

# Ojačane grede

---

**Kazda, Ariana**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:505072>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-16**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Ariana Kazda

# OJAČANE GREDE

ZAVRŠNI ISPIT

Zagreb, godina 2024.



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Ariana Kazda

# OJAČANE GREDE

ZAVRŠNI ISPIT

assoc.prof.Marta Šavor Novak

Zagreb, godina 2024.



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Ariana Kazda

# LANGER GIRDERS

FINAL EXAM

assoc.prof.Marta Šavor Novak

Zagreb, year 2024.

## SAŽETAK

Tematika ovog završnog rada je analiza ojačanih greda, njihova primjena i važnost u mostogradnji. U nastavku je prikazan primjer statičkog sustava ojačane grede u vidu mosta te analitički i grafički način rješavanja.

## SADRŽAJ

1. UVOD.....	1
2. METODE I TEHNIKE RTADA.....	2
3. OJAČANE GREDE.....	3
3.1. Ležajevi .....	4
4. ANALITIČKI I GRAFIČKI POSTUPAK.....	6
5. PRIMJENA KOD MOSTOVA .....	7
5.1. Mali most .....	9
6. ANALITIČKI POSTUPAK .....	10
6.1. Analiza opterećenja .....	10
6.2. Ležajne reakcije .....	11
6.3. Presjek kroz Langerov zglob .....	12
6.4. Proračun čvorova.....	13
6.5. Dijagrami unutarnjih sila .....	16
6.6. Prikaz dijagrama unutarnjih sila i ležajnih reakcija .....	20
7. GRAFIČKI POSTUPAK .....	22
7.1. Analiza opterećenja .....	22
7.2. Ležajne reakcije .....	23
7.3. Presjek kroz Langerov zglob .....	24
7.4. Proračun čvorova.....	26
8. ZAKLJUČAK.....	29
9. LITERATURA .....	30

## 1. UVOD

Od davnina čovjek ima tendenciju graditi stabilne i sigurne konstrukcije. Kako bismo to ostvarili važno je poznavati temeljne zakone mehanike. Mehanika je znanost koja govori o općim zakonitostima gibanja i ravnoteže tijela na koja djeluju vanjske sile. Isto tako, važno je napomenuti kako je mehanika prvi kolegij u kojemu se studenti upoznaju s temeljnim pojmovima statičkih sustava, unutarnjih sila i vanjskih djelovanja. Sam kolegij važan je temelj za daljnje razumijevanje studija.

Tematika ovog završnog rada su statički sustavi ojačanih greda. One su samo jedne od mnogobrojnih statičkih sustava, koji su pronašli različite primjene u građevinarstvu. Neki od njih su troglobni sustavi, poduprte grede, Gerberovi nosači, rešetkasti nosači i ostali.

## 2. METODE I TEHNIKE RADA

U ovome završnom radu analizirane su ojačane grede. Kao primjer statičkog sustava uzet je Mali most te je proveden proračun analitičkim i grafičkim postupkom. U analitičkom postupku korišten je softver LinPro pomoću kojeg su prikaza i dijagrami unutarnjih sila te ležajne reakcije. Grafički proračun proveden je ručno, a zbog preciznosti rezultata korišten je AutoCad za planove sila.

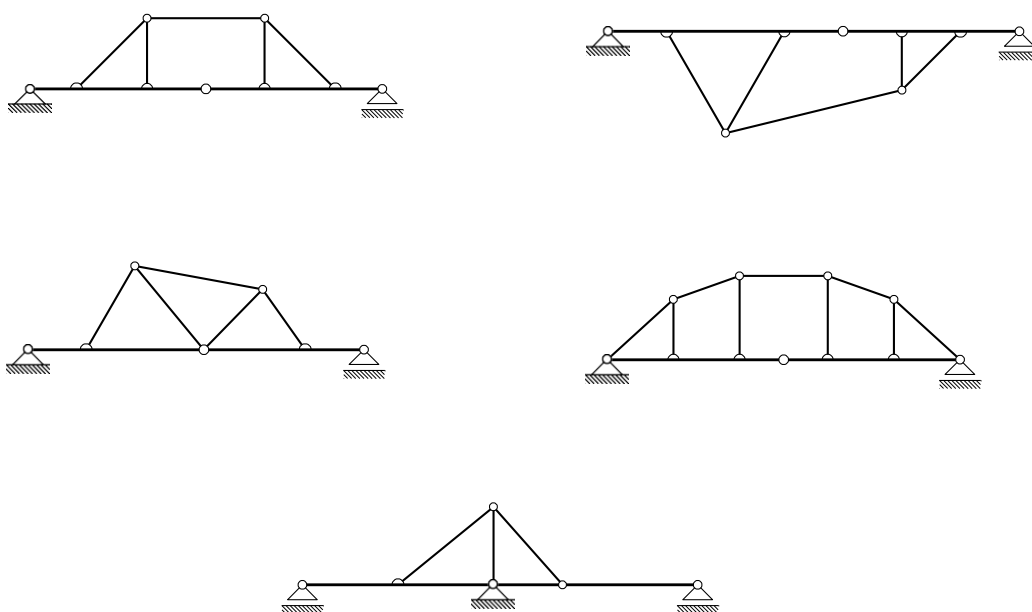


### 3. OJAČANE GREDE

Ojačane grede poznate kao Langerove grede našle su široku primjenu u građevinskim konstrukcijama mostova i mnogih drugih. U pogledu statičkog sustava sastoje se od proste grede koja je ojačana zglobno povezanim štapovima, koji mogu biti s gornje ili donje strane i zgloba, koji još nosi naziv Langerov zglob. Imaju tri vanjske veze s podlogom te unutarnju vezu putem zatega i podupora.

Langerov zglob osigurava nam statičku određenost sustava što znači da nam jednadžbe ravnoteže osiguravaju pronalazak svih statičkih vrijednosti. Također, sustavi mogu biti i statički neodređeni. Posljedica toga je nemogućnost određivanja svih statičkih vrijednosti samo preko jednadžbi ravnoteže.

Statički sustavi ojačanih greda mogu biti jednostavni i složeni kao što je prikazano na slici.



Slika 1.: Statički sustavi ojačanih greda (K. Fresl: Građevna statika 1)

### 3.1. Ležajevi

Kakobismo najbolje razumjeli pojam ležaja u obzir uzimamo dvije važne karakterizacije, kinematičku i statičku. U pogledu kinematičke karakterizacije ležajevi su oslonci sustava pomoću kojih se onemogućavaju apsolutni ili relativni pomaci u određenim smjerovima i apsolutni ili relativni zaokreti oko određenih osi. S druge strane statička karakterizacija ležajeva opisuje kao veze koje omogućavaju prijenos sila u određenim pravcima i momenata u određenim osima.

