

# Pouzdanost čeličnih željezničkih mostova iz aspekta umora

---

**Androić, Boris; Dujmović, Darko; Skejić, Davor**

*Source / Izvornik:* **Građevinar, 2004, 56, 199 - 206**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:956560>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-07**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)



# Pouzdanost čeličnih željezničkih mostova iz aspekta umora

Boris Androić, Darko Dujmović, Davor Skejić

## Ključne riječi

željeznički mostovi,  
umor,  
pouzdanost,  
indeks pouzdanosti,  
probabilistički pristup,  
bazne varijable,  
trajnost

## Key words

railway bridges,  
fatigue,  
reliability,  
reliability index,  
probabilistic approach,  
basic variables,  
durability

## Mots clés

ponts ferroviaires,  
fatigue,  
fiabilité,  
indice de fiabilité,  
approche probabiliste,  
variables de base,  
durabilité

## Ключевые слова

железнодорожные  
мосты, усталость,  
надёжность,  
коэффициент  
надёжности,  
пробалистический  
подход,  
основные переменные,  
долговечность

## Schlüsselworte

Eisenbahnbrücken,  
Ermüdung,  
Zuverlässigkeit,  
Zuverlässigkeitsindex,  
probabilistischer Zutritt,  
Basisvariablen,  
Dauerhaftigkeit

B. Androić, D. Dujmović, D. Skejić

Izvorni znanstveni rad

## Pouzdanost čeličnih željezničkih mostova iz aspekta umora

Prikazana je analiza pouzdanosti čeličnih željezničkih mostova iz aspekta umora. Istaknute su prednosti primjene probabilističkog pristupa u odnosu na deterministički pristup. Izračunane su statističke vrijednosti baznih varijabli. Posebno je razmatrana bazna varijabla oštećenja koja je poznata pod nazivom Minerov koeficijent. Formirana je jednadžba graničnog stanja. Indeks pouzdanosti proračunan je za sedam karakterističnih detalja željezničkih mostova na pruzi Zagreb – Rijeka.

B. Androić, D. Dujmović, D. Skejić

Original scientific paper

## Reliability of steel railway bridges from the aspect of fatigue

The analysis of reliability of steel railway bridges, focusing on their resistance to fatigue, is given. Advantages of using probabilistic rather than deterministic approach are presented. Statistical values of basic variables are calculated. A special emphasis is placed on the basic variable known as the Miner's coefficient. The limit state equation is formulated. The reliability index is calculated for seven typical details of railway bridges built along the Zagreb - Rijeka railway line.

B. Androić, D. Dujmović, D. Skejić

Ouvrage scientifique original

## Fiabilité des ponts ferroviaires en acier de point de vue de fatigue

L'analyse de la fiabilité des ponts ferroviaires en acier, concentrant sur leur résistance à la fatigue, est décrite. Les avantages d'utilisation d'une approche probabiliste au lieu de l'approche déterministe, sont présentées. Les valeurs statistiques des variables de base sont calculées. La variable de base connue comme coefficient de Miner est analysée en plus de détail. L'équation de l'état limite est formulée. L'indice de fiabilité est calculé pour sept détails typiques des ponts ferroviaires construits sur la ligne de chemin de fer entre Zagreb et Rijeka.

Б. Андроић, Д. Дујмовић, Д. Скејић

Оригинална научна работа

## Надёжность стальных железнодорожных мостов с аспекта усталости

В работе показан анализ надёжности стальных железнодорожных мостов с аспекта усталости. Подчёркнуты преимущества применения пробалистического подхода по отношению к детерминистическому. Расчитаны статистические значения основных переменных. Особо рассматривалась основная (базисная) переменная, которая при повреждениях известна под названием коэффициент Минера. Формировано уравнение предельного состояния. Коэффициент надёжности рассчитан для семи характеристических деталей железнодорожных мостов на дороге Загреб – Риека.

B. Androić, D. Dujmović, D. Skejić

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

## Zuverlässigkeit von stählernen Eisenbahnbrücken vom Blickpunkt der Ermüdung

Dargestellt ist eine Analyse der Zuverlässigkeit von stählernen Eisenbahnbrücken vom Blickpunkt der Ermüdung. Hervorgehoben sind die Vorteile der Anwendung des probabilistischen Zutrittes im Verhältnis zum deterministischen Zutritt. Errechnet sind die statistischen Werte der Basisvariablen. Besonders betrachtete man die Basisvariable für Beschädigungen die unter dem Namen Minerscher Beiwert bekannt ist. Formiert wurde die Gleichung des Grenzzustandes. Der Zuverlässigkeitsindex ist für sieben charakteristische Details von Eisenbahnbrücken an der Strecke Zagreb - Rijeka berechnet.

Autori: Prof. dr. sc. **Boris Androić**, dipl. ing. građ.; prof. dr. sc. **Darko Dujmović**, dipl. ing. građ.;  
**Davor Skejić**, dipl. ing. građ., Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet, Zagreb, Kačićeva 26

1 Uvod

Poznavanje vjerojatnosti otkazivanja konstrukcijskih elemenata željezničkih mostova iz aspekta umora još je uvijek jedno od otvorenih pitanja. Povećanje intenziteta prometa i osovinskih pritisaka na željezničkim prugama jasno upućuje na važnost problema moguće daljnje upotrebe postojećih mostova, budući da su već prilično "oštećeni" umorom.

Kritika determinističkog pristupa problema umora jest u tome što se radi nedostatka statističkih podataka djelovanja i otpornosti sigurnost rješavala primjenom nepovoljnih shema opterećenja i načinom dobivanja trajne čvrstoće. Na taj se način idejom 'skrivena' sigurnosti dobivao globalni koeficijent sigurnosti koji je za neke kategorije detalja bio čak manji od jedan. Treba napomenuti da se u novom konceptu umora, ali i u europskom konceptu dimenzioniranja, umjesto riječi sigurnost upotrebljava širi pojam a to je pouzdanost. Pouzdanost uključuje sigurnost, uporabivost i trajnost.

