

# Grafički postupci rješavanja ravninskih rešetkastih nosača

---

Đurkan, Elena

Undergraduate thesis / Završni rad

2023

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:754926>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-13**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)



**Sveučilište u Zagrebu**  
**Građevinski fakultet**

**GRAFIČKI POSTUPCI RJEŠAVANJA RAVNINSKIH REŠETKASTIH  
NOSAČA**  
**GRAPHICAL METHODS FOR PLANE TRUSSES**

(ZAVRŠNI RAD)

**Student: Elena Đurkan**

**JMBAG: 0082065562**

**Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl**

**Zagreb, 2023.**

## SADRŽAJ

|   |    |
|---|----|
| <b>1. UVOD</b> .....  | 2  |
| <b>2. RAVNINSKI REŠETKASTI NOSAČI</b> .....   | 3  |
| 2.1. KARAKTERISTIKE STATIČKI ODREĐENIH RAVNINSKIH NOSAČA .....                        | 4  |
| 2.2. ELEMENTARNA PRAVILA KOJA VRIJEDE OPĆENITO ZA<br>RAVNINSKE REŠETKASTE NOSAČE..... | 9  |
| <b>3. GRAFIČKI POSTUPCI ODREĐIVANJA SILA U ŠTAPOVIMA REŠETKASTIH NOSAČA</b> .....     | 11 |
| 3.1. METODA ČVOROVA.....  | 12 |
| 3.2. MAXWELL–CREMONIN PLAN SILA .....   | 15 |
| 3.3. CULMANNOV POSTUPAK .....   | 21 |
| <b>4. GRAFIČKO ODREĐIVANJE POMAKA ČVOROVA</b> .....                                   | 24 |
| 4.1. WILLIOTOV PLAN POMAKA .....  | 25 |
| 4.2. WILLIOTOV PLAN POMAKA ZA KONZOLNE REŠETKASTE NOSAČE.....                         | 29 |
| 4.3. WILLIOTOV PLAN POMAKA ZA GREDNE REŠETKASTE NOSAČE .....                          | 31 |
| <b>5. PRIMJER</b> .....   | 35 |
| 5.1. SILE U ŠTAPOVIMA REŠETKASTOGA NOSAČA .....                                       | 35 |
| 5.2. POMACI ČVOROVA REŠETKASTOGA NOSAČA.....  | 45 |
| <b>6. ZAKLJUČAK</b> .....   | 48 |
| <b>7. LITERATURA</b> .....  | 49 |

## 1. UVOD

Tema je završnoga rada prikaz grafičkoga rješavanja ravninskih rešetkastih nosača (to jest nalaženje vrijednosti sila u svim ili samo u nekim štapovima) i grafičkoga određivanja pomaka čvorova tih nosača. Objasnit će se samo neke grafičke metode rješavanja kao što su metoda čvorova, Maxwell-Cremonin plan sila i Culmannov postupak. Pomaci čvorova će biti određeni pomoću Williotova plana pomaka.

Rad se sastoji od dva dijela. U prvom će se dijelu teorijski objasniti svaka od navedenih metoda te će svakom metodom biti riješen razmjerno jednostavan primjer u kojem je detaljno objašnjen postupak rješavanja. U drugom će dijelu rada grafički postupci biti primijenjeni u rješavanju statički neodređenoga sistema metodom sila: vrijednosti sila u štapovima osnovnoga sistema tražit će se pomoću Maxwell-Cremoninoga plana sila, a iz Williotova će se plana pomaka očitati duljine pomaka čvorova na mjestima raskinutih spojeva.

## 2. RAVNINSKI REŠETKASTI NOSAČI

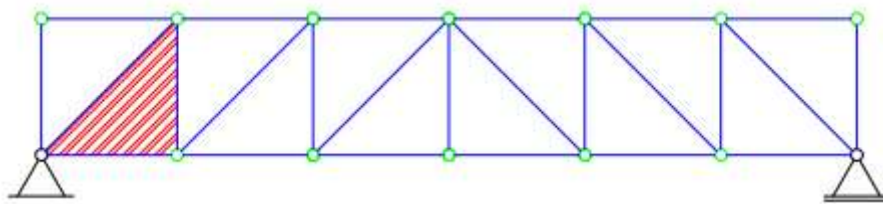
Rešetkasti nosači su konstrukcijski proračunski sistemi sastavljeni od zglobnih čvorova koji su međusobno povezani zglobnim štapovima. Mogu biti prostorni i ravninski. Zglobni štap osnovni je nosivi element rešetkastih nosača: ravan štap koji prenosi sile samo uzduž svoje osi, te se kao unutarnja sila pojavljuje samo uzdužna sila. Opterećenje koje se pojavljuje na rešetkastoj konstrukciji preuzima se preko čvorova konstrukcije. Svaki štap rešetkaste konstrukcije može biti opterećen na svojim krajevima silom veze štapa i čvora. Proračun rešetkastih nosača provodi se određivanjem unutarnjih sila u štapovima nosača. Dobivene unutarnje sile u štapovima mogu biti vlačne ili tlačne.

Ravninski rešetkasti nosači su rešetkasti nosači kod kojih se svi štapovi i sve vanjske veze nalaze u jednoj ravnini. Statički određene konstrukcije su konstrukcije kojima se sve nepoznate sile mogu odrediti pomoću jednadžbi ravnoteži statike krutoga tijela.

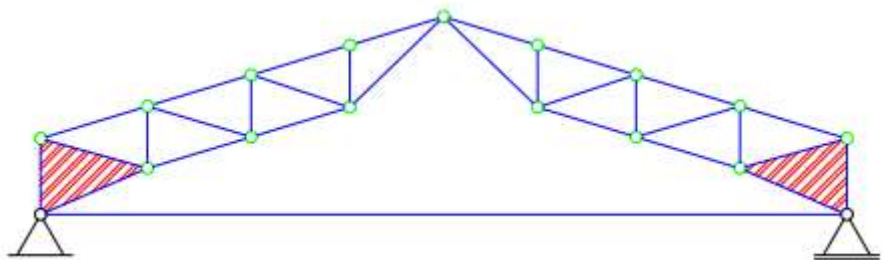
Nalaženje nepoznatih sila u štapovima može se provoditi analitičkim ili grafičkim postupcima. U nastavku će biti opisani načini nalaženja sila nekim grafičkim postupcima na statički određenim sistemima.

## 2.1. KARAKTERISTIKE STATIČKI ODREĐENIH RAVNINSKIH NOSAČA

Rešetkasti nosači sastavljeni su od jednoga ili više rešetkastih diskova. Najjednostavnija struktura rešetkastoga diska je trokut. Trokut je sastavljen od štapova koji se spajaju pomoću zglobnih čvorova. Formirajući trokut dobiva se kruta figura koja ne mijenja oblik, te ostaje nepromjenjiva pod bilo kojim opterećenjem koje se javlja u nekom čvoru.



a.



b.