U nastavku su prikazana tri najčešća ležaja, broj stupnjeva slobode i reakcija.

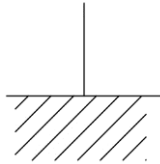
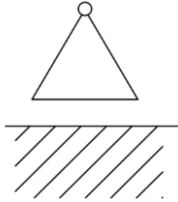
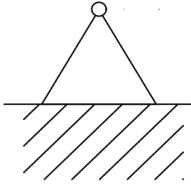
Upeti spoj ima karakteristiku sprječavanja kuta zaokreta te pomaka u svim smjerovima. Kao reakcije javljaju se moment, uzdužna i poprečna sila.

Klizni spoj ima karakteristiku sprječavanja pomaka u vertikalnom smjeru, adpuštanje pomaka u horizontalnom smjeru te rotacija. Kao reakcija javlja se vertikalna sila.

Nepomični spoj ima karakteristiku sprječavanja pomaka u vertikalnom i horizontalnom smjeru. Kao reakcije javljaju se horizontalna i vertikalna sila.

Važno je napomenuti da su stupnjevi slobode idealizirani. U stvarnosti ne možemo ostvariti idealne uvjete pri kojima nema pomaka i kuta zaokreta.

Tablica 1.: prikaz ležajeva

LEŽAJEVI	Slika	Stupanj slobode	Vanjske reakcije
UPETI SPOJ		0	3
KLIZNI		1	1
NEPOMIČNI		2	2

## 4. ANALITIČKI I GRAFIČKI POSTUPAK

U analitičkom postupku tražimo skalarne veličine iznosa sila. Prilikom proračuna pretpostavljamo smjerove sila na njihovim pravcima te proračunom dobivamo pravi smjer sile, ovisno o tome jesmo li dobili pozitivnu silu – dobro pretpostavljeni smjer ili negativnu silu – smjerje suprotan od pretpostavljenog. Nadalje, postavljamo jednadžbe ravnoteže pomoću kojih dobivamo skalarne vrijednosti sila. Za dobivanje dijagrama momenata, uzdužnih sila te poprečnih sila radimo presjeke na statičkom sustavu iz kojih dobivamo iznose unutarnjih sila. Presjeke postavljamo na mjestima promjene geometrije sustava i promjene opterećenja.

U grafičkom postupku poznatom kao i Culmannov postupak dobivamo vektore traženih sila iz čiji duljina dobivamo iznose. Postupak se svodi na rješavanje ravnoteže sila, koja tvori poligon sila.

Kada sile ne možemo smjestiti u poligon sila, jer se njihova sjecišta nalaze u beskonačnosti, koristimo Verižni poligon u kojemu pomoću pola i zraka koje se sijeku s polom i silama dobivamo smjer i iznos tražene sile. Zahvaljujući zrakama u poligonu, silu možemo smjestiti u prostor.

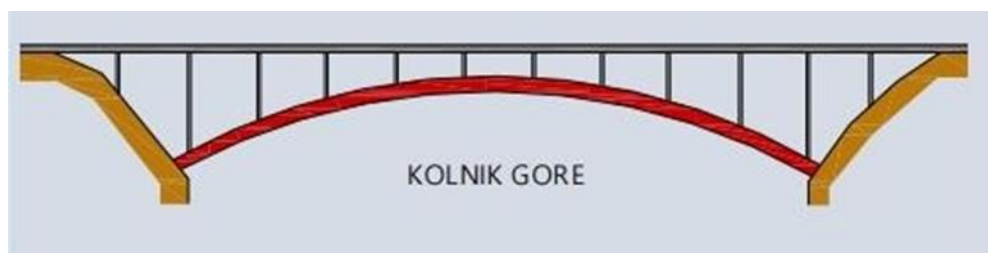
## 5. PRIMJENA KOD MOSTOVA

Mostovi su isprva bili građeni od prirodnog materijala kao što je kamen te nosive strukture svoda. Takav sustav preuzima vanjska djelovanja te ga tlačnim naprezanjima prenose do temelja. Luk i svod kao nosive strukture najbolje iskorištavaju svojstva gradivata je s njima moguće premostiti velike raspone.

Međutim, zahvaljujući intenzivnom razvoju gradiva i struktura očituje se veliki napredak u mostogradnji, samim time i nove nosive strukture kao što su ojačane grede.

Ojačana greda kao gipki luk nad krutom gredom omogućava premošćavanje većih rasponate izvedbu tanke grede.

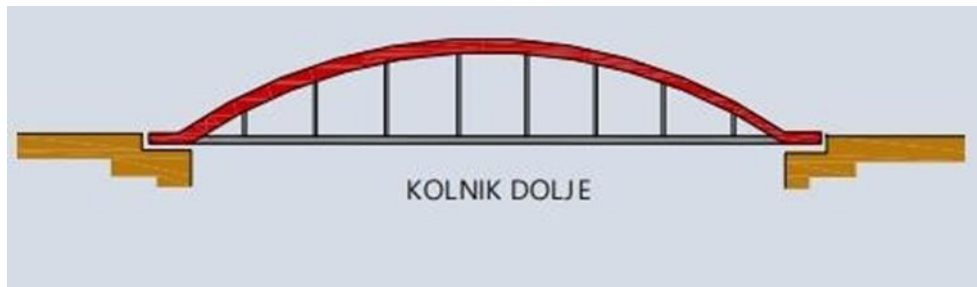
Obzirom na položaj kolnika razlikujemo kolnik gore, upušteni kolnik i kolnik dolje.



Slika 2.: Kolnik gore (J. Radić: Uvod u mostarstvo (2009.))



Slika 3.: Upušteni kolnik (J. Radić: Uvod u mostarstvo (2009.))



Slika 4.: Kolnik dolje (J. Radić: Uvod u mostarstvo (2009.))

## 5.1. Mali most

U ovome završnom radu za potrebe prikaza načina proračuna ojačanih greda uzet će se Mali most.

Mali most nalazi se u Zrenjaninima te postoji 120 godina. Njegov dugi vijek trajanja obilježava moderna i kompaktna čelična konstrukcija dužine 31 metar, širine 9 metara te visine 5,5 metra. Predstavlja važnu kulturološku kariku svoga mjesta.



