

Slobodne oscilacije cilindrične tanke ljuske

Stanke, Ivan

Source / Izvornik: **Građevinar, 2004, 56, 631 - 637**

Journal article, Published version

Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:899061>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-14**

Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,
University of Zagreb](#)



Slobodne oscilacije cilindrične tanke ljuske

Ivan Stanke

Ključne riječi

cilindrična tanka ljuska, svojstvene vrijednosti, svojstvene frekvencije, valna jednažba, metoda redukcije dimenzije, program Mathematica

Key words

thin cylindrical shell, eigenvalues, eigenfrequencies, wave equation, dimension reduction method, Mathematica software

Mots clés

coque mince cylindrique, valeurs propres, fréquences propres, équation d'onde, méthode de la réduction des dimensions, logiciel "Mathematica"

Ключевые слова

цилиндрическая тонкая оболочка, характерные значения, характерные частоты, волновое уравнение, метод редукции размера, программа Математика (Mathematica)

Schlüsselworte

zylindrische dünne Schale, kennzeichnende Werte, kennzeichnende Frequenzen, Wellengleichung, Methode der Größenreduktion, Programm Mathematica

I. Stanke

Prethodno priopćenje

Slobodne oscilacije cilindrične tanke ljuske

Promatra se elastična homogena izotropna kružna cilindrična tanka ljuska učvršćena na krajevima. Traže se svojstvene vrijednosti i svojstvene frekvencije takve ljuske. U tu svrhu promatra se valna jednažba kružne cilindrične tanke ljuske sa zadanim rubnim uvjetom. Rješavanjem valne jednažbe uz primjenu metode redukcije dimenzije (MRD), mogu se izračunati svojstvene vrijednosti λ i svojstvene frekvencije k . Proračun je obavljen na računaru korištenjem programa Mathematica.

I. Stanke

Preliminary note

Free oscillations of a thin cylindrical shell

An elastic homogeneous isotropic circular cylindrical thin shell fixed at its ends is considered. Eigenvalues and eigenfrequencies of such shell are analyzed. The wave equation of the circular cylindrical thin shell, with an adequately specified boundary condition, is used for that purpose. Eigenvalues λ and eigenfrequencies k can be calculated by the wave equation using the dimension reduction method (DMR). The calculation was carried out on personal computer using the Mathematica software.

I. Stanke

Note préliminaire

Les oscillations libres des coque d'une minces cylindriques

La coque mince élastique homogène isotrope circulaire et cylindrique, fixée aux extrémités, est considérée. Les valeurs propres et les fréquences propres de cette coque sont analysées. A cet effet, l'on a utilisé l'équation d'onde pour la coque circulaire cylindrique, avec la condition aux limites bien définie. La solution de l'équation d'onde en utilisant la méthode de la réduction des dimensions (MRD) permet le calcul de la valeur propre λ et de la fréquence propre k . Le calcul a été effectué sur ordinateur en utilisant le logiciel "Mathematica".

II. Станке

Предварительное сообщение

Свободные осцилляции цилиндрической тонкой оболочки

В работе описывается упругая гомогенная изотропная круговая цилиндрическая тонкая оболочка, закреплённая на краях. Требуется найти характерные значения и характерные частоты такой оболочки. С той целью ведётся наблюдение над волновым уравнением круговой цилиндрической тонкой оболочки с заданным предельным условием. Решением волнового уравнения при применении метода редукции размера могут быть рассчитаны характерные значения λ и характерные частоты k . Расчёт сделан на компьютере при использовании программы Математика (Mathematica).

I. Stanke

Vorherige Mitteilung

Freie Schwingungen der zylindrischen dünnen Schale

Man betrachtet eine elastische homogene isotrope kreisförmige zylindrische dünne Schale die an den Enden befestigt ist. Gesucht sind die kennzeichnenden Werte und die kennzeichnenden Frequenzen einer solchen Schale. Zu diesem Zweck betrachtet man die Wellengleichung der kreisförmigen zylindrischen dünnen Schale mit aufgebener Randbedingung. Durch Lösung der Wellengleichung unter Anwendung der Methode der Größenreduktion (MRD) kann man die kennzeichnenden Werte λ und die kennzeichnenden Frequenzen k berechnen. Die Berechnung wurde an einer Rechneranlage durchgeführt, wobei man das Programm Mathematica benützte.

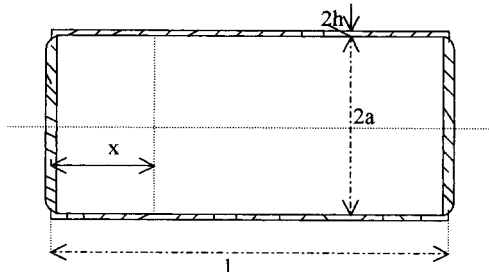
Autor: Mr. sc. **Ivan Stanke**, dipl. ing. građ., Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, Kačićeva 26, Zagreb

1 Uvod

Posljednjih dvadeset godina M. Vogelius i I. Babuška razvili su metodu redukcije dimenzije (MRD), koja se primjenjuje na niz problema mehanike kontinuuma. MRD počela se primjenjivati i na problem svojstvenih vrijednosti i svojstvenih funkcija nekih diferencijalnih jednažbi. Problem slobodnih oscilacija cilindrične tanke ljuske svodi se na problem svojstvenih vrijednosti jedne određene jednažbe zapisane u matricnom obliku i za rješavanje toga problema koristi se MRD-om.