Slika 1. (prema V. Simović: Građevna statika I)

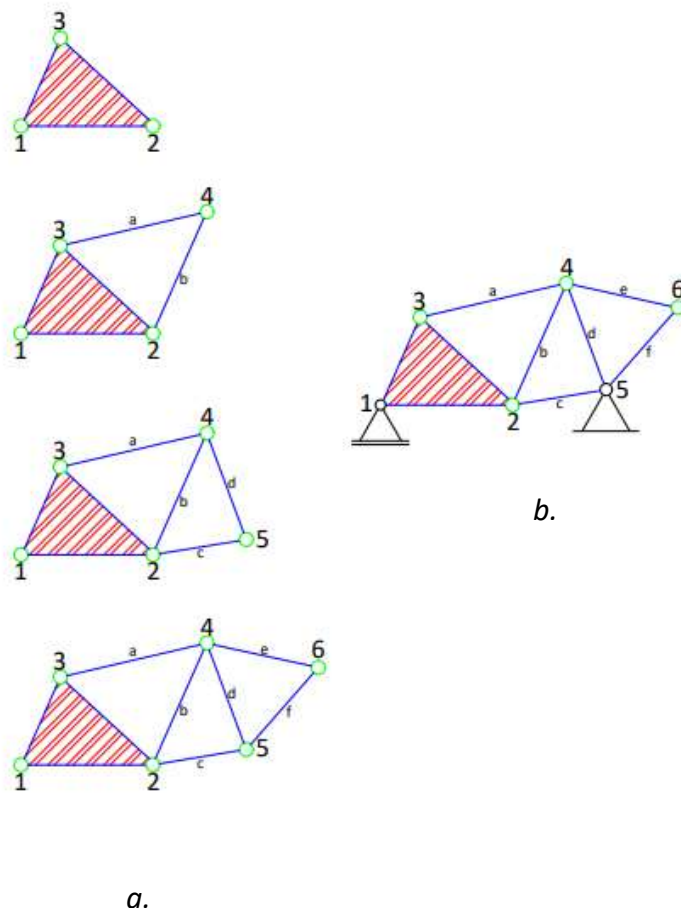
Na slici 1.a. prikazan je ravninski rešetkasti nosač s jednim diskom, a na slici 1.b. ravninski rešetkasti nosač s dva diska. Na svakom nosaču označen je karakteristični trokut, temeljni trokut na kojeg se dodavanjem čvorova i štapova dobiva željeni rešetkasti sistem.

Rešetkasti nosači statički su određeni nosači kada su sastavljeni od dovoljnoga broja ispravno raspoređenih štapova spojenih zglobnim čvorovima, te s dovoljnim, ali najmanjim brojem vanjskih veza. Pretpostavlja se da su svi štapovi konstantnoga poprečnoga presjeka, ravni i da sva vanjska opterećenja djeluju u čvorovima te u ravnini nosača.

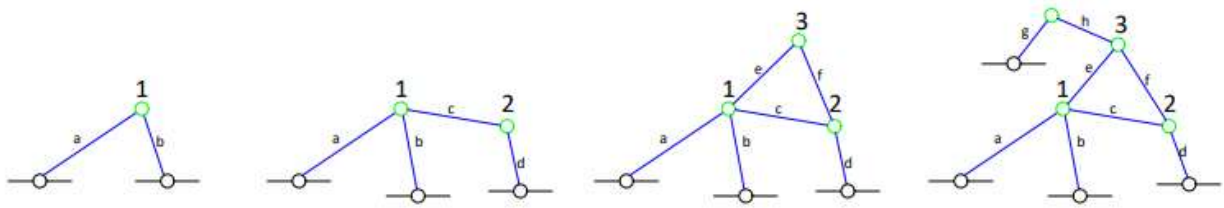
Svaki rešetkasti nosač mora zadovoljiti nužan uvjet geometrijske nepromjenjivosti diska. Nužan uvjet geometrijske nepromjenjivosti diska postiže se pravilnim rasporedom i brojem štapova unutar nosača. Osnovni geometrijski nepromjenjiv sklop zglobnih štapova je trokut. Trokut je najjednostavnija nepromjenjiva struktura u ravnini sastavljena od tri štapa i tri čvora.

Razlikuju se dva osnovna načina dobivanja rešetkastih nosača. Prvi način sastoji se od dva koraka. U prvom koraku stvara se osnovni trokut koji je sastavljen od tri štapa i tri čvora, te se na njega dodaju dva štapa koji se spajaju u jedan čvor, daljnjim dodavanjem štapova i čvorova dobiva se geometrijsko nepromjenjivo ravninsko ulančano rešetkasto tijelo. U drugom koraku dovoljnim brojem i pravilnim rasporedom vanjskih veza spaja se rešetkasti nosač s podlogom.

Drugi način dobivanja rešetkastog nosača je taj da se zglobni čvorovi spajaju s podlogom i/ili s nepomičnim čvorom pomoću dva zglobna štapa.



*Slika 2.*



Slika 3.

Na slici 2.a. prikazano je etapno slaganje rešetkastih tijela. Na osnovnu figuru (trokut čvorova 1-2-3) spojen je čvor 4 pomoću dva zglobna štapa ( $a, b$ ), zatim se postavlja čvor 5 koji se spaja štapovima  $d$  i  $c$  na prethodni dio. Svi ostali čvorovi prikazani na slici 2.a. nastaju na jednaki način kao i prethodno opisani. Dobiveno rešetkasto ulančano tijelo zatim treba spojiti s podlogom, kao što je prikazano na slici 2.b.

Slika 3. objašnjava dobivanje čvorova rešetkastoga nosača tako da se svaki čvor spaja s dva zglobna štapa za podlogu ili nepomični čvor. Čvor 1 spojen je pomoću štapova  $a$  i  $b$  s podlogom, te time čvor 1 postaje nepomičan. Čvor 2 spojen je štapom  $d$  za podlogu, a štapom  $c$  za nepomičan čvor 1, te time i čvor 2 postaje nepomičan čvor rešetkastoga nosača. Uzastopnim daljnjim slaganjem dobiva se željeni ravninski određeni rešetkasti nosač.

Nužan uvjet geometrijske nepromjenjivosti rešetkastoga diska govori koliki treba biti najmanji broj zglobnih štapova unutar rešetkastoga tijela. Broj štapova se označi s  $n_s$ , a broj čvorova  $n_č$ .

Prema formuli

$$n_s = 3 + (n_č - 3) \cdot 2 = 2n_č - 3 \quad (1)$$

dobiva se broj potrebnih štapova da se sastavi rešetkasto tijelo. Da bi to rešetkasto tijelo postalo rešetkasti određeni nosač potrebno ga je spojiti s podlogom dodavanjem vanjskih veza. Postavljaju se tri vanjske veze koje se tretiraju kao štapani. Prema tome izraz za minimalan ukupan potreban broj zglobnih štapova za geometrijsku nepromjenjivost glasi