Slika 5.: Mali most, Zrenjanin (<https://www.zrenjaninheritage.com/archives/21080>)

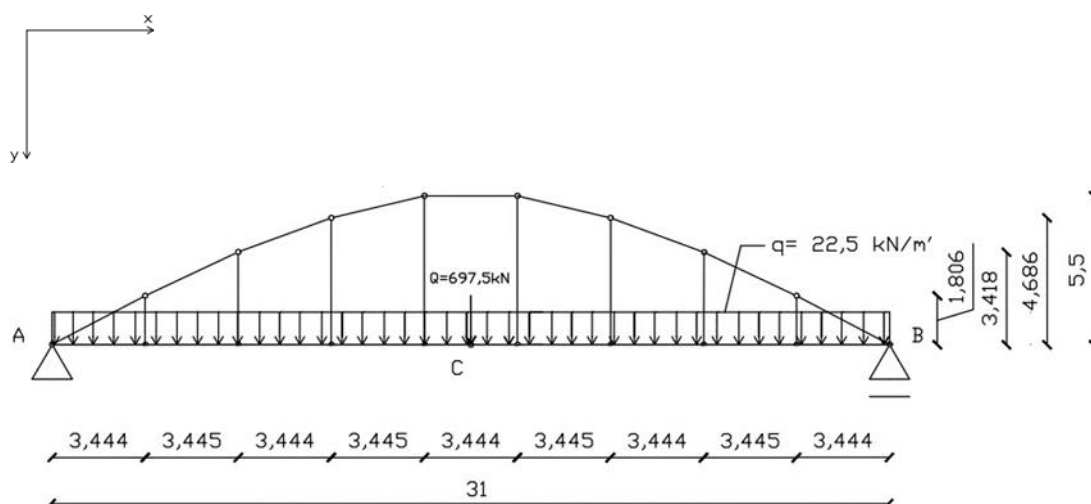
## 6. ANALITIČKI POSTUPAK

U nastavku će se prikazati proračun Maloga mosta analitičkim postupkom.

### 6.1. Analiza opterećenja

Iznos opterećenja po metru kvadratnom  $q' = 2,5 \text{ kN/m}'$  pomnožen s ukupnom širinom mosta od 9 metara daje nam ukupno kontinuirano opterećenje  $q = 22,5 \text{ kN/m}'$ . Kako bismo kontinuirano opterećenje sveli na koncentriranu silu koja djeluje točno u polovici raspona grede, željeno opterećenje množimo s ukupnim rasponom grede.

Dobivamo  $Q = q \cdot 31 \text{ m} = 697,5 \text{ kN}$





## 6.2. Ležajne reakcije

Kako bismo dobili reakcije u ležaju A i B, postavljamo jednačbe ravnoteže oko spomenutih točaka.

$$\sum M_A = 0$$

$$B \cdot 31 - Q \cdot 15,5 = 0$$

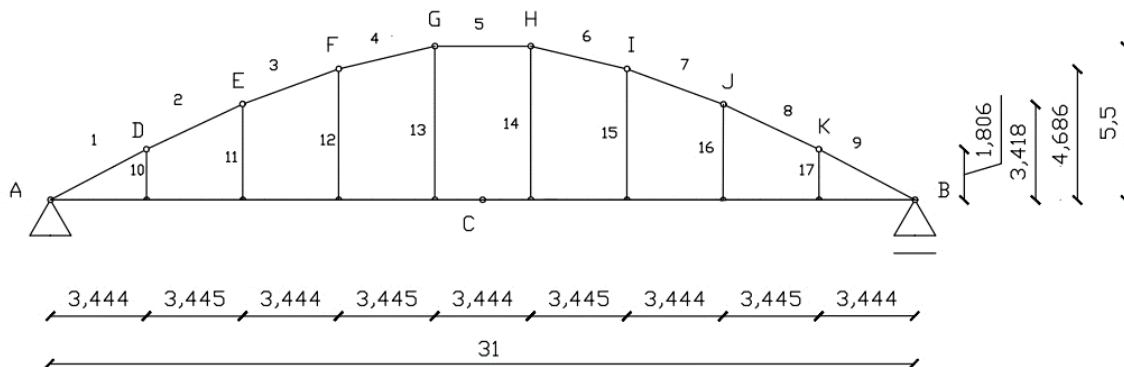
$$B = 348,75 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-A \cdot 31 + Q \cdot 15,5 = 0$$

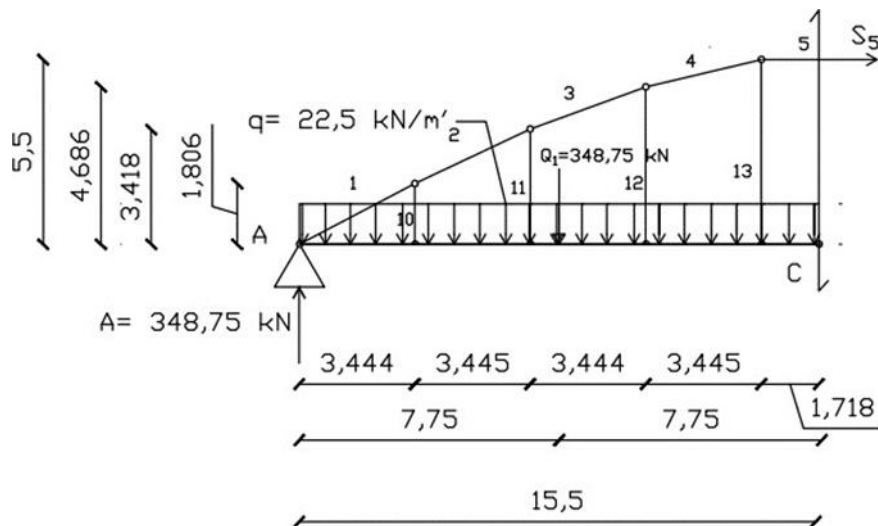
$$A = 348,75 \text{ kN}$$

Na statičkom sustavu prikazane su oznake štapova od broja 1 do 17, te čvorova od D- K.



### 6.3. Presjek kroz Langerov zglob

Jedna od karakteristika Langerovog zgloba je presjek dva elementa od jednom. Ovim korakom iz postavljene jednadžbe ravnoteže u Langerovom zglobu dobivamo iznos sile u štapu 5.



$$\sum M_C = 0$$

$$Q_1 \cdot 7,75 - A \cdot 15,5 - S_5 \cdot 5,5 = 0$$

$$S_5 = -491,42 \text{ (T) kN}$$

## 6.4. Proračun čvorova

Nakon što smo dobili silu  $S_5$  možemo dobiti i sve ostale nepoznate sile u štapovima proračunom čvorova. Kako je statički sustav simetričan, dovoljno je računati samo jednu stranu sustava. Odabrani čvorovi su H, I, J, K.