Nov pristup problemu pouzdanosti iz aspekta vjerojatnosti otkazivanja donio je nove metode kojima se izračunava razina pouzdanosti s pomoću indeksa pouzdanosti. Ove su metode postigle rezultate koji su potvrdili sumnje da je deterministički pristup pouzdanosti pri umoru potpuno neprihvatljiv. Naime, jasno je da ako se usvoji jedan globalni koeficijent sigurnosti za pojedine kategorije detalja, kako je to učinjeno u determinističkom postupku s dopuštenim naprezanjima, dobiva se neujednačena sigurnost. Probabilistički pristup omogućuje kvantificiranje te neujednačenosti. Potrebno je napomenuti da je problem umora zapravo problem trajnosti. Konstrukcijski loše izveden detalj rezultirat će malim vijekom trajanja.

Nakon detaljno provedenih probabilističkih analiza, utvrđeno je da determinističko predviđanje vijeka trajanja pri umoru, pojedinih kategorija detalja željezničkih mostova, nije moguće radi postojanja velikih osipanja vrijednosti baznih varijabli na strani djelovanja i otpornosti. Osim toga, poznato je da su uzroci koji dovode do oštećenja zbog umora na razini mikrostrukture te znatno ovise o lokalnim defektima. Već i male promjene lokalnih karakteristika materijala utječu na rezultate ispitivanja čak i pod laboratorijskim uvjetima. Upravo to je i razlog da se postupak procjene oštećenja uslijed umora može adekvatno tretirati samo modelima matematičke statistike. To znači da je probabilističku ocjenu pouzdanosti kao metodologiju rada kod problema umora potrebno uvesti čak i prije nego u ostalim područjima graditeljstva.

U ovom radu provedena je procjena razine pouzdanosti različitih kategorija detalja čeličnih željezničkih mostova, kod kojih je mjerodavno umaranje materijala promatrano iz aspekta vjerojatnosti nastanka oštećenja.

2 Probabilistički prikaz razine II kod umora

Vjerojatnost otkazivanja nekog elementa željezničkog mosta, koji je izložen učestaloj promjeni naprezanja tako da je mjerodavno umaranje, može se izraziti s pomoću stavka totalne vjerojatnosti, odnosno izrazom (1):

$$P_f = \int_{X_1=-\infty}^{X_1=+\infty} \int_{X_2=-\infty}^{X_2=+\infty} \dots \int_{X_n=-\infty}^{X_n=+\infty} P \cdot \left\{ \int_{r_d}^{r_g} \int_{\Delta\sigma_d}^{\Delta\sigma_g} \frac{t_{ND} \cdot E \left[ \frac{N(t)}{t} / X_4 = x_4, \dots, X_n = x_n \right]}{N_D \frac{[\lambda(r) \cdot x_1]^{x_2}}{\Delta\sigma^{x_2}}} \cdot f_{\Delta\sigma, r} / X_4 = x_4, \dots, X_n = x_n (\Delta\sigma, r) \cdot d\Delta\sigma \cdot dr \geq X_3 \right\} \cdot f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \cdot dx_1 \dots dx_n \quad (1)$$

gdje su:

- $P_f$  - vjerojatnost otkazivanja,
- $X_1 = \Delta\sigma_D (r = -1)$  - trajna razlika naprezanja (bazna varijabla otpornosti),
- $X_2 = m$  - nagib Wöhlerove linije (bazna varijabla otpornosti),
- $X_3 = D(t)$  - Minerov koeficijent (bazna varijabla graničnog oštećenja),
- $t_{ND}$  - standardna trajnost (odabrana vrijednost za neku klasu konstrukcije),
- $E \left[ \frac{N(t)}{t} / X_4 = x_4, \dots, X_n = x_n \right]$  - očekivani prosječni broj promjena ciklusa naprezanja u jedinici vremena  $t$  koja je karakteristična za neku klasu konstrukcije,
- $N_{(t_{ND})} = t_{ND} \cdot E [ \cdot ]$  - umnožak označava očekivani ukupni broj promjena ciklusa naprezanja za standardnu trajnost  $t_{ND}$ ,
- $N_D$  - broj promjena ciklusa naprezanja  $2 \cdot 10^6$ ,
- $X_4, \dots, X_n$  - bazne varijable djelovanja (mogu se određene vrijednosti dužina utjecajnih linija i dionice prometa prikazati determinističkim parametrima  $K_1, \dots, K_n$ ),
- $f_{\Delta\sigma, r}$  - funkcija gustoće vjerojatnosti naponskih razlika,
- $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$  - razlika graničnih naprezanja,

$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$  - odnos graničnih naprezanja.

Indeksi  $g$  i  $d$  označavaju gornje i donje granice dvstrukog integrala.

