

# Poduprti nosači

---

**Ambrušec, Ivana**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:557461>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-30**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Ivana Ambrušec

# PODUPRTI NOSAČI

ZAVRŠNI ISPIT

Zagreb, 2024.



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Ivana Ambrušec

## **PODUPRTI NOSAČI**

ZAVRŠNI ISPIT

prof. dr. sc. Krešimir Fresl

Zagreb, 2024.



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Ivana Ambrušec

## **PROPED-UP SYSTEMS**

FINAL EXAM

prof. dr. sc. Krešimir Fresl

Zagreb, 2024.



OBRAZAC 3

POTVRDA O POZITIVNOJ OCJENI PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Student/ica :

Ivana Ambrušec	0082063232
(Ime i prezime)	(JMBAG)

zadovoljio/la je na pisanom dijelu završnog ispita pod naslovom:

Poduprti nosači  
(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

Proped-up systems  
(Naslov teme završnog ispita na engleskom jeziku)

i predlaže se provođenje daljnjeg postupka u skladu s Pravilnikom o završnom ispitu i diplomskom radu Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta.

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu znanstvenog projekta: (upisati ako je primjenjivo)

(Naziv projekta, šifra projekta, voditelj projekta)

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu stručne prakse na Fakultetu: (upisati ako je primjenjivo)

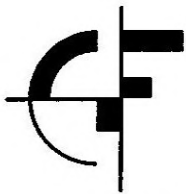
(Ime poslodavca, datum početka i kraja stručne prakse)

Datum: 16. rujna 2024.

Mentor: Krešimir Fresl

Potpis mentora:

Komentor:



OBRAZAC 5

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja:

IVANA AMBRUŠEC, 0082003232

(Ime i prezime, JMBAG)

student/ica Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta ovim putem izjavljujem da je moj pisani dio završnog ispita pod naslovom:

PODUPRTI NOSAČI

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

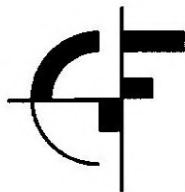
izvorni rezultat mojega rada te da se u izradi istoga nisam koristio/la drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

Datum:

17. rujna 2024.

Potpis:

Ambušec Ivana



OBRAZAC 6

IZJAVA O ODOBRENJU ZA POHRANU I OBJAVU PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Ja:

IVANA AMBRUŠEĆ, 7069 2940559

(Ime i prezime, OIB)

ovom izjavom potvrđujem da sam autor/ica predanog pisanog dijela završnog ispita i da sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti odgovara sadržaju dovršenog i obranjenog pisanog dijela završnog ispita pod naslovom:

PODUPRTI NOSAČI

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

koji je izrađen na sveučilišnom prijediplomskom studiju Građevinarstvo Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta pod mentorstvom:

KREŠIMIR FRESL

(Ime i prezime mentora)

i obranjen dana:

24 rujna 2024.

(Datum obrane)

Suglasan/suglasna sam da pisani dio završnog ispita bude javno dostupan, te da se trajno pohrani u digitalnom repozitoriju Građevinskog fakulteta, repozitoriju Sveučilišta u Zagrebu te nacionalnom repozitoriju.

Datum:

17 rujna 2024.

Potpis:

Ambrušec Ivana

## ZAHVALE

Zahvaljujem mentoru na susretljivosti i strpljenju tijekom pisanja ovog rada.

Na početku ću istaknuti jednu kvalitetnu misao: 'Za svako rješenje postoji problem.'

PUNO HVALA mojoj obitelji koji su stajali iza mene svaki korak ovog puta. Njihova potpora i ljubav ne može se izmjeriti te se nadam da im vraćam barem mali dio toga. Hvala roditeljima koji me podržavaju u svakoj životnoj odluci, nije vam lako. Hvala bratu koji me spusti na zemlju kad je potrebno. Bez vas ništa od ovoga ne bi bilo moguće.

Mom dečku Leonardu, HVALA. Na svemu. Hvala za svaku minutu provedenu uz mene i moje studiranje. Hvala ti što si bio uz mene svaki korak ovog puta. Hvala ti za svaku lijepu riječ i utjehu koju si mi pružio kada je (i nije) bilo potrebno. Hvala na strpljenju, bodrenju i pažnji koju si odvajao za mene u ovom procesu. Tvoje strpljenje mjeri se u 'megama', 'gigama' i 'terama'. Hate to break it to you, ali bit će toga još.

Hvala 'drugoj obitelji' koja je uvijek bila tu za mene kad je trebalo - voziti me na ispit ili reći da će sve biti dobro. Hvala vam što trpite mene i moje probleme u svojoj kući.

Hvala mojim prijateljicama i kolegama s fakulteta koji su mi pomagali tijekom svih godina studija, a posebno sad na kraju. Drago mi je što smo se svi našli zajedno u ovome.

Hvala Jano. Na pojašnjenjima i razumijevanju. Velik dio ovoga je tvoja zasluga.

Hvala Mateji koja je poslušala svaki moj problem. Još prije 9 godina su ti to trebali reći, ali bila si, i bit ćeš, bolji "učenik" od mene. Znam da ćeš uspjeti u svemu što naumiš na svom životnom putu.

Hvala GFZG koji me naučio najviše životnih lekcija, od kojih je najbitnija strpljenje.

Na kraju: zahvalna sam samoj sebi. Za svaki riješeni zadatak. Za svaki napisani kolokvij. Za svaki položeni ispit. Za svaki napravljen program. Za svaku neprospavanu noć, i svaki loš dan. Idemo dalje!



## SAŽETAK

Poduprti nosači konstruktivni su sistemi koji preuzimaju vanjska opterećenja i prenose ih na okolinu, osiguravajući čvrstoću konstrukcije te sprječavanje loma i deformacija. Sastoje se od dviju krutih greda spojenih zglibom i potpornog sklopa, a oslonjeni su na pomični i nepomični ležaj ili dva pomična ležaja. Dije se u dvije skupine, ovisno je li potporni sklop razdvojen zglibom grede, tako da ispod ili iznad njega štap postoji ili ne postoji, a svaka od njih oslonjena je na pripadajuću kombinaciju ležajeva. U ovom radu prikazana su dva postupka rješavanja podprtih nosača, a to su analitički i grafički.

**Ključne riječi:** analiza unutarnjih sila, poduprti nosači, potporni sklop, analitički postupak, grafički postupak

## SUMMARY

Proped-up systems are structural systems that absorb external loads and transfer them to the environment, ensuring the stability of the structure and preventing fractures and deformations. They consist of two rigid beams connected by a joint and a supporting assembly, and they rest on either a movable and a fixed bearing or two movable bearings. They are divided into two groups, depending on whether the supporting assembly is separated by the beam joint and whether there is a bar above or below it. Each group is supported by a corresponding combination of bearings. This paper presents two methods for solving proped-up systems: the analytical and graphical approaches.

**Key words:** analysis of internal forces, proped-up systems, support assembly, analytical method, graphical method

## SADRŽAJ

ZAHVALE .....	i
SAŽETAK.....	ii
SUMMARY .....	iii
SADRŽAJ.....	iv
1. UVOD.....	5
2. METODE I TEHNIKE RADA .....	6
3. KARAKTERISTIKE PODUPRTIH NOSAČA.....	7
4. ANALITIČKI I GRAFIČKI POSTUPCI RJEŠAVANJA .....	10
4.1 Analitički postupak .....	15
4.2 Grafički postupak.....	25
5. SISTEMI S KOSIM ŠTAPOVIMA.....	30
6. ZAKLJUČAK.....	46
POPIS LITERATURE .....	47

## 1. UVOD

Nosači su konstruktivni sistemi koji preuzimaju vanjska opterećenja i ostala djelovanja, prenoseći ih na okolinu [3]. Statika nosača osigurava dovoljnu čvrstoću konstrukcije kako ne bi došlo do loma i deformacija [3]. Takvi se slučajevi predviđaju analizom unutarnjih sila koje se kao rezultat vanjskog opterećenja javljaju u nosačima.

Elementi konstrukcije podijeljeni su na štapne, plošne i masivne elemente, s obzirom na njihov geometrijski oblik i funkciju u sistemu. Spojeni su međusobno i pričvršćeni su na neke vanjske čvrste točke koje se nazivaju vezama. Konstruktivni sistem može uključivati različite vrste veza i opterećenja, kao i proračunske metode, kako bi se omogućio prijenos opterećenja i stabilnost cijelog sistema

Poduprti sistem sadrži niz međusobno spojenih tijela koja su s podlogom povezana štapnim podsistemom i direktnim spojevima. Naziv poduprt potječe od odnosa tih podsistema: štapovi su ispod tijela, pa su tijela poduprta. Moguć je i obrnut raspored kod kojeg su štapovi iznad tijela, pa su u tom slučaju tijela ovješena.

Kako se radi o određenim spojenim sistemima koji preuzimaju proizvoljno opterećenje, orijentacija u prostoru nije bitna za princip rješavanja. U građevinskoj praksi služe za racionalno premošćivanje velikih raspona. Upotrebljavaju se kao nosive konstrukcije mostova u situacijama gdje postoje dobri uvjeti za prenošenje vertikalnih i horizontalnih sila na ležajevima.

## 2. METODE I TEHNIKE RADA

Tijekom izrade ovog rada korištena su stečena znanja iz kolegija Mehanika 1 i Građevna statika 1 te pripadajuća literatura. Priložene skice izrađene su u programu AutoCAD.

### 3. KARAKTERISTIKE PODUPRTIH NOSAČA

Konstruktivni sistem je sklop elemenata koji se poistovjećuje s pojmom 'konstrukcija'. Pojam 'nosač' se također povezuje s pojmom 'konstrukcija' u svakodnevnom govoru. 'Proračunska shema' je pojednostavljeni prikaz konstrukcije koju prilikom proračuna ne možemo prikazati i analizirati u obliku u kojem će se izvoditi ili je već izvedena [1].

Građevinske konstrukcije su izložene raznim opterećenjima [3]. Glavna podjela opterećenja je na statička i dinamička opterećenja [3]. Konstrukcija mora biti čvrsta i stabilna u statičkom i dinamičkom smislu, kako bi mogla prihvatiti vanjsko opterećenje. Čvrstoća i stabilnost konstrukcije podrazumijevaju minimalan broj potrebnih veza, kojima se može preuzeti vanjsko opterećenje i osigurati geometrijska nepromjenjivost. Spojeni sistem geometrijski je nepromjenjiv ako se ponaša kao jedno kruto tijelo, pri čemu oblik može mijenjati jedino uz deformacije njegovih dijelova [1].

Podjela spojenih sistema, s kinematičkog stajališta, temelji se na pojmovima geometrijske promjenjivosti i geometrijske nepromjenjivosti. Prema načinu proračuna, konstrukcije dijelimo na statički određene i statički neodređene. Statički određeni nosači definiraju se kao geometrijski nepromjenjive strukture s minimalno potrebnim i pravilno raspoređenim vezama, koje osiguravaju nepromjenjivost strukture [3]. Statički neodređeni nosači su također geometrijski nepromjenjive strukture, ali s većim brojem minimalno potrebnih i pravilno raspoređenih veza, koje zadovoljavaju uvjete ravnoteže sistema.

Statička određenost ili neodređenost ne ovisi o opterećenju sistema, nego samo o njegovim vezama. Da bi sistem mogao biti nosač, potrebno mu je prethodno odrediti stupanj njegove statičke određenost. To se određuje prema formuli:

$$S_{\min} = n_D \cdot 3 - n_{Z1} \cdot 2 - n_L$$

pri čemu je:  $n_D$  = broj diskova od kojih se sastoji nosač

$n_{Z1}$  = broj zglobova u nosaču

$n_L$  = broj ležajnih veza

Zadaća proračuna konstrukcija obuhvaća: pretpostavljanje proračunskog modela, određivanje statičke određenosti ili neodređenosti, određivanje geometrijske promjenjivosti ili nepromjenjivosti, utvrđivanje vanjskog opterećenja, određivanje sila u vanjskim i unutarnjim vezama, određivanje unutarnjih sila u konstrukciji te definiranje potrebnih dimenzija pojedinih elemenata konstrukcije [3].

Trozglobni nosači konstrukcijski su sistemi sastavljeni od dva diska međusobno spojena zglobom, od kojih je svaki od njih istovremeno spojen zglobom za nepomičnu podlogu [3]. Takva dva diska čine stabilan nosač koji je statički određen i geometrijski nepromjenjiv [1]. Nosači koji pripadaju nekim drugim tipovima, proračunavaju se svođenjem na trozglobne nosače ili prema analogiji s njima. Ovakvi nosači imaju četiri nepoznate vanjske veze, ali se u spojnom zglobu, kojem je moment savijanja jednak nuli, može postaviti dodatni uvjet pa se iz toga pomoću tri osnovna uvjeta ravnoteže mogu odrediti reaktivne vanjske sile. Za određivanje reakcija i unutarnjih sila u trozglobnim nosačima primjenjuju se analitička, grafička i grafoanalitička metoda [1].

Poduprte grede spadaju u grupu složenih konstrukcijskih sistema. Poduprte grede su u istoj su grupi kao i obješene grede zato što je postupak proračuna tih nosača isti. Njihova razlika je u predznaku sila u štapovima poduprtog i obješenog sistema. Određivanje reakcija i unutarnjih sila ovih sistema svodi se na postupak koji primjenjujemo kod trozglobnih nosača [3]. Analizu reakcija i unutarnjih sila kod ovih sistema moguće je proračunati analitički i grafički.

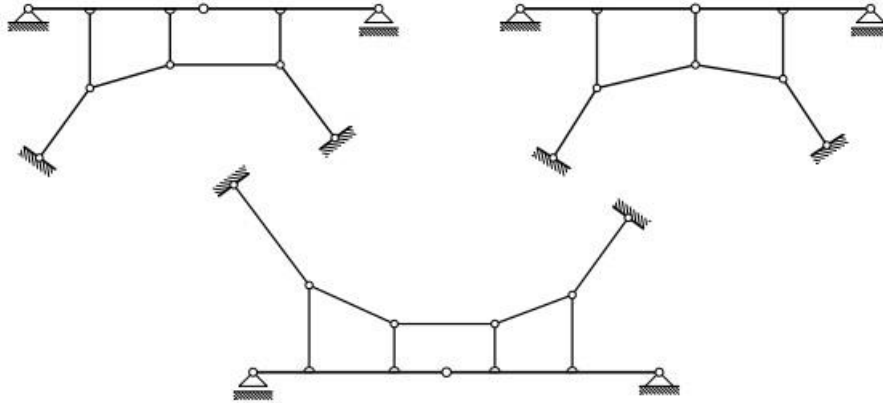
Poduprti nosači sastavljeni su od dviju krutih greda spojenih međusobno zglobom, a na krajevima su oslonjene na pomični i nepomični ležaj ili na dva pomična zglobna ležaja u posebnim slučajevima kada nema zatege [1].

Ovakvi nosači su također slični ojačanim nosačima, tzv. "Langerovim", gredama. Njihova razlika je u tome što se kod ojačanih greda sile u štapovima ojačanja prenose unutar sistema, dok se kod poduprtih i obješenih greda sile u štapovima prenose izvan sistema [3].

Navedeni nosači mogu se podijeliti u dvije skupine. U prvoj je skupini potporni ili viseći sklop razdvojen zglobom grede tako da ispod ili iznad toga zgloba nema štapa, dok u drugoj skupini taj štap postoji, pa je potporni ili viseći sklop cjelovit. Također, u nosačima prve skupine su oba "gredna" zglobna ležaja pomična, dok je u nosačima druge skupine jedan pomičan, a drugi nepomičan [1].



Nosači prve skupine (Izvor: [1])



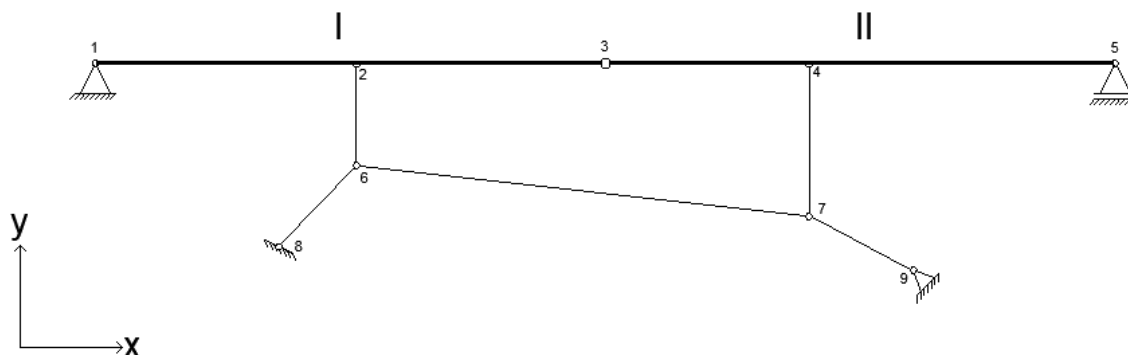
Nosači druge skupine (Izvor: [1])

U ovom radu bit će prikazano rješavanje 2 različito opterećena sistema nosača druge skupine istih geometrijskih karakteristika – u sistemu riješenom analitičkim postupkom obje grede spojene zglibom opterećene su jednakim kontinuiranim opterećenjem, a u sistemu riješenom grafičkim postupkom kontinuiranim opterećenjem opterećena je greda s lijeve strane zgloba.