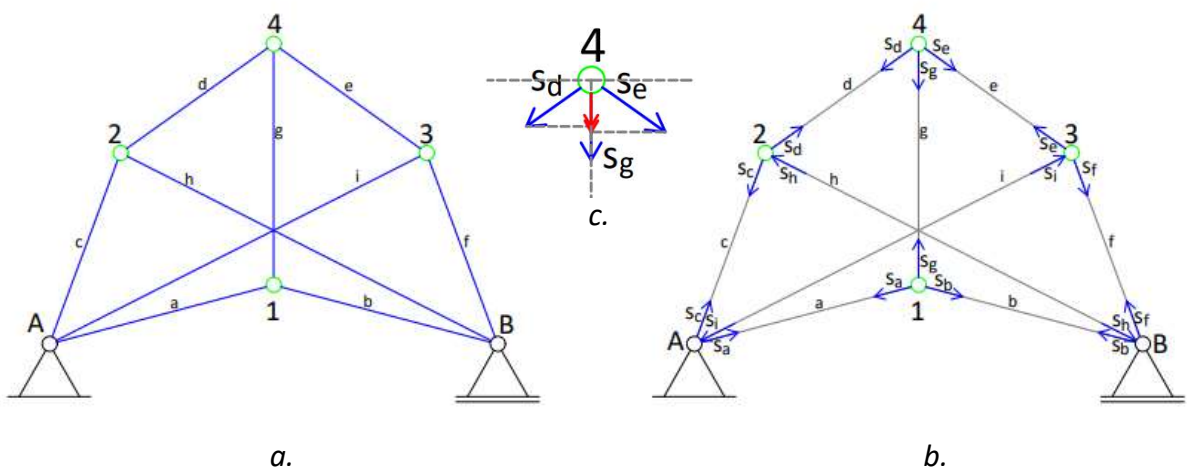
$$n_s = 2n_č \quad (2)$$



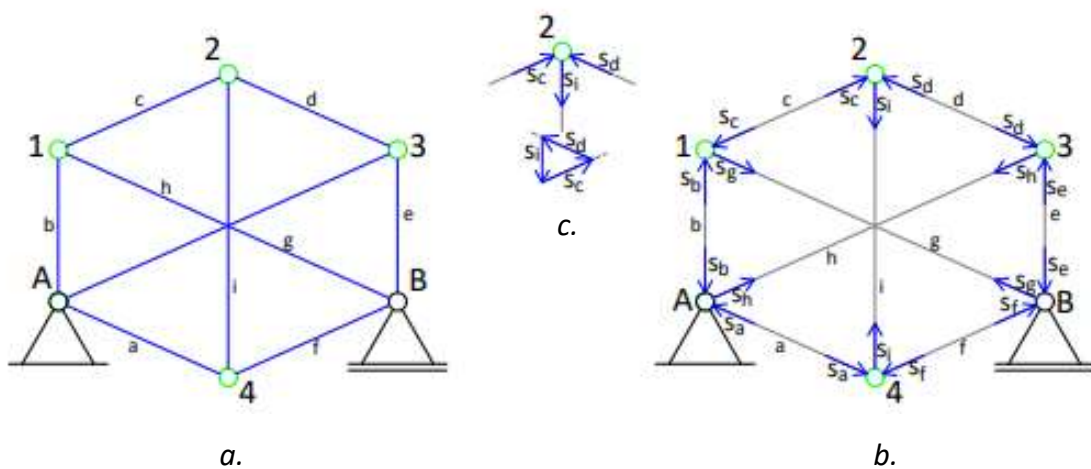
Iz izraza se vidi da je nužno imati dvostruko više štapova od broja čvorova kako bi rešetkasti nosač bio geometrijski nepromjenjiv i statički određen.

Osim najjednostavnijih oblika geometrijske nepromjenjivosti rešetkastoga tijela, kada je tijelo sastavljeno od nepromjenjivih struktura (trokut), postoje i mnogo složeniji rešetkasti nosači kod kojih se geometrijska nepromjenjivost ne može odrediti prema gore opisanom postupku.

Takav primjer prikazan je na slici 4., dok je na slici 5. prikazan topološki jednaki sistem (povezanost čvorova i štapova je jednaka, ali su položaji čvorova različiti) koji je geometrijski promjenjiv.



Slika 4. (prema V. Simović: Građevna statika I)



Slika 5. (prema V. Simović: Građevna statika I)

Kod ispitivanja nepromjenjivosti složenih sistema koristi se jedna od statičkih metoda, metoda nultog opterećenja. Ako na statički određen konstrukcijski sistem ne djeluje vanjsko opterećenje, sile u svim štapovima jednake su nuli i to je jedino moguće rješenje koje zadovoljava uvjete ravnoteže u svim čvorovima sistema. Konstrukcijski sistem geometrijski je nepromjenjiv samo ako zadovoljava to rješenje. U suprotnom, ako je moguće pronaći neko drugo rješenje, kada su sile različite od nule, ali u isto vrijeme i zadovoljavaju uvjete ravnoteže u čvorovima, sistem je geometrijski promjenjiv.

Primjer na slici 4.a. zadovoljava nužan uvjet geometrijske nepromjenjivosti i statičke određenosti. Broj štapova i broj čvorova zadovoljava izraz za geometrijsku nepromjenjivost. Nužan uvjet je ispunjen, ali to ne znači da je ujedno ispunjen i dovoljan uvjet. Uz broj štapova i broj čvorova bitni su i njihovi položaji i raspored.

U nastavku će biti prikazan način određivanja geometrijske nepromjenjivosti metodom nultoga opterećenja. Sistem nema vanjskoga opterećenja, pa su reakcije sistema jednake nuli. Pretpostavlja se da u štapu  $g$  postoji neka sila  $S_g$  koja je različita od nule. Zatim se određuju sile u svim ostalim štapovima. Kreće se sa čvorom 1 gdje je poznata vrijednost jedne sile ( $S_g$ ) te nepoznate vrijednosti preostalih dviju ( $S_a$  i  $S_b$ ). Pomoću ravnoteže u čvoru dobiju se sile  $S_a$  i  $S_b$ . U sljedećim koracima uravnotežuju se čvorovi  $A$  i  $B$  kako bi se dobile sile u štapovima  $c$ ,  $i$ ,  $f$  i  $h$ , pa se ulazi u čvorove 2 i 3 i ravnotežom se dobivaju sile u štapovima  $d$  i  $e$  (slika 4.b.). Čvor 4 je kontrolni čvor, u njemu se pojavljuju sile u štapovima  $d$ ,  $e$  i  $g$ , koje su izračunate i poznate iz prethodnih koraka. Kako je čvor 4 kontrolni čvor u njemu se kontrolira ravnoteža dobivenih sila. Promatrajući sile i orijentacije sila u čvoru zaključuje se da čvor nije u ravnoteži. Projekcijom sila na vertikalnu os, vidljivo je da su sve tri sile jednako orijentirane (slika 4.c.), što znači da sile nisu u ravnoteži. Čvor 4 može biti u ravnoteži jedino onda kada bi sve tri sile bile jednake nuli. Ako su sve sile u čvoru 4 nula, to znači da moraju biti i sve ostale sile u štapovima jednake nuli. Dokazana je nemogućnost postojanja sila u štapovima bez vanjskoga opterećenja. Sistem sa slike 4.a. geometrijski je nepromjenjiv, odnosno to je rešetkasti nosač.

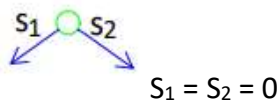
Primjer sa slike 5.a zadovoljava nužan uvjet geometrijske nepromjenjivosti, ali ne ispunjava dodatan uvjet: raspored i položaj štapova je takav da je unutarnja ravnoteža moguća bez

vanjskoga opterećenja, prema tome sistem je mehanizam. Objašnjenje i rješenje sistema pokazati će se metodom nultoga opterećenja. Sistem nema vanjskoga opterećenja, pa su reakcije sistema jednake nuli. Prvo se pretpostavlja da postoji sila u štapu  $i$  ( $S_i$ ) te je ona različita od nule. Ravnotežom čvora  $A$  dobiju se sile u štapovima  $a$  i  $f$ . Zatim se idući od čvora do čvora dobe sile u svim ostalim štapovima (slika 4.b.). Kao kontrolni čvor može se promatrati čvor  $B$ . U čvoru  $B$  sastaju se sile u štapovima  $c$ ,  $i$  i  $d$  ( $S_c, S_i, S_d$ ). Na slici 5.c. vidi se da u čvoru  $B$  postoji ravnoteža sila, odnosno sile u čvoru  $B$  tvore zatvoreni trokut sila. Sistem je geometrijski promjenjiv: unutarnje sile različite su od nula i zadovoljavaju uvjete ravnoteže u čvorovima bez vanjskog opterećenja.