Problem je moguće pojednostaviti budući da nam je interesantno samo područje vektorskog prostora  $\Gamma'_n$  koje označava nesigurno područje. U tom će području vrijediti  $P\{\cdot\} = 1$  te će vjerojatnost otkazivanja glasniti:

$$p_f = \int \int \int \dots \int_{\Gamma'_n} f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \cdot dx_1 \dots dx_n \quad (2)$$

a područje  $\Gamma'_n$  definirano je:

$$\Gamma'_n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) / \frac{t_{ND} \cdot E \left[ \frac{N(t)}{t} / X_4 = x_4, \dots, X_n = x_n \right]}{N_D \cdot x_1^{x_2}} \right. \\ \left. \int_{r_d=-1}^{r_g=1} \int_{\Delta\sigma_d=0}^{\Delta\sigma_g=+\infty} \left( \frac{\Delta\sigma}{\lambda(r)} \right)^{x_2} \cdot f_{\Delta\sigma, r} / X_4 = x_4, \dots, X_n = x_n (\Delta\sigma, r) \cdot d\Delta\sigma dr \geq X_3 \right. \quad (3)$$

Kako bi se izbjeglo matematičko rješavanje problema u vidu  $n$ -struke integracije (dimenzija vektorskog prostora) problem će se riješiti postavljanjem funkcije graničnog stanja. Jednadžba graničnog stanja za određene vrijednosti baznih varijabli pri razmatranju problema umora materijala, uz produženje Wöhlerove linije, poprima sljedeći izraz:

$$g = X_3 - \frac{t_{ND} \cdot E \left[ \frac{N(t)}{t} / X_4 = x_4, \dots, X_n = x_n \right]}{N_D \cdot x_1^{x_2}} \cdot \int_{r_d=-1}^{r_g=1} \int_{\Delta\sigma_d=0}^{\Delta\sigma_g=+\infty} \left( \frac{\Delta\sigma}{\lambda(r)} \right)^{x_2} \cdot f_{\Delta\sigma, r} / X_4 = x_4, \dots, X_n = x_n (\Delta\sigma, r) \cdot d\Delta\sigma dr = 0 \quad (4)$$

Ako se usvoji pretpostavka da se trajne razlike naprezanja  $\Delta\sigma_D(r)$  za većinu postojećih odnosa graničnih naprezanja  $r$  kod slučajne funkcije toka naprezanja  $\sigma(t)$ , ne razlikuju značajnije od trajnih razlika naprezanja  $\Delta\sigma_D(\bar{r})$  za srednje vrijednosti omjera graničnih naprezanja  $\bar{r}$ , jednadžba graničnog stanja (4) može se napisati:

$$g = X_3 - \frac{t_{ND} \cdot E \left[ \frac{N(t)}{t} / X_4 = x_4, \dots, X_n = x_n \right]}{N_D \cdot x_1^{x_2}} \cdot \frac{1}{[\lambda(\bar{r})]^{x_2}} \cdot \int_{\Delta\sigma_d=0}^{\Delta\sigma_g=+\infty} \Delta\sigma^{x_2} \cdot f_{\Delta\sigma} / X_4 = x_4, \dots, X_n = x_n (\Delta\sigma) \cdot d\Delta\sigma = 0 \quad (5)$$

Kada se analiziraju pojedini članovi jednadžbe graničnog stanja kod problema umora dobije se:

- a).  $\frac{1}{[\lambda(\bar{r})]^{x_2}} = 1$
- b).  $t_{ND} \cdot E \left[ \frac{N(t)}{t} / X_4 = x_4, \dots, X_n = x_n \right] = N(t_{ND})$   
- ukupni broj promjena ciklusa naprezanja za standardnu trajnost  $t_{ND}$ ,
- c).  $\int_{\Delta\sigma_d=0}^{\Delta\sigma_g=+\infty} \Delta\sigma^{x_2} \cdot f_{\Delta\sigma} / X_4 = x_4, \dots, X_n = x_n (\Delta\sigma) \cdot d\Delta\sigma = E \left[ \Delta\sigma^{x_2} / X_4 = x_4, \dots, X_n = x_n \right]$   
- moment  $X_2$  – tog reda varijable  $\Delta\sigma$  (gustoća raspodjele razlika naprezanja pod uvjetom da bazne varijable djelovanja poprima određene vrijednosti)

Dakle, izraz (5) sada glasi:

$$g = X_3 - \frac{N(t_{ND})}{N_D \cdot x_1^{x_2}} \cdot E \left[ \Delta\sigma^{x_2} / X_4 = x_4, X_5 = x_5, \dots, X_n = x_n \right] = 0 \quad (6)$$

Ako se vratimo na pripadne oznake baznih varijabli na strani otpornosti, te ako pretpostavimo opći oblik Wöhlerove linije, jednadžba graničnog stanja kod problema umora poprima sljedeći oblik:

$$g = D(t) - \frac{t_{ND} \cdot E \left[ \frac{N(t)}{t} / X_4 = x_4, \dots, X_n = x_n \right]}{N_D \cdot \Delta\sigma_D^m} \cdot \int_{\xi}^{\eta} \Delta\sigma^m \cdot f_{\Delta\sigma} / X_4 = x_4, \dots, X_n = x_n (\Delta\sigma) \cdot d\Delta\sigma = 0 \quad (7)$$

gdje je:

- $g$  - jednadžba graničnog stanja,
- $D(t)$  - ukupna akumulacija oštećenja u vremenu  $t$  pri kojem dolazi do sloma elementa konstrukcije (Minerov koeficijent – kao bazna varijabla  $X_3$ ),
- $\Delta\sigma_D$  - razlika naprezanja kod broja promjena ciklusa napona  $N_D = 2 \cdot 10^6$ , bazna varijabla otpornosti  $X_1$ ,
- $m$  - kut nagiba pravca regresijske linije (Wöhlerove linije), bazna varijabla otpornosti  $X_2$ ,
- $X_4, \dots, X_n$  - bazne varijable djelovanja (mogu se određene vrijednosti dužina utjecajnih linija i dionice prometa prikazati detreminističkim parametrima  $K_1, \dots, K_n$ ),
- $f_{\Delta\sigma}$  - funkcija gustoće vjerojatnosti razlika naprezanja.