2 Formulacija problema

Promatra se elastična homogena i izotropna kružna cilindrična tanka ljuska. Ljuska je zatvorena i oba su kraja pričvršćena (slika 1.).



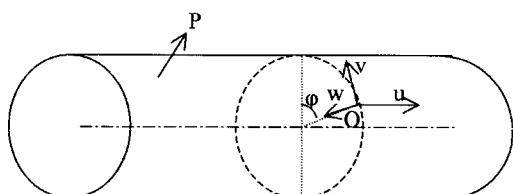
Slika 1. Poprečni presjek cilindrične ljuske

Na slici 1. x je udaljenost presjeka ljuske duž izvodnice do neke točke srednje plohe ljuske, a je polumjer kružne cilindrične ljuske, $2h = H$ debljina ljuske, koja je mala u odnosu na a i l , l je duljina ljuske u smjeru izvodnice, ρ je masa po jedinici plohe- površinska gustoća, μ je

Poissonov koeficijent, $\xi = \frac{x}{a}$,

$$\beta^2 = \frac{h^2}{a^2}.$$

P je srednja ploha ljuske koja dijeli debljinu ljuske napola. Komponente pomaka neke točke srednje plohe su: u smjeru izvodnice u , u smjeru tangente v , u smjeru normale na srednju plohu w ; φ je kut između ravnine postavljene kroz promatranu točku srednje plohe i os cilindrične ljuske te fiksne osne ravnine (slika 2.).



Slika 2. Komponente pomaka točke O

Pri izvođenju diferencijalnih jednažbi slobodnih oscilacija kružne cilindrične tanke ljuske ne uzimaju se u

obzir hipoteze Kirchhoff – Lovea. Iz uvjeta ravnoteže elementa tanke ljuske pri čemu se sve sile i momenti izraze pomoću komponenata pomaka u, v, w dobije se sustav diferencijalnih jednažbi slobodnih oscilacija kružne cilindrične tanke ljuske oblika

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \varphi} - \mu \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{1-\mu}{2} \frac{\beta^2}{3} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \varphi^2} \\ & = \frac{\rho a^2 (1-\mu^2)}{2 E h} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ & \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \left[\frac{1-\mu}{2} (1+\beta^2) + 1 + \frac{\beta^2}{3} \right] \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \\ & \frac{\beta^2}{3} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} - \frac{3-\mu}{2} \frac{\beta^2}{3} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi} = \frac{\rho a^2 (1-\mu^2)}{2 E h} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1) \\ & \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\beta^2}{3} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) \\ & - w - \frac{\beta^2}{3} \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} - \frac{2-\mu}{3} \beta^2 \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^2 \partial \varphi} = \frac{\rho a^2 (1-\mu^2)}{2 E h} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Sustav diferencijalnih jednažbi (1) poboljšan je sustav diferencijalnih jednažbi dobiven po teoriji S. Timošenka i predstavlja valne jednažbe teorije cilindričnih ljusaka.

Uz sustav (1) zadani su rubni uvjeti, kružna cilindrična tanka ljuska pričvršćena je na krajevima $\xi = 0, \xi = \frac{l}{a}$,

$$v = 0, w = 0, \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad (2)$$

Do valnih jednažbi (1) kružne cilindrične tanke ljuske može se doći na temelju varijacijskog principa fizike kontinua. Izgradi se Lagrangeova funkcija $L = T - U$, gdje je T kinetička energija, a U potencijalna energija elementa kružne cilindrične tanke ljuske. Na temelju Hamiltonova principa, koji glasi

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - U) = \text{minimum}$$

dolazi se do valnih jednažbi (1).

Diferencijalne jednažbe (1) mogu se napisati u obliku

$$\begin{aligned} D_{11}(u) + D_{12}(v) + D_{13}(w) &= \frac{\rho a^2 (1-\mu^2)}{2 E h} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ D_{21}(u) + D_{22}(v) + D_{23}(w) &= \frac{\rho a^2 (1-\mu^2)}{2 E h} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3) \\ D_{31}(u) + D_{32}(v) + D_{33}(w) &= \frac{\rho a^2 (1-\mu^2)}{2 E h} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned}$$

gdje su $D_{ij}, i, j = 1, 2, 3$ linearni diferencijalni operatori:

$$D_{11}(u) = \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] u, \quad D_{12}(v) = \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \varphi}$$

$$D_{13}(w) = \left[-\mu \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1-\mu}{2} \frac{\beta^2}{3} \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \varphi^2} \right] w,$$

$$D_{21}(u) = \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \varphi}$$

$$D_{22}(v) = \left[\frac{1-\mu}{2} (1+\beta^2) + 1 + \frac{\beta^2}{3} \right] \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \quad (4)$$

$$D_{23}(w) = \left[-\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\beta^2}{3} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} - \frac{3-\mu}{2} \frac{\beta^2}{3} \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \varphi} \right] w,$$

$$D_{31}(u) = \mu \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$D_{32}(v) = \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\beta^2}{3} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} - \frac{2-\mu}{3} \beta^2 \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \varphi} \right] v,$$

$$D_{33}(w) = \left[-\frac{\beta^2}{3} \left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \right) - 1 \right] w$$

Sustav diferencijalnih jednadžbi (3) može se napisati u obliku

$$\mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{B} \mathbf{U} \quad (5)$$

gdje je :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \quad (6)$$

a D_{ij} $i, j = 1, 2, 3$ su diferencijalni operatori definirani formulama (4),

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\rho a^2 (1-\mu^2)}{2 E h} \frac{\partial^2}{\partial t^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho a^2 (1-\mu^2)}{2 E h} \frac{\partial^2}{\partial t^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho a^2 (1-\mu^2)}{2 E h} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{i} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (8)$$

Operatori \mathbf{A} i \mathbf{B} su linearni .

