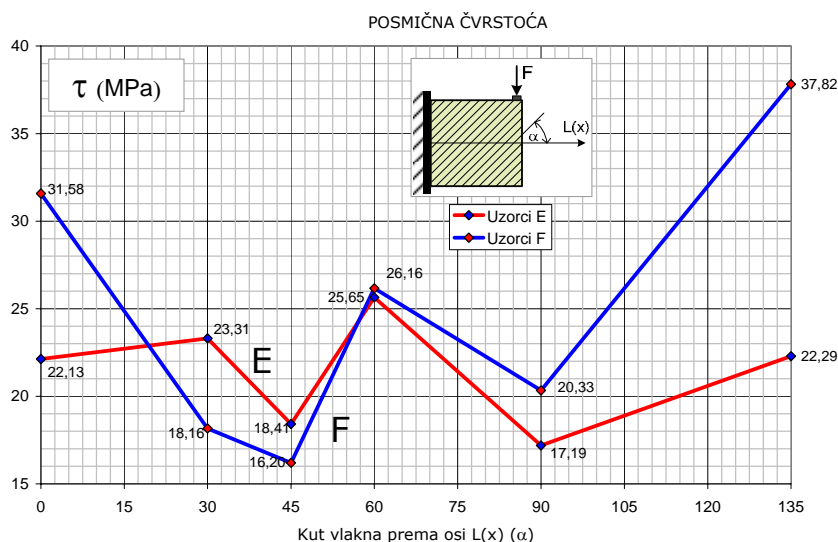
4.2 Proračun ekvivalentne čvrstoće kompozitnih laminata E i F

Kriterij čvrstoće materijala E i F određen je iz rezultata ispitivanja (tablica 4.) na uzorcima gdje su se smjerovi anizotropije L i T poklapali s smjerovima koordinatnih osi x i y, prema slici 8.

Rezultati ispitivanja pregledno su dani u tablici 5.



Slika 6. Ovisnost vlačne i tlačne čvrstoće o kutu vlakana prema opterećenju

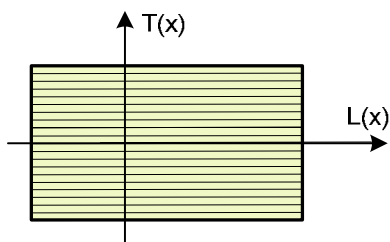


Slika 7. Ovisnost posmične čvrstoće o kutu vlakana prema opterećenju

Tablica 4. Mehanička svojstva uzoraka polimernog laminata oznaka E i F

Uzorak	Vlačna čvrstoća σ <sub>v</sub> (MPa)	Modul elastičnosti E (GPa)	Poissonov Omjer ν <sub>TL</sub>	Tlačna čvrstoća σ <sub>t</sub> (MPa)	Posmična čvrstoća τ (MPa)	Modul pri posmiku G (GPa)
E1	378,49	39,91	0,34	134,52	17,19	14,7
F1	267,65	24,75	0,37	80,03	22,89	9,2
E60	22,08	8,92	0,36	65,79	25,65	3,1
F60	31,51	12,63	0,45	60,88	26,22	4,3
E+45/E-	4,10	12,58	0,38	68,19	18,41/22,2	4,5
F+45/F-45	12,33	11,59	0,45	49,50	15,71/37,7	4,2
E30	4,30	10,82	0,41	57,45	23,31	3,8
F30	3,50	9,70	0,44	43,40	18,16	3,3
E2	4,63	10,49	0,40	56,17	21,54	3,7
F2	3,30	7,10	0,45	43,99	31,59	2,6

Kao što je već spomenuto, u kriteriju čvrstoće napreznje je veće po apsolutnoj vrijednosti uvijek u smjeru osi  $L(x)$ .



Slika 8. Smjerovi anizotropije materijala

su kriteriji čvrstoće (20) i (21) za oba materijala. Oni predstavljaju omjere čvrstoće materijala iskazane pomoću tenzora čvrstoće, odnosno konstanti materijala i mogućeg djelovanja glavnih napreznja ( $\sigma_1 : \sigma_2$ ). Zato se mogu nazvati relativnim ekvivalentnim napreznjima i predstavljaju čvrstoću elementa od kompozitnog materijala u odnosu na razne kombinacije djelovanja glavnih napreznja, za ravninsko stanje napreznja.