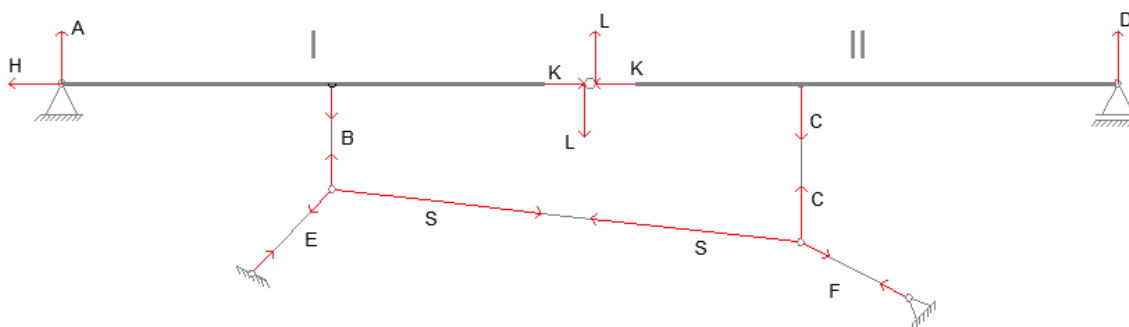


#### 4. ANALITIČKI I GRAFIČKI POSTUPCI RJEŠAVANJA

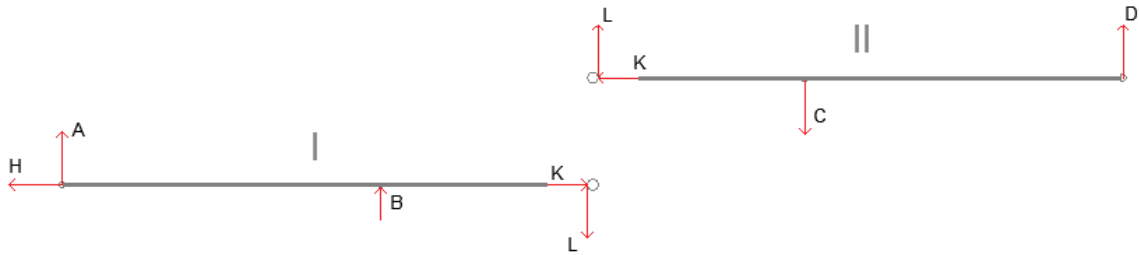
Opis postupka zasniva se na prikazu iz knjige profesora Wenera, [2] na stranicama od 178 do 181. Postupak rješavanja prikazat će se najjednostavnijim primjerom, a to je sistem koji sadrži podlogu, dva tijela i pet zglobnih štapova.



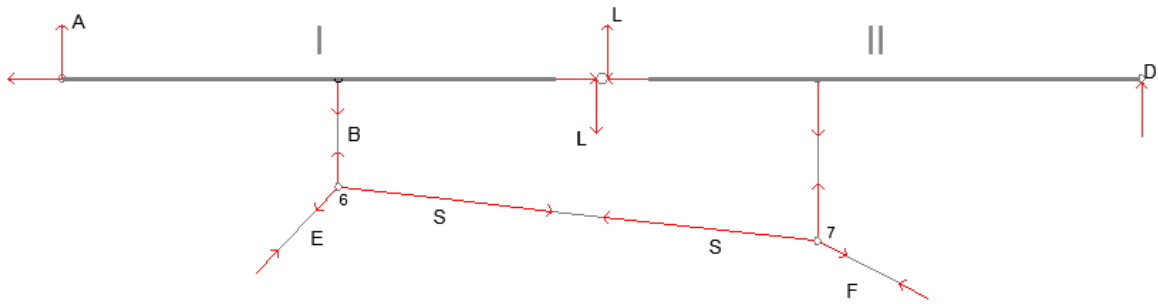
a) ZGLOBNI ŠTAPOVI SPOJENI S TIJELIMA SU PARALELNI SA SILOM U POMIČNOM ZGLOBU



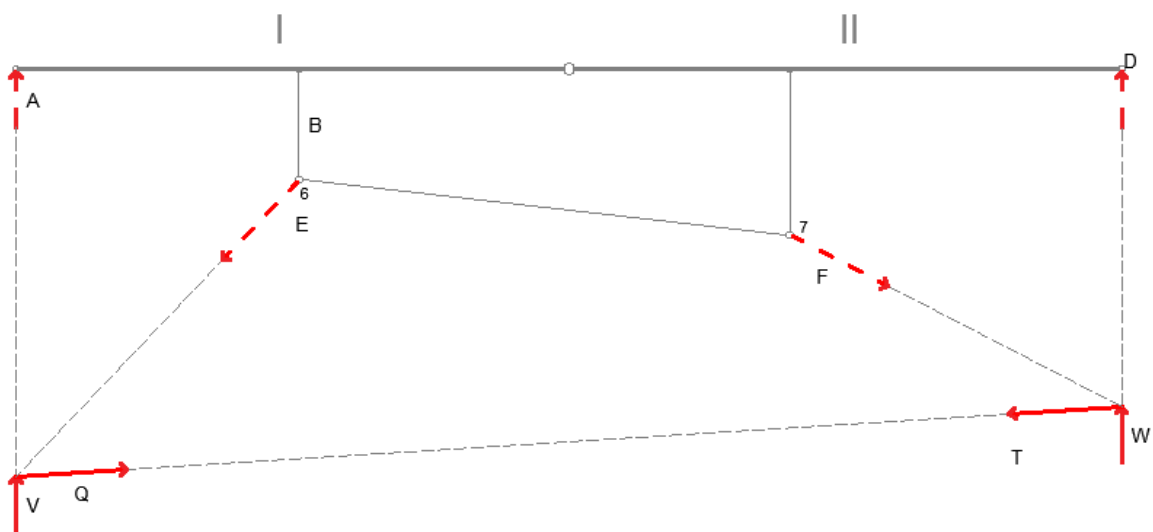
Rješenje se postavlja pomoću prikladnog rastavljanja sila u spojevima. Djelovanje nepomičnog zgloba prikazano je s dvije sile, pri čemu jedna leži na spojnici zglobova, a druga je paralelna sa zglobnim štapovima. Djelovanje pomičnog zgloba prikazano je jednom silom, paralelnom sa zglobnim štapovima.



Sile koje djeluju na zglobovima mogu se prikazati pomoću horizontalnih i vertikalnih komponenti. Koristeći projekciju svih sila na os koja je okomita na zglobne štapove, određujemo nepoznate sile H i K za svaki od dva sistema. Iz uvjeta ravnoteže sila za tijelo I određuje se sila H, dok se za tijelo II određuje sila K.

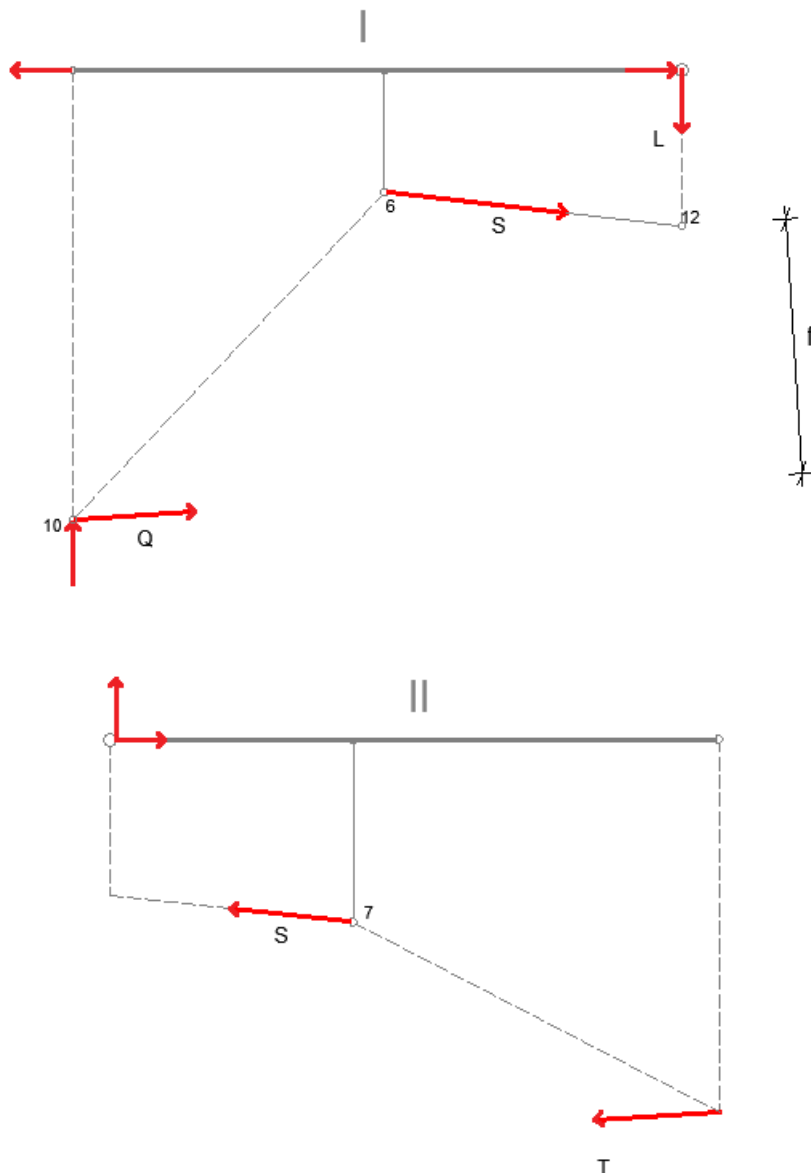


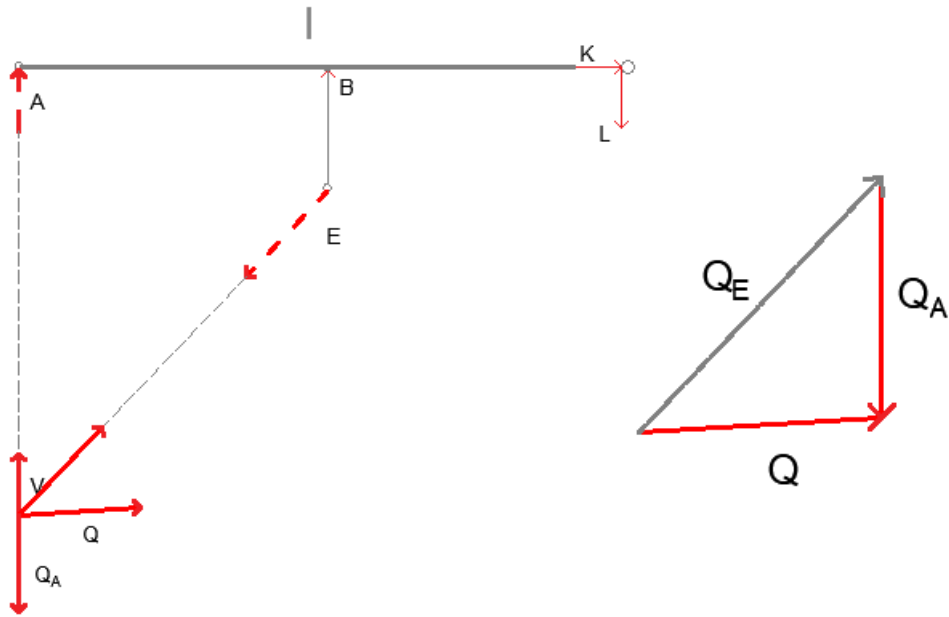
Za daljnje rješavanje sistema uvodimo podsisteme I+6 i II+7, pri čemu između ovih podsistema djeluju samo dvije nepoznate sile, L i S. Također, između podsistema i podloge djeluju dvije sile, A i E, koje leže na zadanim pravcima. Na skici su te sile označene i pomoću njih će se određivati ravnoteža sistema.



Određivanjem sjecišta pravaca sila A i E, kao i D i F, dobivamo točke na temelju kojih se određuju reakcije i unutarnje sile u sistemu. Uz uvjet ravnoteže momenata za cijeli sistem, dobivaju se vrijednosti sila potrebne za stabilnost sistema.

Sljedeća faza uključuje rješavanje ravnoteže za pojedine podsisteme I+6 ili II+7, koristeći uvjete ravnoteže momenata i sila u ravnini. Na taj način moguće je odrediti preostale nepoznate sile u sistemu.

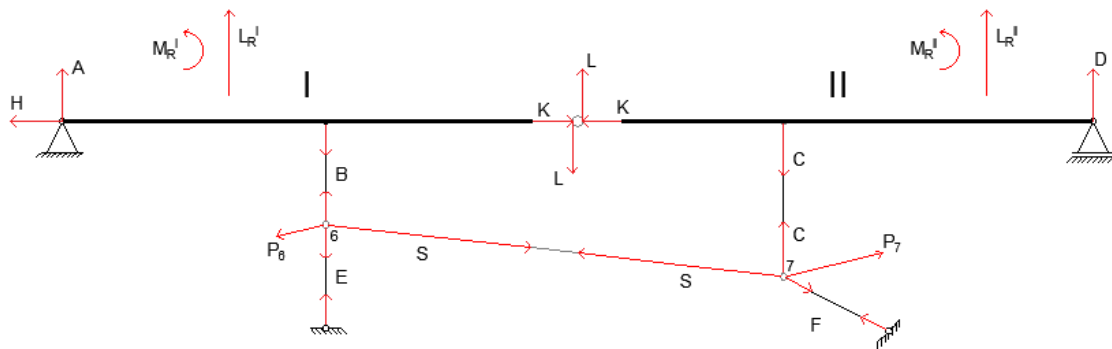




b) SLUČAJ KOD KOJEG SE JEDNO SJECIŠTE NALAZI U NEIZMJERNOSTI

Postupak prikazan u slučaju a) ne obuhvaća slučaj kod kojeg se jedno sjecište nalazi u neizmjernosti.

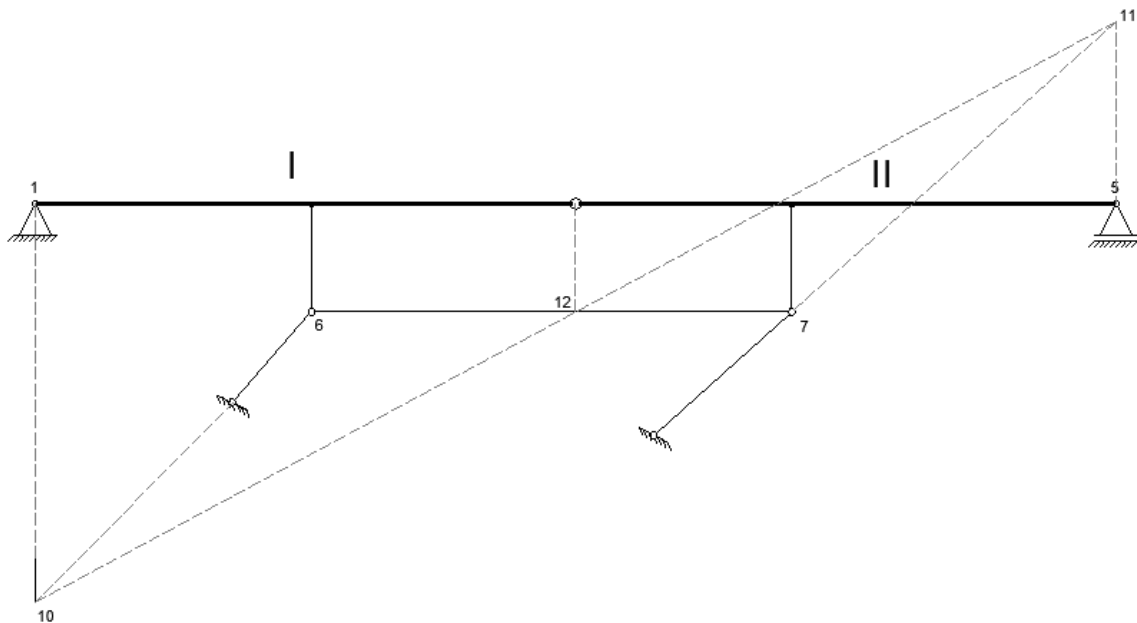
Ovakav postupak rješavanja ne bi bio provediv, ako bi štap f bio paralelan sa štapovima b, c, e.



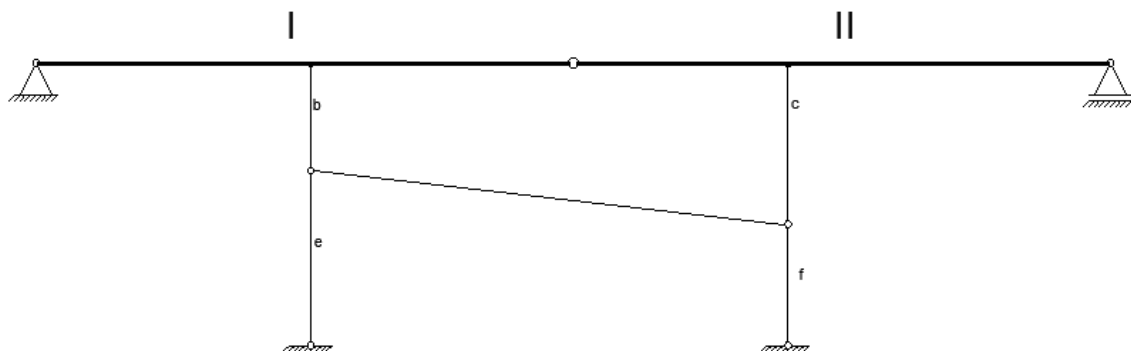
c) SPECIJALNI SLUČAJEVI

Za prikazani specijalni slučaj poduprtog sistema, kojemu su zglobni štapovi, spojeni s tijelima, paralelni sa silom u pomičnom zglobu i točke 1,2,3,4,5 leže svaka na različitoj paraleli s tim štapovima, postoje dva uvjeta određenosti:

- I) da točke 10,11,12 ne leže na istom pravcu

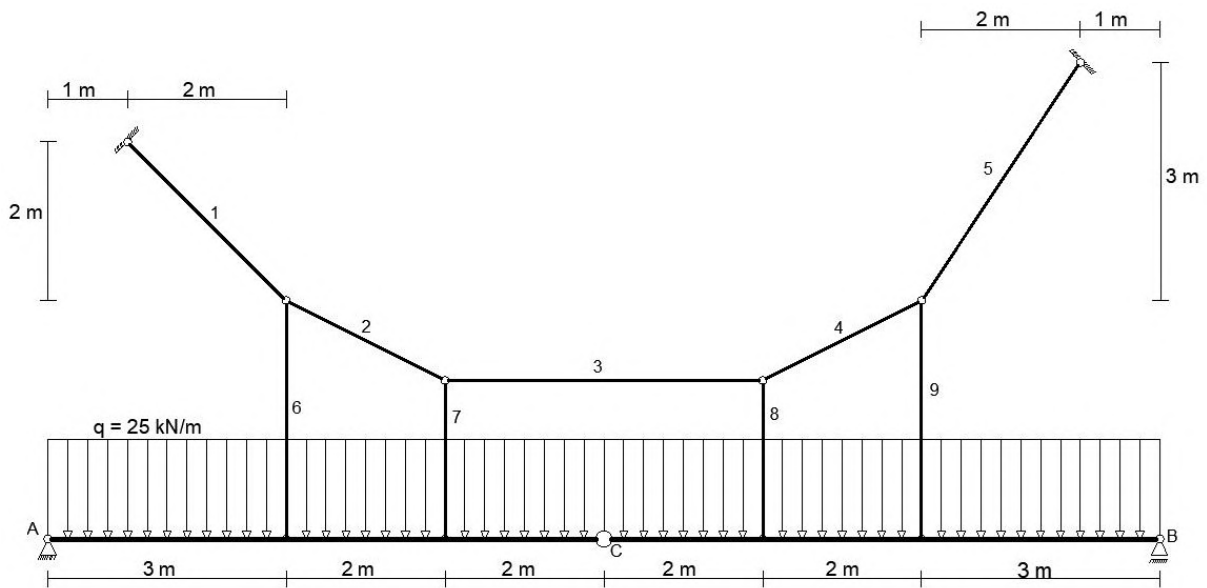


- II) oba štapa e i f nisu paralelna sa štapovima b i c.