Pomak \mathbf{U} traži se u obliku

$$\mathbf{U} = \mathbf{\tilde{u}} (\xi, \varphi) \cos kt, \quad (9)$$

zadovoljava rubne uvjete (2), gdje je k svojstvena frekvencija a

$$\mathbf{\tilde{u}} (\xi, \varphi) = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{v}_1 \\ \tilde{w}_1 \end{bmatrix}.$$

Uvrsti li se (9) u (5) dobije se

$$\mathbf{A} \mathbf{\tilde{u}} = \lambda \mathbf{\tilde{B}} \mathbf{\tilde{u}} \quad (10)$$

gdje je:

$$\lambda = \frac{k^2 a^2 \rho (1-\mu^2)}{2 E h}, \quad (11)$$

$$\mathbf{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Treba odrediti svojstvene vrijednosti λ jednadžbe (10) .

3 Primjena metode redukcije dimenzije (MRD) na rješavanje problema vlastitih frekvencija kružne cilindrične tanke ljske

Promatra se jednadžba (10)

$$\mathbf{A} \mathbf{\tilde{u}} = \lambda \mathbf{\tilde{B}} \mathbf{\tilde{u}}$$

i rubni uvjeti (2) , traže se svojstvene vrijednosti $\lambda \neq 0$.

Rješenje jednadžbe (10) traži se u obliku

$$\mathbf{\tilde{u}} (\xi, \varphi) = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{v}_1 \\ \tilde{w}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_m(\xi) \varphi_n^{(1)}(\varphi) \\ V_m(\xi) \varphi_n^{(2)}(\varphi) \\ W_m(\xi) \varphi_n^{(3)}(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_m(\xi) \sin n\varphi \\ V_m(\xi) \cos n\varphi \\ W_m(\xi) \sin n\varphi \end{bmatrix} \quad (13)$$

Funkcije $U_m(\xi)$, $V_m(\xi)$, $W_m(\xi)$, određuju se iz zahtjeva da skalarni produkt $\mathbf{A} \mathbf{\tilde{u}} - \lambda \mathbf{\tilde{B}} \mathbf{\tilde{u}}$ sa

$\varphi_n^{(1)}(\varphi)$, $\varphi_n^{(2)}(\varphi)$, $\varphi_n^{(3)}(\varphi)$ mora biti jednak nuli, prema tome dobije se sustav jednadžbi:

$$\int_0^{2\pi} [D_{11}(\tilde{u}_1) + D_{12}(\tilde{v}_1) + D_{13}(\tilde{w}_1) + \lambda \tilde{u}_1] \varphi_n^{(1)}(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} [D_{21}(\tilde{u}_1) + D_{22}(\tilde{v}_1) + D_{23}(\tilde{w}_1) + \lambda \tilde{v}_1] \varphi_n^{(2)}(\varphi) d\varphi = 0 \quad (14)$$

$$\int_0^{2\pi} [D_{31}(\tilde{u}_1) + D_{32}(\tilde{v}_1) + D_{33}(\tilde{w}_1) + \lambda \tilde{w}_1] \varphi_n^{(3)}(\varphi) d\varphi = 0 \quad N$$

a temelju (13) gdje su zadani \tilde{u}_1 , \tilde{v}_1 , \tilde{w}_1 dobije se :

$$D_{11}(\tilde{u}_1) = U_m'(\xi) \sin n\varphi - U_m(\xi) \frac{1-\mu}{2} n^2 \sin n\varphi,$$

$$D_{12}(\tilde{v}_1) = -V_m'(\xi) \frac{1+\mu}{2} n \sin n\varphi,$$

$$\begin{aligned}
 D_{13}(\tilde{w}_1) &= -W'_m(\xi)\mu \sin n\varphi + W'_m(\xi)\frac{1-\mu}{2}\frac{\beta^2}{3}n^2 \sin n\varphi, \\
 D_{21}(\tilde{u}_1) &= U'_m(\xi)\frac{1+\mu}{2}n \cos n\varphi, \\
 D_{22}(\tilde{v}_1) &= V'_m(\xi)\left[\frac{1-\mu}{2}(1+\beta^2)+1+\frac{\beta^2}{3}\right] \cos n\varphi - \\
 &\quad - V_m(\xi)n^2 \cos n\varphi, \\
 D_{23}(\tilde{w}_1) &= W_m(\xi)\left[-n \cos n\varphi - \frac{\beta^2}{3}n^3 \cos n\varphi\right], \\
 &\quad - W''_m(\xi)\frac{3-\mu}{2}\frac{\beta^2}{3}n \cos n\varphi \\
 D_{31}(\tilde{u}_1) &= U'_m(\xi)\mu \sin n\varphi, \\
 D_{32}(\tilde{v}_1) &= V_m(\xi)\left[-n \sin n\varphi - \frac{\beta^2}{3}n^3 \sin n\varphi\right] + \\
 &\quad + V''_m(\xi)\frac{2-\mu}{3}\beta^2 n \sin n\varphi \\
 D_{33}(\tilde{w}_1) &= -W''''_m(\xi)\frac{\beta^2}{3} \sin n\varphi + W''_m(\xi)\frac{2}{3}\beta^2 n^2 \sin n\varphi + \\
 &\quad + W_m(\xi)\left[-\frac{\beta^2}{3}n^4 \sin n\varphi - \sin n\varphi\right]
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Na temelju (15), nakon provedene integracije i odgovarajućeg sređivanja, sustav (14) poprima oblik