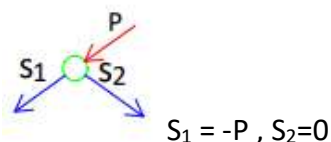
## 2.2. ELEMENTARNA PRAVILA KOJA VRIJEDE OPĆENITO ZA RAVNINSKE REŠETKASTE NOSAČE

Za metodu grafičkoga određivanja sila postoje neka elementarna pravila koja mogu pojednostavniti grafički postupak nalaženja sila u štapovima rešetkastoga nosača.

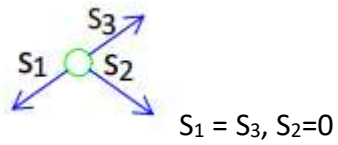
1. Ako na čvor u kojem se sastaju dva štapa osi kojih nisu na istom pravcu ne djeluje vanjsko opterećenje, tada su sile u tim štapovima jednake nuli.



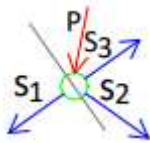
2. Ako na čvor u kojem se sastaju dva štapa djeluje sila na pravcu koji se poklapa s jednim od štapova, sila u drugom štapu jednaka je nuli.



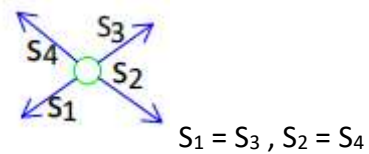
3. Ako se u čvoru na koji ne djeluje vanjsko opterećenje sastaju tri štapa i od njih dva leže na istom pravcu, sila u trećem štapu je jednaka nuli.



4. Ako na čvor u kojem se sastaju tri štapa, od kojih dva leže na istom pravcu, djeluje vanjska sila, sila u trećem štapu može se odrediti iz zbroja projekcija sila na os okomitu na pravac na kojem leže dva štapa.



5. Ako postoji neopterećeni čvor u kojem se sastaju četiri štapa od kojih po dva leže na istim pravcima, onda su sile u štapovima koji leže na istom pravcu međusobno jednake.



### 3. GRAFIČKI POSTUPCI ODREĐIVANJA SILA U ŠTAPOVIMA REŠETKASTIH NOSAČA

Kod grafičkoga određivanja sila u štapovima ravninskih rešetkastih nosača, protumačiti će se samo neke grafičke metode, a to su:

- a. metoda čvorova,
- b. Maxwell–Cremonin plan sila,
- c. Culmannov postupak.

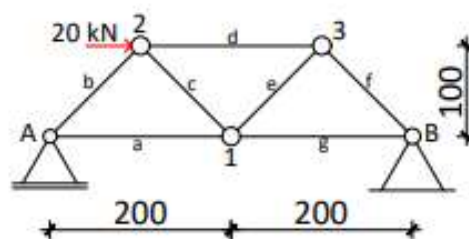
Postoji mnogo tipova ravninskih rešetkastih nosača. Svaki grafički postupak ima neke karakteristike koje bolje odgovaraju nekom tipu rešetkastoga nosača. Prema tipu i cilju proračuna odabire se najprikladnija grafička metoda za rješavanje. U nekim rešetkastim nosačima potrebno je znati samo jednu silu, dok su u nekom drugom nosaču potrebne sile u svim štapovima.

### 3.1. METODA ČVOROVA

Metoda čvorova, poznata i kao metoda izrezivanja čvorova ili metoda ravnoteže čvorova, najjednostavnija je i najopćenitija metoda za određivanje svih sila u rešetkastom nosaču. Temeljna zamisao leži u činjenici da se zamišlja kako se „izrezuju“ pojedini čvorovi iz rešetkastoga nosača, te se postavljaju jednačbe ravnoteže kako bi se dobile tražene sile. Sile koje djeluju u čvoru sijeku se u jednoj točki, pa iz toga proizlazi da se u jednom čvoru mogu izraziti samo dvije jednačbe ravnoteže. Jednačbe ravnoteže mogu se riješiti analitičkim i grafičkim postupkom. Iz ravnoteže jednoga čvora mogu se dobiti dvije nepoznate sile, pa se samim time traži čvor u kojem se kao nepoznanice pojavljuju najviše dvije sile. Čvor je u ravnoteži ako sve sile koje djeluju u njemu zatvaraju poligon sila. Poligoni sila mogu se crtati neovisno za svaki čvor i na taj način idući od čvora do čvora mogu se odrediti sile u svim štapovima rešetkastoga nosača. Sila u jednom štapu pojavljuje se u dva čvora, pa se i pojavljuje u crtanju dva poligona sila, što upućuje na gomilanje grešaka prilikom crtanja.

Da bi se te greške svele na minimum, potrebno je složiti poligone u jedinstveni plan u kojem se svaka sila pojavljuje samo jedanput. Taj jedinstveni plan, poznat pod nazivom Maxwell–Cremonin plan sila, objasniti će se u sljedećem poglavlju.

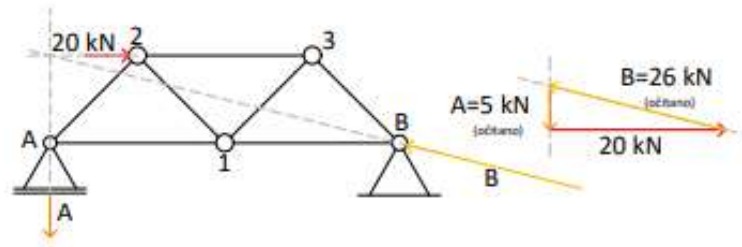
U sljedećem primjeru (slika 6.) objašnjeno je pronalaženje sila u svim štapovima zadanoga rešetkastoga nosača.



Slika 6.

Prvi je korak kod rješavanja ovoga zadatka pronaći reakcije u ležajevima  $A$  i  $B$ . Na nosač djeluje vanjsko opterećenje u obliku koncentrirane sile od 20 kN u čvoru 2. Da bi sustav bio u ravnoteži, reakcije  $A$  i  $B$  moraju uravnotežiti zadanu silu. U ležaju  $A$  poznati je pravac djelovanja reakcije koji je okomit na smjer dopuštenoga pomaka ležaja. Poznati pravac zadane sile i pravac reakcije  $A$  sijeku se u jednoj točki; ta točka zajednička je točka svih triju sila, pa je

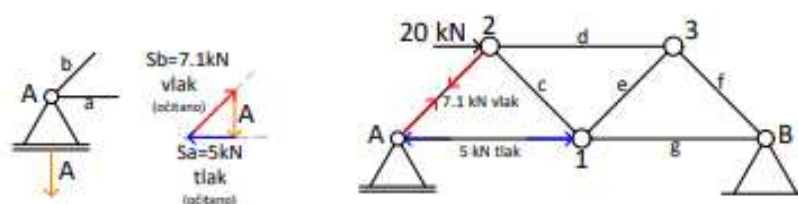
poznati i pravac djelovanja reakcije  $B$ . Pravac djelovanja prolazi kroz zajedničku točku i kroz ležaj  $B$ . Ako je poznata vrijednost jedne sile i ako su poznati pravci preostale dvije sile, može se napraviti poligon sila. Iz poligona sila očitavaju se vrijednosti reakcija  $A$  i  $B$  (slika 7.).