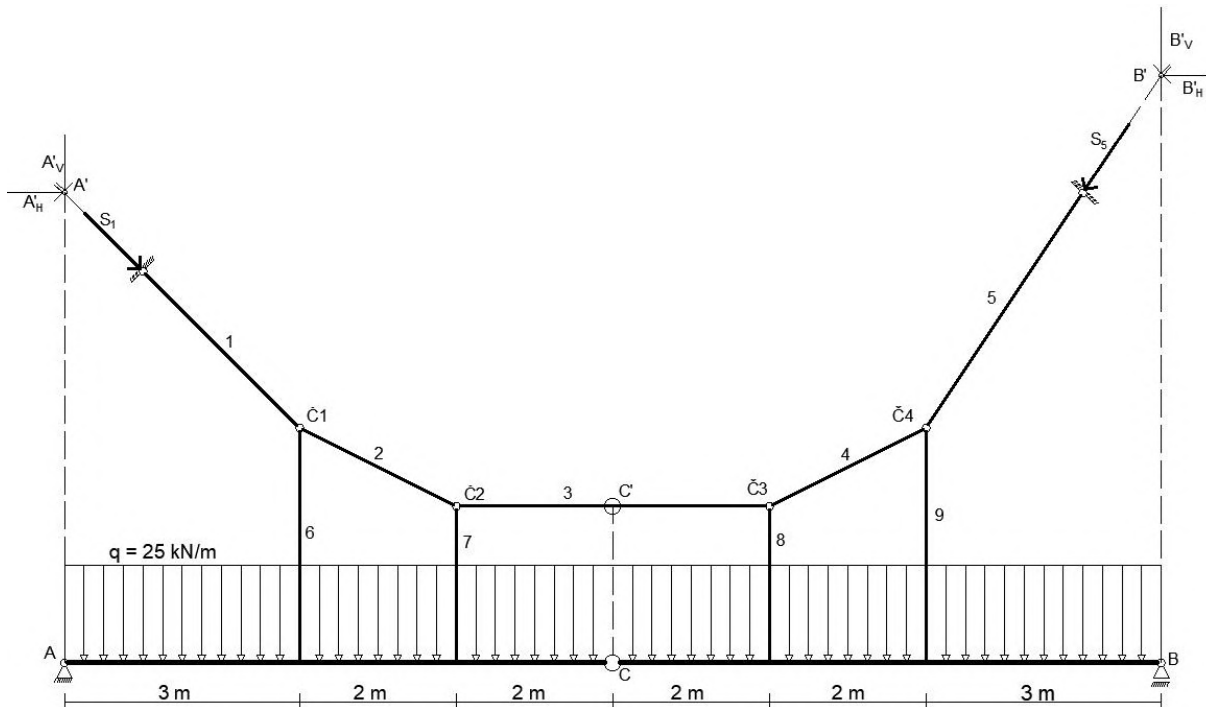


Sistemi prikazani na skicama I) i II) su mehanizmi koji sadrže preodređenost, jer ne ispunjavaju gornje uvjete.

#### 4.1. Analitički postupak



Potpornim štapovima 1 i 5, koji su neopterećeni, iz čega proizlazi da su oni zglobni štapovi, pridružimo reakcije  $A_V$  i  $A_H$  te  $B_V$  i  $B_H$  koje su jednake uzdužnim silama u štapovima na pravcima njihovih osi. Ležaj B klizni je ležaj pa je pravac njegove reakcije vertikalni. Ležaj A zglobni je ležaj čija se reakcija pretpostavlja u horizontalnom i vertikalnom smjeru, ali s obzirom na to da vanjsko opterećenje u horizontalnom smjeru ne postoji analogno zaključujemo da je  $A_H = 0$  te je pravac reakcije ležaja A također vertikalni. Poznavanjem pravaca sila ležajeva, unatoč tome što im ne znamo vrijednosti, dobit ćemo točke  $A'$  i  $B'$ , kojima prolaze navedene sile kako bismo mogli izračunati njihove vrijednosti i smjer djelovanja. Korištenjem ovog postupka, uspostavili smo vezu između poduprtih nosača druge skupine i trozglobnih nosača, što će nam olakšati postupak rješavanja sistema. Istu analogiju koristit ćemo u analitičkom i grafičkom postupku rješavanja.



$$Q = q * l$$

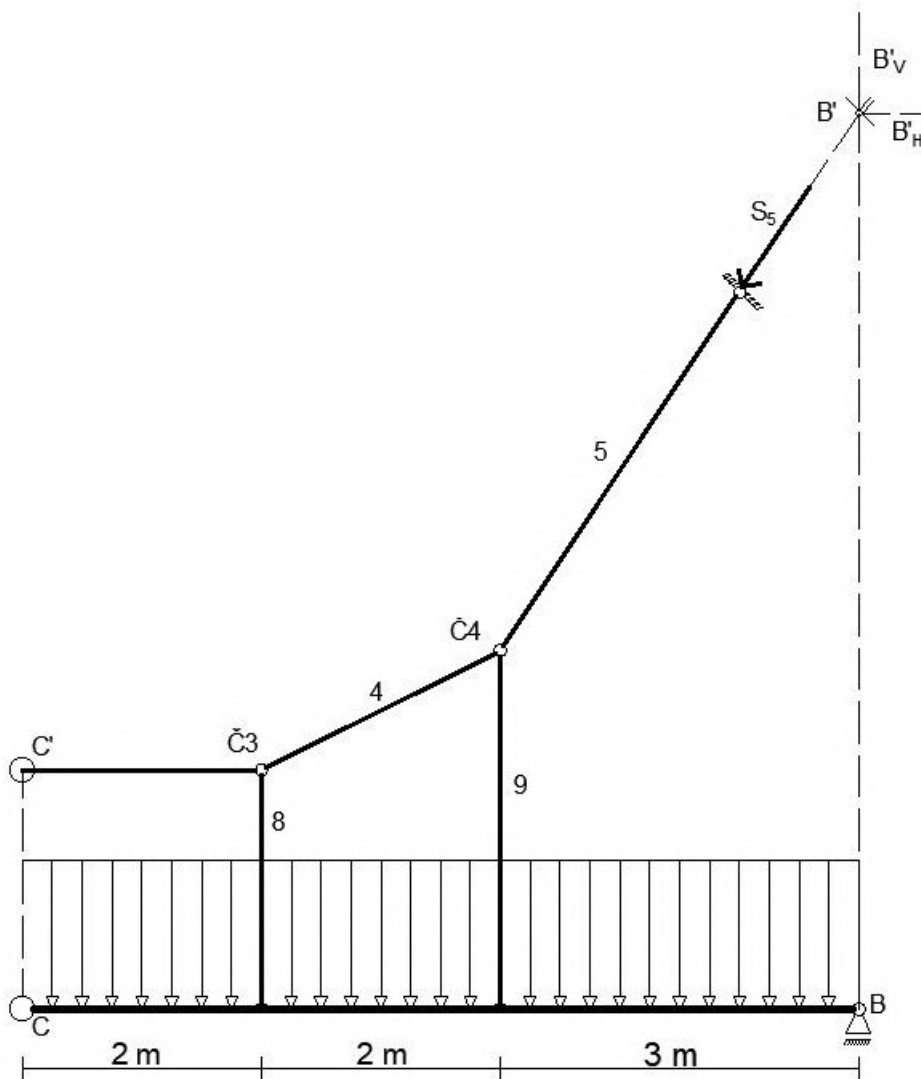
$$Q_1 = 25 * 7 = 175 \text{ kN}$$

$$Q_2 = 25 * 7 = 175 \text{ kN}$$

Kontinuirano opterećenje zamijenjeno je koncentriranom silom tako da je njegov iznos od 25 kN/m' pomnožen s duljinom grede na kojoj djeluje.

$$\sum M_{A'} = 0 \rightarrow -Q_1 * 3,5 - Q_2 * 10,5 + B'_V * 14,0 + B'_H * 1,5 = 0$$

$$(1) 14,0 * B'_V + 1,5 * B'_H = 2450$$



$$\sum M_{C'} = 0 \rightarrow -Q_2 * 3,5 + B'_V * 7,0 + B'_H * 5,5 = 0$$

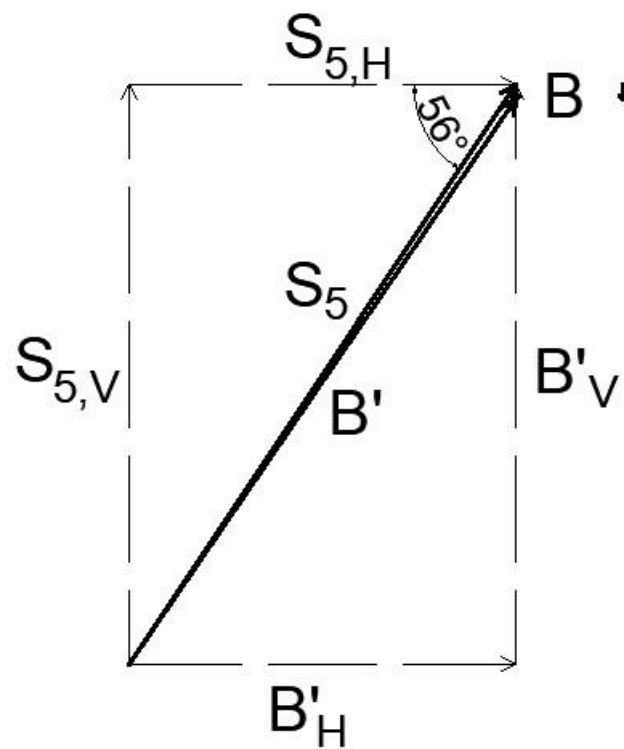
$$(2) 7,0 * B'_V + 5,5 * B'_H = 612,5$$

Koristeći točku A', izračunali smo sumu momenata, što nam je omogućilo formiranje jednadžbe (1). Zatim smo izveli sumu momenata oko točke C' na desni dio sistema, što je rezultiralo drugom jednadžbom (2). Rješavanjem sistema od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, dobili smo vrijednosti reakcija na pretpostavljenom ležaju B'.

$$B'_V = 188,82 \text{ kN}$$

$$B'_H = -128,95 \text{ kN}$$





$$B = S_{5,V} - B'_V$$

$$S_{5,H} = B'_H = 128,95 \text{ kN}$$

$$\tan 56,31^\circ = \frac{S_{5,V}}{S_{5,H}}$$

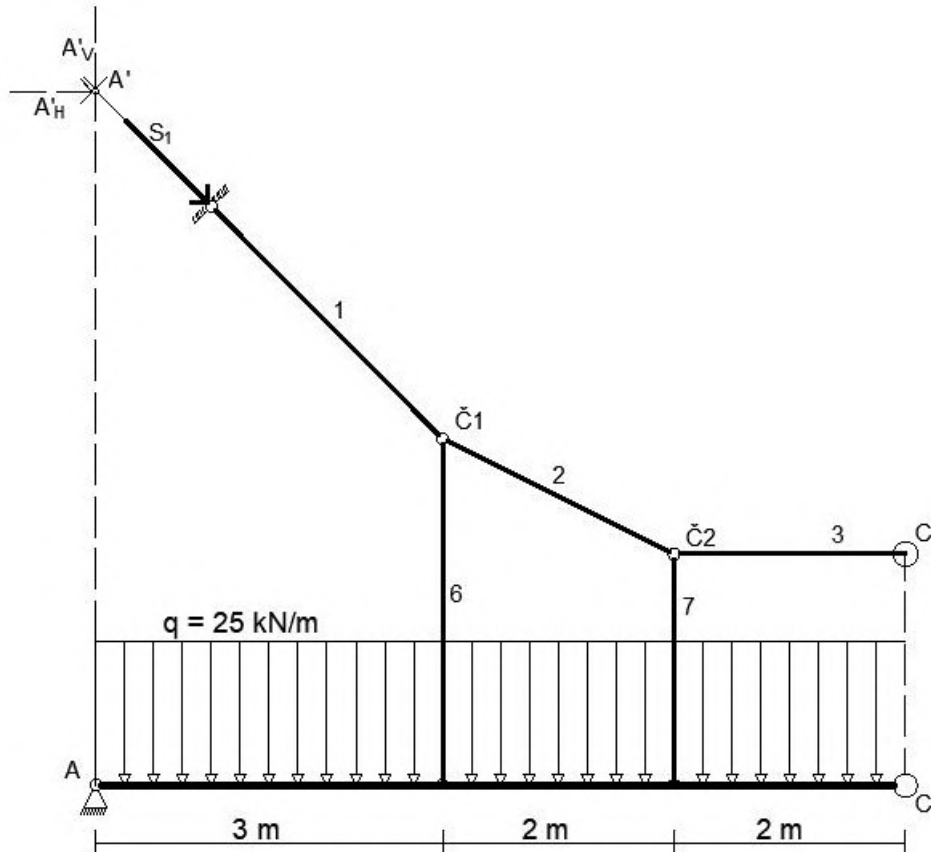
$$S_{5,V} = 193,43 \text{ kN}$$

$$S_5 = \sqrt{S_{5,H}^2 + S_{5,V}^2}$$

$$S_5 = 232,47 \text{ kN}$$

$$B = 193,43 - 188,82$$

$$B = 4,61 \text{ kN}$$



$$\sum M_{B'} = 0 \rightarrow Q_1 * 10,5 + Q_2 * 3,5 + A'_V * 14,0 + A'_H * 1,5 = 0$$

$$(3) 14,0 * A'_V + 1,5 * A'_H = -2450$$

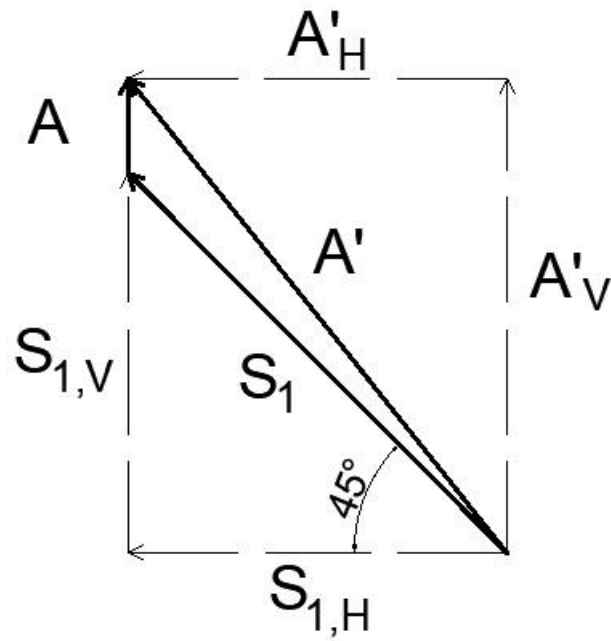
$$\sum M_{C'} = 0 \rightarrow Q_1 * 3,5 + A'_V * 7,0 - A'_H * 4,0 = 0$$

$$(4) 7,0 * A'_V + 4,0 * A'_H = -612,5$$

Koristeći točku B' izračunali smo sumu momenata, što nam je omogućilo formiranje jednadžbe (3). Zatim smo izveli sumu momenata oko točke C' na lijevi dio sistema, što je rezultiralo drugom jednadžbom (4). Rješavanjem sistema od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, dobili smo vrijednosti reakcija na pretpostavljenom ležaju A'.