$$\begin{aligned}
 D_1U_m(\xi) + D_2V_m(\xi) + D_3W_m(\xi) + \lambda U_m(\xi) &= 0, \\
 D_4U_m(\xi) + D_5V_m(\xi) + D_6W_m(\xi) + \lambda V_m(\xi) &= 0, \\
 D_7U_m(\xi) + D_8V_m(\xi) + D_9W_m(\xi) + \lambda W_m(\xi) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Uz sustav (16) zadani su rubni uvjeti koji se dobiju iz (2) i glase:

$$\begin{aligned}
 U'_m(0) = 0, U'_m\left(\frac{l}{a}\right) = 0, V_m(0) = 0, V_m\left(\frac{l}{a}\right) &= 0, \\
 W_m(0) = 0, W_m\left(\frac{l}{a}\right) = 0, \\
 W'_m(0) = 0, W'_m\left(\frac{l}{a}\right) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Za sustav (16) je:

$$\begin{aligned}
 D_1U_m(\xi) &= U''_m(\xi) - \frac{1-\mu}{2}n^2U_m(\xi), \\
 D_2V_m(\xi) &= -\frac{1+\mu}{2}nV'_m(\xi), \\
 D_3W_m(\xi) &= \left(-\mu + \frac{1-\mu}{2}\frac{\beta^2}{3}n^2\right)W'_m(\xi),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_4U_m(\xi) &= \frac{1+\mu}{2}nU'_m(\xi) \\
 D_5V_m(\xi) &= \left(\frac{1-\mu}{2}(1+\beta^2)+1+\frac{\beta^2}{3}\right)V''_m(\xi) - n^2V_m(\xi), \\
 D_6W_m(\xi) &= -\frac{3-\mu}{2}\frac{\beta^2}{3}nW''_m(\xi) + \left(-n - \frac{\beta^2}{3}n^3\right)W'_m(\xi), \\
 D_7U_m(\xi) &= \mu U'_m(\xi) \\
 D_8V_m(\xi) &= \frac{2-\mu}{3}\beta^2nV''_m(\xi) + \left(-n - \frac{\beta^2}{3}n^3\right)V'_m(\xi), \\
 D_9W_m(\xi) &= -\frac{\beta^2}{3}W''''_m(\xi) + \frac{2}{3}\beta^2n^2W''_m(\xi) \\
 &\quad + \left(-1 - \frac{\beta^2}{3}n^4\right)W'_m(\xi)
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Približno rješenje problema (16) i (17) traži se u obliku

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}_m(\xi) &= \sum_{i=1}^m A_i \psi_i(\xi), \tilde{V}_m(\xi) = \sum_{i=1}^m B_i \varphi_i(\xi), \\
 \tilde{W}_m(\xi) &= \sum_{i=1}^m C_i g_i(\xi)
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

gdje su $\psi_i(\xi)$, $\varphi_i(\xi)$ i $g_i(\xi)$ koordinatne funkcije iz $C^4\left[0, \frac{l}{2}\right]$, zadovoljavaju rubne uvjete (17) i linearno su nezavisne. Prema tome koordinatne funkcije glase:

$$\begin{aligned}
 \psi_i(\xi) &= \frac{1}{i} \cos(i\pi a \frac{\xi}{l}), \varphi_i(\xi) = \frac{1}{i} \sin(i\pi a \frac{\xi}{l}), \\
 g_i(\xi) &= \frac{1}{i} \sin^2(i\pi a \frac{\xi}{l}), i = 1, 2, \dots, m.
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Promatra se približno rješenje za $m = 1$

$$\tilde{U}_1(\xi) = A_1 \psi_1(\xi), \tilde{V}_1(\xi) = B_1 \varphi_1(\xi), \tilde{W}_1(\xi) = C_1 g_1(\xi)
 \tag{21}$$

Primjenom Galerkinove metode koeficijenti A_1 , B_1 , C_1 određuju se iz uvjeta da skalarni produkt lijeve strane diferencijalnih jednadžbi (16), kada se u njih uvrsti približno rješenje (21), s koordinatnim funkcijama (20) bude jednak nuli to jest

$$\begin{aligned}
 A_1(D_1\psi_1, \psi_1) + B_1(D_2\varphi_1, \psi_1) + C_1(D_3g_1, \psi_1) \\
 + \lambda A_1(\psi_1, \psi_1) &= 0 \\
 A_1(D_4\psi_1, \varphi_1) + B_1(D_5\varphi_1, \varphi_1) + C_1(D_6g_1, \varphi_1) \\
 + \lambda B_1(\varphi_1, \varphi_1) &= 0 \\
 A_1(D_7\psi_1, g_1) + B_1(D_8\varphi_1, g_1) \\
 + C_1(D_9g_1, g_1) + \lambda C_1(g_1, g_1) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

gdje je : $S = \frac{1}{a}$, $\gamma = \frac{a}{1}$,

$$(D_1 \psi_1, \psi_1) = \int_0^S D_1(\psi_1(\xi)) \psi_1(\xi) d\xi = S \left(-\frac{\pi^2}{2} \gamma^2 - \frac{1-\mu}{4} n^2 \right),$$

