

# Diskretno numeričko modeliranje opterećenja silosa

---

**Lazarević, Damir; Dvornik, Josip; Fresl, Krešimir**

*Source / Izvornik:* **Građevinar, 2002, 54, 135 - 144**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:327231>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-03**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)



# Diskretno numeričko modeliranje opterećenja silosa

Damir Lazarević, Josip Dvornik, Krešimir Fresl

## Ključne riječi

numeričko modeliranje, metoda diskretnih elemenata, silos, opterećenje, zrnati materijal, metoda prediktor-korektor

## Key words

numerical modeling, discrete element method, silo, load, granular material, predictor-corrector method

## Mots clés

modélisation numérique, méthode des éléments discrets, silo, charge, matériau grenu, méthode prédicteur-correcteur

## Ключевые слова

числовое моделирование, метод дискретных элементов, силос, нагрузка, зернистый материал, метод предиктор-корректор

## Schlüsselworte

numerische Modellierung, Methode der diskreten Elemente, Silo, Belastung, körniges Material, Methode Prediktor-Korrektor

D. Lazarević, J. Dvornik, K. Fresl

Izvorni znanstveni rad

## Diskretno numeričko modeliranje opterećenja silosa

U ovom je radu opisana primjena metode diskretnih elemenata na modeliranje ponašanja sadržaja u silosu. Zrna su prikazana idealno glatkim kuglama. Utiskivanje je simulirano viskoelastičnim Kelvinovim reološkim tijelom, a kohezija Hookeovom oprugom. Oblik i hrupavost stijenke silosa aproksimirane su nepomičnim kuglama koje se preklapaju. Diferencijalne su jednačbe slobodnog pada kugli riješene analitički, a inače je upotrijebljena metoda izravne integracije prediktor-korektor.

D. Lazarević, J. Dvornik, K. Fresl

Original scientific paper

## Discrete numerical silo load modeling

The use of discrete element method for the silo content modeling is described in the paper. The grains are presented as ideally smooth balls. The squeezing is simulated through Kelvin's rheological viscoelastic body, and the cohesion is simulated with a Hookean spring. The silo wall shape and roughness are approximated using fixed overlapping balls. Differential equations of the free fall of the balls are solved analytically and, in other cases, the direct predictor-corrector integration method is used.

D. Lazarević, J. Dvornik, K. Fresl

Ouvrage scientifique original

## Modélisation numérique discrète de la charge des silos

L'article décrit l'utilisation de la méthode des éléments discrets pour la modélisation du comportement du contenu des silos. Les grains sont représentés par des sphères idéalement lisses. L'enfoncement a été simulé par un corps rhéologique à haute élasticité de Kelvin, et la cohésion par le ressort de Hooke. La forme et la rugosité de la paroi du silo ont été approximées par des sphères fixes qui se recouvrent. Les équations différentielles de la chute libre ont été résolues analytiquement, tandis que la méthode de l'intégration prédicteur-correcteur a été utilisée ailleurs.

Д. Лазаревић, Ј. Дворник, К. Фресл

Оригинална научна работа

## Дискретно числово моделирование нагрузки силоса

В этой работе описано применение метода дискретных элементов в моделировании поведения содержания в силосе. Зёрна представлены идеально гладкими шарами. Втискивание смоделировано высокоэластичным реологическим телом Кельвина, а сцепление - пружиной Гука. Облик и шероховатость стенки силоса аппроксимированы неподвижными перекрывающимися шарами. Дифференциальные уравнения свободного падения шаров решены аналитически, а иначе употреблён метод прямой интеграции предиктор-корректор.

D. Lazarević, J. Dvornik, K. Fresl

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

## Diskrete numerische Modellierung der Belastung von Silos

In diesem Artikel beschreibt man die Anwendung der Methode der diskreten Elemente für die Modellierung des Verhaltens des Inhalts im Silo. Die Körner sind als ideal glatte Kugeln dargestellt. Das Eindringen ist durch den viskoelastischen Kelvinschen rheologischen Körper und die Kohäsion durch die Hookesche Feder simuliert. Form und Rauigkeit der Silowände approximiert man durch unbewegliche, sich überlappende Kugeln. Die Differentialgleichungen des freien Falles der Kugeln wurden analytisch gelöst, ansonsten wurde die Methode der direkten Integration Prediktor-Korrektor

Autori: Dr. sc. **Damir Lazarević**, dipl. ing. grad.; prof. dr. sc. **Josip Dvornik**, dipl. ing. grad.;  
doc. dr. sc. **Krešimir Fresl**, dipl. ing. grad., Sveučilišta u Zagrebu, Građevinski fakultet, Kačićeva 26

## 1 Uvod

Silosu su objekti kod kojih je postotak oštećenja i rušenja vrlo velik u odnosu na većinu konstrukcija u inženjerskoj praksi — svake se godine u SAD-u i Kanadi ošteti ili sruši više od 1 000 silosa za zrnati materijal [5]. Glavni je tome razlog nepostojanje zadovoljavajućega matematičkog modela gibanja zrnatih materijala u silosima, što je posljedica sljedećih teškoća [7]: a) uprosječivanje svojstava sadržaja (kontinuum) utemeljeno na statističkim zakonima mnoštva ne može se provesti jer je termička energija zrnâ, nužna za kaotično gibanje, vrlo mala; b) djelovanja su pri dodiru među zrnima zbog trenja i plastičnih deformacija izrazito disipativne prirode; c) trenje i kohezija u silosu pri razmjerno slabom gravitacijskom opterećenju uzrokuju stvaranje tlačnih oblika (lukova i svodova) koji onemogućuju jednoliko istjecanje materijala; d) rezultati su eksperimenata nesigurni jer mjerni uređaji remete gibanje materijala u području mjerenja. Problem je dodatno naglašen činjenicom da omjer pokretnog i stalnog tereta kod betonskih silosa iznosi oko 5, a kod čeličnih približno 10, što premašuje uobičajene vrijednosti u zgradarstvu ili mostogradnji.

Približna, relativno prihvatljiva rješenja diferencijalnih jednadžbi (ponajprije Janssen–Koenenove jednadžbe i njezinih inačica) postoje za stanje punjenja ili mirovanja materijala u silosu. Naime, pri punjenju je masa u gibanju mala u odnosu na masu sadržaja (giba se samo tanki sloj pri površini složaja), a pojava je svodova zanemariva, te su dinamički utjecaji slabi. Zbog toga principi mehanike kontinuuma bez uvažavanja inercijalnih sila zadovoljavaju.

Govorimo li, međutim, o stadiju pražnjenja ili o djelovanju potresa, ispravnije je napraviti analogiju između zrna i molekula u smislu termodinamičkih i hidrodinamičkih teorija kontinuuma, koje imaju dobro definirane diferencijalne jednadžbe gibanja. No, valja naglasiti da su takvi pristupi utemeljeni na prosječnim svojstvima fluida (što je moguće zbog stohastičkog gibanja molekula) i elastičnim (nedisipativnim) djelovanjima među molekulama.

Doduše, ako zrnati materijal teče velikim brzinama, njegova se fenomenološka svojstva približavaju svojstvima fluida. Kinetička energija zrna tada, zbog malog broja sudara među zrnima, dominira nad ostalim oblicima energije, posebice nad energetskim gubicima [8], te je energija zrna dovoljno velika za svladavanje energetskih barijera, tako da se tlačni oblici gotovo i ne stvaraju. Takvo je gibanje zrnatog materijala dobro opisano jednadžbama utemeljenim u termodinamičkim i hidrodinamičkim pristupima (primjerice, razne inačice Navier–Stokesovih jednadžbi), ali se nužni uvjeti za njihovu primjenu (materijal

je dobro osušen i nalazi se u silosu glatkih stijenki — poput pješčanog sata — ili je vanjsko opterećenje dovoljno veliko da osigura jednoliko istjecanje) rijetko ostvaruju kod uobičajene uporabe silosa.

Naprotiv, uobičajeno stanje materijala unutar silosa obilježeno je nejednolikim, razmjerno sporim tečenjem isprekidanim čestom pojavom svodova. Broj je sudara čestica velik, pa su i energetski gubici značajni, što vodi do nestabilnosti pri rješavanju prilagođenih jednadžbi mehanike fluida.

Autori propisa o opterećenju silosa nalaze se stoga pred teškom zadaćom jer ne raspolažu znanstveno utemeljenim rješenjima, već se moraju oslanjati na empirijske obrasce, nepouzdanе eksperimentalne rezultate i iskustva u primjeni prethodnih propisa. Njihovi se popravci poglavito temelje na prijedlozima novih ili povećanju/smanjenju postojećih koeficijenata kojima se mijenjaju oblik raspodjele i intenzitet opterećenja. Često se traže nerealno velike/male vrijednosti nekih osobina uskladištenog materijala. Na taj se način postižu veći koeficijenti sigurnosti kojima se želi obuhvatiti slabo poznavanje stvarnog opterećenja silosa. Zahvaljujući dugoj praksi, te su izmjene dobro „pogođene”, ali se ne može sa sigurnošću tvrditi da u budućnosti neće biti premašene/podbačene, kao i mnogo puta dosad.