Značenje ostalih oznaka navedeno je uz izraz (1), dok je integral

$$\int_{\xi}^{\eta} \Delta\sigma^m \cdot f_{\Delta\sigma} / X_4 = x_4, \dots, X_n = x_n (\Delta\sigma) \cdot d\Delta\sigma$$

formalno identičan  $m$ -tom momentu funkcije gustoće razlika naprežanja  $f_{\Delta\sigma}$  ako se podudaraju granice integrala s granicama područja definicije funkcije gustoće vjerojatnosti. U tom se slučaju mogu dati prilično jednostavna rješenja integrala za čitav niz tipova funkcija gustoće vjerojatnosti razlika naprežanja  $f_{\Delta\sigma}$ . Dakle može se napisati:

$$E [\Delta\sigma^m] = \int_{\xi}^{\eta} \Delta\sigma^m \cdot f_{\Delta\sigma} / X_4 = x_4, \dots, X_n = x_n (\Delta\sigma) \cdot d\Delta\sigma \quad (8)$$

Sada se može jednadžba graničnog stanja kod problema umora izraziti u obliku:

$$D(t) - \frac{N(t_{ND})}{N_D \cdot \Delta\sigma_D^m} \cdot E [\Delta\sigma^m] = 0 \quad (9)$$

Postavlja se pitanje donošenja odluke izbora tipa funkcije gustoće razlika naprežanja, jer rješenje integrala u izrazu (8) ulazi u jednadžbu graničnog stanja i na taj način određuje njezin konačni oblik. Pri tome izboru potrebno je uočiti da  $f_{\Delta\sigma}$  mora posjedovati  $m$ -te momente ( $m = X_2$ ) koji se analitički mogu proračunati, a da  $m$ , odnosno  $X_2$ , ne mora biti cijeli broj. To je zbog toga jer kod Wöhlerove linije koeficijent nagiba pravca  $m$  može poprimiti i vrijednosti koje su realne (nisu cijeli brojevi) [2].

Iz detaljnih analiza različitih tipova funkcija gustoće za prikaz spektra razlika naprežanja, koje su provedene u radu [4], slijedi da se u slučaju izbora beta funkcije gustoće dobiva jednadžba graničnog stanja kod problema umora koja postiže najprihvatljivije vrijednosti indeksa pouzdanosti. Za slučaj produženja Wöhlerove linije ova se jednadžba može napisati u obliku:

$$X_3 - \frac{K_1 \left( \frac{K_3}{X_1} \right)^{X_2} \cdot \Gamma(X_2 + K_4) \cdot \Gamma(K_4 + K_5)}{K_2 \left( \frac{K_3}{X_1} \right) \cdot \Gamma(K_4) \cdot \Gamma(X_2 + K_4 + K_5)} = 0 \quad (10)$$

gdje je  $\Gamma(\cdot)$  - gama funkcija,

$$\begin{aligned} X_1 &= \Delta\sigma_D & K_2 &= N_D = 2 \cdot 10^6 \\ X_2 &= m & K_3 &= \Delta\sigma_{\max} \\ X_3 &= D(t) & K_4 &= \alpha \\ K_1 &= t_{ND} \cdot E[\cdot] & K_5 &= \beta \end{aligned}$$

$\alpha$  i  $\beta$  su koeficijenti oblika beta funkcije, a ostale će oznake biti detaljnije objašnjene u poglavljima o baznim varijablama.

### 3 Bazne varijable otpornosti

Prema klasičnoj fenomenološkoj formulaciji umor materijala ubraja se u područje problema krajnjega graničnog stanja koje se definira opažanjem prvih pukotina. Noviji pristup nastoji ovaj problem svrstati u grupu problema nastajanja pukotine i davanja mogućnosti "življenja s njom". U vezi s tim nameće se, u novije vrijeme, misao da se uvodi pojam tolerantnosti oštećenja (defekata) s obzirom na namjenu, vrstu i uvjete eksploatacije čelične konstrukcije. Moglo bi se dakle zaključiti:

1. Fenomenološke  $\Delta\sigma$ - $N$  linije proizlaze iz klasične formulacije problema umora  
– pažnja na pojavi prvih pukotina.
2. Strukturalne  $\Delta\sigma$ - $N$  linije proizlaze iz mehanike loma  
– pažnja je na propagaciji pukotina.

Kao odraz težnje spajanja fenomenoloških i strukturalnih teorija funkcije vijeka trajanja pri umoru najčešće je u primjeni dobro poznata Parisova jednadžba. Izraz za funkcionalnu ovisnost razlike naprežanje,  $\Delta\sigma$  i broja promjena naprežanja,  $N$ , u općem analitičkom obliku glasi:

$$N = C \cdot \Delta\sigma^{-m} \quad (11)$$

gdje je:

$C$  - veličina koja zavisi od kategorije detalja,

$m$  - kut nagiba regresijske linije (Wöhlerove linije).

Izraz (11) može se također napisati u analitičkom obliku za sve kategorije detalja:

$$\log N = \log C - m \log \Delta\sigma \quad (12)$$

Individualni je analitički oblik za Wöhlerove liniju:

$$N = N_D \cdot \left[ \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_D} \right]^{-m} \quad (13)$$

Budući da su dosadašnja laboratorijska ispitivanja bila organizirana tako da postoji najviše podataka za čvrstoću umaranja kod broja promjena naprežanja  $N_D = 2 \cdot 10^6$  i omjera graničnih naprežanja  $r = -1$ , gornji se izraz može napisati kao:

$$N = 2 \cdot 10^6 \cdot \left[ \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_D(r = -1)} \right]^{-m} \quad (14)$$

Ako se želi ustanoviti ovisnost između  $\Delta\sigma_D$  i  $r$ , odnosno naći vrijednost  $\Delta\sigma_D$  za različite odnose granica naprežanja  $r$ , to će se postići uvođenjem funkcije korekcije  $\lambda(r)$ . Svaka se razlika naprežanja može napisati:

$$\Delta\sigma(r) = \lambda_i(r) \cdot \Delta\sigma(r = -1) \quad (15)$$

U izrazu (15) pojedine funkcije korekcije  $\lambda_i(r)$  ovisne su o kategoriji detalja. Također vrijedi da je za  $r = -1$

funkcija korekcije za sve kategorije detalja  $\lambda(r) = 1$ . Ako se uvedu oznake za bazne varijable otpornosti, tj. za parametre Wöhlerove linije, može se napisati:

$X_1 = \Delta\sigma_D(r = -1)$  - razlika napreznja pri promjeni ciklusa napreznja  $N_D = 2 \cdot 10^6$

$X_2 = m$  - kut nagiba regresijske linije (Wöhlerove linije).