Kriterij čvrstoće za prijelaz materijala u stanje popuštanja ili sloma može se približno grafički prikazati u koordinatnom sustavu ( $\sigma_1, \sigma_2$ ). Elipse na slici 9. odnose se

Tablica 5. Čvrstoće u osnovnim smjerovima anizotropije

Materijal	Čvrstoće					
	$\sigma_{xv}$ (MPa)	$\sigma_{yv}$ (MPa)	$\sigma_{xt}$ (MPa)	$\sigma_{yt}$ (MPa)	$\tau_{-45}$ (MPa)	$\tau_{+45}$ (MPa)
E	378,50	4,63	134,52	56,17	22,29	18,41
F	267,65	3,30	80,03	43,99	37,79	15,71

Tablica 6. Vrijednosti tenzora čvrstoće materijala E i F

Materijal	Tenzori čvrstoće				
	$\Pi_{11}$	$\Pi_{22}$	$\Pi_{1111}$	$\Pi_{2222}$	$\Pi_{1122}$
E	-0,002396	0,099090	0,000025	0,013664	0,005615
F	-0,004380	0,140149	0,000066	0,026530	0,012283

Iz izraza (3), (4), (5) i (6) proračunani su tenzori čvrstoće za materijale oznaka E i F. Njihove se vrijednosti nalaze u tablici 6.

Nakon uvrštavanja vrijednosti tenzora čvrstoće, odnosno konstanti materijala iz tablice 6. u izraz (9) dobiveni

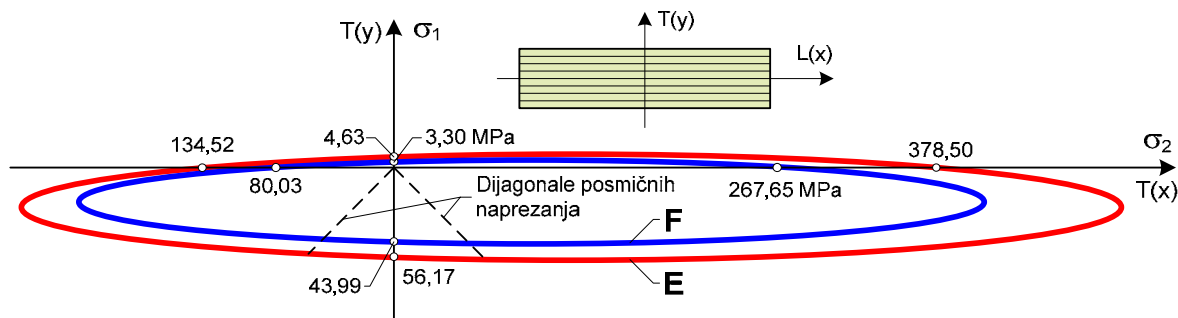
na kriterij čvrstoće ispitanih materijala oznaka E i F. One su određene nul-točkama u kojima jedno od glavnih napreznja poprima vrijednost nule, što su ekstremni slučajevi jednoosnog stanja napreznja, ili glavna napreznja materijala dobivena u jednoosnim pokusima [4, 5].

Materijal E:

$$k_{\text{kriterij } E} = \Pi_{11} \cdot \sigma_1 + \Pi_{22} \cdot \sigma_2 + \sqrt{(\Pi_{1111} \cdot \sigma_1^2 + \Pi_{2222} \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot \Pi_{1122} \cdot \sigma_1 \sigma_2)} = -0,002396 \cdot \sigma_1 + 0,099090 \cdot \sigma_2 + \sqrt{(0,000025 \cdot \sigma_1^2 + 0,013664 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot 0,005615 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2)} \leq 1 \quad (20)$$

Materijal F:

$$k_{\text{kriterij } F} = \Pi_{11} \cdot \sigma_1 + \Pi_{22} \cdot \sigma_2 + \sqrt{(\Pi_{1111} \cdot \sigma_1^2 + \Pi_{2222} \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot \Pi_{1122} \cdot \sigma_1 \sigma_2)} = -0,004380 \cdot \sigma_1 + 0,140149 \cdot \sigma_2 + \sqrt{(0,000066 \cdot \sigma_1^2 + 0,026530 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot 0,012283 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2)} \leq 1 \quad (21)$$