Opisani su problemi glavni razlog velikih razlika u propisanim opterećenjima ili preporukama stručnjaka. Preklopimo li dijagrame horizontalnih pritisaka prema raznim izvorima mogu se uočiti omjeri koji dosežu i vrijednost četiri [4]!

Iz analitičkih i eksperimentalnih nedoumica prvo su proizašli pokušaji stvaranja analogija sa sličnim, bolje istraženim problemima poput opterećenja na potporne zidove ili zidove spremnika za tekućine. U posljednje se vrijeme, snažnim razvojem računala, razvijaju numerički modeli diskontinuiteta, posebice metoda diskretnih elemenata [3, 11].

Dvije osnovne sastavnice metode, primijenjene na model gibanja sadržaja silosa, prikazane su sljedećim odjeljcima: a) jednadžbe međudjelovanja zrnâ i b) numerička integracija jednadžbi gibanja.

## 2 Model međudjelovanja: osnovne jednadžbe

Zrna su modelirana idealno glatkim kuglama različitih polumjera s viskoelastičnim Kelvinovim (ili Voigtovim) kontaktnim mehanizmom pri utiskivanju i Hookeovom oprugom pri koheziji (slike 1.a i 1.b). Trenje među zrnima te između zrna i stijenki silosa je zanemareno, što je ozbiljan nedostatak, no bez snažnoga višeprosesorskog

računala moglo se razmatrati samo jednostavniji model s translacijskim stupnjevima slobode. To je omogućilo analizu sustava s razmjerno velikim brojem (oko 22 000) kugli; ipak, i uz to je pojednostavljenje proračun na Pentium III računalu (300 MHz CPU) trajao 405 dana.

Različiti polumjeri kugli, nužni za smanjenje kristalizacije [9], određeni su izrazom

$$r_i = r_{\min} + (r_{\max} - r_{\min}) \text{rnd}(), \quad (1)$$

gdje su  $r_{\max}$  i  $r_{\min}$  zadane granične vrijednosti polumjera, a  $\text{rnd}()$  oznaka za generator slučajnih brojeva s uniformnom distribucijom na segmentu  $[0, 1]$ . Trenutni je broj kugli u sustavu  $n(t)$ .

Jednadžbe gibanja središta  $i$ -te kugle ( $i = 1, \dots, n(t)$ ) u vremenu  $t$  mogu se zapisati kao

$$\ddot{\mathbf{u}}_i(t) = \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{f}_i(t) + \mathbf{g}, \quad (2)$$

gdje je  $\ddot{\mathbf{u}}_i(t)$  vektor ubrzanja središta,  $\mathbf{g} = \{0, 0, g\}$  vektor gravitacijskog ubrzanja, a  $\mathbf{M}_i = m_i \mathbf{I}$  matrica masa. Translacijska masa kugle  $m_i$  jednaka je umnošku gustoće materijala  $\gamma_i$  i volumena kugle.

Ukupni je vektor djelovanja  $\mathbf{f}_i(t)$  na kuglu  $i$  koja je u međudjelovanju sa  $k_i(t)$  kugli dan sa

$$\mathbf{f}_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k_i(t)} f_{i,j}(t) \mathbf{n}_{i,j}(t), \quad (3)$$

gdje su sile među kuglama modelirane paralelnom vezom linearne opruge i viskoznoeg klipa (preklapanje, sl. 1.a), odnosno linearnom oprugom (kohezija, sl. 1.b):

$$f_{i,j}(t) = \begin{cases} k_{i,j} \delta_{i,j}(t) + c_{i,j} \dot{\delta}_{i,j}^n(t) & \text{za } \delta_{i,j}(t) > 0, \\ k_{i,j} \delta_{i,j}(t) & \text{za } \delta_c \leq \delta_{i,j}(t) \leq 0 \\ & \text{i } d_{i,j}^n(t) < 0, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases} \quad (4)$$

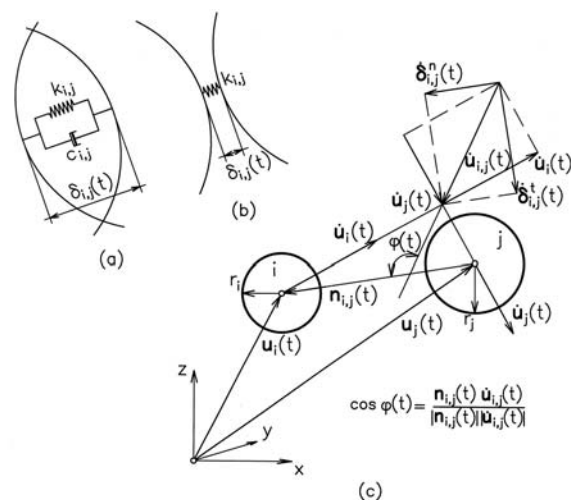
Najmanja udaljenost među kuglama, odnosno njihovo najveće preklapanje  $\delta_{i,j}(t)$  određeno je sa

$$\delta_{i,j}(t) = r_i + r_j - |\mathbf{u}_i(t) - \mathbf{u}_j(t)|, \quad (5)$$

gdje su  $\mathbf{u}_i(t)$  i  $\mathbf{u}_j(t)$  vektori položaja središta kugli u globalnom koordinatnom sustavu. Ako je  $\delta_{i,j}(t) > 0$ , kugle se preklapaju, ako je  $\delta_c \leq \delta_{i,j}(t) \leq 0$ , kugle su unutar dosega kohezije, a ako je  $\delta_{i,j}(t) < \delta_c$ , one su izvan područja međusobnih utjecaja. Naravno, preklapanje je samo numerički model utiskivanja (gnječanja) dviju kugli pri kontaktu. Spomenimo da u ovom modelu tijekom djelovanja kohezije nema gubitaka energije.

Vektori položaja središta kugli određuju i jedinični vektor  $\mathbf{n}_{i,j}(t)$  na spojnici njihovih središta:

$$\mathbf{n}_{i,j}(t) = \frac{\mathbf{u}_{i,j}(t)}{|\mathbf{u}_{i,j}(t)|} = \frac{\mathbf{u}_i(t) - \mathbf{u}_j(t)}{|\mathbf{u}_i(t) - \mathbf{u}_j(t)|}. \quad (6)$$



Slika 1. Reološki model međudjelovanja kugli: (a) preklapanje, (b) kohezija, (c) definicija vektorá

Iznos relativne brzine na pravcu te spojnice određen je skalarnim produktom

$$\dot{\delta}_{i,j}^n(t) = \dot{\mathbf{u}}_{i,j}(t) \cdot \mathbf{n}_{i,j}(t), \quad (7)$$

gdje je  $\dot{\mathbf{u}}_{i,j}(t) = \dot{\mathbf{u}}_i(t) - \dot{\mathbf{u}}_j(t)$  relativna brzina među kuglama, definirana kao razlika vektora brzina središta kugli.

Dodatni je uvjet za pojavu kohezije odvajanje kugli duž spojnice središta. Skalarni produkt

$$d_{i,j}^n(t) = \dot{\mathbf{u}}_{i,j}(t) \cdot \mathbf{u}_{i,j}(t) \quad (8)$$

daje smjer relativne brzine u odnosu na smjer spojnice te je, ovisno o predznaku  $d_{i,j}^n(t)$ , relativno gibanje kugli

$$d_{i,j}^n(t) \begin{cases} > 0 & \text{približavanje duž } \mathbf{n}_{i,j}(t), \\ < 0 & \text{odvajanje duž } \mathbf{n}_{i,j}(t), \\ = 0 & \text{gibanje okomito na } \mathbf{n}_{i,j}(t). \end{cases} \quad (9)$$

Za pojavu kohezije mora dakle biti ispunjen drugi uvjet. Tangencijalna se komponenta  $\dot{\delta}_{i,j}^t(t)$  relativne brzine zanemaruje zbog centričnog modela međudjelovanja. Svi spomenuti vektori prikazani su na slici 1.c.

Najveći je doseg kohezije određen sa

$$\delta_c = -\frac{N_{\max}^c}{k_{i,j}} = -\frac{p_N g \min(m_i, m_j)}{k_{i,j}}, \quad (10)$$

gdje je  $N_{\max}^c$  najveća sila kohezije definirana kao postotak  $p_N$  težine lakše od dviju kugli. Odabrano je  $p_N = 0, 1$ . Negativni predznak u (10) označava vlačnu silu. Na taj je način onemogućeno „vješanje“ kugle o kuglu i održavanje kontakta velikom vlačnom silom koja ne postoji među stvarnim zrnima — naime, u složaju prevladava prijenos sila tlačnim međudjelovanjem.