U tom slučaju izraz (14) glasi:

$$N = 2 \cdot 10^6 \cdot \left[ \frac{\Delta\sigma}{X_1} \right]^{-X_2} = 2 \cdot 10^6 \cdot \left[ \frac{X_1}{\Delta\sigma} \right]^{X_2} \quad (16)$$

Statističkim testiranjem ustanovljeno je da se bazne varijable  $X_1$  i  $X_2$  najbolje prilagođavaju lognormalnoj funkciji gustoće. Statističke vrijednosti ovih baznih varijabli navedene su u [1].

#### 4 Granična vrijednost oštećenja – Minerov koeficijent kao bazna varijabla

Kumulativna vrijednost oštećenja promatrana kao bazna varijabla u probabilističkom dokazu pouzdanosti pri umoru naziva se obično Minerov koeficijent. Statističke vrijednosti ove varijable nije moguće dobiti iz jednostupanjskoga pokusa kako je to učinjeno za varijable  $X_1$  i  $X_2$ . Vrijednost Minerova koeficijenta kao bazne varijable može se prikazati izrazom:

$$X_3 = D(t) = \int_{r_d=-1}^{r_g=+1} \int_{\Delta\sigma_d=0}^{\Delta\sigma_g=+\infty} \frac{N(T) \cdot f_{\Delta\sigma,r}(\Delta\sigma, r) \cdot \Delta\sigma^{X_2}}{N_D [\lambda(r) \cdot X_1]^{X_2}} \cdot d\Delta\sigma \cdot dr \quad (17)$$

gdje je  $T$  vrijeme kod kojeg dolazi do sloma zbog umora.

Iz gornjeg izraza može se zaključiti da se pri statističkoj analizi obrade  $X_3$  mora na jednom elementu (probi) odrediti:

- ukupni broj promjena ciklusa napreznja pri kojem dolazi do sloma  $N(T)$ ,
- pripadnu funkciju gustoće vjerojatnosti razlika napreznja  $f_{\Delta\sigma, r}$  za dva parametra ( $\Delta\sigma$  i  $r$ ),
- trajnu razliku napreznja  $X_1 = \Delta\sigma_D(r = -1)$ ,
- nagib Wöhlerove linije  $X_2 = m$ .

Budući da je nemoguće dobiti sve potrebne podatke na jednom uzorku, problem se pojednostavljuje uvođenjem pretpostavki:

- koeficijent nagiba jednog pokusa odgovara nagibu regresijske linije  $\tilde{X}_2$  jedne serije pokusa,
- dvostruki integral se zamjenjuje jednostrukim ( $\lambda(r) = 1$ ) tj. smatra se da  $X_3$  ne ovisi od  $r$ .

Nakon ovih pretpostavki može se srednja vrijednost Minerova koeficijenta napisati:

$$\bar{X}_3 = \frac{\bar{N}(T)}{N_D \cdot \bar{X}_1^{\tilde{X}_2}} \cdot Z(\tilde{X}_2), \quad (18)$$

gdje je:

$$Z(\tilde{X}_2) = \int_{\Delta\sigma_d=0}^{\Delta\sigma_g=+\infty} \Delta\sigma^{\tilde{X}_2} \cdot f_{\Delta\sigma}(\Delta\sigma) d\Delta\sigma. \quad (19)$$

Sad se može od ukupnog broja proba u jednoj seriji jednostupanjski pokus izvršiti na 50% uzoraka tako da se odrede  $\bar{X}_1$  i  $\tilde{X}_2$ . Drugih 50% uzoraka se onda upotrijebi za višestupanjski pokus, tako da se može odrediti srednja vrijednost vremena pri kojem dolazi do sloma  $\bar{N}(T)$ . Za Minerov koeficijent se također može usvojiti lognormalna raspodjela.

#### 5 Bazne varijable djelovanja

Bazne varijable djelovanja, imajući na umu željezničke mostove, nazivaju se obično slučajnim parametrima položaja. Ovi parametri mogu biti vezani uz promet (osovinske sile, prosječni broj vlakova po danu itd.) ili uz element konstrukcije (dužina utjecajne linije, maksimalna vrijednost utjecajne linije itd.). Za sada će se ove varijable označiti sa  $X_4, \dots, X_n$ , a kasnije će se definirati naziv svake varijable. Potrebno je napomenuti da bazne varijable djelovanja ulaze u jednadžbu graničnog stanja pri umoru obično kao parametri oblika funkcije gustoće vjerojatnosti razlika napreznja, očekivani broj promjena napreznja u jedinici vremena itd. Ovi su parametri dobiveni iz statističkog karaktera spektra razlika napreznja iako sami nemaju svoje raspodjele. Zato će se ovi parametri u jednadžbi graničnog stanja nosivosti označavati oznakama  $X_4 = k_4, \dots, X_n = k_n$ . Iz tog proizlazi da je zapis  $\sigma - t$  tretiran statistički (za određenu dionicu pruge, određenu dužinu utjecajne linije itd.) iako parametri  $k_j$  asociraju na determinističke veličine.