Sile u čvorovima rastavljamo na komponente te računamo sumu sila s obzirom na osi x i y.

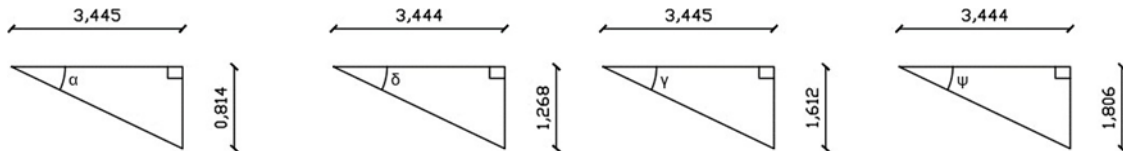
Potrebni kutovi za rastav sila na komponente:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,814}{3,445} = 13,294^\circ$$

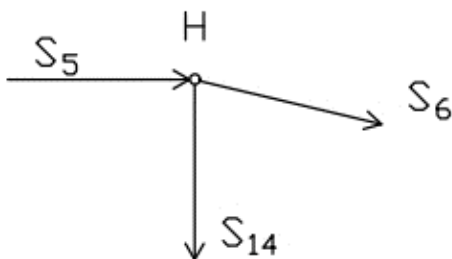
$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1,268}{3,444} = 20,213^\circ$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1,612}{3,445} = 25,076^\circ$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1,806}{3,444} = 27,672^\circ$$



ČVOR H



$$\sum F_x = 0$$

$$S_6 \cos \alpha - S_5 = 0$$

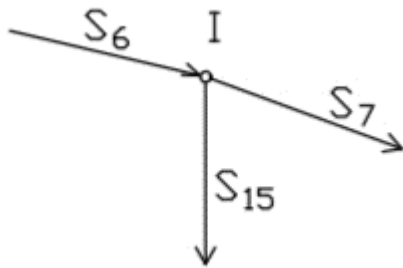
$$S_6 = -504,95 \text{ (T) kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$S_{14} + S_6 \sin \alpha = 0$$

$$S_{14} = 116,12 \text{ (V) kN}$$

ČVORI



$$\sum F_x = 0$$

$$S_7 \cos \delta - S_6 \cos \alpha = 0$$

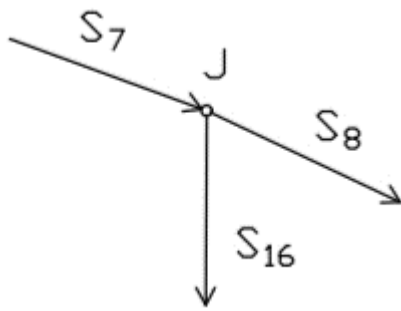
$$S_7 = -523,67 \text{ (T) kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$S_{15} + S_7 \sin \delta - S_6 \sin \alpha = 0$$

$$S_{15} = 64,81 \text{ (V) kN}$$

ČVOR J



$$\sum F_x = 0$$

$$S_8 \cos \gamma - S_7 \cos \delta = 0$$

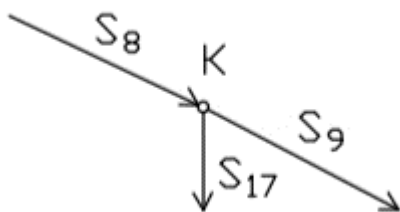
$$S_8 = -542,56 \text{ (T) kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$S_{16} + S_8 \sin \gamma - S_7 \sin \delta = 0$$

$$S_{16} = 49,01 \text{ (V) kN}$$

ČVOR K



$$\sum F_x = 0$$

$$S_9 \cos \psi - S_8 \cos \gamma = 0$$

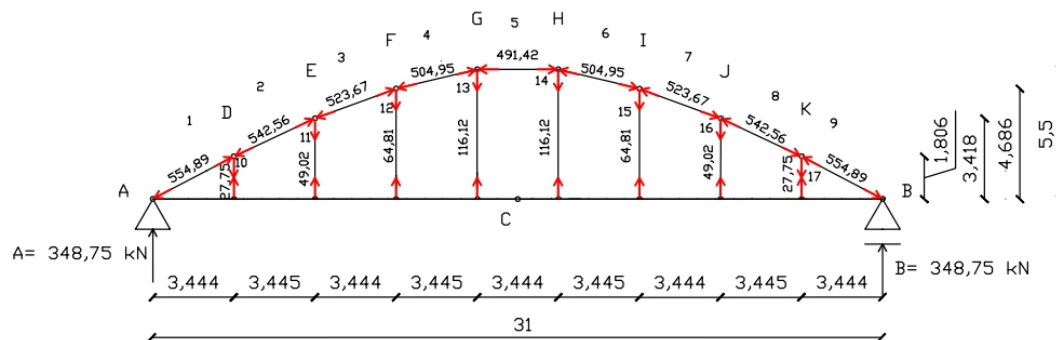
$$S_9 = -554,89 \text{ (T) kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$S_{17} + S_9 \sin \psi - S_8 \sin \gamma = 0$$

$$S_{17} = 27,75 \text{ (V) kN}$$

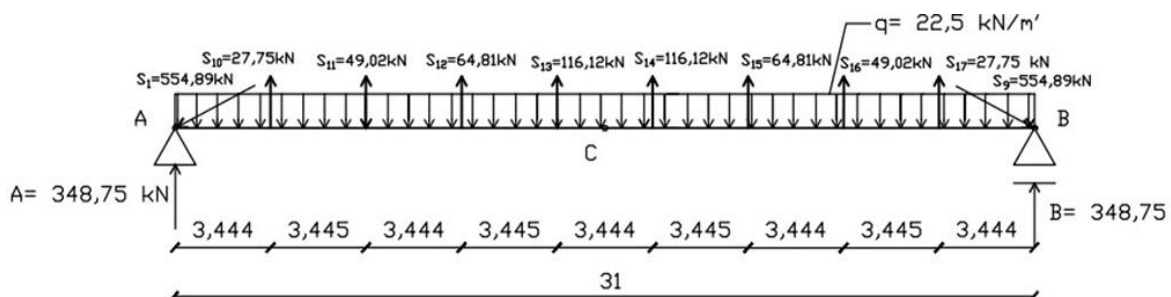
Prikaz skice stvarnih djelovanja reakcija i sila u štapovima:



## 6.5. Dijagrami unutarnjih sila

Sljedeći proračun unutarnjih sila: uzdužne,  $N$  i poprečne sile,  $T$  te momenta,  $M$  za prikaz odgovarajućih dijagrama.