Konstante  $k_{i,j}$  i  $c_{i,j}$  su krutost i viskoznost modela međudjelovanja:

$$k_{i,j} = \frac{k_i k_j}{k_i + k_j}, \quad c_{i,j} = \frac{c_i c_j}{c_i + c_j}; \quad (11)$$

definirane su kao serijski spojevi krutosti ( $k_i$ ,  $k_j$ ) i viskoznosti ( $c_i$ ,  $c_j$ ) pojedinih kugli. Spomenimo da su postupci ispitivanja i utvrđivanja konstanti međudjelovanja (11) zbog malog dodirnog područja tek u začetku (eksperimentalna mikromehanika).

Algoritam opisanog modela međudjelovanja prikazan je pseudokôdom 1.

Model je stijenke silosa načinjen od nepomičnih kugli, slučajnih polumjera prema (1), koje se preklapaju. Na taj se način dodatno umanjuje mogućnost pravilnog slaganja modela složaja. Takav model također oponaša hrpavost stijenke i geometrijske pogreške na njezinoj površini. Time se u odsutnosti „skupog” modela trenja između stijenke i sadržaja (određenog koeficijentom trenja) nastojalo simulirati barem geometrijske uzroke te pojave. Broj je nepomičnih kugli u priloženim algoritmima označen sa  $n_w$ .

Tijekom punjenja i, posebice, pražnjenja silosa kugle su u stalnom gibanju. Broj kugli koje mogu utjecati na promatranu kuglu, kao ni položaji tih kugli (zbroy u (3)), nisu stoga unaprijed poznati. U najjednostavnijem pristupu ispitivanja mogućih međudjelovanja — svaka kugla sa svakom (petlje po  $i$  i  $j$  u algoritmu 1.) — broj je potrebnih operacija proporcionalan sa  $n^2(t)$ , što je za veliki  $n(t)$  neprihvatljivo zbog velikog utroška kompjutorskog vremena. Algoritmi za rješavanje ili barem djelomično ublažavanje tog problema pripadaju posebnoj skupini algoritama o kojima smo vodili računa, ali o njima u ovom članku nećemo podrobnije govoriti [2, 12].

### 3 Faza slobodnog pada i početni uvjeti

Pomak i brzina promatrane kugle mogu se u trenutku njezina prvog dodira s kuglama sadržaja, odnosno na kraju stadija slobodnog pada, odrediti analitički: dodiruju li se dvije kugle, s indeksima  $i$  i  $j$ , njihova središta moraju zadovoljiti sljedeću nelinearnu algebarsku jednadžbu:

$$|\mathbf{u}_{i,j}(t)|^2 = (r_i + r_j)^2, \quad (12)$$

gdje su  $r_i$  i  $r_j$  polumjeri tih kugli. U trenutku prvog dodira  $t_0$  koordinate središta padajuće kugle  $i$  su

$$x_i(t_0) = x_0, \quad y_i(t_0) = y_0, \quad z_i(t_0) = z_0 - h_i(t_0), \quad (13)$$

gdje su  $x_0$  i  $y_0$  početne koordinate kugle u koordinatnoj ravnini  $xy$ , a određene su izrazima:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_{\min} + (x_{\max} - x_{\min}) \text{rnd}(), \\ y_0 &= y_{\min} + (y_{\max} - y_{\min}) \text{rnd}(), \end{aligned} \quad (14)$$

#### Algoritam 1. Proračun djelovanja među kuglama

```

1: forces ( $n, g, p_N, \mathbf{k}, \mathbf{c}, \mathbf{m}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{z}}$ )  $\rightarrow$  [ $\mathbf{f}_x, \mathbf{f}_y, \mathbf{f}_z$ ]
2: for  $i \leftarrow 1$  to  $n - 1$  do
3:   for  $j \leftarrow i + 1$  to  $n$  do
4:      $u \leftarrow \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$ 
5:      $\delta \leftarrow r_i + r_j - u$  {razmak/preklop: (5)}
6:      $k \leftarrow k_i k_j / (k_i + k_j)$  {krutost: 1. jed. u (11)}
7:      $N_{\max}^c \leftarrow p_N g \min(m_i, m_j)$  {najveća kohezija}
8:     if  $\delta > 0$  then {preklapanje}
9:        $c \leftarrow c_i c_j / (c_i + c_j)$  {viskoznost: 2. jed. u (11)}
10:       $\dot{\delta} \leftarrow [(\dot{x}_i - \dot{x}_j)(x_i - x_j) + (\dot{y}_i - \dot{y}_j)(y_i - y_j) + (\dot{z}_i - \dot{z}_j)(z_i - z_j)] / u$  {(7)}
11:       $f \leftarrow k\delta + c\dot{\delta}$  {međudjelovanje: 1. jed. u (4)}
12:      else if  $(-N_{\max}^c / k) \leq \delta \leq 0$  then {kohezija}
13:         $d \leftarrow (\dot{x}_i - \dot{x}_j)(x_i - x_j) + (\dot{y}_i - \dot{y}_j)(y_i - y_j) + (\dot{z}_i - \dot{z}_j)(z_i - z_j)$  {(8)}
14:        if  $d < 0$  then {udaljšavanje duž normale}
15:           $f \leftarrow k\delta$  {međudjelovanje: 2. jed. u (4)}
16:        else {približavanje ili tangencijalno gibanje}
17:           $f \leftarrow 0$  {međudjelovanje: 3. jed. u (4)}
18:        end if
19:      else {nema međudjelovanja}
20:         $f \leftarrow 0$  {međudjelovanje: 3. jed. u (4)}
21:      end if
22:       $f_x \leftarrow f(x_i - x_j) / u$ ;  $f_y \leftarrow f(y_i - y_j) / u$ ;
23:       $f_z \leftarrow f(z_i - z_j) / u$  {međudjelovanje: (4)}
24:       $f_{xi} \leftarrow f_{xi} + f_x$ ;  $f_{yi} \leftarrow f_{yi} + f_y$ ;
25:       $f_{zi} \leftarrow f_{zi} + f_z$  {sila na kuglu  $i$ : (3)}
26:       $f_{xj} \leftarrow f_{xj} - f_x$ ;  $f_{yj} \leftarrow f_{yj} - f_y$ ;
27:       $f_{zj} \leftarrow f_{zj} - f_z$  {sila na kuglu  $j$ }
28:    end for
29:  end for

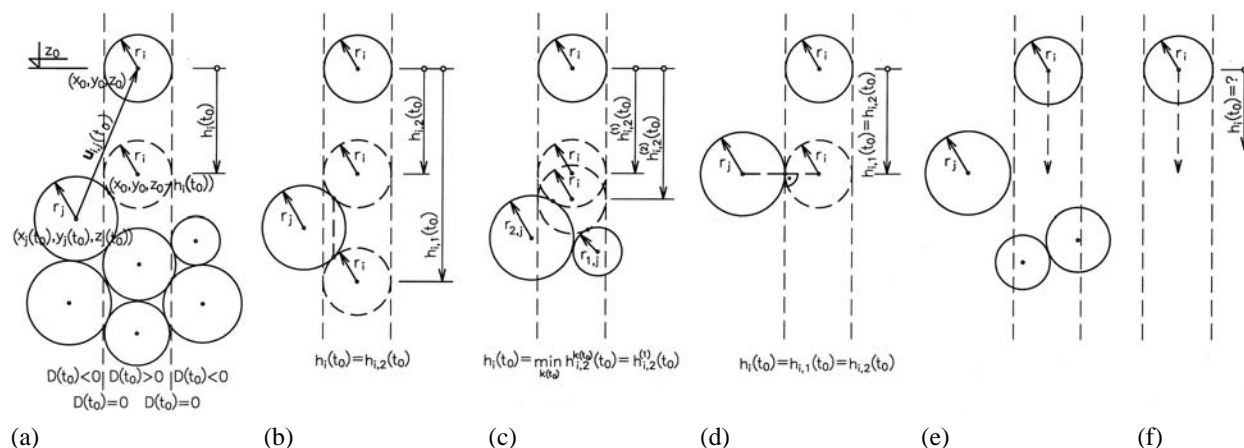
```

u kojima  $(x_{\min}, y_{\min})$  i  $(x_{\max}, y_{\max})$  označavaju koordinate donjeg lijevog i gornjeg desnog kuta gornjeg otvora modela silosa. Nadalje,  $z_0$  je visina silosa, a  $h_i(t_0)$  relativna visina središta kugle u trenutku prvog udara o kuglu složaja, mjerena od vrha silosa. Uvrštavanjem (13) u (12) dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$h_i(t_0)^2 + 2[z_0 - z_j(t_0)]h_i(t_0) + |\mathbf{u}_{i,j}(t_0)|^2 - (r_i + r_j)^2 = 0, \quad (15)$$

koja kao rješenja daje moguće visine  $h_i(t_0)$  pri dodiru s kuglom  $j$  sadržaja. Ovisno o vrijednosti diskriminante  $D(t_0) \geq 0$ , moguća su tri rješenja prikazana na slici 2.a. Pritom postoji nekoliko položaja kugli od kojih neka nemaju fizikalno i/ili geometrijsko značenje:

1. Ako je  $D(t_0) > 0$ , postoje dva realna rješenja, slika 2.b. Samo je rješenje bliže promatranoj kugli moguće, jer prodiranje kugli bez međudjelovanja nije dopušteno.
2. Ako područje rješenja sadrži  $k(t_0)$  mogućih susjeda, mjerodavno je ono rješenje koje je bliže promatranoj kugli:  $h_i(t_0) = \min_{k(t_0)}(h_i^{(k(t_0))}(t_0))$ , slika 2.c.