Slika 7.

Poznavanjem vrijednosti i smjerova reakcija može se krenuti u pronalaženje sila u štapovima. Prvo se traži čvor u kojem su nepoznate samo dvije sile štapa. U ovom slučaju u čvoru  $A$  i u čvoru  $B$  sastaju se po dva štapa, pa su samim time nepoznate dvije sile, te se može se krenuti ili od čvora  $A$  ili  $B$ .

U čvoru  $A$  postoje tri sile, poznata reakcija  $A$  te nepoznate sile u štapovima  $a$  i  $b$ . U poligon sila se nanosi reakcija  $A$  te sa svake strane reakcije pravci djelovanja nepoznatih sila. U tom slučaju dobiva se poligon sila koji se mora zatvoriti. Zadnji korak je taj da se očitava vrijednost nepoznatih sila. Ovom ravnotežom dobivene su sile u štapovima  $a$  i  $b$ . Sila u štapu  $a$  tlačna je, dok je sila u štapu  $b$  vlačna (slika 8.).



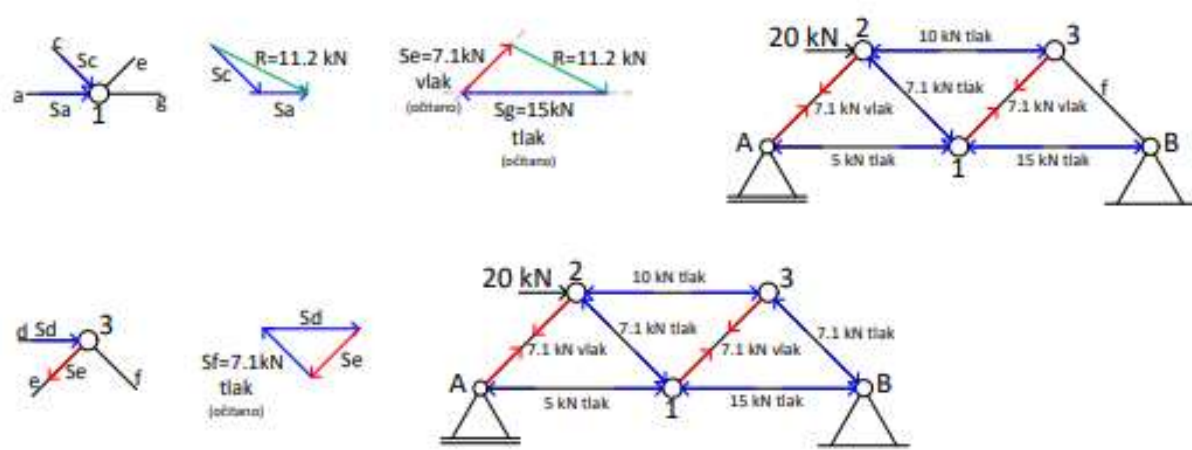
slika 8.

Sljedeći čvor koji će biti uravnotežen je čvor  $2$ . U čvoru  $2$  sastaju se četiri sile, od kojih su dvije poznate i dvije nepoznate. Dvije poznate sile, sila vanjskoga opterećenja od 20 kN i vlačna sila u štapu  $b$ , potrebno je zbrojiti. Dobivenu rezultantu treba uravnotežiti silama u štapovima  $d$  i  $c$ . Zatvaranjem poligona sila dobivaju se tlačna sila u štapu  $c$  i tlačna sila u štapu  $d$  (slika 9.).



slika 9.

U sljedeća dva koraka uravnotežuje se čvor 1 i čvor 3 na identičan način kao čvorovi koji su opisani u prethodnim koracima. Iz čvora 1 dobivaju se sile u štapovima *e* i *g*, a iz čvora 3 sila u štapu *f* (slika 10.).



slika 10.

Uravnoteženjem svakoga čvora zasebno dobivene su sile u svim štapovima rešetkastoga nosača.

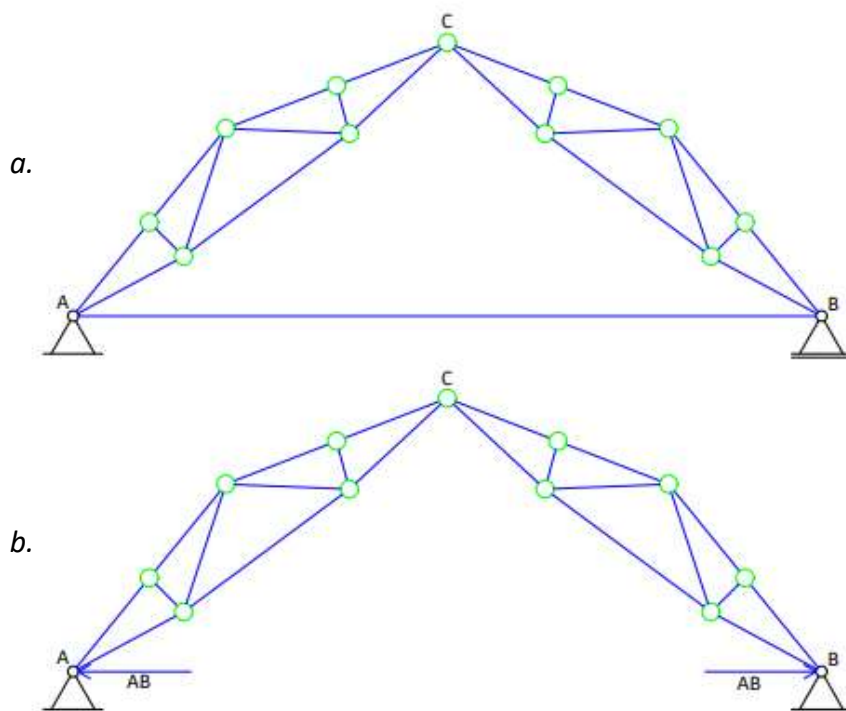


### 3.2. MAXWELL–CREMONIN PLAN SILA

Maxwell–Cremonin plan sila (M-C plan sila) je postupak kojim je usavršena metoda čvorova. U M-C planu sila svaka sila u štapu pojavljuje se samo jedanput, a svi poligoni sila složeni su u jedinstveni plan. M-C plan sila pregledniji je i podložan je manjim pogreškama u odnosu na grafičku konstrukciju metode čvorova.

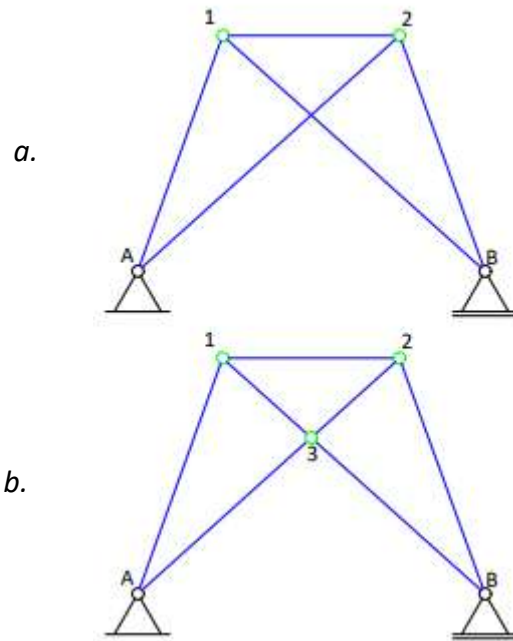
Prije početka rješavanja zadatka pomoću M-C plana sila potrebno je označiti određenu disciplinu koja će vrijediti za daljnji tijek zadatka. Mora se odabrati smisao obilaska oko rešetke i čvora. Smisao obilaska oko rešetke postavlja se u smjeru vrtnje kazaljke na satu ili u smjeru suprotnom od vrtnje kazaljke na satu. Preporučeno je da se odabrani smjer naznači na crtežu pokraj nosača, te da se taj smjer poštuje do kraja zadatka. Odabranim smjerom treba se koristiti za vanjsko opterećenje i za unutarnje sile.