$$A'_V = -161,18 \text{ kN}$$

$$A'_H = -128,95 \text{ kN}$$



$$A = A'_V - S_{1,V}$$

$$S_{1,H} = A'_H = 128,95 \text{ kN}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{S_{1,V}}{S_{1,H}}$$

$$S_{1,V} = 128,95 \text{ kN}$$

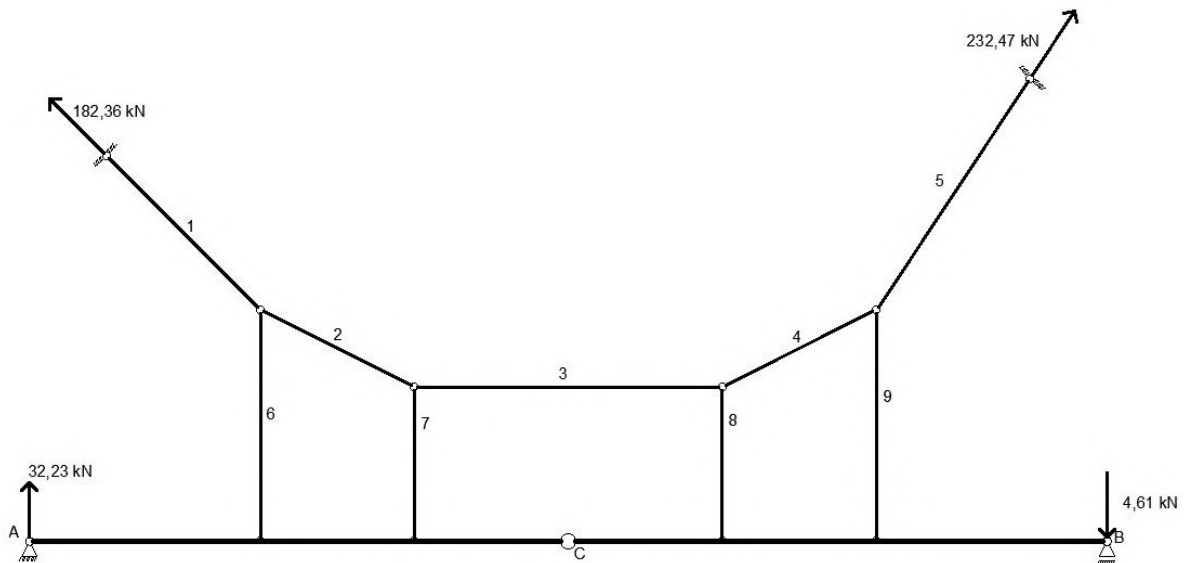
$$S_1 = \sqrt{S_{1,H}^2 + S_{1,V}^2}$$

$$S_1 = 182,36 \text{ kN}$$

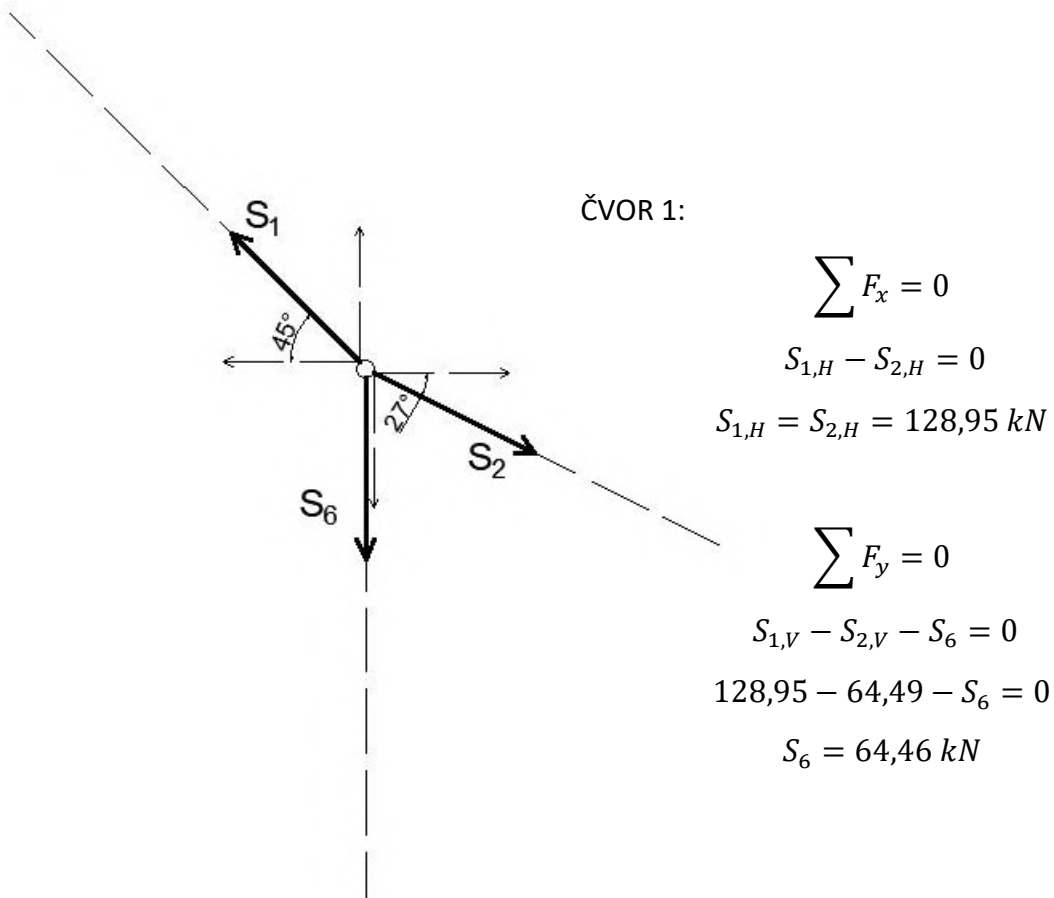
$$A = 161,18 - 128,95$$

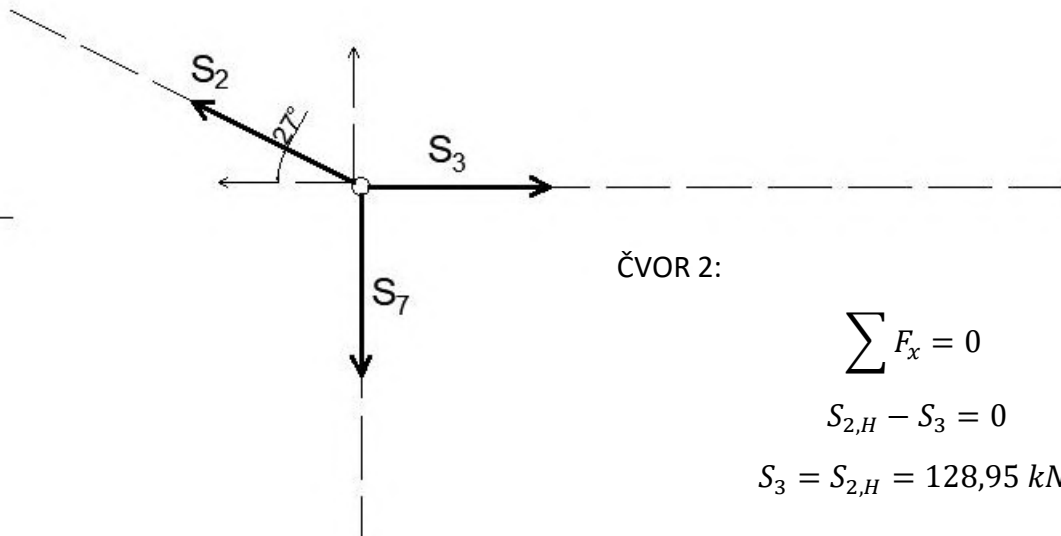
$$A = 32,23 \text{ kN}$$

Dobivene reakcije u točnim smjerovima s točnim iznosima:



Nadalje rješavamo ostatak sistema uravnotežujući čvorove po globalnom koordinatnom sistemu (X,Y) kako bismo dobili reakcije u preostalim štapovima.





$$\sum F_x = 0$$

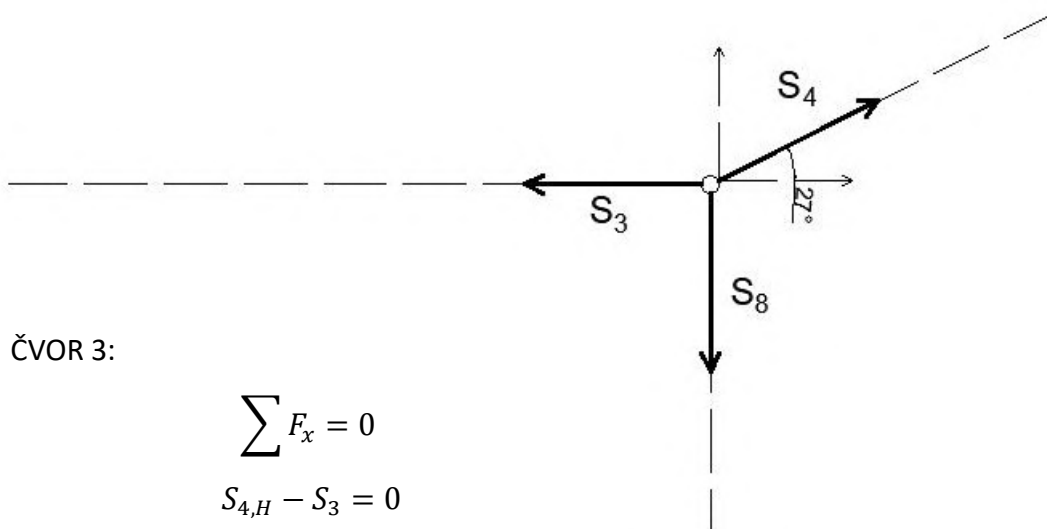
$$S_{2,H} - S_3 = 0$$

$$S_3 = S_{2,H} = 128,95 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$S_{2,V} - S_7 = 0$$

$$S_{2,V} = S_7 = 64,46 \text{ kN}$$



$$\sum F_x = 0$$

$$S_{4,H} - S_3 = 0$$

$$S_3 = S_{4,H} = 128,95 \text{ kN}$$

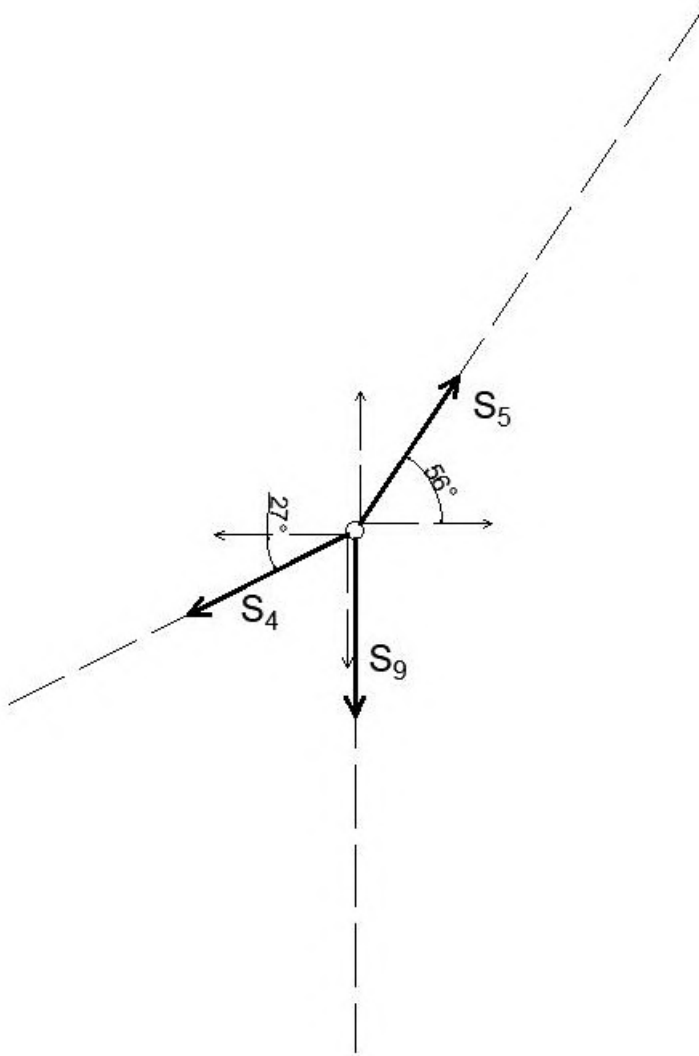
$$\sum F_y = 0$$

$$S_{4,V} - S_8 = 0$$

$$S_{4,V} = S_8 = 64,49 \text{ kN}$$

$$\tan 26,57^\circ = \frac{S_{4,V}}{S_{4,H}}$$

$$S_{4,V} = 64,49 \text{ kN}$$



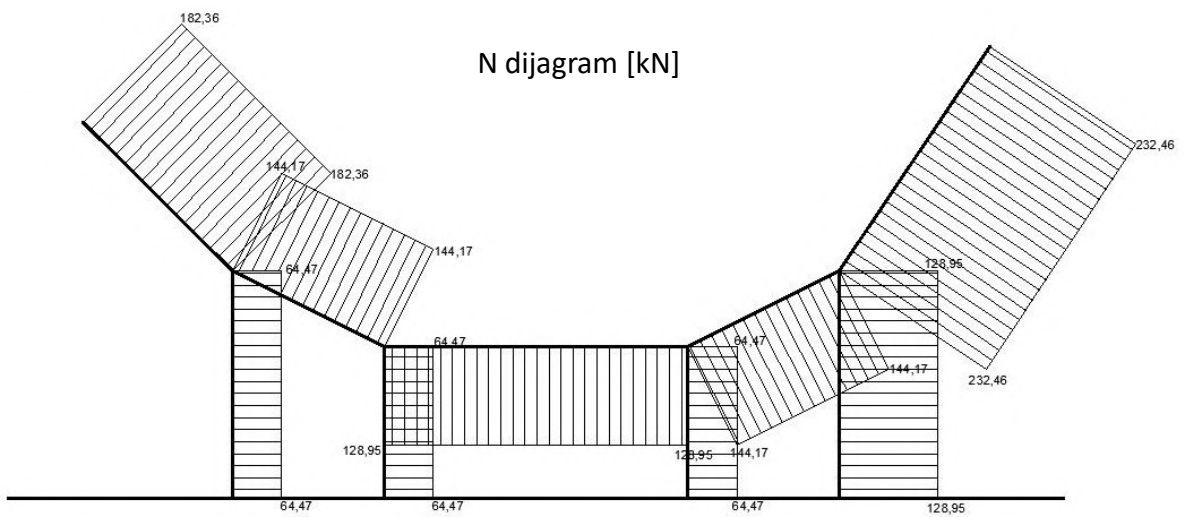
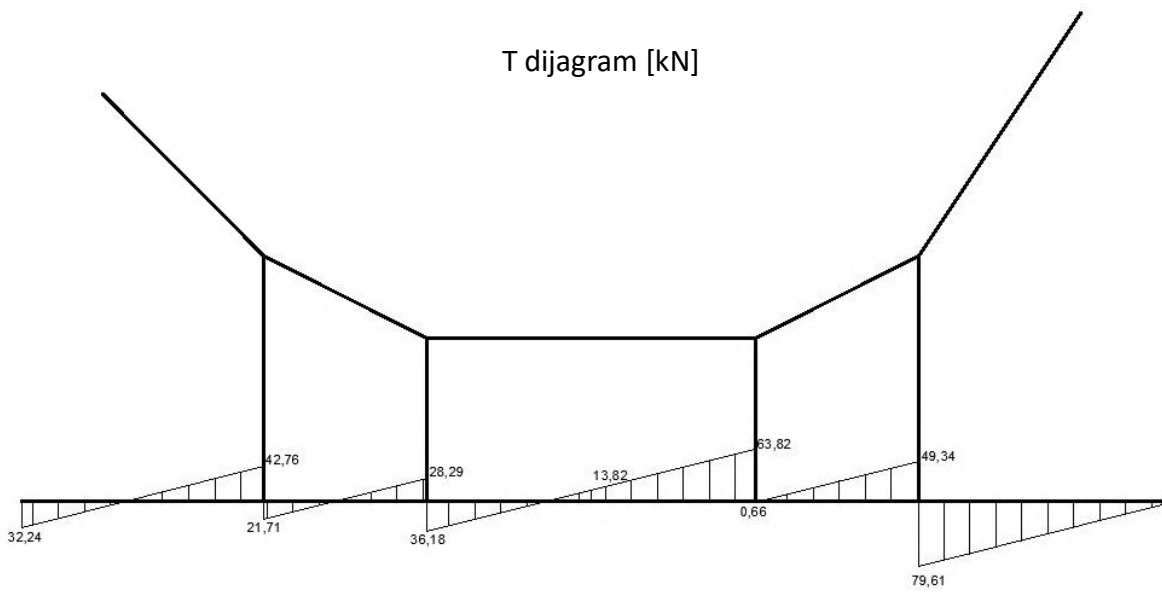
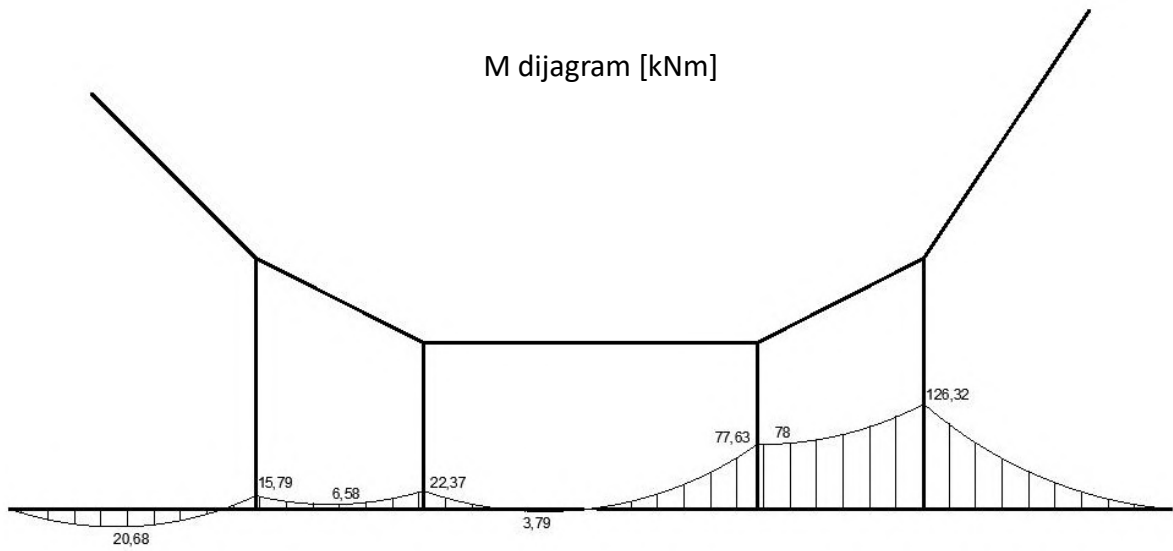
ČVOR 4:

$$\sum F_y = 0$$

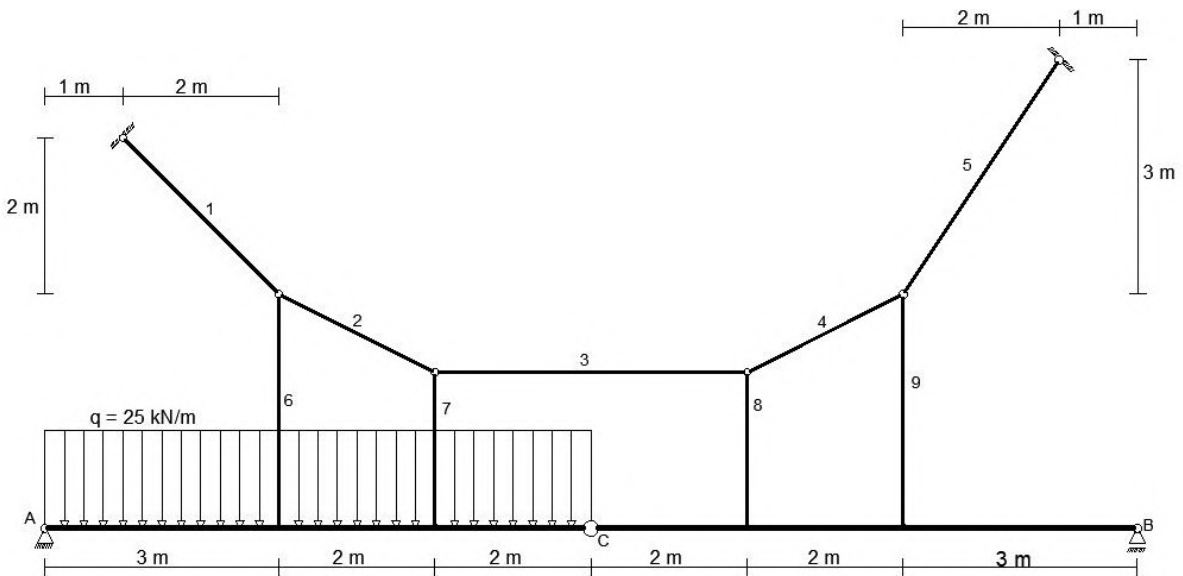
$$S_{5,y} - S_{4,y} - S_9 = 0$$

$$193,43 - 64,49 - S_9 = 0$$

$$S_9 = 128,94 \text{ kN}$$



## 4.2. Grafički postupak

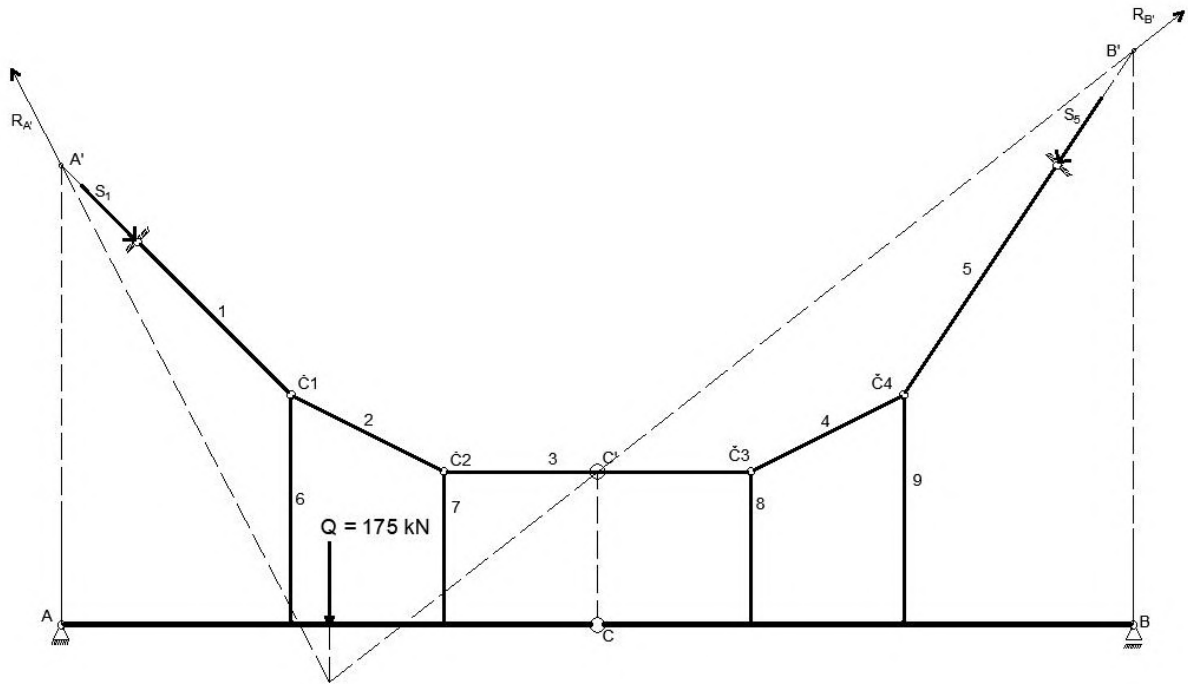


$$Q = q * l$$

$$Q_1 = 25 * 7 = 175 \text{ kN}$$

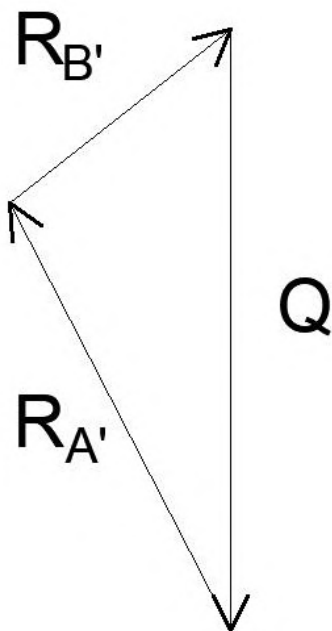
Kontinuirano opterećenje zamijenjeno je koncentriranom silom tako da je njegov iznos 25 kN/m' pomnožen s duljinom grede na kojoj djeluje. Rješavanje sistema grafičkim putem analogno je analitičkom rješavanju, tj. pretpostavkama koje smo postavili razloživši poduprti sistem na trozglobni sistem pomoću fiktivnih zglobova A' i B'.





Suma vektora  $\vec{Q}$  s poznatim pravcima rezultanti  $\vec{R}_{A'}$  i  $\vec{R}_{B'}$  mora biti jednaka nuli da bi sistem bio uravnotežen.

MJ: 1 cm = 50 kN



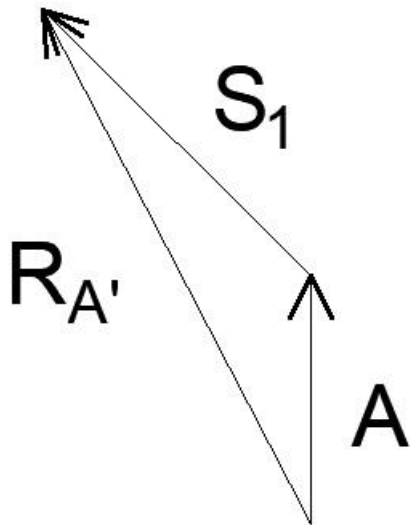
$$\vec{Q} + \vec{R}_{A'} + \vec{R}_{B'} = \vec{0}$$

Sila Q je poznata i iznosi 175 kN, tj. 3,5 cm.

Očitavanjem rezultata dobijemo:

$$\vec{R}_{A'} = 2,8 \text{ cm} = 140 \text{ kN}$$

$$\vec{R}_{B'} = 1,7 \text{ cm} = 85 \text{ kN}$$

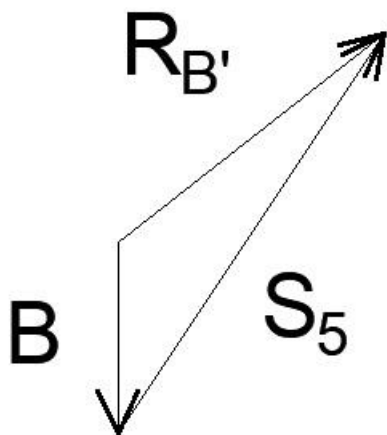


$$\overrightarrow{R_{A'}} = \vec{A} + \vec{S}_1$$

Očitavanjem rezultata dobijemo:

$$\vec{A} = 1,2 \text{ cm} = 60 \text{ kN}$$

$$\vec{S}_1 = 1,8 \text{ cm} = 90 \text{ kN}$$



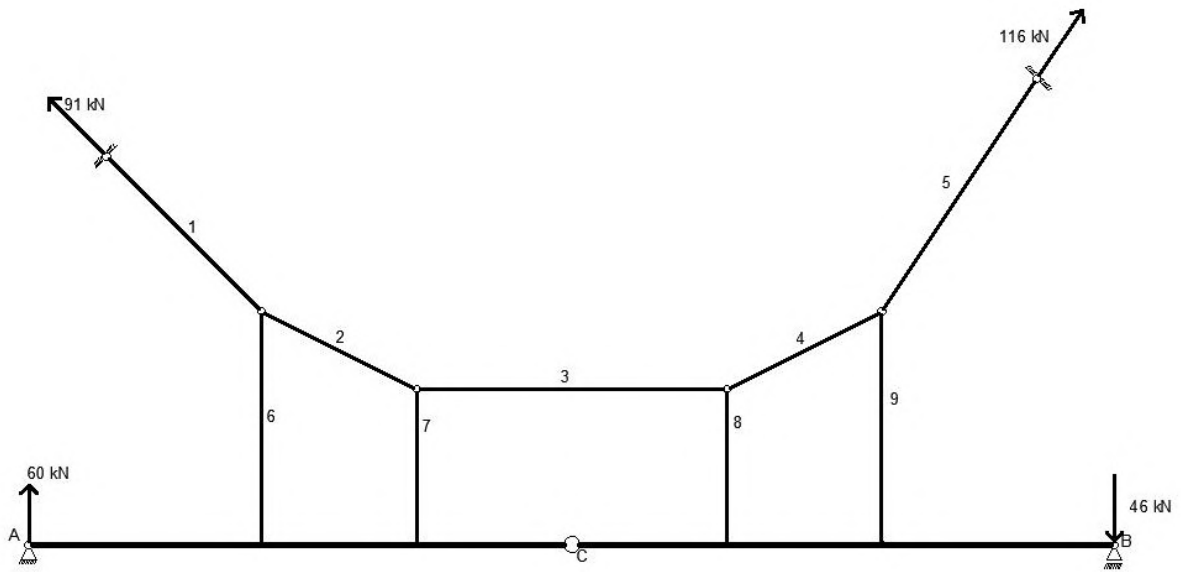
$$\overrightarrow{R_{B'}} = \vec{B} + \vec{S}_5$$

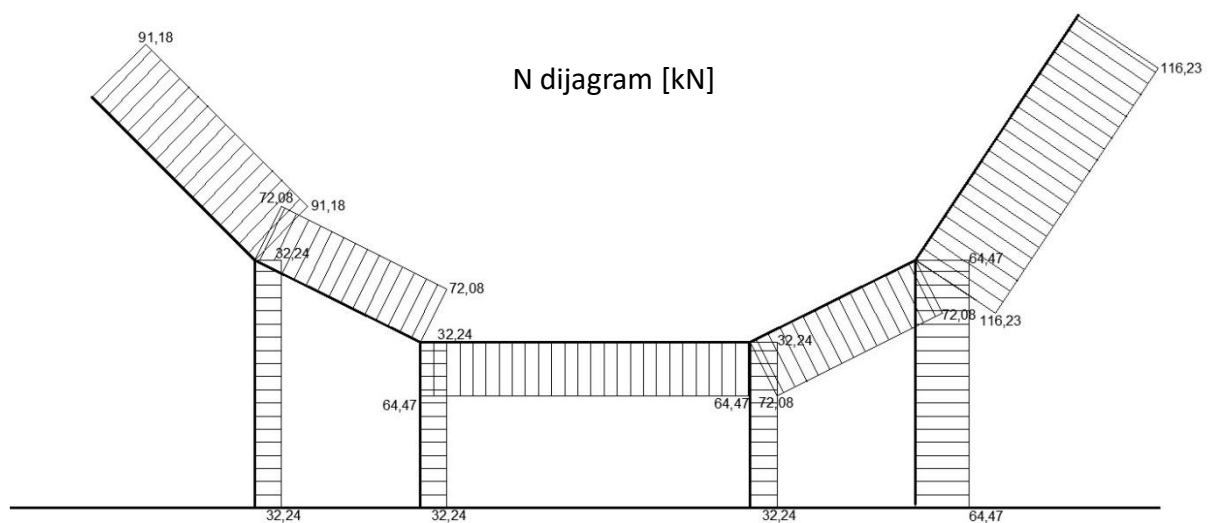
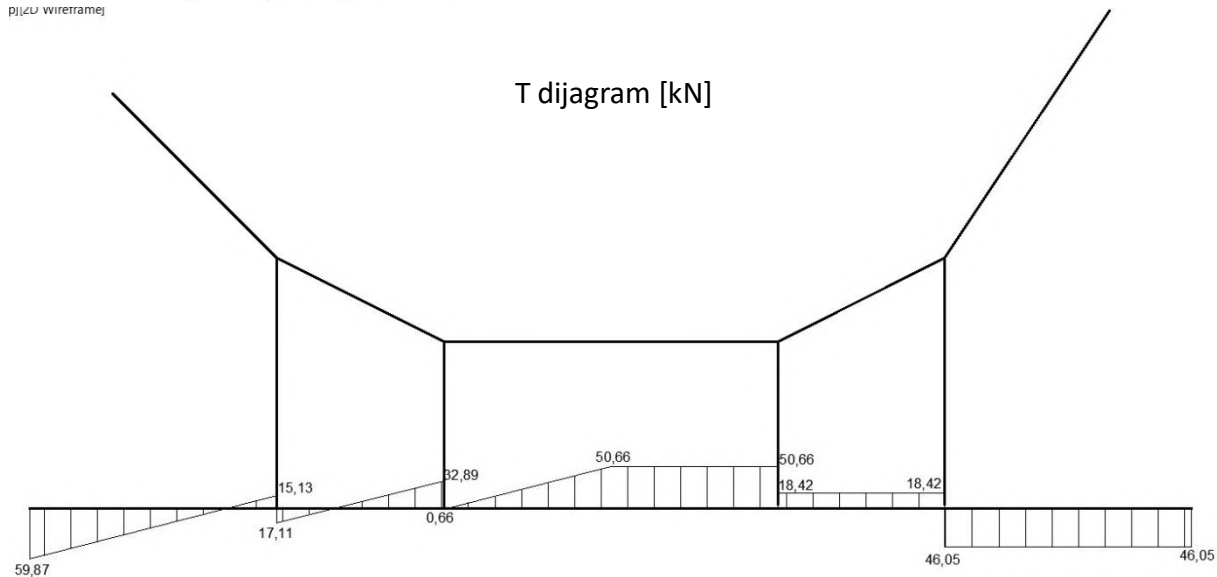
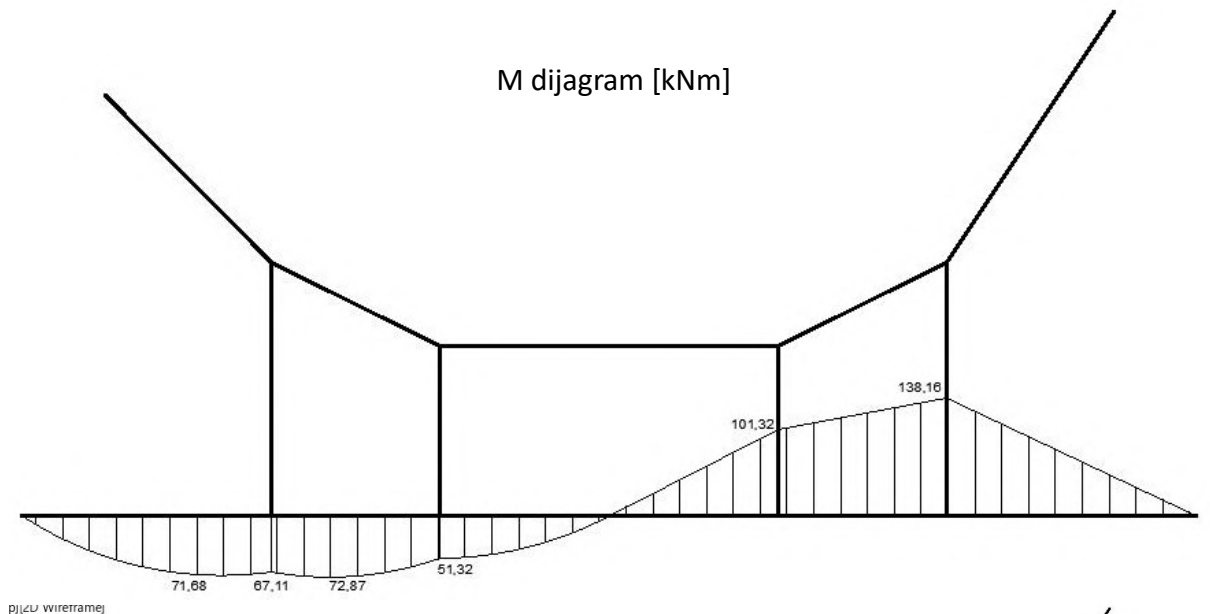
Očitavanjem rezultata dobijemo:

$$\vec{B} = 0,9 \text{ cm} = 45 \text{ kN}$$

$$\vec{S}_5 = 2,4 \text{ cm} = 120 \text{ kN}$$

Dobivene reakcije u točnim smjerovima s točnim iznosima:

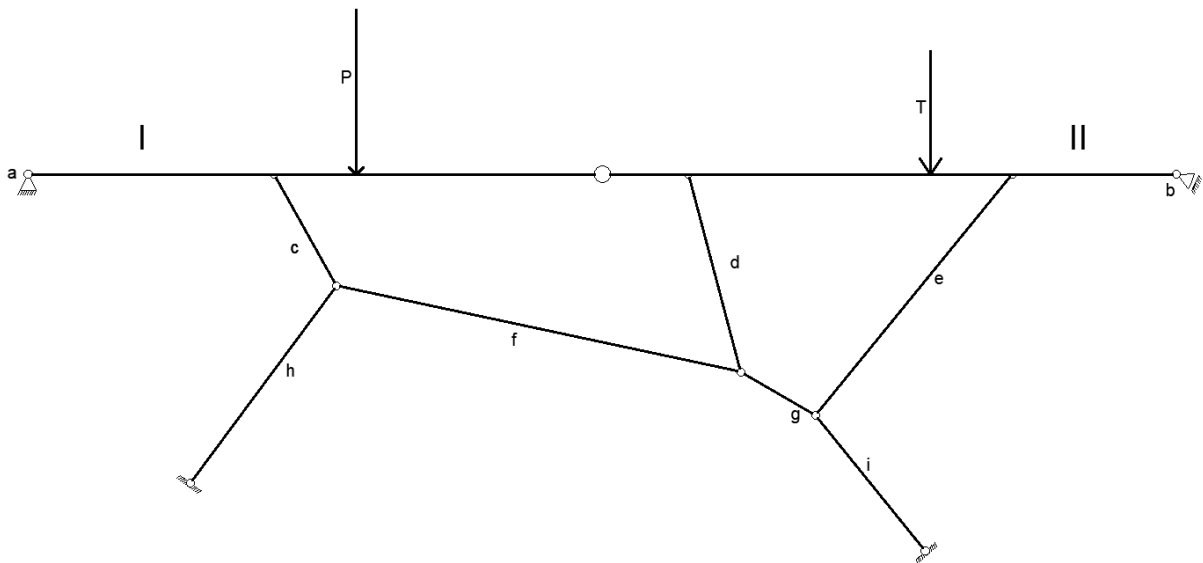




## 5. SISTEMI S KOSIM ŠTAPOVIMA

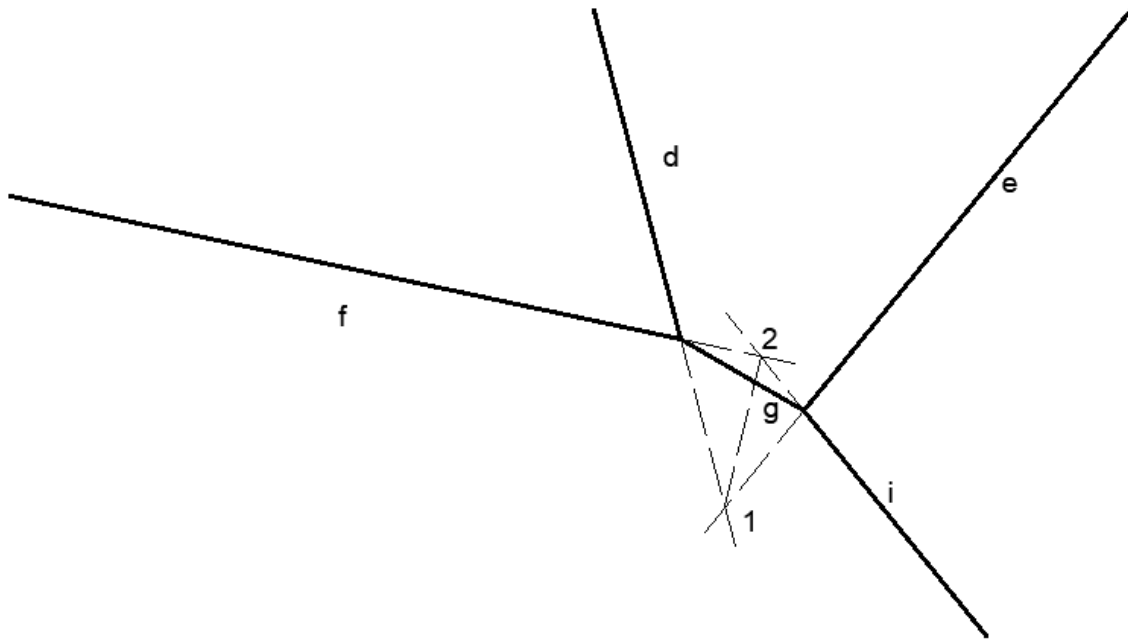
Opis postupka zasniva se na prikazu iz knjige profesora Wenera, [2] na stranicama od 181 do 187. Opterećenje zadano u primjeru rastavit će se na dvije grupe: djelovanje na svako od dva tijela zasebno, označena oznakama I i II.