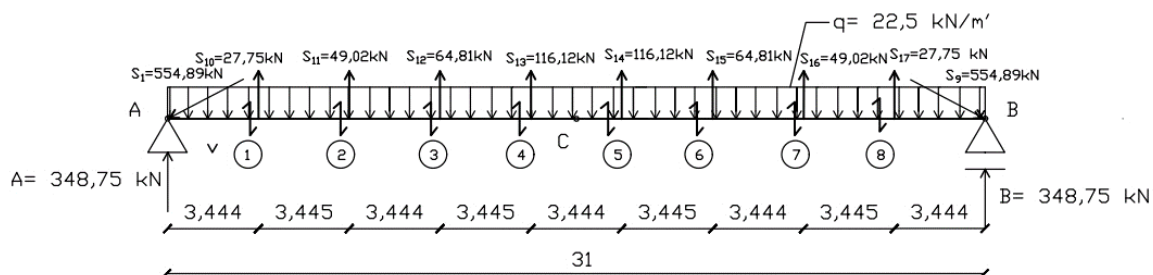
Specifičnost ojačanih greda je ojačanje u vidu štapova, koje preuzima opterećenja te ih prenosi ugredu te u ležajeve. Stoga je sljedeći korak, opteretiti gredu dobivenim silama iz pojedinih čvorova.



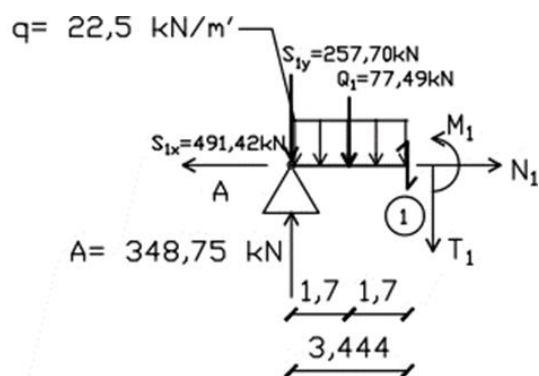
Kako bismo dobili iznose unutarnjih sila, radimo presjeka na mjestima djelovanja sila, momenata, promjene geometrije sustava te svim mjestima u kojima je potencijalno moguća promjena raspodjele unutarnjih sila.

Za presjeka 1, 2, 3, 4 i 5, 6, 7, 8 vrijedi simetrija.

Prikaz presjeka:



PRESJEK 1



$$\sum N = 0$$

$$N_1 = S_{1x}$$

$$N_1 = 491,42 \text{ kN}$$

$$\sum T = 0$$

$$T_1 + S_{1y} + Q_1 - A = 0$$

$$T_1 = 13,56 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$S_{1y} \cdot 3,444 - A \cdot 3,444 + Q_1 \cdot 1,7 + M_1 = 0$$

$$M_1 = 180,15 \text{ kNm}$$

Ekvivalentno presjeku 1 nastavljamo s daljnjim presjecima.

### PRESJEK 2

$$\sum N = 0$$

$$N_2 = S_{1x}$$

$$N_2 = 491,42 \text{ Kn}$$

$$\sum T = 0$$

$$T_2 + S_{1y} + Q_2 - A - S_{10} = 0$$

$$T_2 = -36,20 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0$$

$$S_{1y} \cdot 6,889 - A \cdot 6,889 + Q_2 \cdot 3,445 - S_{10} \cdot 3,445 + M_2 = 0$$

$$M_2 = 188,96 \text{ kNm}$$

### PRESJEK 3

$$\sum N = 0$$

$$N_3 = S_{1x}$$

$$N_3 = 491,42 \text{ kN}$$



$$\sum T = 0$$

$$T_3 + S_{1y} + Q_3 - A - S_{10} - S_{11} = 0$$

$$T_3 = 64,67 \text{ kN}$$

$$\sum M_3 = 0$$

$$S_{1y} \cdot 10,333 - A \cdot 10,333 + Q_3 \cdot 5,167 - S_{10} \cdot 6,889 - S_{11} \cdot 3,444 + M_3 = 0$$

$$M_3 = 99,66 \text{ kNm}$$

#### PRESJEK 4

$$\sum N = 0$$

$$N_4 = S_{1x}$$

$$N_4 = 491,42 \text{ kN}$$

$$\sum T = 0$$

$$T_4 + S_{1y} + Q_4 - A - S_{10} - S_{11} - S_{12} = 0$$

$$T_4 = 77,37 \text{ kN}$$

$$\sum M_4 = 0$$

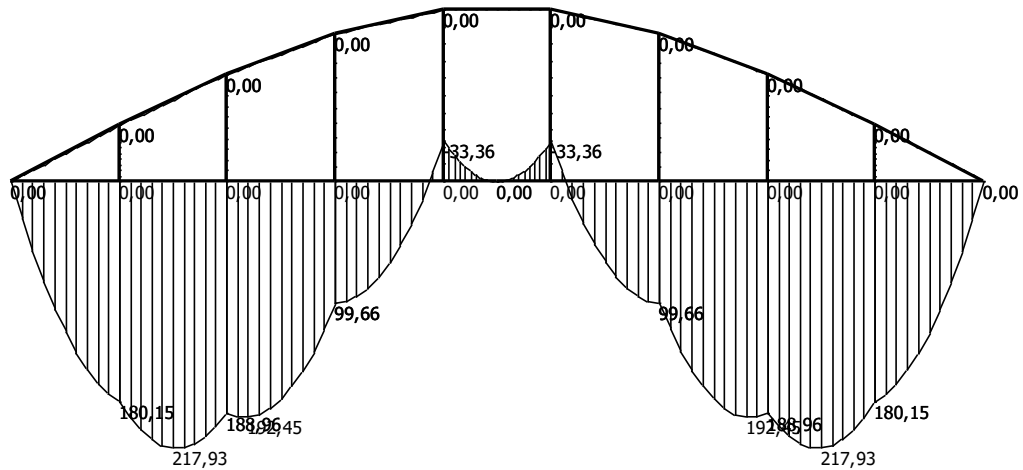
$$S_{1y} \cdot 13,778 - A \cdot 13,778 + Q_4 \cdot 6,889 - S_{10} \cdot 10,334 - S_{11} \cdot 6,889 - S_{12} \cdot 3,445 + M_4 = 0$$