$$(D_2 \varphi_1, \psi_1) = \int_0^S D_2(\varphi_1(\xi)) \psi_1(\xi) d\xi = -\frac{\pi}{4} (1+\mu) n,$$

$$(D_3 g_1, \psi_1) = \int_0^S D_3(g_1(\xi)) \psi_1(\xi) d\xi = \frac{4}{3} \left(-\mu + \frac{1-\mu}{2} \frac{\beta^2}{3} n^2 \right),$$

$$(D_4 \psi_1, \varphi_1) = \int_0^S D_4(\psi_1(\xi)) \varphi_1(\xi) d\xi = -n(1+\mu) \frac{\pi}{4}, \quad (23)$$

$$(D_5 \varphi_1, \varphi_1) = \int_0^S D_5(\varphi_1(\xi)) \varphi_1(\xi) d\xi = - \left[\frac{1-\mu}{2} (1+\beta^2) + 1 + \frac{\beta^2}{3} \right] \frac{\pi^2}{2} \gamma - n^2 \frac{S}{2},$$

$$(D_6 g_1, \varphi_1) = \int_0^S D_6(g_1(\xi)) \varphi_1(\xi) d\xi = \frac{4}{3\pi} S \left[\frac{3-\mu}{2} \frac{\beta^2}{3} \pi^2 \gamma^2 n - (n+n^3) \frac{\beta^2}{3} \right],$$

$$(D_7 \psi_1, g_1) = \int_0^S D_7(\psi_1(\xi)) g_1(\xi) d\xi = -\frac{4}{3} \mu,$$

$$(D_8 \varphi_1, g_1) = \int_0^S D_8(\varphi_1(\xi)) g_1(\xi) d\xi = \frac{4}{3\pi} S \left[-\frac{2-\mu}{3} \beta^2 \pi^2 \gamma^2 n - \left(n+n^3 \frac{\beta^2}{3} \right) \right],$$

$$(D_9 g_1, g_1) = \int_0^S D_9(g_1(\xi)) g_1(\xi) d\xi = S \left[-\frac{2}{3} \pi^4 \beta^2 \gamma^4 - \frac{1}{3} \pi^2 \beta^2 \gamma^2 n^2 - \frac{3}{8} \left(1 + \frac{\beta^2}{3} n^4 \right) \right],$$

$$(\psi_1, \psi_1) = \int_0^S \psi_1(\xi) \psi_1(\xi) d\xi = \frac{1}{2} S,$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^S \varphi_1(\xi) \varphi_1(\xi) d\xi = \frac{1}{2} S,$$

$$(g_1, g_1) = \int_0^S g_1(\xi) g_1(\xi) d\xi = \frac{3}{8} S.$$

Sustav jednačbi (22) na temelju formula (23) nakon sređivanja poprima oblik:

$$(a_{1n} + \lambda) A_1 + b_{1n} B_1 + c_{1n} C_1 = 0$$

$$d_{1n} A_1 + (e_{1n} + \lambda) B_1 + f_{1n} C_1 = 0 \quad (24)$$

$$g_{1n} A_1 + h_{1n} B_1 + (r_{1n} + \lambda) C_1 = 0$$

gdje je

$$a_{1n} = -\pi^2 \gamma^2 - \frac{1-\mu}{2} n^2,$$

$$b_{1n} = -\pi \gamma \frac{1+\mu}{2} n,$$

$$c_{1n} = \frac{8}{3} \gamma \left(-\mu + \beta^2 \frac{1-\mu}{6} n^2 \right),$$

$$d_{1n} = -\pi \gamma \frac{1+\mu}{2} n,$$

$$e_{1n} = - \left[\pi^2 \gamma^2 \left(\frac{1-\mu}{2} (1+\beta^2) + 1 + \frac{1}{3} \beta^2 \right) + n^2 \right],$$

$$f_{1n} = \frac{8}{3\pi} \left[\pi^2 \beta^2 \gamma^2 \frac{3-\mu}{6} n - \left(n+n^3 \frac{\beta^2}{3} \right) \right],$$

$$g_{1n} = -\frac{32}{9} \gamma \mu \quad (25)$$

$$h_{1n} = \frac{32}{9\pi} \left[-\pi^2 \beta^2 \gamma^2 \frac{2-\mu}{3} n - \left(n+n^3 \frac{1}{3} \beta^2 \right) \right],$$

$$r_{1n} = \frac{8}{3} \left[-\frac{2}{3} \pi^4 \beta^2 \gamma^4 - \frac{1}{3} \pi^2 \beta^2 \gamma^2 n^2 - \frac{3}{8} \left(1 + \frac{1}{3} \beta^2 n^4 \right) \right]$$

Sustav (24) ima rješenje različito od trivijalnog samo ako je determinanta sustava $D = 0$,

$$D = \begin{vmatrix} a_{1n} + \lambda & b_{1n} & c_{1n} \\ d_{1n} & e_{1n} + \lambda & f_{1n} \\ g_{1n} & h_{1n} & r_{1n} + \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

to jest

$$D = \lambda^3 + D_{1n} \lambda^2 + S_{1n} \lambda + T_{1n} = 0, \quad (27)$$

gdje je

$$D_{1n} = a_{1n} + e_{1n} + r_{1n},$$

$$S_{1n} = e_{1n} r_{1n} + a_{1n} r_{1n} + a_{1n} e_{1n} - c_{1n} g_{1n} - f_{1n} h_{1n} - b_{1n} d_{1n}$$

$$T_{1n} = b_{1n} f_{1n} g_{1n} + c_{1n} d_{1n} h_{1n} + a_{1n} e_{1n} r_{1n} - c_{1n} e_{1n} g_{1n} - a_{1n} f_{1n} h_{1n} - b_{1n} d_{1n} r_{1n}.$$

Za $n = 1, 2, 3, 4$, iz jednačbe (27) izračunaju se svojstvene vrijednosti λ .