Bazne varijable djelovanja sadržane su u tzv. spektru napreznja za dimenzioniranje, koji je u potpunosti definiran:

- funkcijom gustoće razlike napreznja  $f_{\Delta\sigma}(\Delta\sigma)$ ,
- očekivanim brojem promjena napreznja u karakterističnom promatranom vremenskom razmaku,
- vrijednošću maksimalne ili srednje vrijednosti razlike napreznja u odabranom presjeku,
- vjerojatnošću nastupanja spektra razlika napreznja karakteristika pod a), b) i c).

Kako bi se u praktičnim zadacima rješavanja problema pouzdanosti pri umoru mogli koristiti spektrom napreznja on mora biti reprezentativan za određenu dionicu želje-

zničke pruge, odnosno za most na toj dionici, s obzirom na trenutno stanje djelovanja. Također se moraju predvidjeti i budući uvjeti eksploatacije, jer problem umora pripada grupi problema s izrazito dugim vremenskim karakterom.

Formiranje spektra razlika naprezanja za dimenzioniranje pri umoru željezničkih mostova za određenu prugu, odnosno dionicu te pruge, može se provesti prema sljedećem algoritmu:

1. Definiraju se slučajevi opterećenja koji su dio opterećenja umora. Slučajevi opterećenja predstavljaju pojedine vlakove koji su definirani brojem prolaza, veličinom i geometrijskim rasporedom osovinskih sila.
2. Slučajevi opterećenja moraju imati jednu vremensku i prostornu dimenziju, odnosno moraju se 'dogoditi' u određenom slijedu tako da se definiraju događaji opterećenja.
3. Odrede se svi slučajevi (događaji) opterećenja koji pridonose utjecaju umora.
4. Formira se pojednostavljeno (ekvivalentno) opterećenje umaranja, koje daje efekt umora od svih događaja opterećenja.
5. S pomoću odabrane metode dobiva se  $\sigma$ - $t$  zapis, koji pokazuje promjene naprezanja u točki interesantnog poprečnog presjeka elementa za vrijeme događaja ekvivalentnog opterećenja umora.
6. Iz  $\sigma$ - $t$  zapisa prebrojavaju se razlike naprezanja, obično metodom spremnika.
7. Formira se spektar za dimenzioniranje, odnosno procjenu, pri umoru kao ukupni zbroj svih nominalnih razlika naprezanja uzrokovanih svim događajima opterećenja (prolazom svih vlakova) radi procjene (dimenzioniranja) pri umoru materijala.

Simulacijom razlika momenata za analiziranu prugu odnosno dionicu pruge i odabrane raspone nosača dobivaju se statističke vrijednosti sljedećih podataka:

- $\max \Delta M$  - maksimalna razlika momenata (tj.  $\Delta \sigma$ ),
- $\Delta \bar{M}$  - srednja vrijednost razlike momenata (tj.  $\Delta \bar{\sigma}$ ),
- $\sigma_M$  - standardna devijacija od  $\Delta M$  (tj.  $\Delta \sigma$ ),
- $V_{\Delta M}$  - koeficijent varijacije od  $\Delta M$  (tj.  $\Delta \sigma$ ),
- $\sum n$  - broj promjena  $\Delta M$  (tj.  $\Delta \sigma$ ) za 1 godinu.

Dakle, simulacijom na elektroničkom računalu dobiju se spektri razlika naprezanja (razlika momenata) kao slučajne veličine. Statistički parametri ovih slučajnih veličina baznih varijabli djelovanja potrebne su podloge za izra-

čunavanje stupnja pouzdanosti (indeksa pouzdanosti) iz jednadžbi graničnog stanja konstrukcija pri otkazivanju zbog umora.

Ako se prihvati *beta funkcija* za gustoću vjerojatnosti razlika naprezanja, kao varijable na strani djelovanja kod problema umora, pojavljuju se:

- $K_1 = N_{(t_{ND})} = t_{ND} \cdot E [ \cdot ]$  - očekivani ukupni broj promjena ciklusa naprezanja za standardnu trajnost  $t_{ND}$ ,
- $K_2 = N_D$  - broj promjena ciklusa naprezanja  $2 \cdot 10^6$ ,
- $K_3 = \Delta \sigma_{\max}$  - maksimalna razlika graničnih naprezanja,
- $K_4 = \alpha$  } - parametri oblika (realni pozitivni brojevi  $\alpha, \beta > 0$ ),
- $K_5 = \beta$  }

Izborom parametara oblika *beta funkcija* može se jako dobro prilagoditi različitim oblicima spektra razlika naprezanja.

### 6 Primjer

Kao što je već prikazano, jednadžba graničnog stanja kod problema umora može se napisati u sljedećem obliku:

$$D(t) = \frac{N(t_{ND})}{N_D} \left( \frac{\Delta \sigma_{\max}}{\Delta \sigma_D} \right)^m \cdot \frac{\Gamma(m + \alpha) \cdot \Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(m + \alpha + \beta)} = 0$$