Najprije će se promatrati djelovanje opterećenja samo na tijelo koje je s podlogom povezano nepomičnim zglobom; na skici je označeno s I.

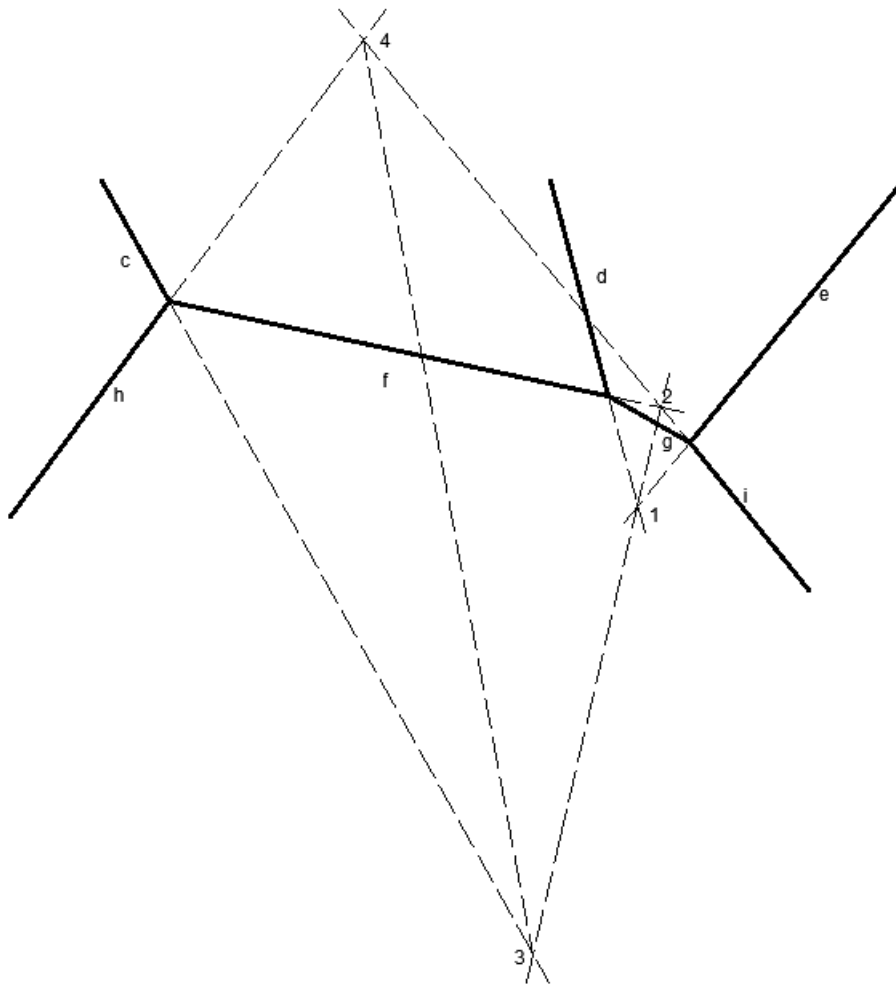


Kada je sistem određen, moraju se između tijela I i podloge pojaviti samo tri veličine koje određuju statičko djelovanje. Kako je djelovanje nepomičnog zgloba određeno s dvije veličine, djelovanje neopterećenog tijela II i svih sedam zglobnih štapova zajedno mora se svesti na samo jednu silu na zadanom pravcu. Ako se taj pravac može odrediti i ako ne prolazi nepomičnim zglobom, dokazano je da tijelo I može preuzeti proizvoljno opterećenje. Ustvari treba odrediti pravac rezultante četiriju sila, koje leže na pravcima b, c, d, e.

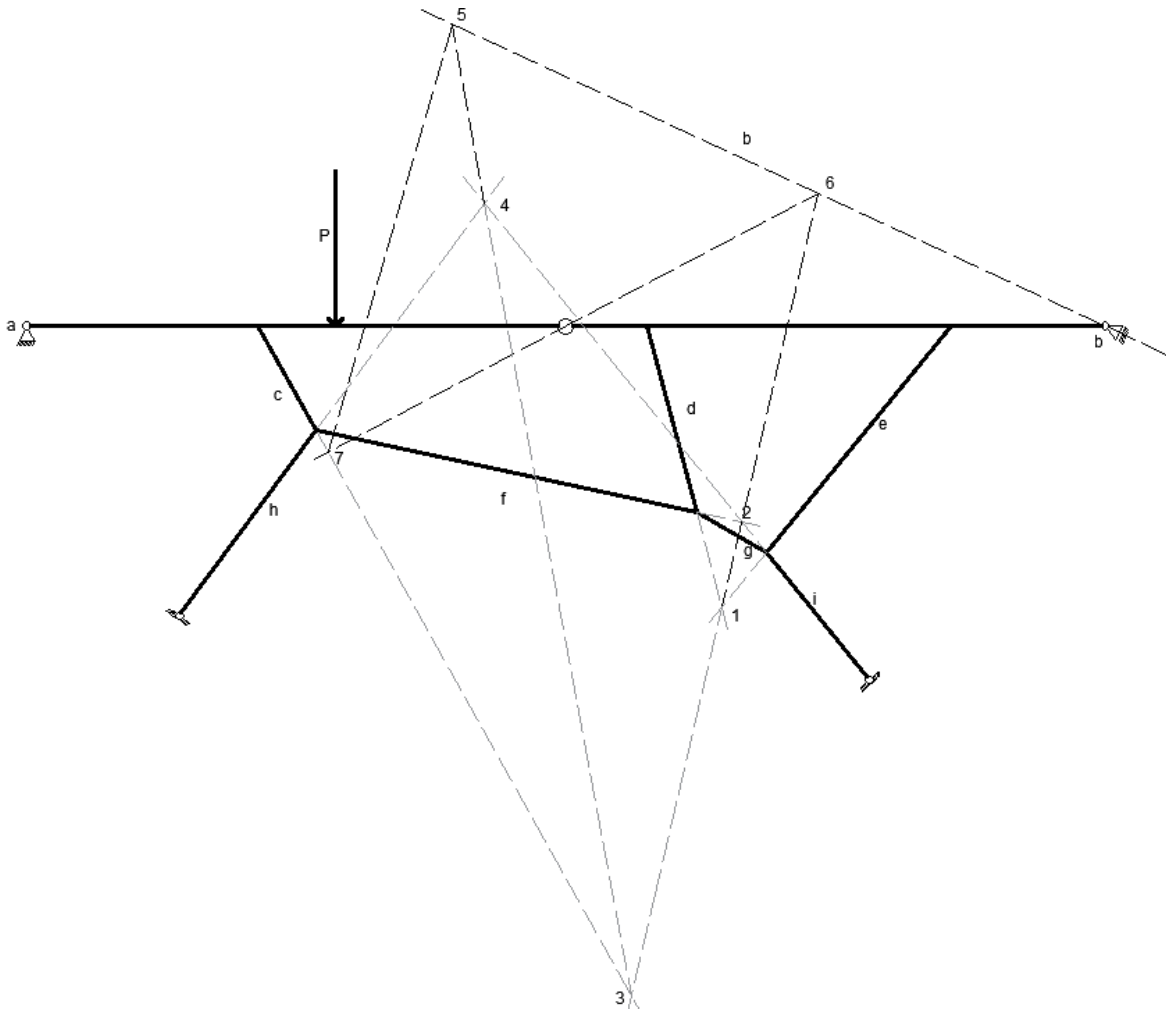
Pravac rezultante sila C, D i E određuje se u dva koraka. Prvi je korak određivanje pravca rezultante sila iz uvjeta ravnoteže podsistema koji sadrži samo štapove d, e, f, g, i. Na taj podsistem, zbog pretpostavke o opterećenju, djeluju samo četiri sile: D, E, F, I. Rezultanta od D i E mora prolaziti točkom 1, a rezultanta od F i I mora prolaziti točkom 2. Ako se umjesto tih sila uvedu rezultante dobiva se slučaj djelovanja dviju koncentriranih sila na podsistem pa je ravnoteža moguća samo ako te sile leže na istom pravcu, a taj je pravac određen sjecištima nađenih točaka.



Drugi je korak određivanja pravca rezultante sila C, D i E dobiva se iz uvjeta ravnoteže podsistema koji sadrži sve štapove, a to su c, d, e, f, h, i. Na taj podsistem, zbog pretpostavke o opterećenju, djeluju samo četiri sile: C, H, I te rezultanta nađena u prvom koraku koja prolazi točkama 1 i 2. Ako se pravac rezultante, koja prolazi točkama 1 i 2, produži da se dobije njegova rezultanta s c, dobijemo točku 3. Rezultanta od H i I mora prolaziti točkom 4. Ako se umjesto tih sila uvedu rezultante, dobiva se slučaj djelovanja dviju koncentriranih sila na podsistem, pa je ravnoteža moguća samo ako te sile leže na istom pravcu, a taj je određen sjecištima nađenih točaka.

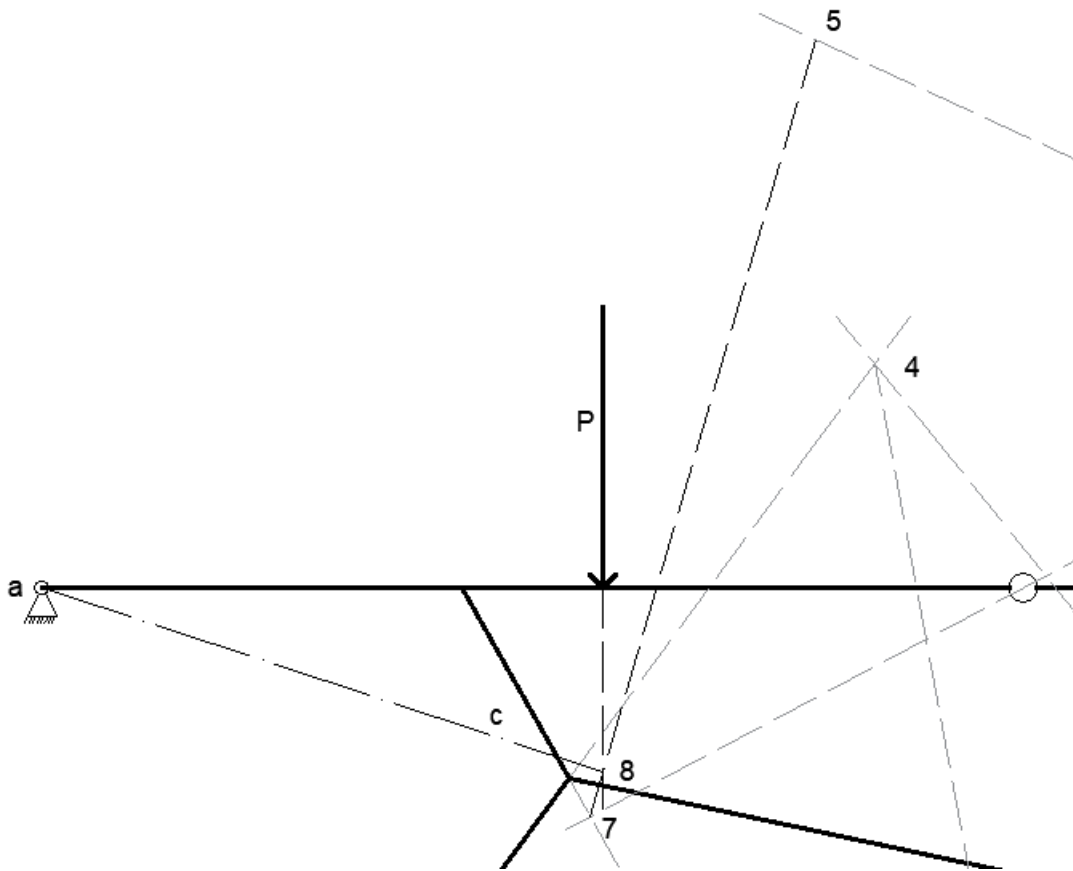


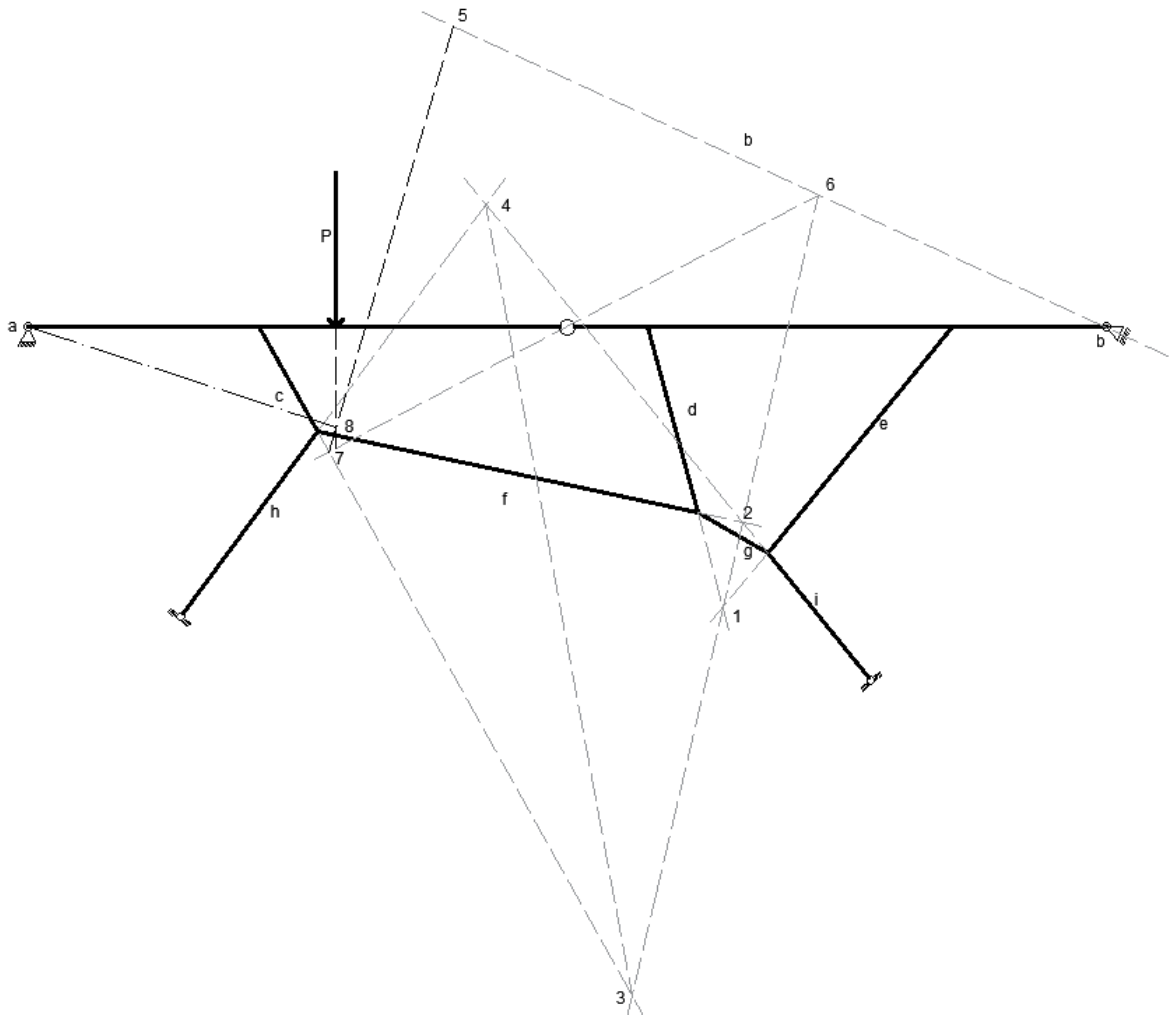
U slijedećoj fazi, promatra se podsistem koji sadrži tijela I i II. Traži se rezultanta sila B, C, D i E. Pravac sile B nam je poznat iz uvjeta kliznog ležaja. Pravci rezultanti za C, D, E nađenih u prethodna dva koraka produže se do sjecišta s pravcem sile B. Sjecište rezultante, koja prolazi točkama 3 i 4, s pravcem sile B daje nam točku 5. Sjecište rezultante, koja prolazi točkama 1 i 2, s pravcem sile B daje nam točku 6. Iz točke 6 i zgloba koji povezuje podsisteme I i II povučemo pravac koji produžimo do točke 7. Iz točki 5 i 7 smo dobili pravac rezultante sila B, C, D i E.