Problem svojstvenih vrijednosti λ , može se promatrati u matricnoj formulaciji.

Sustav (24) može se napisati u matričnom obliku

$$\mathbf{K} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \quad (28)$$

gdje je

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -a_{1n} - b_{1n} - c_{1n} \\ -d_{1n} - e_{1n} - f_{1n} \\ -g_{1n} - h_{1n} - r_{1n} \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix}.$$

Traže se svojstvene vrijednosti λ matrice \mathbf{K} . Iz jednadžbe (28) izračunavaju se svojstvene vrijednosti λ .

Na temelju formule (11) i $\omega = \sqrt{\lambda}$ dobije se

$$k = \omega \sqrt{\frac{2Eh}{\rho(1-\mu^2)a^2}} = \omega\beta \sqrt{\frac{2E}{\rho(1-\mu^2)h}} \quad (29)$$

Izračunavanje svojstvenih vrijednosti λ iz jednadžbe (27) i iz jednadžbe (28) realizirano je s pomoću softverskoga sistema Mathematica. Na osnovi izračunanih svojstvenih vrijednosti λ po formuli (29) izračunaju se svojstvene frekvencije k zatvorene kružne cilindrične ljsuske.

Sada se može dati algoritam za proračun svojstvenih vrijednosti i svojstvenih kružnih frekvencija zatvorene kružne cilindrične ljsuske.

Algoritam: vlastite vrijednosti kružne cilindrične ljsuske:

- sustav diferencijalnih jednadžbi (1) prevede se u oblik (3);
- vlastite oscilacije imaju oblik $\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{u}}(\xi, \varphi) \cos kt$ i zadovoljavaju rubne uvjete (2), uvrštavanjem u (5) dobije se jednadžba (10);
- rješenje jednadžbe (10) traži se u obliku (13) i za nepoznate funkcije $U_m(\xi)$, $V_m(\xi)$, $W_m(\xi)$ izgradi se sustav običnih diferencijalnih jednadžbi (16) i rubni uvjeti (17);
- približno rješenje problema (16) i (17) traži se u obliku (19) uz odabrane koordinatne funkcije (20);
- za $m = 1$ približno rješenje ima oblik (21), a koeficijenti A_1 , B_1 , C_1 i λ određuju se iz sustava (24), za zadane ulazne podatke:

$$\gamma = \frac{a}{l}, \beta = \frac{h}{a}, \mu \text{ i } n = 1, 2, 3, 4;$$

- svojstvene vrijednosti λ izračunavaju se iz jednadžbe (27) ili iz jednadžbe (28);
- iz formule (29) izračunaju se vlastite kružne frekvencije k zatvorene kružne cilindrične ljsuske, za zadane ulazne podatke: μ , ω , ρ , E , h .

4 Primjer

Promatra se kružna cilindrična tanka ljsuska od betona. Zadane su fizikalne i geometrijske veličine.

Fizikalne veličine:

gustoća betona $\rho = 2500 \text{ kgm}^{-3}$,

Youngov modul $E = 3 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$,

Poissonov koeficijent $\mu = 0,2$.

Geometrijske veličine:

$$\text{a) } \gamma = \frac{a}{l} = 0,25, \beta = \frac{h}{a} = 0,01, h = 0,03 \text{ m}, h = 0,08 \text{ m}.$$

Na temelju algoritma za proračun svojstvenih vrijednosti λ i svojstvenih kružnih frekvencija k zatvorene kružne cilindrične tanke ljsuske dobiju se vrijednosti prikazane u tablici 1.

Tablica 1. Izračunane svojstvene vrijednosti λ i svojstvene kružne frekvencije k

n	m	λ	ω	k (h = 0,03)	k (h = 0,08)
1	1	0,332327	0,576478	166.415 s ⁻¹	101.908 s ⁻¹
2	1	0,154289	0,392796	113.39 s ⁻¹	69.437 s ⁻¹
3	1	0,098436	0,313744	90.57 s ⁻¹	55.463 s ⁻¹
4	1	0,080428	0,283599	81.868 s ⁻¹	50.134 s ⁻¹

$$\text{b) } \gamma = \frac{a}{l} = 0,25, \beta = \frac{h}{a} = 0,04, h = 0,03 \text{ m}, h = 0,08 \text{ m}$$

Na temelju algoritma za proračun svojstvenih vrijednosti λ i svojstvenih kružnih frekvencija k zatvorene kružne cilindrične tanke ljsuske dobiju se vrijednosti prikazane u tablici 2.

Tablica 2. Izračunane svojstvene vrijednosti λ i svojstvene kružne frekvencije k

n	m	λ	ω	k (h = 0.03)	k (h = 0.08)
1	1	0,333487	0,577483	666.82 s ⁻¹	408.342 s ⁻¹
2	1	0,161531	0,401909	464.085 s ⁻¹	284.193 s ⁻¹
3	1	0,135163	0,367645	424.52 s ⁻¹	259.964 s ⁻¹
4	1	0,200185	0,44742	516.636 s ⁻¹	316.374 s ⁻¹

$$\text{c) } \gamma = \frac{a}{l} = 0,5, \beta = \frac{h}{a} = 0,01, h = 0,03 \text{ m}, h = 0,06 \text{ m}$$

Izračunane svojstvene vrijednosti λ i svojstvene kružne frekvencije k zatvorene kružne cilindrične tanke ljsuske dane su u tablici 3.