Rešetkasti nosač treba zadovoljiti neke uvjete da bi se mogao riješiti postupkom M-C plana sila. Prvi uvjet govori da u rešetkastom nosaču treba postojati čvor u kojem se sastaju samo dvije sile da bi se moglo krenuti s konstrukcijom M-C plana sila, te da se postupnim rješavanjem nailazi na čvorove kod kojih su nepoznate najviše dvije sile. Ako se prilikom uravnoteženja čvorova pojavljuju više od dvije nepoznate sile, moguće je provjeriti može li se uz prethodnu intervenciju ipak primijeniti M-C plan sila. Na slici 11.a. prikazan je jedan takav primjer kod kojeg se uz prethodnu intervenciju može koristiti M-C plan sila. Rešetka sa slike 11.a. ne posjeduje neki čvor u kojem se sastaju samo dva štapa, odnosno samo dvije nepoznate sile, ali cijeli se nosač može promatrati kao nosač sa zategom - štap  $AB$  je zatega. Nakon što su poznate reakcije sustava, zbrojem momenta u zglobu  $C$  dobiva se sila u zatezi  $AB$ . Sila u štapu  $AB$  unesena je u sustav kao sila vanjskog opterećenja (slika 11.b.). U zatvorenom poligonu, sila  $AB$  pojavljuje se kao dvije sile od kojih jedna djeluje na čvor  $B$ , a druga na čvor  $A$ . Prethodnom intervencijom se nosač kod kojega se na prvi pogled ne mogu sile odrediti M-C planom sila, dovodi u stanje kod kojeg se može provesti M-C plan sila za određivanje svih sila u rešetki.



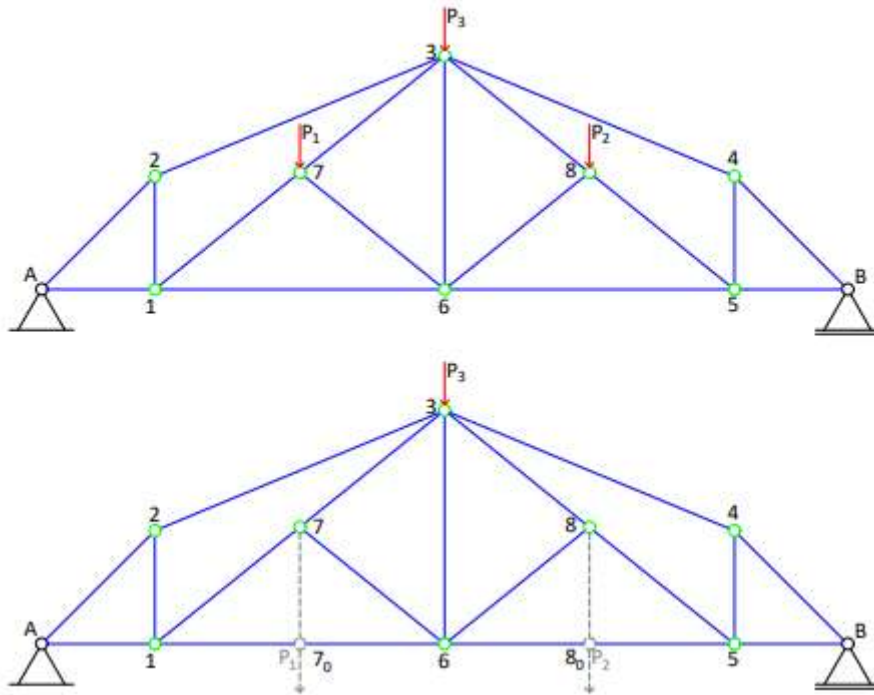
Slika 11. (prema V. Simović: Građevna statika I)

Drugi uvjet koji mora zadovoljiti rešetkasti nosač da bi se mogao riješiti postupkom M-C planom sila je taj da se štapovi ne smiju križati. Ako se štapovi križaju, preklapaju se polja i zbog toga nije moguće napraviti M-C plan sila (slika 12.a.). Ako se u nosaču križaju samo dva štapa, moguće je napraviti takav nosač da se može riješiti M-C planom sila. U sjecištu dva štapa postavlja se zglob, te se nosač ne mijenja. Silama u štapovima se ne mijenja vrijednost ako se pretpostavi da se na nekoj duljini štapa štap presiječe i postavi zglob. Postavljanjem zgloba na mjestu križanja štapova sistem ne mijenja geometrijsku nepromjenjivost i statičku određenost. Broj čvorova povećao se za jedan, a broj štapova za dva, te i dalje sistem zadovoljava uvjet geometrijske nepromjenjivosti i statičke određenosti (slika 12.b). Ovaj postupak može se primijeniti samo ako se križaju dva štapa; ako se križaju tri štapa ili više njih, postupak nije dobar, jer se mijenja konstrukcijski sistem, statički određeni sistem postaje statički neodređen.



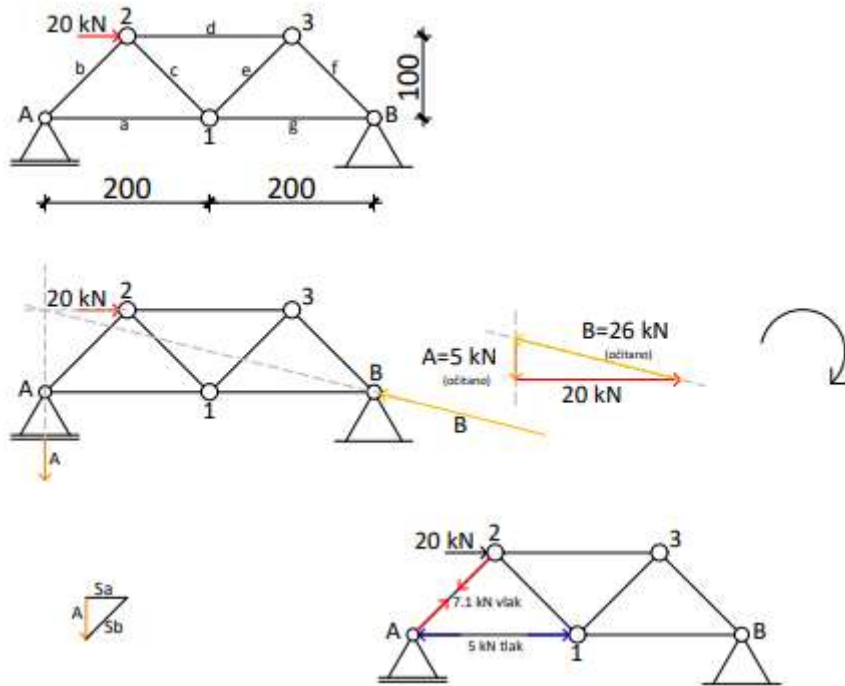
Slika 12. (prema V. Simović: Građevna statika I)