Slika 9. Grafički prikaz ekvivalentne čvrstoće



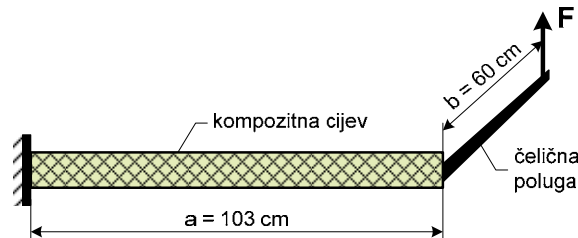
Ona su ujedno čvrstoće materijala dobivene u jednoosnim pokusima, u slučaju kada se glavne osi anizotropije L i T poklapaju s osima koordinatnog sustava x, y.

Područje unutar elipsa predstavlja stanja naprezanja za koja materijal neće doći u stanje popuštanja. Budući da je kriterij prikazan u relativnom odnosu prema glavnim naprezanjima kod kojih dolazi do popuštanja ili sloma, praktičan je za ocjenu ponašanja materijala pri različitim slučajevima složenog opterećenja. Za one slučajeve kada su veličine u izrazima (20) i (21) jednake ili manje od jedan, u elementu materijala neće nastupiti slom. Ako su njihove vrijednosti veće od jedan doći će do popuštanja ili sloma.

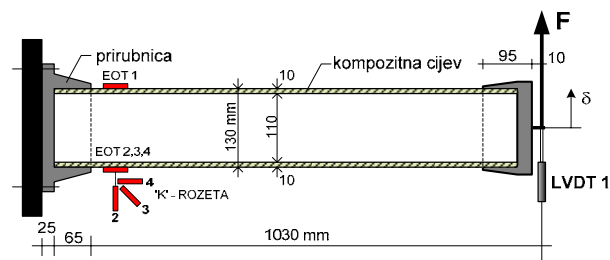
Naravno, mogu se pojaviti interakcije glavnih naprezanja s posmičnim naprezanjima pa će do sloma doći i ako se glavna naprezanja nalaze unutar krivulje uvjeta čvrstoće. Relativna ekvivalentna čvrstoća daje vrijednosti veće od jedan, kada materijal ima relativni koeficijent sigurnosti.

### 4.3 Čvrstoća modela cijevi pri složenom opterećenju prema kriteriju čvrstoće

U ovom dijelu rada analizirano je stanje naprezanja u materijalu modela cijevi pri složenom stanju naprezanja. Ono je u elementu materijala postignuto istodobnim savijanjem i torzijom modela cijevi (slike 10., 11. i 12.).



Slika 10. Način ispitivanja modela cijevi



Slika 11. Geometrijske karakteristike i mjerna mjesta za mjerenje deformacija i pomaka

Eksperimentalno određivanje kritičnih vrijednosti glavnih naprezanja  $\sigma_{1K}$  i  $\sigma_{2K}$ , pri kojima materijal prelazi u granično stanje (pojava znatnijih plastičnih deformacija ili sloma) bilo je teško izvedivo zbog složenosti opreme za ispitivanje i zbog velikog broja kombinacija djelovanja  $\sigma_1 : \sigma_2$ . Zato su ispitane samo po dvije strukture

za cijevi oznaka E i F. Bilo bi svakako bolje da je ispitano više kombinacija opterećenja, međutim zbog navedenih razloga ograničeno je na četiri kombinacije kojima je provjerena modelirana ekvivalentna čvrstoća polimernih laminata oznaka E i F.



Slika 12. Uredaj i oprema pri ispitivanju cijevi pri složenom opterećenju

Glavna naprezanja u eksperimentima odnose se na modele koji su za  $30^\circ$  i  $45^\circ$  zarotirani u odnosu na glavnu os anizotropije L(x) materijala. Iz izmjerenih vrijednosti maksimalnih sila proračunano je maksimalno normalno naprezanje  $\sigma_{x,max}$  i maksimalno posmično naprezanje

$\tau_{xz,max}$  te glavna naprezanja u materijalu cijevi [6].