Tablica 3. Izračunane svojstvene vrijednosti λ i svojstvene kružne frekvencije k

n	m	λ	ω	k (h = 0.03)	k (h = 0.06)
1	1	0,74078	0,860686	248.458 s ⁻¹	175.687 s ⁻¹
2	1	0,43922	0,662737	191.316 s ⁻¹	135.281 s ⁻¹
3	1	0,26851	0,51818	149.586 s ⁻¹	105.773 s ⁻¹
4	1	0,187837	0,433402	125.112 s ⁻¹	88.468 s ⁻¹

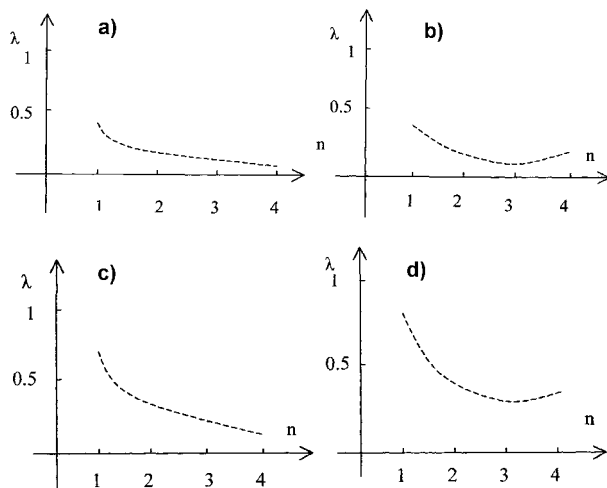
$$\text{d) } \gamma = \frac{a}{l} = 0,5, \beta = \frac{h}{a} = 0,04, h = 0,03 \text{ m}, h = 0,06 \text{ m}$$

Izračunane svojstvene vrijednosti λ i svojstvene kružne frekvencije k dane su u tablici 4.

Tablica 4. Izračunane svojstvene vrijednosti λ i svojstvene kružne frekvencije k

n	m	λ	ω	k (h = 0,03)	k (h = 0,06)
1	1	0,759368	0,871417	1006.23 s ⁻¹	711.509 s ⁻¹
2	1	0,471112	0,686376	792.559 s ⁻¹	560.424 s ⁻¹
3	1	0,342195	0,584974	675.47 s ⁻¹	477.629 s ⁻¹
4	1	0,361703	0,601417	694.457 s ⁻¹	491.055 s ⁻¹

Grafički prikazi rezultata proračuna danih u tablici 1., tablici 2., tablici 3. i tablici 4., predstavljeni su na slici 4.



Slika 3. Prikaz rezultata proračuna: a) iz tablice 1., b) iz tablice 2., c) iz tablice 3., d) iz tablice 4.

Promatra se kružna cilindrična tanka ljuska od čelika.

Fizikalne veličine:

gustoća čelika $\rho = 7900 \text{ kgm}^{-3}$,

Youngov modul $E = 21 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$,

Poissonov koeficijent $\mu = 0,3$.

Geometrijske veličine:

a) $\gamma = \frac{a}{l} = 0,25$, $\beta = \frac{h}{a} = 0,01$, $h = 0,01 \text{ m}$, $h = 0,005 \text{ m}$

Izračunane svojstvene vrijednosti λ i svojstvene kružne frekvencije k dane su u tablici 5.

Tablica 5. Izračunane svojstvene vrijednosti λ i svojstvene kružne frekvencije k

n	m	λ	ω	k (h = 0,01)	k (h = 0,005)
1	1	0,335301	0,579052	442.596 s ⁻¹	625.926 s ⁻¹
2	1	0,155362	0,39416	301.275 s ⁻¹	426.067 s ⁻¹
3	1	0,098797	0,31432	240.249 s ⁻¹	339.764 s ⁻¹
4	1	0,080567	0,28384	216.955 s ⁻¹	306.821 s ⁻¹

b) $\gamma = \frac{a}{l} = 0,25$, $\beta = \frac{h}{a} = 0,02$, $h = 0,01 \text{ m}$, $h = 0,005 \text{ m}$

Izračunane svojstvene vrijednosti λ i svojstvene kružne frekvencije k dane su u tablici 6.

Tablica 6. Izračunane svojstvene vrijednosti λ i svojstvene kružne frekvencije k

n	m	λ	ω	k (h = 0,01)	k (h = 0,005)
1	1	0,335534	0,579253	885.5 s ⁻¹	1252.29 s ⁻¹
2	1	0,156809	0,395991	605.349 s ⁻¹	856.093 s ⁻¹
3	1	0,106145	0,325799	498.047 s ⁻¹	704.345 s ⁻¹
4	1	0,104545	0,323334	494.279 s ⁻¹	699.015 s ⁻¹

c) $\gamma = \frac{a}{l} = 0,5$, $\beta = \frac{h}{a} = 0,01$, $h = 0,01 \text{ m}$, $h = 0,005 \text{ m}$

Izračunane svojstvene vrijednosti λ i svojstvene kružne frekvencije k dane su u tablici 7.