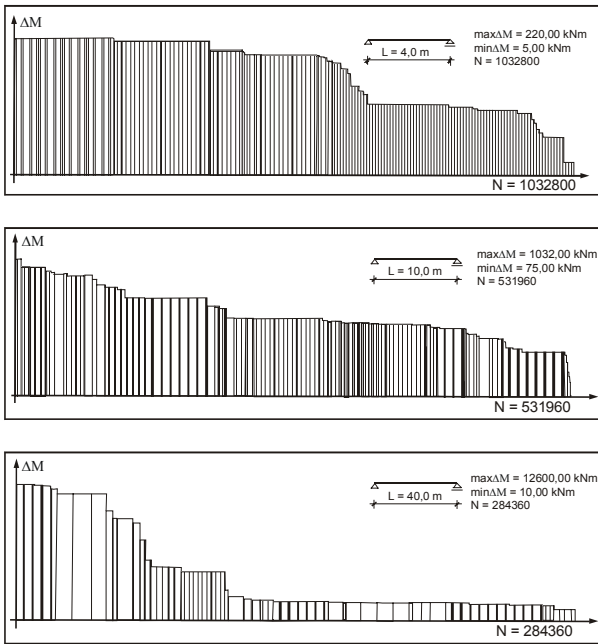
Statističke vrijednosti baznih varijabli na strani otpornosti u gornjem izrazu, na primjer njihove srednje vrijednosti i koeficijenti varijacije, uzeti su prema [1]. Statističke vrijednosti na strani djelovanja dobivene su kompjutorskom simulacijom realnih prolaza vlakova preko mostova koji su projektirani prema tadašnjim tehničkim propisima. Dobivene su sljedeće vrijednosti:

- $\Delta \sigma_{\max}$  - maksimalna razlika naprezanja ( $\Delta \sigma$ ),
- $\Delta \bar{\sigma}$  - srednja vrijednost  $\Delta \sigma$ ,
- $V_{\Delta \sigma}$  - koeficijent varijacije od  $\Delta \sigma$ ,
- $\sum n$  - broj promjena  $\Delta \sigma$  u vremenskoj jedinici (1 godina).

Za ukupno oštećenje u vremenu  $t$ ,  $D(t)$ , usvojena je linearna hipoteza akumulacije oštećenja.

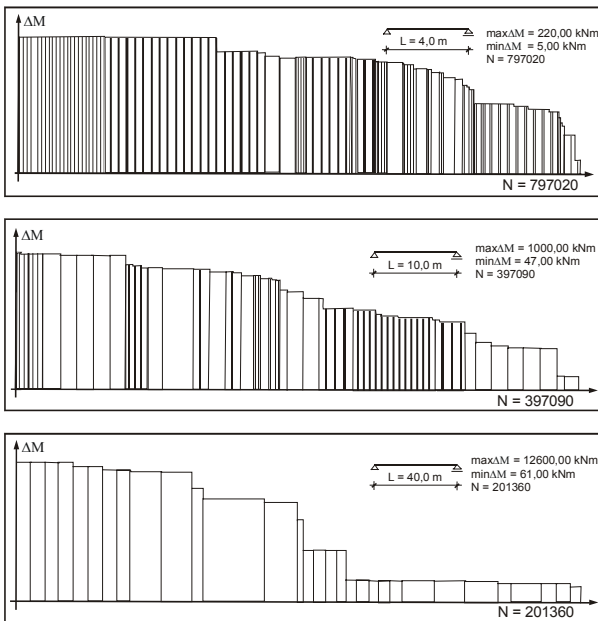
Analiza je provedena na jednokolosiječnoj pruzi linije Zagreb – Rijeka. Podaci ekvivalentnog opterećenja umaranja određeni su za dionice:

- I. Zagreb – Karlovac tipična ravninska dionica pruge Zagreb – Rijeka, slika 1.



Slika 1. Spektar  $\Delta M$  za dionicu Zagreb – Karlovac

II. Rijeka – Lokve tipična brdska dionica pruge Zagreb – Rijeka, slika 2.



Slika 2 Spektar  $\Delta M$  za dionicu Rijeka - Lokve

Indeksi pouzdanosti izračunani su za sedam karakterističnih detalja prikazanih u tablici 1.

Odabrani su rasponi nosača dugi 4, 10 i 40 metara te su indeksi pouzdanosti izračunani za vijek trajanja  $t_{ND}$  od 10 i 50 godina. U tablicama 2., 3. i 4. prikazani su dobi veni indeksi pouzdanosti  $\beta$ , za trajnost od 10 godina (stupac A) i trajnost od 50 godina (stupac B) za različite kategorije detalja.

Tablica 1. Prikaz karakterističnih detalja

Opis detalja	Skica
1. Osnovni materijal, naprezan na savijanje	
2. Element s rupama	
3. Poprečni sučeoni var, neobrađen	
4. Poprečni sučeoni var, obrađen	
5. Poprečno ukrućenje	
6. Uzdužno ukrućenje	
7. Dvostruki var u uvali, obrada K	

Tablica 2. Indeksi pouzdanosti za raspon L = 4 m

Kategorija detalja	I. dionica		II. dionica	
	A	B	A	B
1	7,51	5,72	8,18	5,41
2	5,10	3,08	5,37	3,20
3	2,68	1,21	2,88	1,30
4	3,79	2,26	4,02	2,35
5	2,40	< 1	2,61	< 1
6	2,17	< 1	2,37	< 1
7	4,40	2,57	4,61	2,69

Tablica 3. Indeksi pouzdanosti za raspon L = 10 m

Kategorija detalja	I. dionica		II. dionica	
	A	B	A	B
1	9,43	6,71	> 10	6,90
2	7,16	4,60	7,84	4,72
3	4,33	2,32	4,86	2,43
4	5,36	3,34	5,90	3,47
5	4,20	2,11	4,71	2,17
6	3,85	1,88	4,36	1,94
7	6,55	4,03	6,60	4,11



Tablica 4. Indeksi pouzdanosti za raspon L = 40 m

Kategorija detalja	I. dionica		II. dionica	
	A	B	A	B
1	> 10	8,91	> 10	8,39
2	> 10	6,37	> 10	6,00
3	7,48	3,69	7,68	3,38
4	8,31	4,72	8,58	4,48
5	7,46	3,50	7,64	3,14
6	6,98	3,20	7,22	2,88
7	6,94	5,67	6,63	5,16

Na današnjem stupnju razvoja tehničke znanosti osnovna je uloga metoda pouzdanosti da posluže u donošenju odluka pri sastavljanju suvremenih norma.