$$M_4 = -33,36 \text{ kNm}$$

## 6.6. Prikaz dijagrama unutarnjih sila i ležajnih reakcija

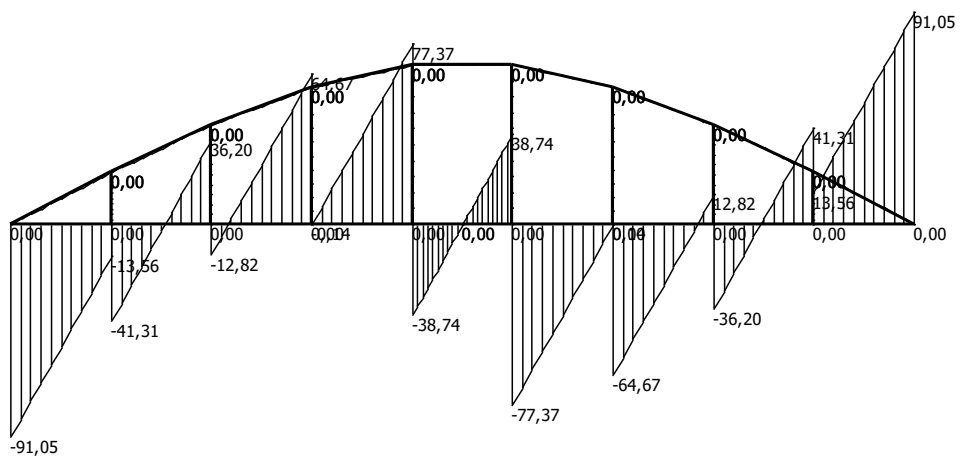
Prikaz dijagrama te ležajnih reakcija dobiven je pomoću softvera LinPro.

M dijagram



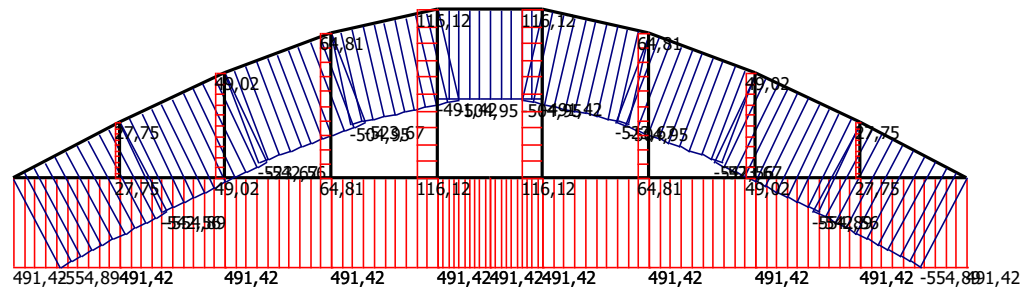
Moment Diagram, Comb: CASE1, Units: kN-m

T dijagram



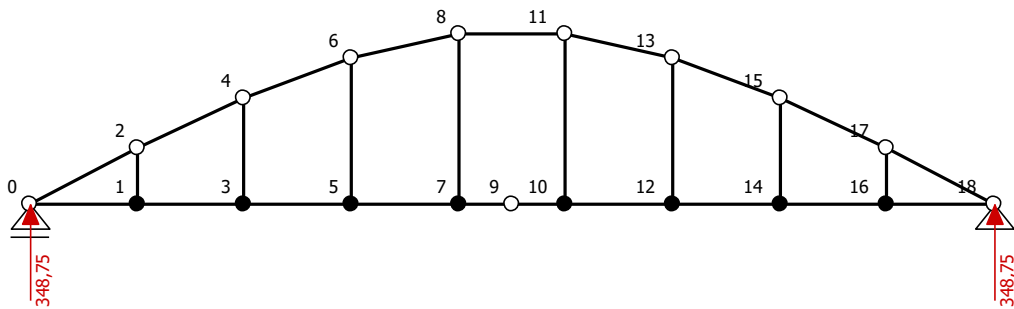
Shear Force Diagram, Comb: CASE1, Units: kN-m

N dijagram



Axial Force Diagram, Comb: CASE1, Units: kN-m

Reakcije



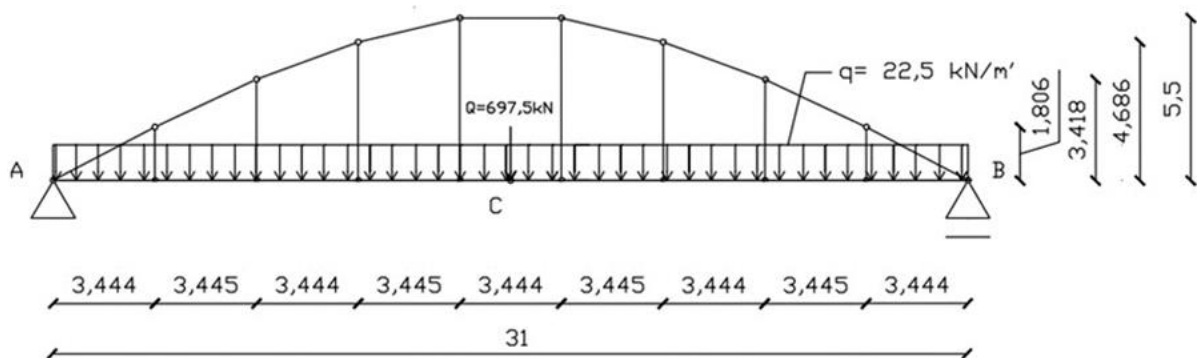
Reactions, Comb: CASE1, Units: kN-m

## 7. GRAFIČKI POSTUPAK

U nastavku će se prikazati proračun Maloga mosta grafičkim postupkom.

### 7.1. Analiza opterećenja

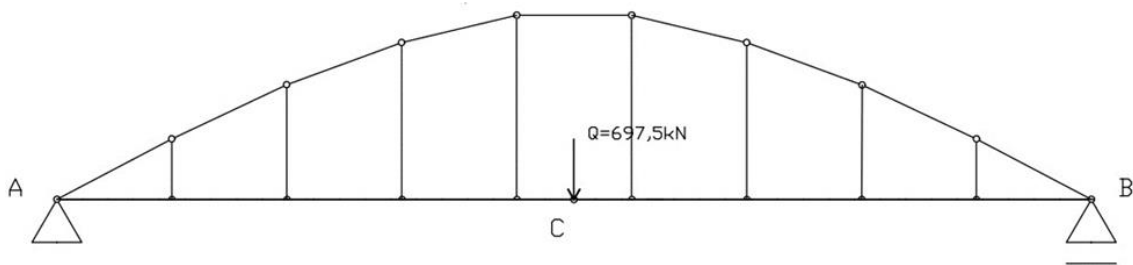
Za navedeni postupak vrijedi ista analiza opterećenja kao i kod analitičkog postupka.