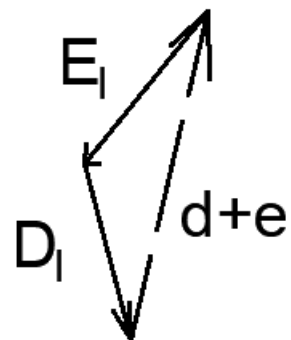
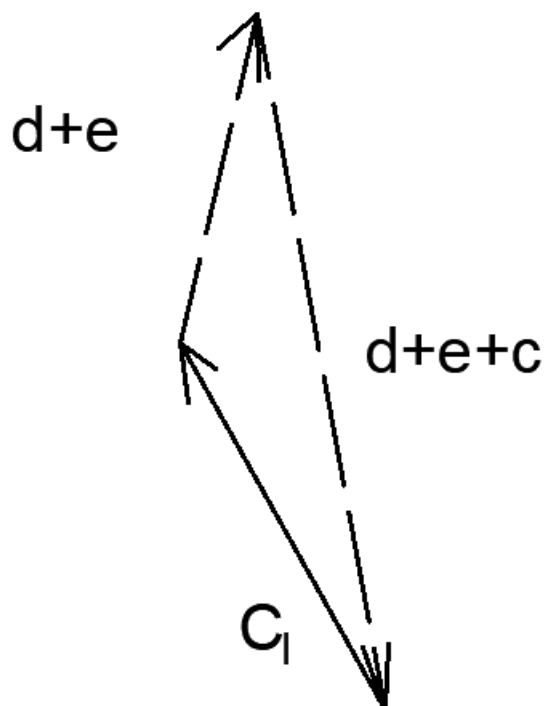
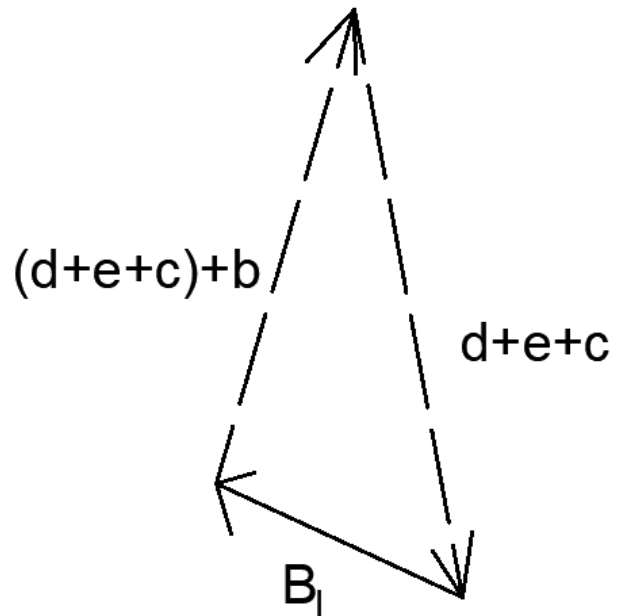
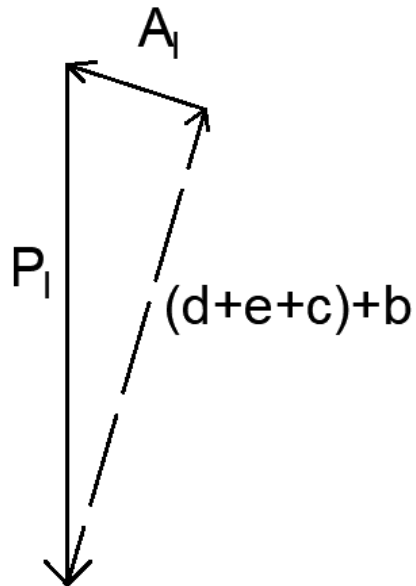


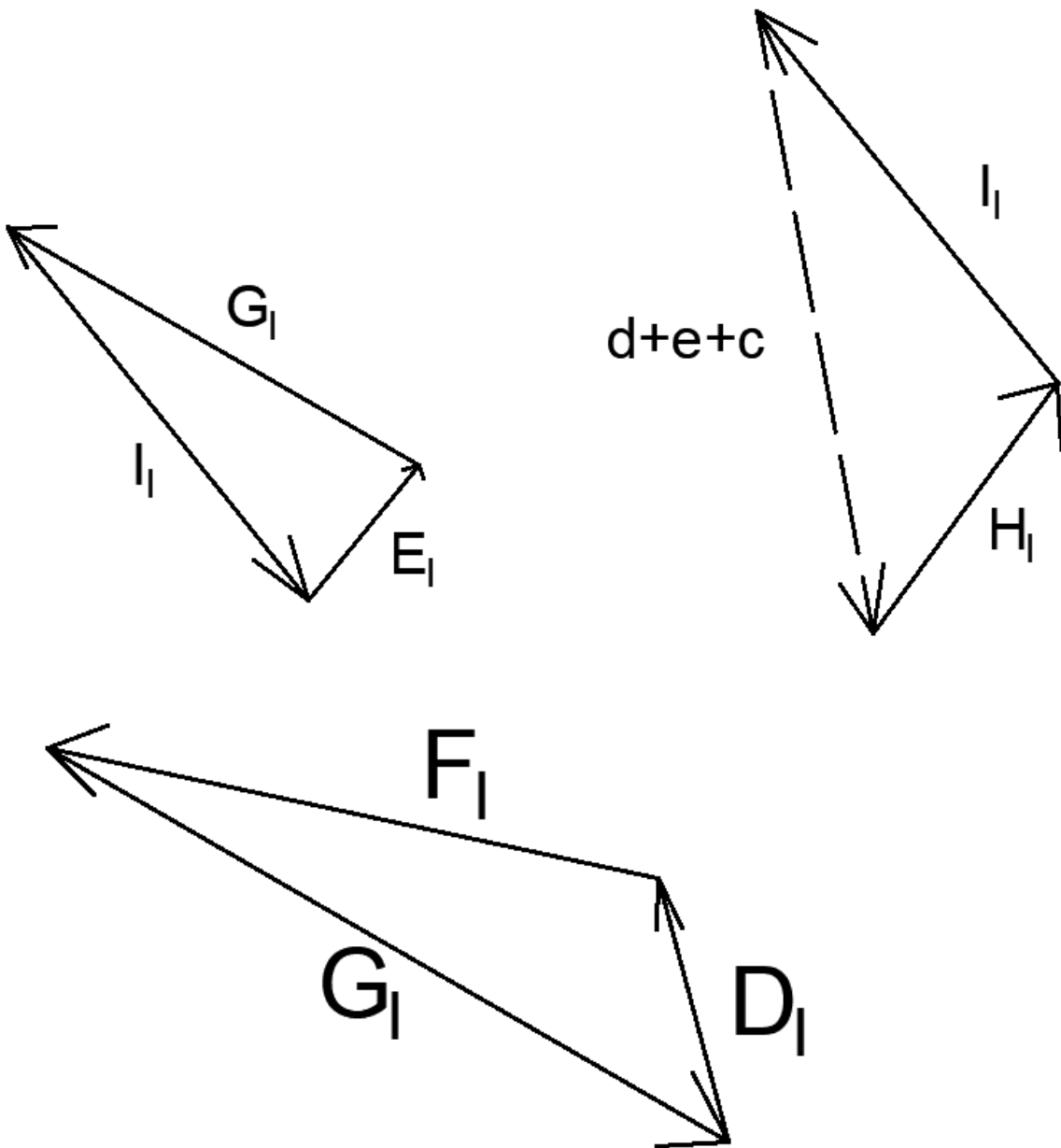
Uravnotežujući zadanu silu  $P$  i pravac rezultante sila  $B$ ,  $C$ ,  $D$  i  $E$  pomoću uvjeta nepomičnog ležaja, dobijemo pravac sile  $A$ .





Smjer i iznos sile  $A$  dobijemo zbrajanjem vektora. Nadalje, rješavamo ostatak sistema uravnotežujući čvorove kako bismo dobili reakcije u štapovima i ležaju  $B$ .





Nadalje, promatrat će se djelovanje opterećenja samo na tijelo koje je s podlogom povezano kliznim zglobovom; na skici je označeno s II.

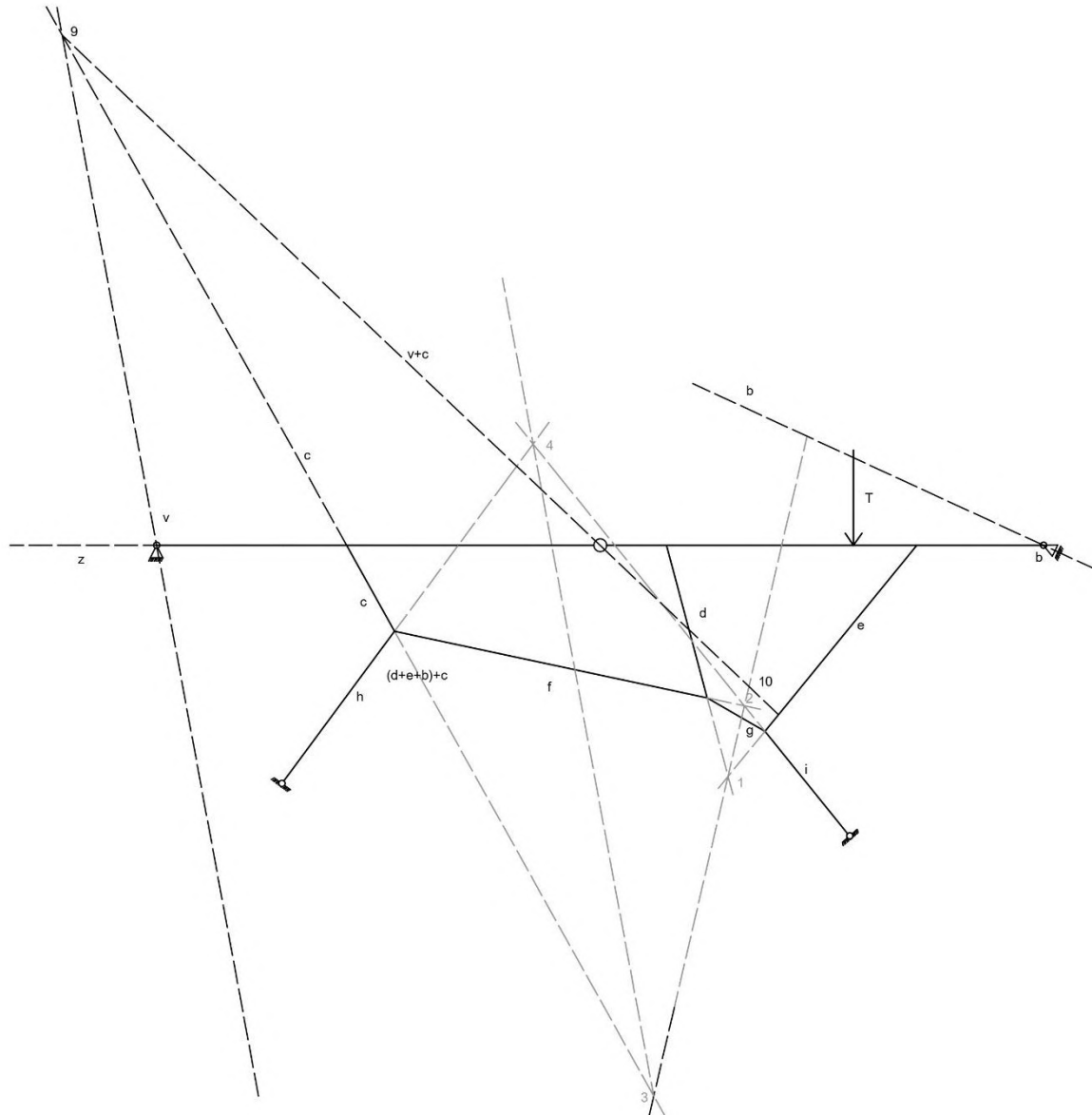
Kada je sistem određen, moraju se između tijela II i podloge pojaviti samo tri veličine koje određuju statičko djelovanje. Kako je djelovanje kliznog zgloba određeno s jednom veličinom, djelovanje neopterećenog tijela I i svih sedam zglobnih štapova zajedno mora se svesti na samo jednu silu na zadanom pravcu.

Pravac sile A tražit ćemo rastavljajući je na zbroj vektora V i Z.

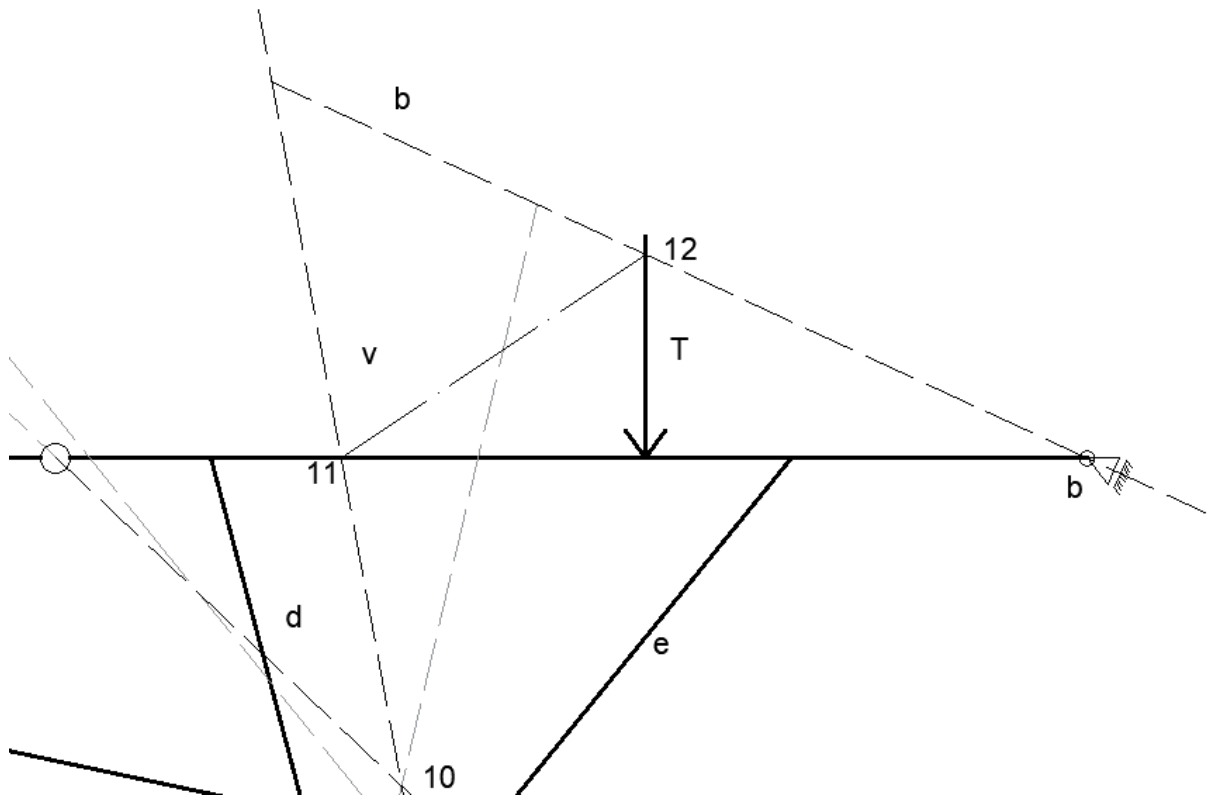
Pravac rezultante sila C, D i E određuje se u dva koraka, a postupak je isti kao kada se tražilo djelovanje opterećenja samo na tijelo I.

Ustvari, treba odrediti pravac rezultante pet sila, koje leže na pravcima v, z, c, d, e.

Na podsistemu neopterećenog dijela I nađemo točku 9 kojom prolazi rezultanta pravaca  $v$  i  $c$ . Iz točke 9 i zgloba koji povezuje podsisteme I i II povučemo pravac koji produžimo do točke 10.

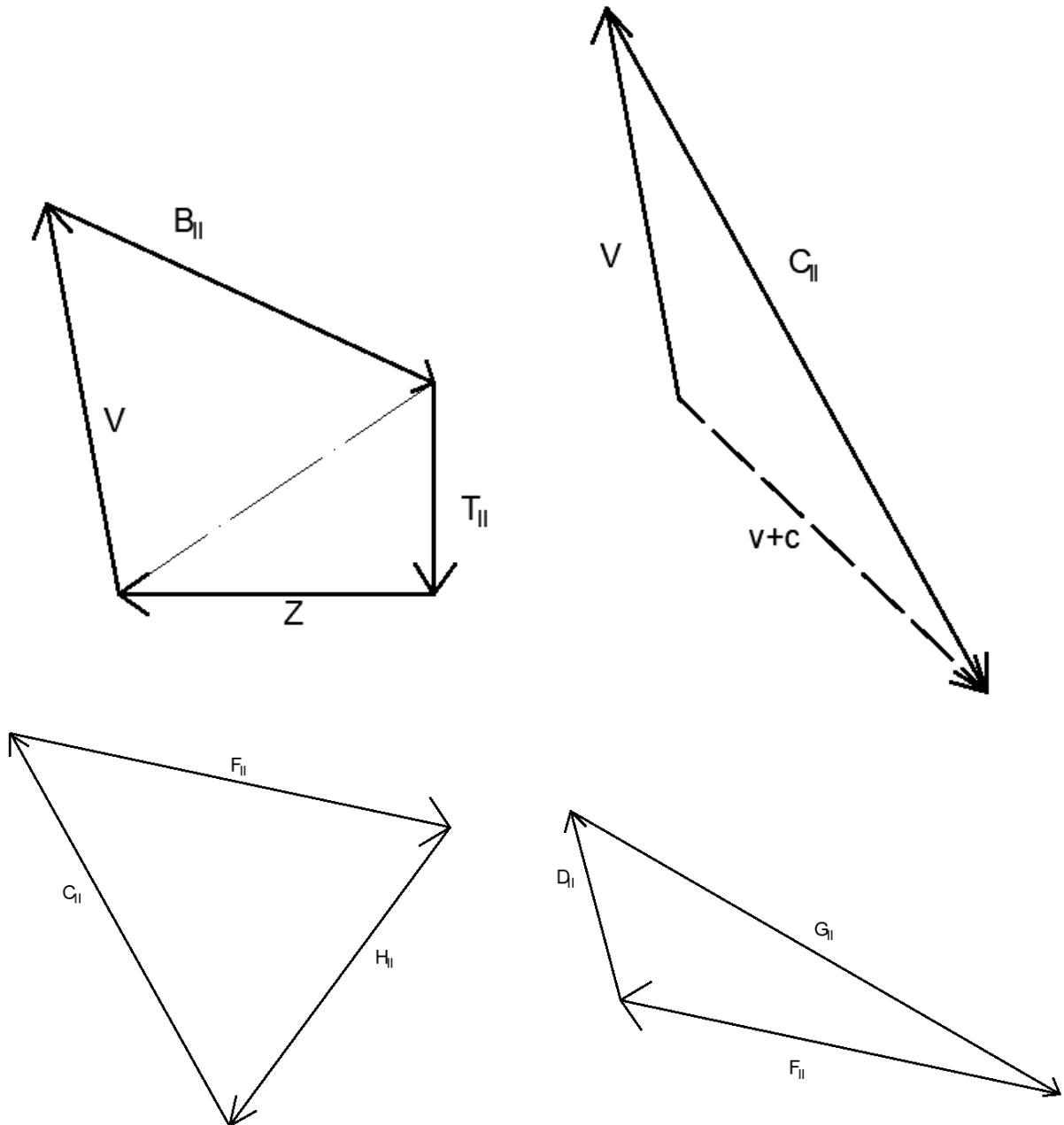


U točku 10 premjestimo pravac sile  $V$  kako bismo uravnotežili četiri sile:  $v$  i  $z$  koje se sijeku u točki 11 te zadanu silu  $T$  s poznatom rezultantom ležaja  $b$ . Četiri sile uravnotežuju se Culmannovom metodom. To je grafički postupak, pomoću kojeg se uravnotežavaju četiri sile u ravnini. Četiri su sile u ravnoteži, ako rezultanta bilo koje dvije sile leži na pravcu određenom rezultantom preostalih dviju sila (taj se pravac naziva Culmannovim pravcem) te ako su te dvije rezultante jednake po veličini, a suprotne po smjeru djelovanja [1].