Slika 2. Moguća rješenja prvog dodira među kuglama: (a) područja rješenja s oznakama, (b) dva realna rješenja na istoj kugli, (c) rješenja na dvjema kuglama, (d) jedinstveno rješenje među kuglama, (e) nema realnog rješenja među kuglama  $i$  i  $j$ , (f) nema rješenja za kuglu  $i$

- Ako je  $D(t_0) = 0$ , postoji jedno realno rješenje s tangencijalnim položajem kugli, slika 2.d. Takav se dodir može ostvariti samo uz neizmjerljivo veliku vlačnu (kohezijsku) silu. Ostali se oblici međudjelovanja ne mogu ostvariti ( $\delta_{i,j}(t_0) = 0$ ).
- Ako je  $D(t_0) < 0$ , kvadratna jednadžba nema realnih rješenja, što znači da kugla  $i$  ne može dodirnuti kuglu  $j$  jer je izvan područja međudjelovanja, slika 2.e.
- U slučaju da tijekom slobodnog pada kugla ne može naći nijednog susjeda, očito je da nije u silosu, slika 2.f.

Opisani se algoritam, detaljnije prikazan pseudokôdom 2., može izvršavati ako trenutni položaj modela složaja potpuno ne ispunjava silos. Dakle, povremeno treba „čekati“ spuštanje/slijeganje sadržaja, što se može utvrditi kontrolom najveće visine kugle,  $z_{\max}(t)$ , u složaju. Ima li dovoljno mjesta ( $z_{\max}(t) < z_0$ ), nove se kugle mogu spustiti u silos.

Kad pronađemo relativnu visinu središta kugle u trenutku prvog udara  $h_i(t_0)$ , lako je utvrditi početne uvjete potrebne za metodu prediktor–korektor:

$$\begin{aligned} x_i(t_0) &= x_0, & y_i(t_0) &= y_0, & z_i(t_0) &= z_0 - h_i(t_0), \\ \dot{x}_i(t_0) &= 0, & \dot{y}_i(t_0) &= 0, & \dot{z}_i(t_0) &= \sqrt{2gh_i(t_0)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Na početku punjenja, kad kugle imaju veliku početnu brzinu  $\dot{z}_i(t_0)$ , dolazi do intenzivnog gibanja sadržaja. Takvo stanje može uzrokovati numeričku nestabilnost pa često treba proračun započeti vrlo malim vremenskim koracima. Iako nije fizikalno opravdana, druga je mogućnost prihvatiti  $\dot{z}_i(t_0) = 0$ ; kako kugla ima malu masu u odnosu na masu sadržaja, to ima mali utjecaj na iznos opterećenja a može stabilizirati metodu korak po korak.

#### Algoritam 2. Određivanje početnih uvjeta

```

1: free_fall ( $x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}, r_{\min}, r_{\max}, \gamma, k_c, c_c, z_0, z_{\max},$ 
    $n, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{r}$ )  $\rightarrow [n, \mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{z}}]$ 
2: while  $z_{\max} < z_0$  do {silos nije pun}
3:    $x_0 \leftarrow x_{\min} + (x_{\max} - x_{\min}) \text{rnd}()$ ;
4:    $y_0 \leftarrow y_{\min} + (y_{\max} - y_{\min}) \text{rnd}()$  {nova kugla: (14)}
5:    $r_0 \leftarrow r_{\min} + (r_{\max} - r_{\min}) \text{rnd}()$  {polumjer kugle: (1)}
6:   find  $\leftarrow \text{false}$  {još nema susjeda}
7:    $h_{\min} \leftarrow z_0$  {početna visina}
8:   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
9:      $b \leftarrow 2(z_0 - z_i)$ 
10:     $c \leftarrow (x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2 + (z_0 - z_i)^2 - (r_0 + r_i)^2$ 
11:     $D \leftarrow b^2 - 4c$  {diskriminanta, uz  $a = 1$ }
12:    if  $D > 0$  then {novi dodir}
13:       $h \leftarrow (-b + \sqrt{D})/2$  {bliže rješenje}
14:      if  $h < h_{\min}$  then {viši susjed}
15:         $h_{\min} \leftarrow h$  {nova najmanja visina}
16:        find  $\leftarrow \text{true}$  {susjed pronađen}
17:      end if
18:    end if
19:  end for
20:  if find  $\equiv \text{true}$  then {kugla u dodiru sa sadržajem}
21:     $n \leftarrow n + 1$ 
22:     $x_n \leftarrow x_0; y_n \leftarrow y_0;$ 
23:     $z_n \leftarrow z_0 - h_{\min}$  {početni položaj: 1. redak u (16)}
24:     $\dot{x}_n \leftarrow 0; \dot{y}_n \leftarrow 0;$ 
25:     $\dot{z}_n \leftarrow \sqrt{2gh_{\min}}$  {početna brzina: 2. redak u (16)}
26:     $r_n \leftarrow r_0$ 
27:     $m_n \leftarrow \gamma/3 r_n^3 \pi$  {masa kugle}
28:     $z_{\max} \leftarrow \max(z_{\max}, z_n)$  {visina sadržaja}
29:     $k_i \leftarrow k_c$  {krutost kugle}
30:     $c_i \leftarrow c_c$  {viskoznoš kugle}
31:  else
32:    'kugla izvan silosa'
33:  end if
34: end while

```

#### 4 Integracija jednadžbi gibanja: metoda prediktor–korektor

Sustav jednadžbi (2) približno opisuje geometrijski i materijalno nelinearan dinamički problem. I uz pretpostavku materijalne linearnosti, sile značajno ovise o položajima kugle te se intenzivno mijenjaju u vremenu (4), tako da geometrijska nelinearnost onemogućuje primjenu principa superpozicije. Zbog toga za rješavanje dinamičkog sustava treba primijeniti neku od metoda korak po korak. Ovdje je upotrijebljena izvedenica metode *prediktor–korektor* (engl. *predictor–corrector*). Ukratko, zamisao metode je sljedeća: na temelju poznatih vrijednosti na početku koraka (a u nekim inačicama i iz prethodnih koraka) i određene ekstrapolacijske funkcije izračunava se vrijednost na kraju koraka (pretpostavka/*prediktor*). Potom se s pomoću te vrijednosti i prve, druge ili neke više (ovisno o diferencijalnoj jednadžbi) derivacije ekstrapolacijske funkcije u njoj izračunava popravljena vrijednost (popravak/*korektor*) [1, 6].

##### 4.1 Prediktor

Integracijom poznatih odnosa,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_i(t_2) &= \dot{\mathbf{u}}_i(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{u}}_i(t) dt, \\ \mathbf{u}_i(t_2) &= \mathbf{u}_i(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{u}}_i(t) dt, \end{aligned} \quad (17)$$

dobivamo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{p,i}(t_2) &= \dot{\mathbf{u}}_i(t_1) + \ddot{\mathbf{u}}_i \Delta t, \\ \mathbf{u}_{p,i}(t_2) &= \mathbf{u}_i(t_1) + \dot{\mathbf{u}}_i(t_1) \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{u}}_i \Delta t^2, \end{aligned} \quad (18)$$

što daje približne vrijednosti brzine  $\dot{\mathbf{u}}_{p,i}(t_2)$  i pomaka  $\mathbf{u}_{p,i}(t_2)$  na kraju prediktora. U izrazima (17) i (18)  $\dot{\mathbf{u}}_i(t_1)$  i  $\mathbf{u}_i(t_1)$  su početni uvjeti, a  $\ddot{\mathbf{u}}_i(t) = \ddot{\mathbf{u}}_i(t_1) = \ddot{\mathbf{u}}_i$  ubrzanje izračunato iz dinamičke ravnoteže u trenutku  $t_1$ :

$$\ddot{\mathbf{u}}_i(t_1) = \mathbf{M}_i^{-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k_i(t_1)} \left[ k_{i,j} \delta_{i,j}(t_1) + c_{i,j} \dot{\delta}_{i,j}^n(t_1) \right] \mathbf{n}_{i,j}(t_1) + \mathbf{g}, \quad (19)$$

gdje je  $k_i(t_1)$  broj susjeda kugle  $i$ . Tijekom vremenskog koraka  $\Delta t = t_2 - t_1$  ubrzanje  $\ddot{\mathbf{u}}_i$  se ne mijenja.

Postupak je detaljno prikazan u algoritmu 3. u kojem indeksi ( $i$ ) i ( $i+1$ ) odgovaraju vremenima  $t_1$  i  $t_2$ .