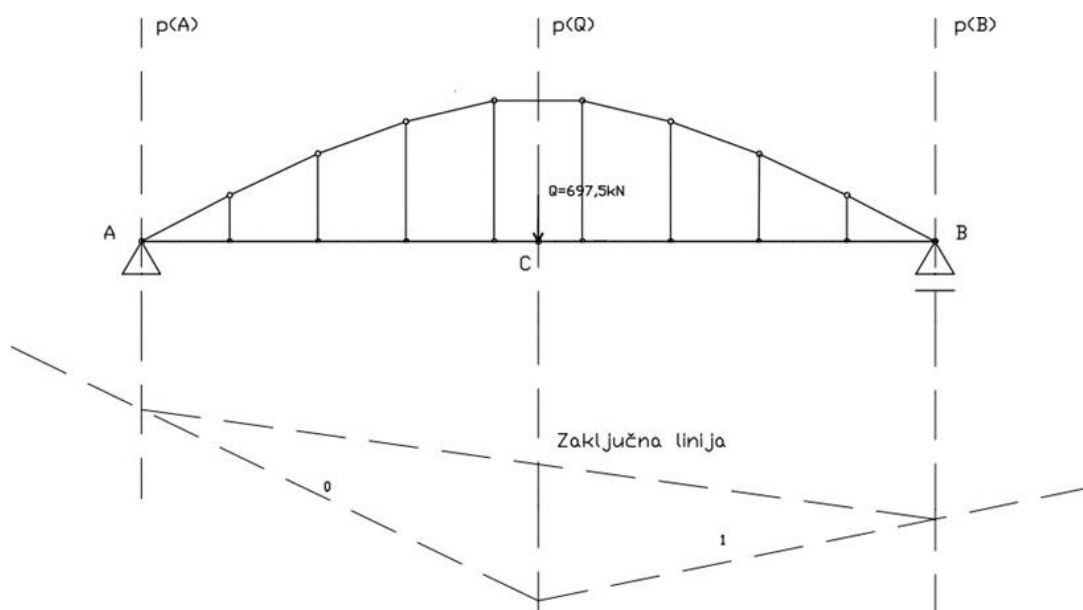
## 7.2. Ležajne reakcije

Kontinuirano opterećenje svodimo na koncentriranu silu  $Q$ , koja djeluje u sredini raspona grede.

$$Q = q' \cdot 31\text{m} = 697,5\text{ kN}$$



Za dobivanje iznosa ležajnih reakcija radimo ravnotežu sila u koju spadaju sile iz ležaja te djelujuća koncentrirana sila  $Q$ .

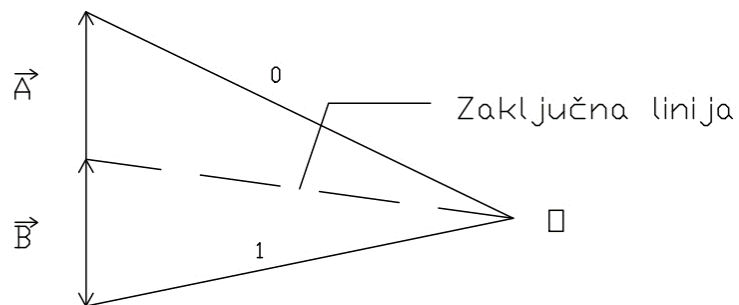


Plan sila

Verižni poligon

MJ 1cm : 100 kN

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{Q} = \vec{0}$$



□čitano:

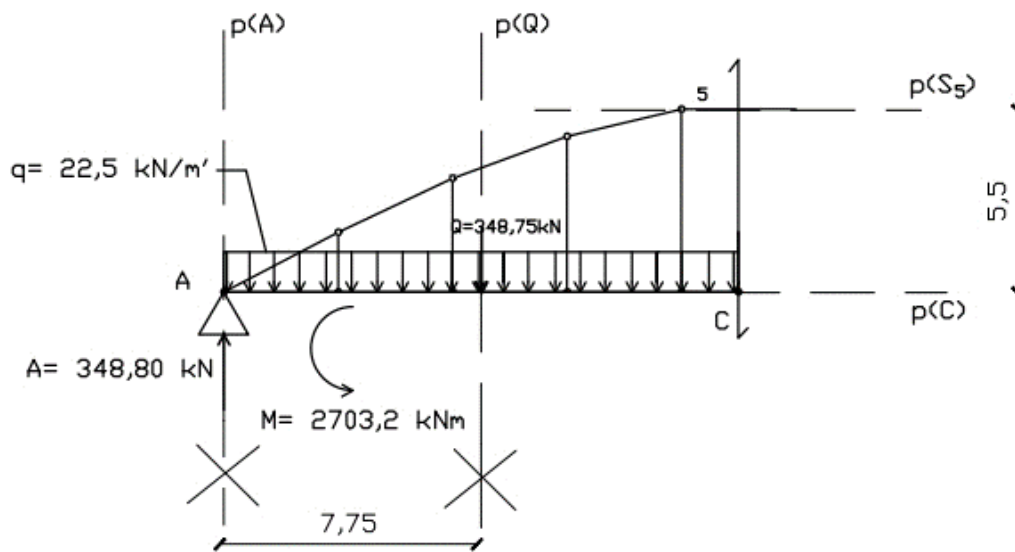
$$A = 348,00 \text{ kN}$$

$$B = 348,00 \text{ kN}$$

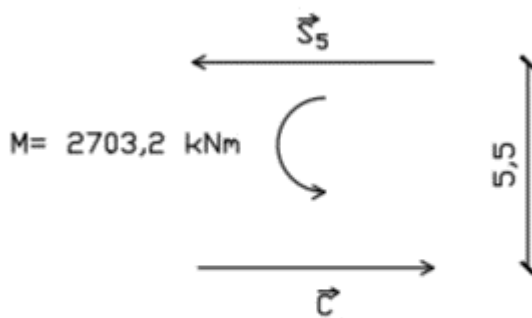
### 7.3. Presjek kroz Langerov zglob

Kako bismo dobili iznos sile u štapu  $S_5$ , koja nam je potrebna za daljnji proračun sila izčvorova sustava radimo presjek u zglobu C.