Dalje su za svaki model cijevi proračunane projekcije glavnih naprezanja u osnovni koordinatni sustav modela materijala oznaka E i F. Potom su se njihove vrijednosti, navedene u tablici 7., uvrstile u kriterij čvrstoće odgovarajućeg materijala. Tim postupkom su dobiveni koeficijenti koji pokazuju relativnu ekvivalentnu čvrstoću, koja daje odnos projekcija naprezanja  $\sigma'_{1K}$  i  $\sigma'_{2K}$  pri maksimalnim silama i modelirane ekvivalentne čvrstoće materijala oznaka E i F za ispitane slučajeve opterećenja.

Tablica 7. Projekcije glavnih naprezanja na osi anizotropije materijala

Materijal	Glavna naprezanja			
	$\sigma_1$ (MPa)	$\sigma_2$ (MPa)	$\sigma'_1$ (MPa)	$\sigma'_2$ (MPa)
E30	97,20	- 6,70	84,10	5,80
F30	95,10	- 6,10	82,40	5,30
E45	87,00	- 5,50	61,00	3,90
F45	87,00	- 5,50	61,00	3,90

Relativne ekvivalentne čvrstoće ispitanih modela cijevi su:

Za cijev **E30**:

$$\begin{aligned} \Pi_{11} \cdot \sigma_1 + \Pi_{22} \cdot \sigma_2 + \sqrt{(\Pi_{1111} \cdot \sigma_1^2 + \Pi_{2222} \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot \Pi_{1122} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2)} = -0,002396 \cdot 84,1 + 0,099090 \cdot 5,8 + \\ + \sqrt{(0,000025 \cdot 84,1^2 + 0,013664 \cdot 5,8^2 + 2 \cdot 0,005615 \cdot 84,1 \cdot 5,8)} = 2,81 \end{aligned} \quad (22)$$

Za cijev **E45**:

$$\begin{aligned} \Pi_{11} \sigma_1 + \Pi_{22} \sigma_2 + \sqrt{(\Pi_{1111} \sigma_1^2 + \Pi_{2222} \sigma_2^2 + 2 \Pi_{1122} \sigma_1 \sigma_2)} = -0,002396 \cdot 61,0 + 0,099090 \cdot 3,9 + \\ + \sqrt{(0,000025 \cdot 61,0^2 + 0,013664 \cdot 3,9^2 + 2 \cdot 0,005615 \cdot 61,0 \cdot 3,9)} = 1,92 \end{aligned} \quad (23)$$

Za cijev **F30**:

$$\begin{aligned} \Pi_{11} \sigma_1 + \Pi_{22} \sigma_2 + \sqrt{(\Pi_{1111} \sigma_1^2 + \Pi_{2222} \sigma_2^2 + 2 \Pi_{1122} \sigma_1 \sigma_2)} = -0,004380 \cdot 82,4 + 0,140149 \cdot 5,3 + \\ + \sqrt{(0,000066 \cdot 82,4^2 + 0,026530 \cdot 5,3^2 + 2 \cdot 0,012283 \cdot 82,4 \cdot 5,3)} = 2,99 \end{aligned} \quad (24)$$

Za cijev **F45**:

$$\begin{aligned} \Pi_{11} \sigma_1 + \Pi_{22} \sigma_2 + \sqrt{(\Pi_{1111} \sigma_1^2 + \Pi_{2222} \sigma_2^2 + 2 \Pi_{1122} \sigma_1 \sigma_2)} = -0,004380 \cdot 61,0 + 0,140149 \cdot 3,9 + \\ + \sqrt{(0,000066 \cdot 61,0^2 + 0,026530 \cdot 3,9^2 + 2 \cdot 0,012283 \cdot 61,0 \cdot 3,9)} = 2,39 \end{aligned} \quad (25)$$

Za svaki ispitani model kriterij čvrstoće je veći od jedinice. To znači da su svi modeli popustili izvan područja uvjeta čvrstoće s relativnim koeficijentom sigurnosti, koji odgovara ekvivalentnoj čvrstoći materijala, u pojedinačnom slučaju opterećenja.

Mora se napomenuti i to da su modeli izabrani izravno iz proizvodnje i da nije bilo mogućnosti točnog određivanja smjera vlakana u odnosu na glavnu os anizotropije niti je bilo moguće odrediti međusobnu simetriju smjera vlakana u odnosu na slojeve laminata ( $\alpha = -\alpha$ ). Način proizvodnje vjerojatno je uvjetovan iskustvom koje kaže da elementi od materijala izražene anizotropije moraju imati koeficijent sigurnosti čije su uobičajene vrijednosti od 3-8.