##### 4.2 Neuravnoteženo ubrzanje na kraju prediktora

Pretpostavka o konstantnom ubrzanju točna je samo kada između kugli nema međudjelovanja, primjerice tijekom slobodnog pada, što se u modelu sadržaja silosa događa vrlo rijetko. Sudari su među kuglama učestali, čak i u kratkim vremenskim intervalima, tako da je pretpostavka

#### Algoritam 3. Prediktor

- 1: **prediktor** ( $n_w, g, \Delta t, n_{(i)}, \mathbf{m}_{(i)}, \mathbf{f}_{x(i)}, \mathbf{f}_{y(i)}, \mathbf{f}_{z(i)}, \dot{\mathbf{x}}_{(i)}, \dot{\mathbf{y}}_{(i)}, \dot{\mathbf{z}}_{(i)}, \mathbf{x}_{(i)}, \mathbf{y}_{(i)}, \mathbf{z}_{(i)} \rightarrow [\ddot{\mathbf{x}}_{(i)}, \ddot{\mathbf{y}}_{(i)}, \ddot{\mathbf{z}}_{(i)}, \dot{\mathbf{x}}_{(i+1)}, \dot{\mathbf{y}}_{(i+1)}, \dot{\mathbf{z}}_{(i+1)}, \mathbf{x}_{(i+1)}, \mathbf{y}_{(i+1)}, \mathbf{z}_{(i+1)}]$ )
- 2: **for**  $k \leftarrow n_w + 1$  to  $n_{(i)}$  **do** {kugle u gibanju}
- 3:  $\ddot{x}_{k(i)} \leftarrow f_{xk(i)}/m_{k(i)}$ ;  $\ddot{y}_{k(i)} \leftarrow f_{yk(i)}/m_{k(i)}$ ;  
 $\ddot{z}_{k(i)} \leftarrow f_{zk(i)}/m_{k(i)} + g$  {ubrzanje u  $t_1$ : (19)}
- 4:  $\dot{x}_{k(i+1)} \leftarrow \dot{x}_{k(i)} + \ddot{x}_{k(i)} \Delta t$ ;  $\dot{y}_{k(i+1)} \leftarrow \dot{y}_{k(i)} + \ddot{y}_{k(i)} \Delta t$ ;  
 $\dot{z}_{k(i+1)} \leftarrow \dot{z}_{k(i)} + \ddot{z}_{k(i)} \Delta t$  {brzina u  $t_2$ : 1. jed. u (18)}
- 5:  $x_{k(i+1)} \leftarrow x_{k(i)} + \dot{x}_{k(i)} \Delta t + \ddot{x}_{k(i)} \Delta t^2 / 2$ ;  
 $y_{k(i+1)} \leftarrow y_{k(i)} + \dot{y}_{k(i)} \Delta t + \ddot{y}_{k(i)} \Delta t^2 / 2$ ;  
 $z_{k(i+1)} \leftarrow z_{k(i)} + \dot{z}_{k(i)} \Delta t + \ddot{z}_{k(i)} \Delta t^2 / 2$   
{pomak u  $t_2$ : 2. jed. u (18)}
- 6: **end for**

o konstantnom ubrzanju nedvojbeno pogrešna. U trenutku prvog udara, unaprijed nepoznatog, funkcije krutosti i viskoznosti su prema našem linearnom modelu međudjelovanja singularne, pa isto vrijedi i za funkcije brzine i pomaka. Iz uvjeta ravnoteže (2) zbog  $m_i = \text{const.}$  slijedi da je i funkcija ubrzanja singularna i u slučaju velikog broja međudjelovanja vrlo oscilirajuća. Stoga bi pretpostavka o promjenjivoj (nekonstantnoj), ali pretjerano glatkoj funkciji ubrzanja slabo pridonijela točnosti; štoviše, vjerojatno bi dovela do veće pogreške ili nestabilnosti, a svakako bi produljila trajanje proračuna.

No, sigurno je  $\ddot{\mathbf{u}}_i(t) \neq \text{const.}$ , što zapravo znači da neka međudjelovanja nisu uzeta u obzir, pa su (18) tek približne vrijednosti iz kojih slijede i približne vrijednosti relativne brzine  $\dot{\delta}_{i,j}^n(t_2)$ , razmaka među kuglama  $\bar{\delta}_{i,j}(t_2)$  i smjera njihove spojnice  $\bar{\mathbf{n}}_{i,j}(t_2)$ . Zbog toga ne postoji suglasje između prediktorske pretpostavke (19) na početku i ravnotežne vrijednosti ubrzanja na kraju vremenskog koraka,

$$\ddot{\mathbf{u}}_i(t_2) = \mathbf{M}_i^{-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k_i(t_2)} \left[ k_{i,j} \bar{\delta}_{i,j}(t_2) + c_{i,j} \dot{\delta}_{i,j}^n(t_2) \right] \bar{\mathbf{n}}_{i,j}(t_2) + \mathbf{g}; \quad (20)$$

sada je broj susjednih kugli  $k_i(t_2)$ . Na kraju intervala postoji, prema tome, neuravnoteženo ubrzanje

$$\Delta \ddot{\mathbf{u}}_i(t_2) = \ddot{\mathbf{u}}_i(t_2) - \ddot{\mathbf{u}}_i. \quad (21)$$

Iz svega rečenog nedvojbeno slijedi da je vrlo teško odrediti dobro približenje funkciji ubrzanja kugle, tako da se može očekivati prilično velika vrijednost (21). Očito je da popravak (korektor) prediktorskog ubrzanja može biti odlučan za stabilnost proračuna i uporabu većih vremenskih koraka.

4.3 Korektor

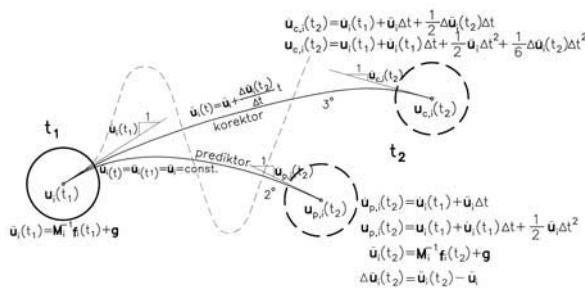
Budući da raspoložemo vrijednostima ubrzanja i reziduala na kraju vremenskog koraka, možemo pretpostaviti linearnu promjenu ubrzanja unutar njega:

$$\ddot{\mathbf{u}}_i(t) = \ddot{\mathbf{u}}_i + \frac{\Delta \ddot{\mathbf{u}}_i(t_2)}{\Delta t} t, \tag{22}$$

što nakon integracije (17) uz uvažavanje (22) daje praviljenu vrijednost brzine i pomaka (18) na kraju vremenskog odsječka:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{c,i}(t_2) &= \underbrace{\dot{\mathbf{u}}_{p,i}(t_1)}_{\dot{\mathbf{u}}_{p,i}(t_2)} + \ddot{\mathbf{u}}_i \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i(t_2) \Delta t, \\ \mathbf{u}_{c,i}(t_2) &= \underbrace{\mathbf{u}_{p,i}(t_1)}_{\mathbf{u}_{p,i}(t_2)} + \dot{\mathbf{u}}_{p,i}(t_1) \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{u}}_i \Delta t^2 + \frac{1}{6} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i(t_2) \Delta t^2. \end{aligned} \tag{23}$$

Izrazi (23) su početni uvjeti za sljedeći vremenski odsječak (novi prediktor). Opisani je postupak prikazan na slici 3.



Slika 3. Putanje kugle po metodi prediktor–korektor s konstantnim prediktorskim i linearnim korektorskim ubrzanjem

Prema posljednjim jednadžbama, izrazi (18) mogu se shvatiti kao početni uvjeti za korektorski i, kao što ćemo vidjeti u idućem poglavlju, za rekorektorski dio proračuna.

4.4 Višestruki korektor: implicitna inačica metode prediktor–korektor

Ako putanju kugle unutar vremenskog koraka opisuje vrlo oscilirajuća funkcija (isprekidano na slici 3.), može se očekivati veliko neuravnoteženo ubrzanje:

$$\Delta \ddot{\mathbf{u}}_{\max} = \max_i |\Delta \ddot{\mathbf{u}}_i(t_2)| \gg \varepsilon_{ii}, \tag{24}$$

pri čemu je  $\varepsilon_{ii}$  odabrani kriterij. Linearni popravak može tada biti vrlo „grub”, tako da postaje nužnim smanjiti duljinu vremenskog koraka ili upotrijebiti višestruki korektor (rekorektor) do zadovoljenja zadanog kriterija. Potonje je zapravo implicitno proširenje metode

prediktor–korektor, pa se (20), (21) i (23) mogu zapisati kao:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_i^{(j)}(t_2) &= \mathbf{M}_i^{-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k_i(t_2)} [k_{i,j} \bar{\delta}_{i,j}^{(j)}(t_2) + c_{i,j} \delta_{i,j}^{(j)}(t_2)] \bar{\mathbf{n}}_{i,j}^{(j)} + \mathbf{g}, \\ \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i^{(j)}(t_2) &= \ddot{\mathbf{u}}_i^{(j)}(t_2) - \ddot{\mathbf{u}}_i, \\ \dot{\mathbf{u}}_{c,i}^{(j+1)}(t_2) &= \dot{\mathbf{u}}_{p,i}(t_2) + \frac{1}{2} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i^{(j)}(t_2) \Delta t, \\ \mathbf{u}_{c,i}^{(j+1)}(t_2) &= \mathbf{u}_{p,i}(t_2) + \frac{1}{6} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i^{(j)}(t_2) \Delta t^2. \end{aligned} \tag{25}$$

Broj je popravaka označen s  $(j)$  i  $(j + 1)$ . Ako se korektor izvede samo jednom ( $j = 0$ ) govorimo o eksplicitnom obliku metode prediktor–korektor.