Treći uvjet govori da čvorovi koji se nalaze unutar rešetke ne smiju biti opterećeni. Ako su čvorovi unutar rešetke opterećeni, dolazi do preklapanja vanjskih i unutarnjih ploha te se ne može napraviti M-C plan sila. Primjer takvoga nosača dan je na slici 13.a. Moguće je primjer sa slike 13.a. modificirati i time napraviti nosač koji se može riješiti postupkom M-C planom sila (slika 13.b.). U čvorovima  $\mathcal{I}$  i  $\mathcal{B}$  djeluju koncentrirane sile  $P_1$  i  $P_2$ ; ako se postave pomoćni čvorovi  $\mathcal{I}_0$  i  $\mathcal{B}_0$  i dodaju pomoćni štapovi u smjeru zadanih sila, sile se mogu premjestiti u pomoćne čvorove. U tom slučaju nosač postaje rješiv M-C planom sila. Dodavanjem pomoćnih štapova i čvorova ne utječe na veličine sila u ostalim štapovima.



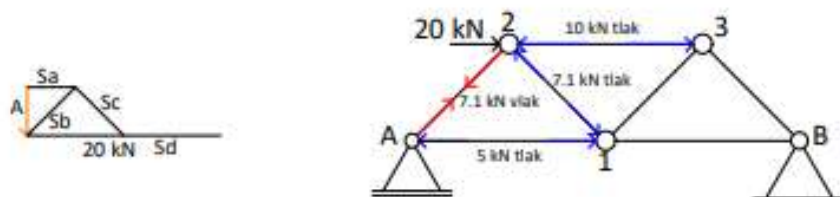
Slika 13. (prema V. Simović: Građevna statika I)

Kao primjer crtanja i objašnjenja rješavanja rešetkastoga nosača M-C planom sila uzet će se primjer sa slike 6. Rešetkasti nosač ima jednostavnu strukturu, statički je određen, geometrijski nepromjenjiv, te je opterećen jednom vanjskom silom. Prvi korak pri rješavanju je da se odrede reakcije u ležajevima. Reakcije se rješavaju kao i kod metode čvorova, zatvori se poligon sila i time dobivene reakcije uravnotežuju zadanu vanjsku silu. Nakon izračunatih reakcija odabire se smjer obilaženje oko rešetke. U ovom primjeru odabire se smjer obilaženja u smjeru vrtnje kazaljke na satu. Prvo se traži čvor u kojem se sastaju samo dva štapa. U ovom slučaju to su čvorovi  $A$  i  $B$ , pa se odabire čvor  $A$  kao početni čvor. Uravnoteženjem čvora  $A$  dobivaju se sile u štapovima  $a$  i  $b$  (slika 14.).



Slika 14.

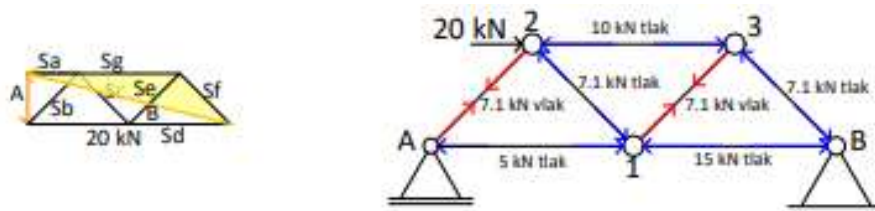
Nakon uravnoteženog čvora  $A$ , uravnotežuje se čvor  $2$ . Iz čvora  $A$  poznata je sila  $S_b$  koja se nalazi i u čvoru  $2$ . U čvoru  $2$  treba obratiti pažnju na smjer obilaženja koji je određen na početku zadatka. Prvo se nailazi na silu  $S_b$ , zatim na nju nastavljamo silu od vanjskog opterećenja te se zatvaranjem poligona sila dobivaju sile u štapovima  $d$  i  $c$  (slika 15.).



Slika 15.

Sljedeći čvor je čvor  $3$  gdje će se zatvoriti poligon sila. U čvoru je poznata sila u štapu  $d$ , te nepoznate sile u štapu  $f$  i  $e$ . Iz plana sila očitavaju se vrijednosti sila  $f$  i  $e$  (slika 16.).





Slika 17.

### 3.3. CULMANNOV POSTUPAK

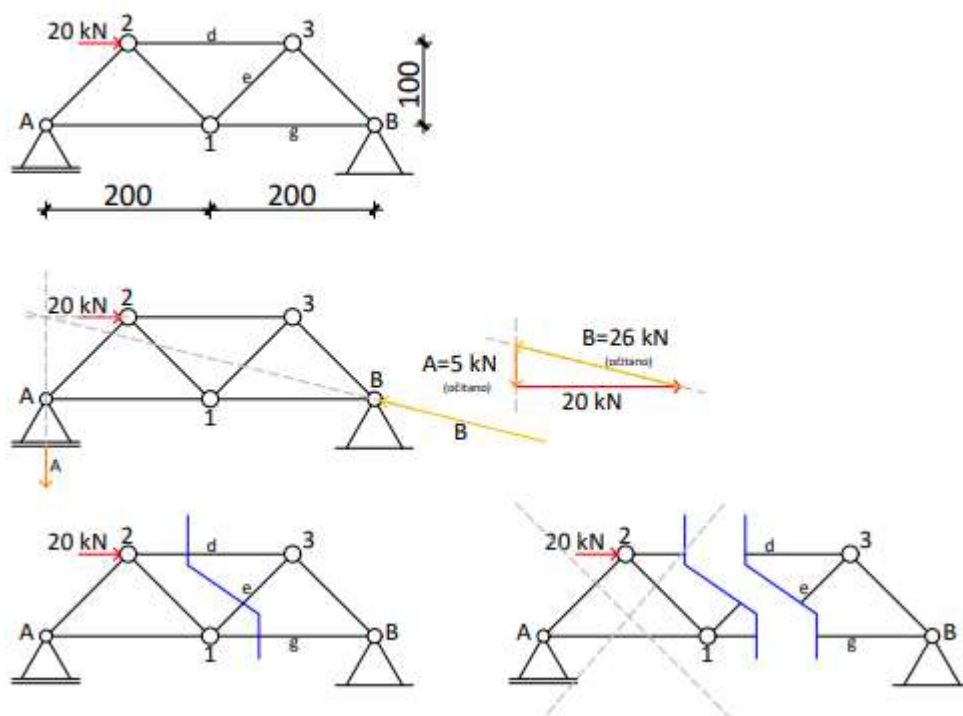
Culmannov postupak jedna je od metoda presjeka za pronalaženje sila. Metode presjeka prihvatljive su za određivanje sila samo u nekim štapovima rešetkastoga nosača.

Culmannov postupak je grafički postupak kod kojeg se uravnotežuju četiri sile u ravnini. Četiri su sile u ravnoteži ako rezultanta dviju sila leži na pravcu određenom rezultantom preostalih dviju sila, te ako su te rezultante jednakoga intenziteta i suprotne orijentacije. Pravac na kojem se nalaze rezultante naziva se Culmannovim pravcem. Culmannov pravac prolazi točkama u kojima se sijeku po dvije sile. Culmannov postupak moguće je primijeniti u slučaju kada je poznata jedna sila (poznat intenzitet i smjer djelovanja) i smjerovi djelovanja preostalih triju sila za koje se traži njihova vrijednost.