Tablica 7. Izračunane svojstvene vrijednosti λ i svojstvene kružne frekvencije k

n	m	λ	ω	k (h = 0,01)	k (h = 0,005)
1	1	0,71664	0,846546	647.055 s ⁻¹	915.073 s ⁻¹
2	1	0,439701	0,6631	506.838 s ⁻¹	716.778 s ⁻¹
3	1	0,27061	0,520202	397.615 s ⁻¹	562.312 s ⁻¹
4	1	0,189165	0,434931	332.438 s ⁻¹	470.138 s ⁻¹

d) $\gamma = \frac{a}{l} = 0,5$, $\beta = \frac{h}{a} = 0,02$, $h = 0,01 \text{ m}$, $h = 0,005 \text{ m}$

Izračunane svojstvene vrijednosti λ i svojstvene kružne frekvencije k dane su u tablici 8.

Tablica 8. Izračunane svojstvene vrijednosti λ i svojstvene kružne frekvencije k

n	m	λ	ω	k (h = 0,01)	k (h = 0,005)
1	1	0,720356	0,848738	1297.46 s ⁻¹	1834.89 s ⁻¹
2	1	0,446117	0,66792	1021.04 s ⁻¹	1443.98 s ⁻¹
3	1	0,285383	0,534213	816.648 s ⁻¹	1154.91 s ⁻¹
4	1	0,223987	0,473273	723.489 s ⁻¹	1023.17 s ⁻¹

Grafički prikazi rezultata proračuna danih u tablici 5., tablici 6., tablici 7. i tablici 8., slični su grafičkom prikazu rezultata proračuna kružne cilindrične tanke ljuske od betona.

5 Zaključak

Na temelju tablica proračuna svojstvenih vrijednosti i svojstvenih kružnih frekvencija zatvorene kružne cilindrične tanke ljuske od betona i čelika te njihovih grafičkih prikaza dobiju se sljedeći zaključci:

a) za zadani $\gamma = \frac{a}{l} = 0,25$, a za $\beta = \frac{h}{a} = 0,01$, $\beta = 0,02$,

$\beta = 0,04$ svojstvene vrijednosti λ lagano se povećavaju s povećanjem β ovisno o $n = 1, 2, 3, 4$.

b) Za $\gamma = 0,25$, $\beta = 0,01$ svojstvene kružne frekvencije k za manje vrijednosti h veće su od svojstvenih kružnih frekvencija za veće vrijednosti h , za $\gamma = 0,25$, $\beta = 0,01, 0,02, 0,04$, dakle β se mijenja a h ima zadanu

vrijednost, u sva tri slučaja svojstvene kružne frekvencije veće su za veći β .

- c) Za $\gamma = 0,5$ a za $\beta = 0,01, 0,02, 0,04$ svojstvene vrijednosti λ lagano se povećavaju s povećanjem β ovisno o $n = 1, 2, 3, 4$ i veće su od vlastitih vrijednosti λ za $\gamma = 0,25$.
- d) Za $\gamma = 0,5, \beta = 0,01$ svojstvene kružne frekvencije k za manje vrijednosti h veće su od svojstvenih kružnih frekvencija k za veće vrijednosti h , za $\gamma = 0,5, \beta$

$= 0,01, 0,02, 0,04$ dakle β se mijenja, a h ima zadanu vrijednost, u sva tri slučaja svojstvene kružne frekvencije veće su za veći β .

Primjena metode redukcije dimenzije na rješavanje problema vlastitih frekvencija kružne cilindrične tanke ljuske znatno pojednostavnjuje proračun i daje dobre rezultate.

Za proračun vlastitih frekvencija kružne cilindrične tanke ljuske uporabljen je softverski sistem Mathematica.

LITERATURA

- [1] Ioahimidis, N. I.: *Elementary applications of MATHEMATICA to the solution of elasticity problems by finite element method*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 102 (1993), No1, 29-40.
- [2] Irwanto, B.; Hardtke, H. J.; Pawandenat, D.: *An efficient technique for the computation of eigenvalue and eigenvector derivatives of cyclic structures*, An International Journal Computer & Structures, 81 (2003), No 24-25, 2395-2400.
- [3] Hernandez, E.; Hervella-Nieto, L.; Rodriguez, R.: *Computation of the vibration modes of plates and shells by low-order MITC quadrilateral finite elements*, An International Journal Computer & Structures, 81 (2003), No 8-11, 615-628.
- [4] Stanke I.: *Metoda redukcije dimenzije pri proračunu ljuske*, Građevinar 45(1993) 6, 337.-342.
- [5] Stanke, I.: *Oscilacije sferne elastične ljuske ispunjene tekućinom*, III znanstveni skup numeričke metode u tehnici, (1981), 139-148.
- [6] Zienkiewicz, O. C.: *The finite element method*, 3d edn, McGraw-Hill, London-New York, 1977.
- [7] Rektorys, K.: *Variational methods in mathematics*, science and engineering, 2d edn, D. Reidel publishing company, Dordrecht-Boston, 1977.
- [8] Mihlin, S. G.: *Čislennaja realizacija variacionnih metodov*, 1d edn, "Nauka", Moskva, 1966.
- [9] Timošenko, S.; Vojnovski-Kruger, S.: *Teorija ploča i ljuski*, 2d edn, "Građevinska knjiga", Beograd, 1962.
- [10] Filipov, A .P.: *Kolebanija deformiruemih sistem*, 2d edn, "Mašinstroennie", Moskva, 1970.