Spomenimo da za probleme u kojima je  $\Delta \ddot{\mathbf{u}}_{\max} \gg \varepsilon_{ii}$  neki autori preporučuju uporabu drugih metoda, poput metode Runge–Kutta ili, u novije vrijeme, metode Bulirsch–Stoer. Međutim, analize i dokazi učinkovitosti i točnosti tih metoda mahom su ograničeni na primjene za „glatke” probleme, te je preporuka upitna za visokofrekventne funkcije s brojnim singularitetima.

4.5 Kriteriji prekida

4.5.1 Kriterij prekida korektora

Iz prethodnog se poglavlja može naslutiti da je dobar kriterij za prekid ponavljanja korektora:

$$\Delta \ddot{\mathbf{u}}_{\max}^{(j)} = \max_i |\Delta \ddot{\mathbf{u}}_i^{(j)}(t_2)| < \varepsilon_{ii}, \tag{26}$$

gdje je  $\varepsilon_{ii}$  odabrani postotak  $p_{ii}$  od  $g$ . Nije, međutim, nužno postavljati stroge kriterije za prekid rekorektora. Drugim riječima, ne treba tražiti preciznu trenutnu ravnotežu sustava i trošiti proračunsko vrijeme unutar svakog prirasta vremena — zbog intenzivnog se gibanja sustava sile i položaji među kuglama značajno mijenjaju već u sljedećem vremenskom odsječku. Ipak, nekoliko iteracija može značajno smanjiti neuravnotežena opterećenja na kugle i omogućiti povećanje vremenskog koraka.

4.5.2 Kriteriji prekida proračuna: lokalna i globalna ravnoteža

Uvedena su još dva kriterija za prekid cijelog postupka proračuna u stadijima punjenja i udara materijalom. Prvo, kontrolirana je ravnoteža pojedine kugle, odnosno određena je najveća neuravnotežena sila u korektorskoj fazi:

$$f_{\max}^{(j)}(t_2) = \max_i \left| \sum_{k=1}^{k(t_2)} \mathbf{f}_{i,k}^{(j)}(t_2) \right| < \varepsilon_f, \tag{27}$$



gdje je kriterij  $\varepsilon_f$  određen kao postotak  $p_f$  težine najmanje kugle.

Drugo, kontrolirana je ravnoteža čitavog modela sadržaja, odnosno izračunana je ukupna neuravnotežena sila, u fazi korektora, tako da  $f_{\text{tot}}^{(j)}(t_2) < \varepsilon_{f_i}(t_2)$  gdje je,

$$f_{\text{tot}}^{(j)}(t_2) = \sqrt{\sum_{i=n_f}^{n(t_2)} f_{xi}^{(j)}(t_2) + \sum_{i=n_f}^{n(t_2)} f_{yi}^{(j)}(t_2) + \sum_{i=n_f}^{n(t_2)} f_{zi}^{(j)}(t_2)}, \quad (28)$$

ukupni rezidual modela, a  $n_f = n_w + 1$  prva kugla u gibanju. Kriterij  $\varepsilon_{f_i}(t_2)$  određen je kao postotak  $p_{f_i}$  trenutne težine  $g m_{\text{tot}}(t_2)$  složaja:

$$\varepsilon_{f_i}(t_2) = p_{f_i} g m_{\text{tot}}(t_2) = p_{f_i} g \sum_{i=n_f}^{n(t_2)} m_i(t_2). \quad (29)$$

Treba napomenuti da zadovoljenje kriterija ravnoteže cijelog sustava ne znači i dovoljno uravnoteženje pojedine kugle, dok je obrat, naravno, točan. Zbog toga se unutar modela složaja može pojaviti pogrešno rastavljanje sila međudjelovanja. Primjerice, ako se nekoliko kugli velikog sustava giba zrakom, globalna je ravnoteža sustava zadovoljena, iako su reziduali tih kugli preveliki ( $|\ddot{u}_i(t)| \geq g$ ). Opisani je slučaj dakako bezazlen jer je masa nekoliko kugli zanemariva u odnosu na masu sustava, ali ovakva se „gruba” ravnoteža može pojaviti negdje unutar modela sadržaja i spriječiti pojavu unutrašnjih lavina koje opet mogu značajno povećati opterećenja na stijenku.

U našem je radu odabrano  $p_{\ddot{u}} = 0, 1$ ,  $p_f = 0, 1$  i  $p_{f_i} = 0, 01$ , što je možda nedovoljno, ali stroži bi kriteriji produljili trajanje proračuna, posebice blizu položaja statičke ravnoteže kada su brzine, a time i utjecaj prigušenja, vrlo mali.

Algoritam korektorske faze proračuna s kriterijima konvergencije i mogućnošću ponavljanja prikazan je pseudokôdom 4.

#### 4.6 Algoritam metode prediktor–korektor

Sada se može prikazati cjeloviti algoritam metode prediktor–korektor primijenjene na rješavanje sustava (2) sa zadanim početnim i rubnim uvjetima. (Spomenimo da su kugle koje su zatvarale lijevak silosa na početku pražnjenja postale pokretne i zajedno s kuglama koje su pražnjenjem napustile silos ponovno upotrijebljene za njegovo punjenje.) Naglo zatvaranje lijevka simulirano je trenutnim zaustavljanjem kugli koje su se u trenutku zatvaranja našle u ravnini otvora i njihovim pretvaranjem u rubne kugle. (Opisani postupci traže neke operacije zamjene markica i indeksa kugli.) Algoritam je prikazan pseudokôdom 5.