Uspoređujući ekvivalentne čvrstoće svih modela, koje su dane kriterijima čvrstoće (20) i (21) za modele cijevi, može se reći da čvrstoći modela pri složenom opterećenju u prvom redu pridonosi podudarnost smjera vlakana

u lokalnom koordinatnom sustavu prema smjeru glavnoga koordinatnog sustava (L(x), T(y)), odnosno prema smjeru po apsolutnoj vrijednosti većega glavnog naprezanja.

## 5 Zaključak

U radu opisani postupak određivanja čvrstoće elementa od vlaknima ojačanog polimernog laminata pri složenom opterećenju proveden je u sklopu teorijsko – eksperimentalnih istraživanja utjecaja strukture i količine vlakana na mehanička svojstva polimernih kompozita. Analize ponašanja materijala pri jednoosnom su opterećenju zbog izražene anizotropije materijala isključile primjenu postojećih teorija čvrstoće I. reda za predviđanje ponašanja pri složenom opterećenju. Zato se danas razvijaju nove teorije čvrstoće II. grupe. čiji kriteriji pokušavaju uzeti u obzir specifičnosti anizotropnih materijala, među kojima se nalaze i vlaknima ojačani kompozitni laminati.

U ovom radu odabran je polinomni kriterij proizišao iz Goldenblat - Kopnovljeve teorije čvrstoće. Uvrštavanjem vrijednosti tlačne, vlačne i posmične čvrstoće, koje su dobivene ispitivanjem na uzorcima vlaknima ojačanih polimernih laminata različitih udjela vlakana u kompozitu za smjerove gdje su se vlakna nalazila okomito i usporedno sa smjerom opterećenja, u izraz za polinomni kriterij, dobiveni su omjeri konstanti materijala i primijenjenoga složenog opterećenja. Omjer složenog opterećenja, izraženog pomoću glavnih napreznja i tenzora

čvrstoća koji su proračunani iz čvrstoća pri jednoosnom opterećenju, dao je izraz koji predstavlja relativno ekvivalentno napreznje. Time je dobiven kriterij pogodan za procjenu ponašanja elemenata konstrukcija iz polimernih laminata pri raznim slučajevima složenog opterećenja. Iz primjera koji su opisani u eksperimentima složenog opterećenja, može se zaključiti da je postupak primjenjiv za predviđanje ponašanja elemenata iz vlaknima ojačanih polimernih laminata za razne kombinacije struktura i količina vlakana u kompozitu [3, 11].

#### LITERATURA

- [1] Anderson, T. L.: *Fracture Mechanics*, Taylor and Francis Group, Broken Sound Parkway, 2005, England, 1996
- [2] Decolon, C.: *Analysis of Composite Structures*, Butterworth-Heinemann, 2005
- [3] Goldenblat, I. I.; Kopnov, V. A.: *Strength of Glass Reinforced Plastics*, Journal of Polymer Mechanics, Vol.1, No. 2, 1966, pp 54-59
- [4] Lacković, V.: *Utjecaj količine i strukture vlakana na mehanička svojstva polimernih kompozita*, Doktorski rad, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2009
- [5] Lacković V.: *Analiza ponašanja kompozitnih materijala pri složenom opterećenju*, Magistarski rad, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2005
- [6] Liu, S.; Kuth, Z. F.; Chang, K.: *Matrix cracking and delamination propagation in laminated composites subjected to transversely concentrated loading*, J. Comp. Mat. 27, 1993, pp 436-470
- [7] Obratsov, F.; Vasil'ev, V. V.: *Mechanics of composites*, MIR Publishers, Moscow, 1982
- [8] Reddy, J. N.: *Theory and analysis of laminated composite plates*, 1.-19., NATO ASI on Mechanics of Composite Materials and Structures, 1.-79., ed. C. A. Mota Soares, C. M. Mota Soares, M. J. M. Freitas, Troia, Portugal, July 12.-24., 1998
- [9] Tsai, S. W.; Wu, E. M.: *A general theory of strength for orthotropic materials*, J. Comp. Mat. 5, 1971, pp 58-80
- [10] Tsai, S. W.: *Theory of Composite Design*, Think Composites, Dayton, 1992