Ovaj primjer prikazuje dobivene indekse pouzdanosti iz aspekta umora na elementima postojećih čeličnih željezničkih mostova u Hrvatskoj na pruzi Zagreb – Rijeka. Provedena analiza pokazuje da su izračunani indeksi pouzdanosti izrazito neujednačeni, u rasponu od  $\beta = 1$  do  $\beta = 10$ , ovisno o kategoriji detalja, rasponu nosača, odabranom vijeku trajanja i analiziranoj dionici željezničke linije.

Najveći utjecaj na indeks pouzdanosti  $\beta$  ima bazna varijabla  $m$  (kut nagiba Wöhlerove linije) što je uočljivo iz rezultata kompjutorske analize gdje se koeficijenti senzibiliteta kreću između vrijednosti 0,80 do 0,98, prema [3]. Ovi podaci jasno upućuju na zaključak da uobičajeno prihvaćena paralelnost (isti nagib) Wöhlerovih linija za pojedine kategorije detalja u dvostrukom logaritamskom mjerilu nije opravdana.

Tablice 2., 3. i 4. prikazuju značajne razlike u vrijednostima indeksa pouzdanosti u odnosu na standardnu trajnost (vijek trajanja) od 10 odnosno 50 godina. To znači da bi se zahtijevani indeks pouzdanosti trebao jednako tako smanjivati ovisno o projektiranom vijeku trajanja, na primjer prijedlog EN 1990: 2002 na kraju projektiranog vijeka trajanja predlaže usvajanje vrijednosti indeksa pouzdanosti od 1,5 do 3,8 u ovisnosti pristupačnosti pri pregledu detalja.

Kod postupka kalibracije naših najstarijih postojećih mostova pokazalo se koju razinu pouzdanosti imaju raz-

ličite kategorije detalja 1. Takva analiza provedena je za most na liniji Zagreb – Rijeka koji je izgrađen 1895. [3].

## 7 Zaključak

Shvaćajući dublji smisao ideje problema pouzdanosti s aspekta vjerojatnosti otkazivanja pri umoru, došlo se do mogućnosti da se iskažu relativni odnosi postignutih stupnjeva pouzdanosti pojedinih kategorija detalja. Na taj se način omogućava ujednačavanje stupnjeva pouzdanosti među tim detaljima, što je i osnovna prednost u odnosu na poglede pouzdanosti s determinističkog pristupa.

Provedenim postupkom kalibracije dobivene su vrijednosti indeksa pouzdanosti kategorija detalja podložnih umaranju za željezničke čelične mostove na liniji Zagreb – Rijeka. Treba biti svjestan činjenice da prihvaćanje rizika otkazivanja, na primjer stupnja pouzdanosti prema EN 1990: 2002, nije nacionalni problem, budući da ne postoji izričito nacionalna željeznička mreža. Međutim, dosadašnja istraživanja i iskustva na ovom području ukazuju na sljedeće činjenice.

Prije svega, sadašnje iskustvo govori nam da nije prihvatljivo, u našim uvjetima, ići na veću standardnu trajnost od 50 godina. S druge su pak strane privremene predložene mjere da se upotrebljava zahtijevani indeks pouzdanosti u funkciji projektiranog vremena upotrebe i dostupnosti pregleda pojedinih kategorija detalja prema EN 1990: 2002, Eurocode – Basis of structural design.

Danas svako povećanje zahtijevanog indeksa pouzdanosti, bez nekog posebnog obrazloženja, može izazvati ekonomske probleme budući da je cijela generacija čeličnih željezničkih mostova u upotrebi. Ovi su mostovi projektirani po neprimjerenom  $r$ -konceptu i determinističkom pristupu pouzdanosti.

Sljedeći bi korak ovog istraživanja bio uspoređivanje rezultata s nacionalnim rezultatima i iskustvom ostalih zemalja Europe, kako bi se mogao prihvatiti zahtijevani indeks pouzdanosti, ali i harmonizacija koncepta pouzdanosti iz aspekta umaranja s ostalim europskim korisnicima željezničkog prometa. To bi značilo i uvođenje novih modela nelinearne akumulacije oštećenja u probabilistički pristup pouzdanosti kod problema umora.

## LITERATURA

- [1] Quel, R.; Geidner, Th.: *Zuverlässigkeit von Konstruktionselementen bei Ermüdungsbeanspruchung*, Der Stahlbau 1/1980, str. 16 - 13
- [2] Reppermund, K.: *Konzepte zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit bei Ermüdungsbeanspruchung*. Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke, LKI Technische Universität München, Heft 84/1981.
- [3] Androić, B.: *Vjerojatnost otkazivanja nosivosti čeličnih željezničkih mostova zbog zamaranja*, Disertacija, Zagreb, 1986.
- [4] Androić, B.; Franić, T.: *Utjecaj izbora funkcije vjerojatnosti naponskih razlika na indeks pouzdanosti kod zamaranja*, VIII kongres, Savez društva građevinskih konstruktera Jugoslavije, Cavtat, 1987.
- [5] Androić, B.; Milčić, V.: *Reliability Determination at Fatigue in Steel Bridges on Yugoslav Railways*, Symposium on Reliability – Based Design in Civil Engineering, Lausanne, EPFL, July 7-9, 1988.
- [6] Androić, B.; Dujmović, D.; Džeba, I.: *Metalne konstrukcije I*, Zagreb, 1994
- [7] EN 1990: 2002, *Eurocode – Basis of structural design*, CEN, Brussels, 2002.
- [8] Androić, B.; Dujmović, D.; Džeba, I.: *Metalne konstrukcije IV*, Zagreb, 2003.