#### Algoritam 4. Korektor s kriterijima konvergencije

- 1: **corrector** ( $n_w, g, \Delta t, n(i), \mathbf{m}(i), \mathbf{f}_{x(i)}^{(j)}, \mathbf{f}_{y(i)}^{(j)}, \mathbf{f}_{z(i)}^{(j)}, \ddot{\mathbf{x}}(i), \ddot{\mathbf{y}}(i), \ddot{\mathbf{z}}(i), \dot{\mathbf{x}}_{(i+1)}, \dot{\mathbf{y}}_{(i+1)}, \dot{\mathbf{z}}_{(i+1)}, \mathbf{x}_{(i+1)}, \mathbf{y}_{(i+1)}, \mathbf{z}_{(i+1)}, p_{f_i}$ )  
 $\rightarrow [\dot{\mathbf{x}}_{(i+1)}^{(j+1)}, \dot{\mathbf{y}}_{(i+1)}^{(j+1)}, \dot{\mathbf{z}}_{(i+1)}^{(j+1)}, \mathbf{x}_{(i+1)}^{(j+1)}, \mathbf{y}_{(i+1)}^{(j+1)}, \mathbf{z}_{(i+1)}^{(j+1)}, f_{m(i+1)}^{(j+1)}, f_{m(i+1)}^{(j)}, f_{t(i+1)}^{(j)}, \varepsilon_{f_i(i)}, \Delta \ddot{u}_{m(i+1)}^{(j)}]$
- 2:  $m_{t(i)} \leftarrow 0; f_{m(i+1)}^{(j)} \leftarrow 0;$   
 $f_{x(i+1)}^{(j)} \leftarrow 0; f_{y(i+1)}^{(j)} \leftarrow 0; f_{z(i+1)}^{(j)} \leftarrow 0;$   
 $z_{m(i+1)}^{(j+1)} \leftarrow 0; \Delta \ddot{u}_{m(i+1)}^{(j)} \leftarrow 0$  {poništanje}
- 3: **for**  $k \leftarrow n_w + 1$  to  $n(i)$  **do** {kugle u gibanju}
- 4:  $\ddot{x}_{(i+1)}^{(j)} \leftarrow f_{xk(i+1)}^{(j)} / m_{k(i)}; \ddot{y}_{(i+1)}^{(j)} \leftarrow f_{yk(i+1)}^{(j)} / m_{k(i)};$   
 $\ddot{z}_{(i+1)}^{(j)} \leftarrow f_{zk(i+1)}^{(j)} / m_{k(i)} + g$  {ubrzanje u  $t_2$ : 1. jed. u (25)}
- 5:  $\Delta \ddot{x}_{(i+1)}^{(j)} \leftarrow \ddot{x}_{(i+1)}^{(j)} - \ddot{x}_{k(i)}; \Delta \ddot{y}_{(i+1)}^{(j)} \leftarrow \ddot{y}_{(i+1)}^{(j)} - \ddot{y}_{k(i)};$   
 $\Delta \ddot{z}_{(i+1)}^{(j)} \leftarrow \ddot{z}_{(i+1)}^{(j)} - \ddot{z}_{k(i)}$  {rezidual u  $t_2$ : 2. jed. u (25)}
- 6:  $\dot{x}_{k(i+1)}^{(j+1)} \leftarrow \dot{x}_{k(i+1)}^{(j)} + \Delta \dot{x}_{k(i+1)}^{(j)} \Delta t / 2;$   
 $\dot{y}_{k(i+1)}^{(j+1)} \leftarrow \dot{y}_{k(i+1)}^{(j)} + \Delta \dot{y}_{k(i+1)}^{(j)} \Delta t / 2;$   
 $\dot{z}_{k(i+1)}^{(j+1)} \leftarrow \dot{z}_{k(i+1)}^{(j)} + \Delta \dot{z}_{k(i+1)}^{(j)} \Delta t / 2;$   
 {(re)korigirana brzina u  $t_2$ : 3. jed. u (25)}
- 7:  $x_{k(i+1)}^{(j+1)} \leftarrow x_{k(i+1)}^{(j)} + \Delta x_{k(i+1)}^{(j)} \Delta t^2 / 6;$   
 $y_{k(i+1)}^{(j+1)} \leftarrow y_{k(i+1)}^{(j)} + \Delta y_{k(i+1)}^{(j)} \Delta t^2 / 6;$   
 $z_{k(i+1)}^{(j+1)} \leftarrow z_{k(i+1)}^{(j)} + \Delta z_{k(i+1)}^{(j)} \Delta t^2 / 6$   
 {(re)korigirani pomak u  $t_2$ : 4. jed. u (25)}
- 8:  $z_{m(i+1)}^{(j+1)} \leftarrow \max(z_{m(i+1)}^{(j+1)}, z_{k(i+1)}^{(j+1)})$  {visina sadržaja}
- 9:  $\Delta \ddot{u}_{(i+1)}^{(j)} \leftarrow \sqrt{\Delta \ddot{x}_{(i+1)}^{2(j)} + \Delta \ddot{y}_{(i+1)}^{2(j)} + \Delta \ddot{z}_{(i+1)}^{2(j)};$   
 $\Delta \ddot{u}_{m(i+1)}^{(j)} \leftarrow \max(\Delta \ddot{u}_{m(i+1)}^{(j)}, \Delta \ddot{u}_{(i+1)}^{(j)})$   
 {neuravnoteženo ubrzanje: (26)}
- 10:  $f_{(i+1)}^{(j)} \leftarrow \sqrt{f_{xk(i+1)}^{2(j)} + f_{yk(i+1)}^{2(j)} + f_{zk(i+1)}^{2(j)};$   
 $f_{m(i+1)}^{(j)} \leftarrow \max(f_{m(i+1)}^{(j)}, f_{(i+1)}^{(j)})$   
 {neuravnotežena sila: (27)}
- 11:  $f_{x(i+1)}^{(j)} \leftarrow f_{x(i+1)}^{(j)} + f_{xk(i+1)}^{(j)}; f_{y(i+1)}^{(j)} \leftarrow f_{y(i+1)}^{(j)} + f_{yk(i+1)}^{(j)};$   
 $f_{z(i+1)}^{(j)} \leftarrow f_{z(i+1)}^{(j)} + f_{zk(i+1)}^{(j)}$  {ukupni rezidual: (28)}
- 12:  $m_{t(i)} \leftarrow m_{t(i)} + m_{k(i)}$  {ukupna masa: (29)}
- 13: **end for**
- 14:  $f_{t(i)}^{(j)} \leftarrow \sqrt{f_{x(i+1)}^{2(j)} + f_{y(i+1)}^{2(j)} + f_{z(i+1)}^{2(j)}$  {ukupni rezidual: (28)}
- 15:  $\varepsilon_{f_i(i)} \leftarrow p_{f_i} m_{t(i)} g$  {kriterij reziduala: (29)}

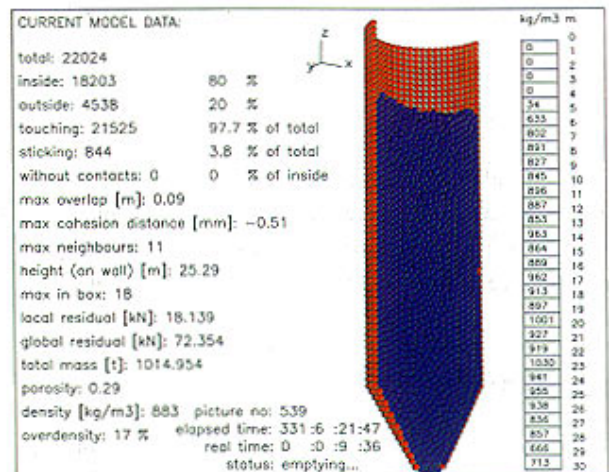
**Algoritam 5. Rješavanje sustava (2)**

- 1:  $pc (d_h, h_h, d_c, h_c, a, x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}, r_{min}, r_{max}, g, \gamma, k_w, c_w, k_c, c_c, z_0, \Delta t, pN, p\bar{u}, p_f, p_{f_i}) \rightarrow [f_{x(i)}, f_{y(i)}, f_{z(i)}, \dot{x}(i), \dot{y}(i), \dot{z}(i), \ddot{x}(i), \ddot{y}(i), \ddot{z}(i), x(i), y(i), z(i)]$
- 2:  $\epsilon_{\bar{u}} \leftarrow p\bar{u}g$  {kriterij neuravnoteženog ubrzanja}
- 3:  $\epsilon_f \leftarrow p_f \gamma 4/3 r_{min}^3 \pi$  {kriterij neuravnotežene sile}
- 4:  $[n_w, k(0), c(0), x(0), y(0), z(0), r(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)] \leftarrow wall (d_h, h_h, d_c, h_c, k_w, c_w)$ ; {model stijenke silosa}
- 5:  $n(0) \leftarrow n_w$  {broj kugli jednak je broju rubnih kugli}
- 6:  $w \leftarrow b(0)$  {broj rubnih kugli u pojedinoj kocki}
- 7:  $z_m(0) \leftarrow 0$  {početna visina sadržaja}
- 8:  $i \leftarrow 0$  {brojač vremenskih koraka}
- 9: **repeat** {petlja po vremenskim koracima}
- 10:  $[n(i), m(i), k(i), c(i), x(i), y(i), z(i), r(i), \dot{x}(i), \dot{y}(i), \dot{z}(i)] \leftarrow free\_fall (x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}, r_{min}, r_{max}, \gamma, k_c, c_c, z_0, z_m(i), n(i), x(i), y(i), z(i), r(i))$
- 11:  $f_{x(i)} \leftarrow 0; f_{y(i)} \leftarrow 0; f_{z(i)} \leftarrow 0$
- 12:  $[f_{x(i)}, f_{y(i)}, f_{z(i)}] \leftarrow forces (n(i), pN, k(i), c(i), m(i), x(i), y(i), z(i), r(i), \dot{x}(i), \dot{y}(i), \dot{z}(i))$
- 13:  $[\ddot{x}(i), \ddot{y}(i), \ddot{z}(i), \dot{x}(i+1), \dot{y}(i+1), \dot{z}(i+2), x(i+1), y(i+1), z(i+1)] \leftarrow predictor (n_w, g, \Delta t, n(i), m(i), f_{x(i)}, f_{y(i)}, f_{z(i)}, \dot{x}(i), \dot{y}(i), \dot{z}(i), x(i), y(i), z(i))$
- 14:  $j \leftarrow 0$  {brojač (re)korektorskih koraka}
- 15: **repeat** {(re)korektorska petlja}
- 16:  $f_{x(i+1)}^{(j)} \leftarrow 0; f_{y(i+1)}^{(j)} \leftarrow 0; f_{z(i+1)}^{(j)} \leftarrow 0$
- 17:  $[f_{x(i+1)}^{(j)}, f_{y(i+1)}^{(j)}, f_{z(i+1)}^{(j)}] \leftarrow forces (n(i), pN, k(i), c(i), m(i), x(i+1), y(i+1), z(i+1), r(i), \dot{x}(i+1), \dot{y}(i+1), \dot{z}(i+1))$
- 18:  $[\ddot{x}(i+1)^{(j+1)}, \ddot{y}(i+1)^{(j+1)}, \ddot{z}(i+1)^{(j+1)}, \dot{x}(i+1)^{(j+1)}, \dot{y}(i+1)^{(j+1)}, \dot{z}(i+1)^{(j+1)}, f_{m(i+1)}^{(j)}, f_{i(i+1)}^{(j)}, \epsilon_{f(i)}, \Delta \ddot{u}_{m(i+1)}^{(j)}] \leftarrow corrector (n_w, g, \Delta t, n(i), m(i), f_{x(i+1)}^{(j)}, f_{y(i+1)}^{(j)}, f_{z(i+1)}^{(j)}, \dot{x}(i), \dot{y}(i), \dot{z}(i), \dot{x}(i+1), \dot{y}(i+1), \dot{z}(i+1), x(i+1), y(i+1), z(i+1), p_{f_i})$
- 19:  $j \leftarrow j + 1$
- 20: **until**  $\Delta \ddot{u}_{m(i+1)}^{(j)} < \epsilon_{\bar{u}}$  {kriterij ubrzanja: (26)}
- 21:  $\dot{x}(i+1) \leftarrow \dot{x}(i+1)^{(j)}; \dot{y}(i+1) \leftarrow \dot{y}(i+1)^{(j)}; \dot{z}(i+1) \leftarrow \dot{z}(i+1)^{(j)}$
- 22:  $x(i+1) \leftarrow x(i+1)^{(j)}; y(i+1) \leftarrow y(i+1)^{(j)}; z(i+1) \leftarrow z(i+1)^{(j)}$
- 23:  $z_m(i+1) \leftarrow z_m(i+1)^{(j)}$
- 24:  $i \leftarrow i + 1$
- 25: **until**  $f_{m(i)}^{(j)} < \epsilon_f \wedge f_{i(i)}^{(j)} < \epsilon_{f_i}$  {lokalni i globalni kriteriji neuravnotežene sile: (27) i (28)}