Djelujuće sile A i Q zamjenjujemo momentom  $M = 2703,2 \text{ kNm}$  pomoću kojega dobivamo nepoznate sile iz štapa 5 te silu iz zgloba C.



Plan sila  
MJ 1cm : 100 kN



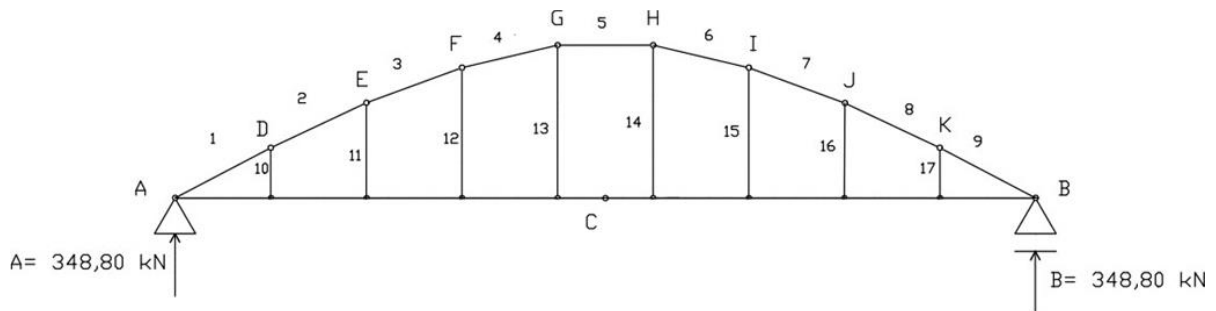
□čitano:

$$S_5 = 491,49 \text{ kN}$$

$$C = 491,49 \text{ kN}$$

## 7.4. Proračun čvorova

Sljedeći korak je proračun čvorova. S obzirom da je sustav simetričan iznosi sila u čvorovima H, I, J, K jednaki su i za čvorove G, F, E, D.

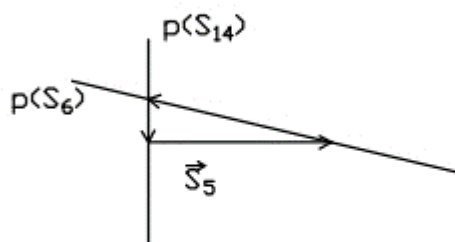


ČVOR H

Plan sila

MJ 1cm : 100 kN

$$\vec{S}_5 + \vec{S}_6 + \vec{S}_{14} = \vec{0}$$



Đčitano:

$$S_6 = 505,00 \text{ kN}$$

$$S_{14} = 116,00 \text{ kN}$$

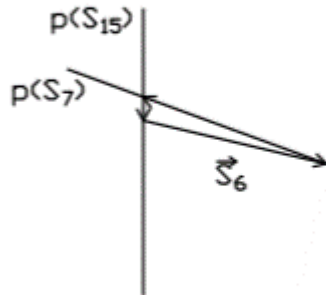


## ČVOR I

Plan sila

MJ 1cm : 100 kN

$$\vec{S}_{15} + \vec{S}_6 + \vec{S}_7 = \vec{0}$$



Očitano:

$$S_7 = 523,00 \text{ kN}$$

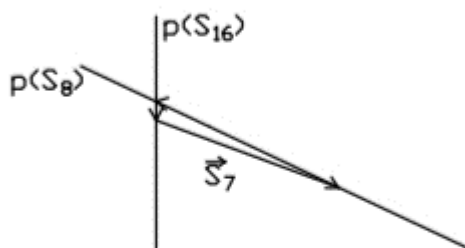
$$S_{15} = 63,00 \text{ kN}$$

## ČVOR J

Plan sila

MJ 1cm : 100 kN

$$\vec{S}_{16} + \vec{S}_8 + \vec{S}_7 = \vec{0}$$



Očitano:

$$S_8 = 542,00 \text{ kN}$$

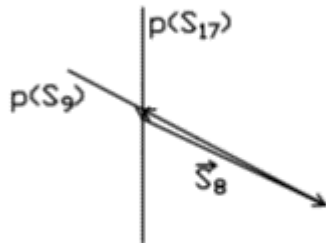
$$S_{16} = 51,00 \text{ kN}$$

## ČVOR K

Plan sila

MJ 1cm : 100 kN

$$\vec{S}_{17} + \vec{S}_9 + \vec{S}_8 = \vec{0}$$



Očitano:

$$S_9 = 25,00 \text{ kN}$$

$$S_{17} = 554,00 \text{ kN}$$

## 8. ZAKLJUČAK

U ovom radu analizirali smo statički sustav ojačanih greda sastavljenih od proste grede, Langerovog zgloba te zglobno povezanih štapova u vidu ojačanja. Sustav ojačanja koji se može nalaziti iznad ili ispod grede omogućuje jako dobar prijenos opterećenja te su zbog toga ojačanegrede široko zastupljene u mostogradnji.

Kao primjer ojačanih greda prikazali smo Mali most u Zrenjaninu koji smo riješili analitičkim i grafičkim postupkom. Prikazana je usporedba dvaju postupaka kao načina rješavanja statičkih sustava. Analitičkim postupkom pomoću presjeka dobili smo iznose unutarnjih sila, koje smo prikazali pomoću momentnog dijagrama, dijagrama uzdužnih sila te dijagrama poprečnih sila.

U grafičkom postupku pokazano je dobivanje sila iz ležajeva pomoću Verižnog dijagrama, kojeg smo primijenili jer nam se pravci djelovanja svih triju sila sijeku u beskonačnosti, odnosno paralelni su. Nadalje za dobivanje nepoznatih sila u čvorovima sustava preko poligona sila, koji se sastojao od tri sile dobili smo iznose i smjerove traženih sila.

Kod usporedbi rješenja u oba postupka postoji određeno odstupanje, koje je vrlo malo. Analitičkii grafički postupak korišteni su u podjednako mjeri te je odabir postupka rješavanja vlastiti odabir pojedinca.

## 9. POPIS LITERATURE

K. Fresl: Građevna statika 1 (2017.).

P. Gidak, E. Šamec: Statički neodređeni sistemi (2022.).

M. Šavor Novak: Statika tijela u ravnin (prezentacija)

J. Radić: Uvod u mostarstvo (2009.).

<https://www.zrenjaninheritage.com/archives/21080>