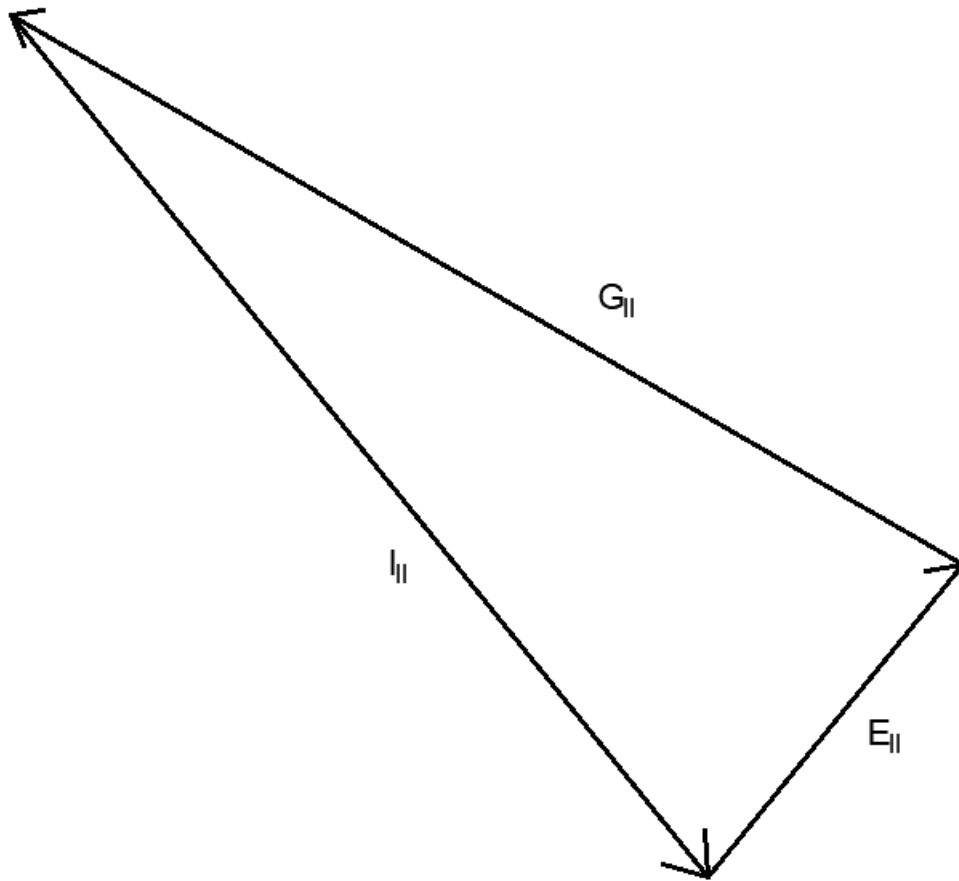


Smjer i iznos sile B dobijemo zbrajanjem sila Culmannovom metodom.

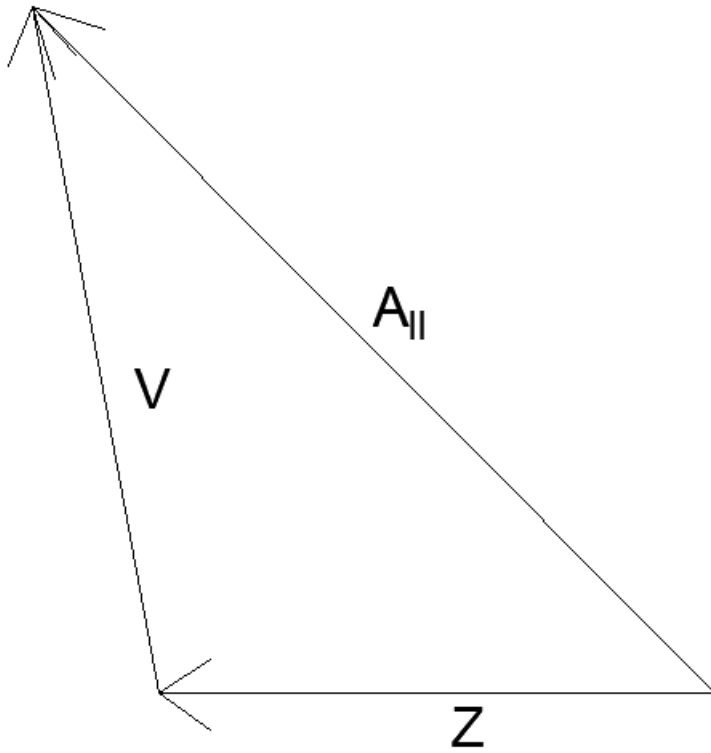
Nadalje, rješavamo ostatak sistema zbrajajući vektore i uravnotežujući čvorove, kako bismo dobili reakcije u štapovima i ležaju A.



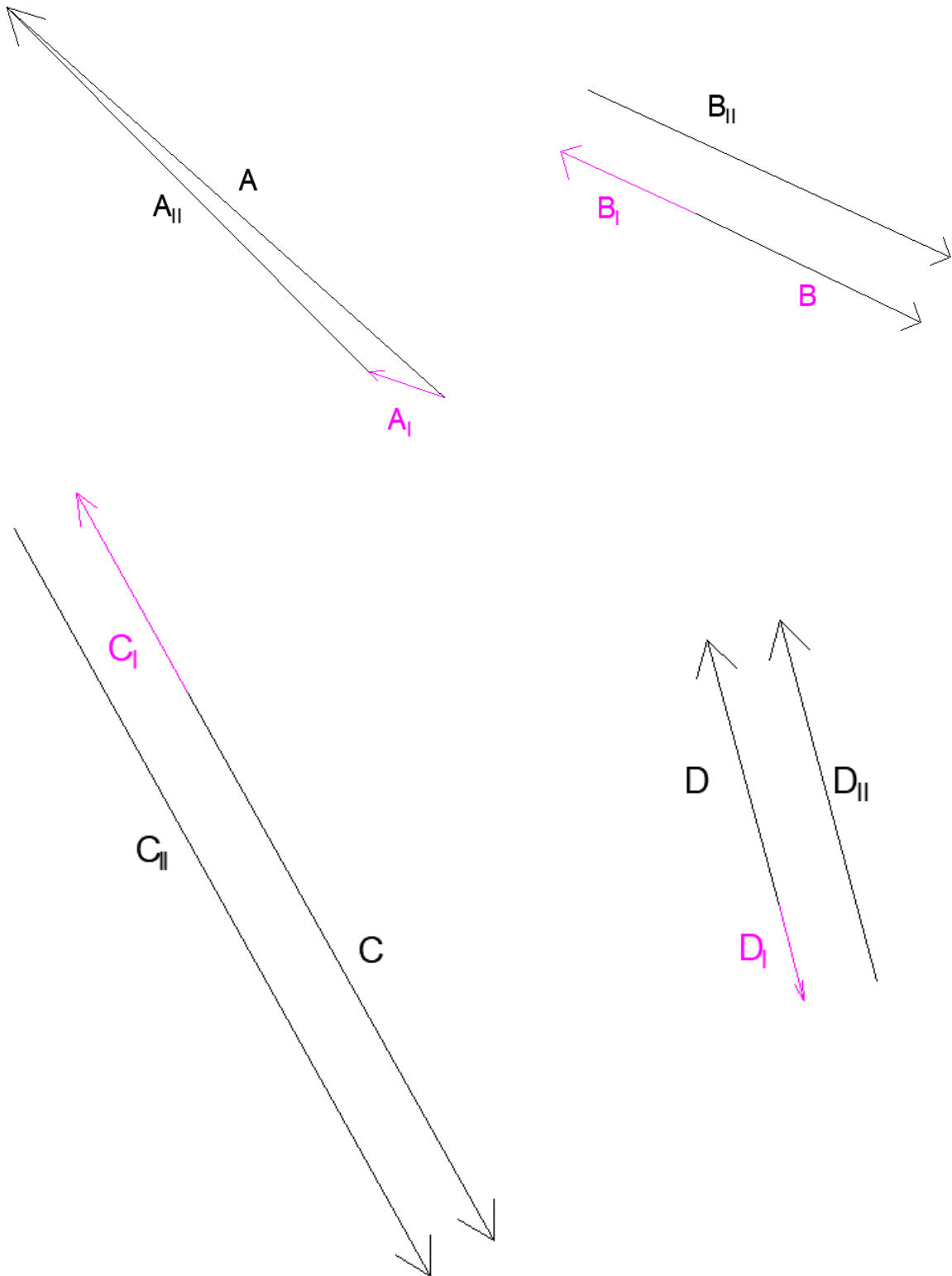


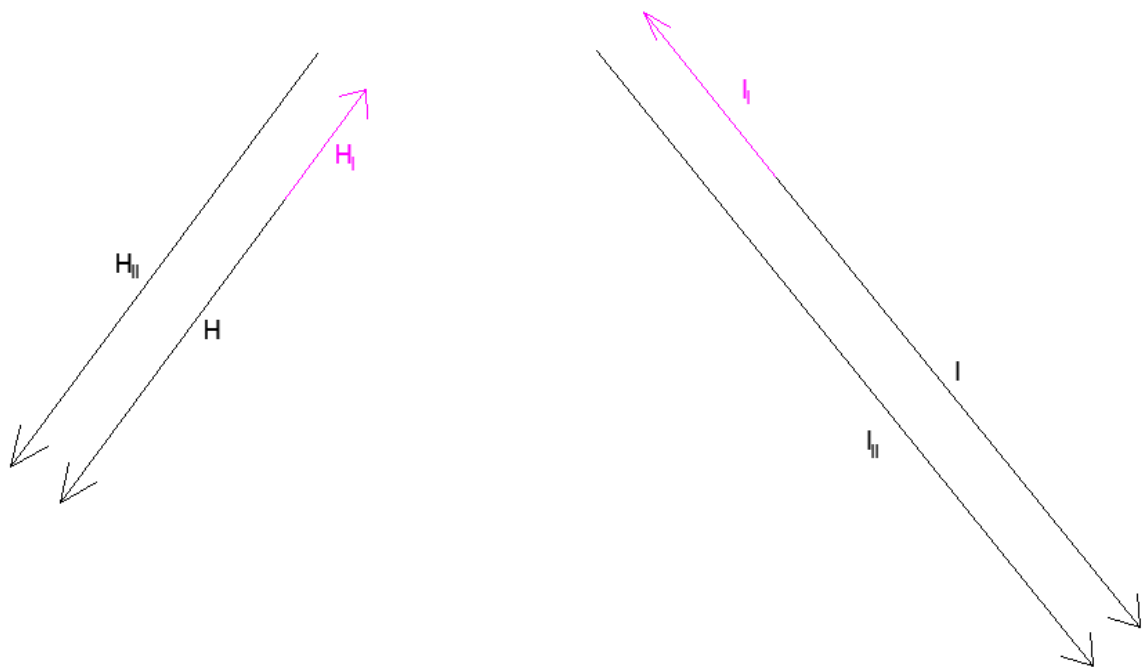
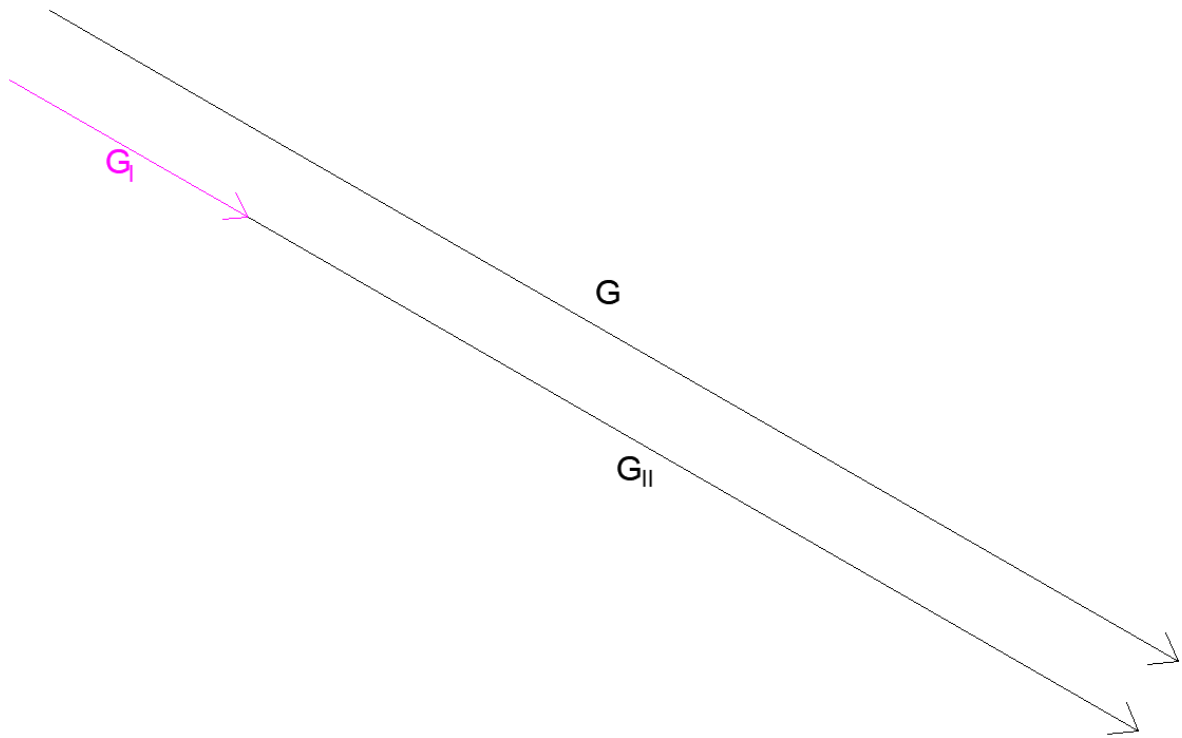
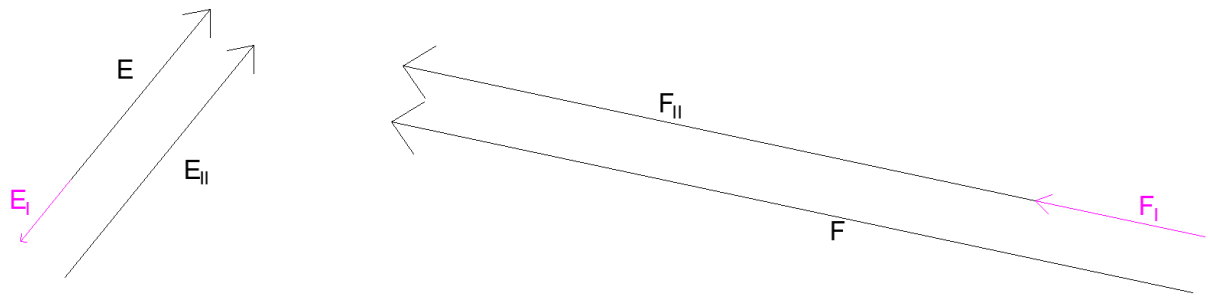


Iz vektorskog zbroja sila  $V$  i  $Z$  dobivamo smjer i iznos sile  $A_{II}$ .



Posljednji je korak zbrajanje opterećenje dobivenih iz dvije grupe djelovanja na svako od dva tijela zasebno, označenih oznakama I i II.





## 6. ZAKLJUČAK

Nosači su sistemi u konstrukciji koji preuzimaju vanjska opterećenja i prenose ih na okolinu, osiguravajući čvrstoću konstrukcije protiv loma i deformacija. Sastoje se od štapova, greda i diskova spojenih na vanjske točke, pri čemu štapovi i grede čine osnovne nosive elemente.

Poduprti nosači nosivi su dio konstrukcije mostova gdje su uvjeti dobri za preuzimanje horizontalnih i vertikalnih sila ležajeva. Takvi su nosači najčešće sastavljeni od dvije grede koje su međusobno spojene zglibom i oslonjene na jedan pomičan i jedan nepomičan ležaj ili na oba pomična. Analizu reakcija i unutarnjih sila kod ovih sistema moguće je proračunati analitički i grafički uz primjenu analogije običnih greda i trozglobnih nosača.

U ovom radu riješen je primjer poduprte grede druge skupine analitički i grafički. Izračunate vrijednosti prikazane u dijagramima momenta te uzdužnih i poprečnih sila. Iskaz dijagrama je važan jer se na temelju njegovog prikaza mogu vidjeti dijelovi konstrukcije na kojima opterećenja djeluju te kako i gdje može doći do savijanja, koje je najčešće opterećenje greda zbog njihovih dimenzija. Prikazano je i grafičko rješavanje primjera poduprte grede druge skupine s kosim štapovima.

Poduprti nosači korišteni su u građevinskim konstrukcijama kada je potrebno sigurno premošćivanje velikih raspona, poput mostova i velikih hala.

## POPIS LITERATURE

- [1] K. Fresl: Građevna statika 1., bilješke i skice s predavanja, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2017, URL: <http://grad.hr/nastava/gs/g1/g1.pdf>
- [2] H. Werner: Uvod u proračun konstrukcija, Zagreb, 1985.
- [3] V. Simović: Građevna statika I, Građevinski institut Zagreb, 1998.