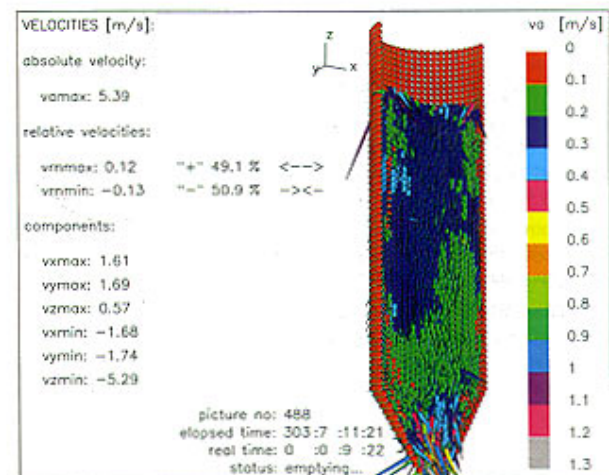
**5 Primjer**

Prema prikazanim je algoritmima u programskom jeziku FORTRANu 77 (tvarka Absoft) napisan računalni program za simulaciju punjenja, pražnjenja i udara materijalom pri naglom zatvaranju otvora lijevka. Za potrebe grafičkog praćenja rezultata program je nadopunjen potprogramima za brzi perspektivni prikaz tijeka proračuna s mogućnostima presijecanja modela (upotrijebljena je biblioteka grafičkih funkcija PGPLOT).

Neki su od rezultata proračuna prikazani na slikama 4. do 7. (Polovina modela je uklonjena radi praćenja zbijanja unutar silosa.) Treba istaknuti izrazito diskontinuirano ponašanje složaja (gustoće, međudjelovanja, brzine) i opterećenja na stijenku, što modeli utemeljeni na mehanici kontinuuma ne mogu obuhvatiti. Opširnija analiza ovdje samo spomenutih rezultata predmet je posebnog članka.

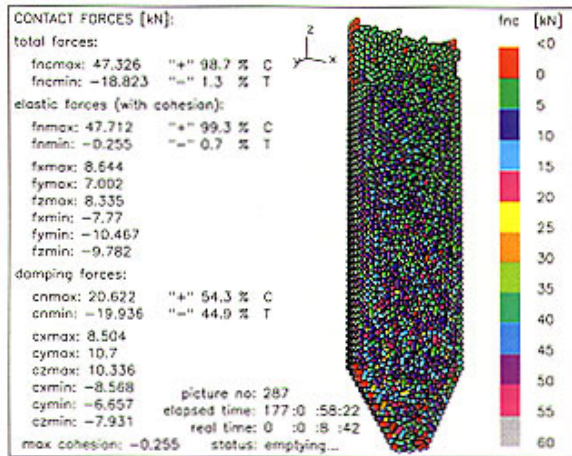


Slika 4. Ponašanje sadržaja pri pražnjenju silosa

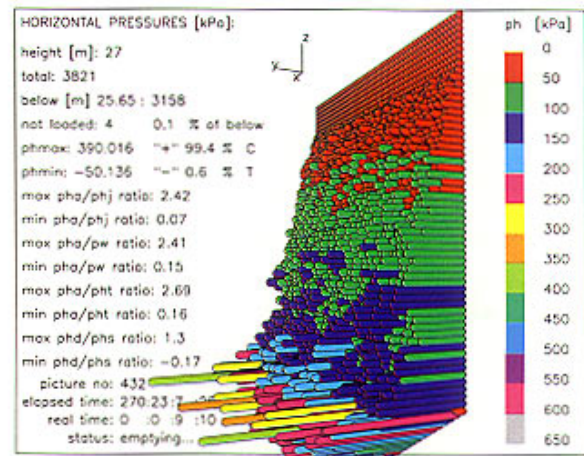


Slika 5. Vektori brzina zrnâ pri pražnjenju





Slika 6. Veličine i smjerovi međudjelovanja



Slika 7. Horizontalni pritisci na razmotanom plaštu

## 6 Zaključak

Rezultati dobiveni metodom diskretnih elemenata još nisu u potpunosti primjenjivi za dimenzioniranje silosa [10]. Oblici nekih diskretnih pojava jasno su zaobilježeni, ali s iznosima opterećenja treba biti oprezan. Trenutno je stanje takvo iz dva razloga: a) proračuni velikih diskretnih sustava su dugotrajni, poglavito kada određivanje anvelope djelovanja na stijenku traži parametre

tarske studije, a b) znanja o obliku, granulometrijskom sastavu i mikromehaničkim svojstvima međudjelovanja (posebice trenja) među zrnima unutar neporemećenog sadržaja su skromna.

Zbog prvog se problema pribjegava manjem broju diskretnih elemenata jednostavnijih oblika, a drugi nas problem tjera na pojednostavljene konstitutivne modele zrna i međudjelovanja što proračune još uvijek čini pregrubima.

## LITERATURA

- [1] Dorn, W. S.; McCracken, D. D.: *Numerical Methods with FORTRAN IV Case Studies*, Wiley International Edition, John Wiley & Sons, New York, 1972.
- [2] Knuth, D. E.: *The Art of Computer Programming. Volume 3: Sorting and Searching*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1973.
- [3] Cundall, P. A.; Strack, O. D. L.: *A Distinct Element Model for Granular Assemblies*, *Geotechnique*, 29 (1979) 1, pp. 47-65.
- [4] Haaker, G.; Scott, O.: *Wall loads on corrugated steel Silos*, Proceedings of International Conference on Design of Silos for Storage and Flow, University of Lancaster, Lancaster, England, 1980, pp. 480-503.
- [5] Knowlton, T. M.; Carson, J. W.; Klinzing, G. E.; Yang, W.-C.: *The importance of storage, transfer, and collection*, *Chemical Engineering Progress* 90 (1994) 4, pp. 44-54.
- [6] Press, W. H.; Teukolsky, S. A.; Vetterling, W. T.; Flannery, B. P.: *Numerical Recipes in FORTRAN. The Art of Scientific Computing*, Second Edition, Cambridge University Press, New York, 1994.
- [7] Jaeger, H. M.; Nagel, S. R.; Behringer, R. P.: *Granular solids, liquids and gases*, *Review of Modern Physics*, 68 (1996) 4, pp. 1259-1273.
- [8] Jaeger, H. M.: *Chicago experiments on convections, compaction, and compression*, *Physics of Dry Granular Media* (Eds. Herrmann, H. J.; Hovi, J.-P.; Luding, S.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997, pp. 553-583.
- [9] Lazarević, D.: *Modeliranje opterećenja spremnika pri punjenju zrnatim materijalom*, magistarski rad, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, Zagreb, 1998.
- [10] Mark, J.; Holst, F. G.; Rotter, J. M.; Ooi, J. Y.; Rong, G. H.: *Numerical Modeling of Silo Filling. II: Discrete Element Analyses*, *Journal of Engineering Mechanics*, 125 (1999).
- [11] Williams, J. R.; O'Connor, R.: *Discrete Element Simulation and The Contact Problem*, *Archives of Computational Methods in Engineering*, 6 (1999) 4, pp. 279-304.
- [12] Lazarević, D.: *Diskretno modeliranje opterećenja silosa*, disertacija, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, Zagreb, 2000.