Ako je u nekom rešetkastom nosaču potrebno izračunati samo neke sile u štapovima, u tom će se slučaju upotrijebiti Culmannov postupak. U Culmannovom postupku zamišlja se da se presiječe nekoliko štapova (među tim štapovima se nalaze i štapovi u kojima je potrebno pronaći sile) i time se rešetkasti nosač razdvaja u dva dijela. Jednim se dijelom koristi u određivanju sila, dok se drugi dio odbacuje. Presjek mora biti takav da se kao nepoznanice pojavljuju najviše tri sile. Za poznate sile se određuje njihova rezultanta. Nepoznate se sile određuju iz uvjeta ravnoteže četiriju sila.

Kao primjer pronaći će se sile u štapovima  $d$ ,  $e$  i  $g$  u rešetkastom nosaču sa slike 6. Prvo je potrebno odrediti reakcije u nosaču. Reakcije i sila vanjskoga opterećenja tvore trokut sila. Nakon određivanja reakcija gleda se koje se sile u nosaču traže, te kako će se taj nosač presjeći. U zadanom primjeru nosač se siječe kroz štapove  $d$ ,  $e$  i  $g$ . Presjekom se nosač podijelio na dva

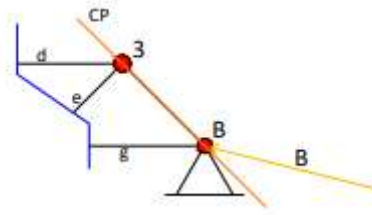
dijela. Sljedeći korak je taj da se mora odabrati jedan dio nosača, a drugi se dio odbacuje. Odabire se onaj dio na kojem je lakše doći do rješenja. U primjeru odabire se desni dio presječenoga nosača, dok se lijevi dio odbacuje. Na lijevom dijelu nosača poznata je reakcija  $A$  i koncentrirana sila u čvoru  $2$ . Te dvije sile potrebno je prvo zbrojiti i dobiti njihovu rezultantu, te s tom rezultantom započeti Culmannov postupak za pronalaženje sila u zadanim štapovima. Na desnom dijelu presječenoga nosača kao vanjska sila pojavljuje se samo reakcija  $B$ , pa ne treba tražiti rezultantu više sila. Zbog toga je odabrani desni dio nosača, jer je potreban jedan korak manje kod postupka pronalaženja sila (slika 18.).



Slika 18.

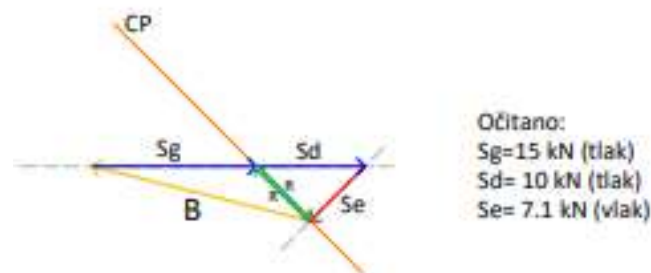
Nakon što je odabran dio na kojem će se provoditi Culmannov postupak, potrebno je pronaći dvije točke kroz koje će prolaziti Culmannov pravac. Poznati su pravci djelovanja četiriju sila. Traže se sjecišta dviju sila; ta su sjecišta dvije točke Culmannova pravca (slika 19.).





Slika 19.

Dobiveni Culmannov pravac izdvaja se izvan nosača. Na njega se postavljaju sile. Prvo se postavlja poznata sila (iznos i smjer djelovanja), te se na poznatu silu (u ovom primjeru silu  $B$ ) postavlja pravac djelovanja sile koja se sječe sa prethodnom nanesenom silom (sila u štapu  $g$ ). Vrijednost sile u štapu  $g$  se očitava od kraja sile  $B$  pa do Culmannova pravca. Zatim se iz uvjeta ravnoteže četiriju sila dobivaju preostale dvije sile u štapovima  $d$  i  $e$ . Na kraj sile  $S_g$  nanese se pravac djelovanja sile  $S_d$ , a na početak sile  $B$  nanese se pravac djelovanja sile  $S_e$ . Zatvaranjem poligona sila mogu se očitati vrijednosti sila  $S_d$  i  $S_e$ . Na Culmannovu pravcu nalaze se dvije rezultante koje su jednakoga intenziteta, ali suprotne orijentacije. Iz toga se zaključuje da su ove četiri sile u ravnoteži (slika 20.).



Slika 20.

#### 4. GRAFIČKO ODREĐIVANJE POMAKA ČVOROVA

Djelovanje opterećenja na neku konstrukciju izaziva deformacije u elementima konstrukcije i pomake u usporedbi s početnim položajem.

U rešetkastim konstrukcijama deformacije se javljaju u štapovima. Štapovi su aksijalno opterećeni i zbog toga će doći do pomaka čvorova konstrukcije.

Proračunom rešetkastih konstrukcija traži se da se odrede pomaci nekih čvorova sistema, ili je potrebno pronaći liniju pomaka cijeloga nosača u nekom određenom pravcu.

Za pronalaženje pomaka čvorova upotrebljavaju se dva postupka:

- a. grafički postupak (Williotov plan pomaka),
- b. analitički postupak određen pomoću relativnih kutova zaokreta štapova u čvoru (Mohrova analogija).

U nastavku će biti opisano pronalaženje pomaka čvorova grafičkom metodom, odnosno pojašnjenje Williotova plana pomaka.

#### 4.1. WILLIOTOV PLAN POMAKA

Djelovanja opterećenja u rešetkastim nosačima izazivaju deformacije štapova. Deformacija štapa izaziva promjenu duljine štapa. Ako štap promjeni svoju duljinu, promijenit će se i položaj čvora na koji je vezan taj štap. Određivanje promjena položaja čvorova, odnosno pomaka čvorova rešetkastoga nosača temelji se na crtanju plana pomaka iz poznatih promjena duljina štapova  $\Delta l$  i pomaka susjednih čvorova.

Na samom početku postupka potrebno je odrediti promjene duljine svih štapova rešetkastoga nosača. Pretpostavlja se da na promjenu duljine utječe samo djelovanje uzdužne sile u štapu, dok se ostala djelovanja zanemaruju. Promjena duljine štapa uzrokovana djelovanjem samo uzdužne sile računa se prema izrazu:

$$\Delta l_i = \frac{S_i l_i}{E_i A_i} \quad (3)$$

gdje su:

$S_i$  – sila u štapu

$l_i$  – početna duljina štapa prije djelovanja opterećenja

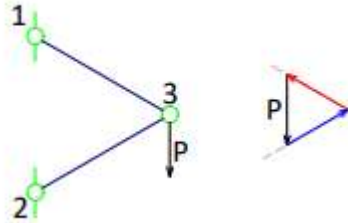
$E_i$  – modul elastičnosti štapa

$A_i$  – površina poprečnog presjeka štapa

Određivanje pomaka provodi se u tri koraka. U prvom koraku pomak čvora nastaje zbog pomaka susjednih čvorova, odnosno štapovi se transliraju i rotiraju oko pomaknutih susjednih čvorova. U drugom koraku potrebno je zarotirati štapove oko susjednih čvorova zbog djelovanja deformacija u štapovima. U trećem koraku napravi se zbroj prvoga i drugoga koraka kako bi se dobio konačan pomak čvora koji se traži.

Pomoću primjera sa slike 21. biti će prikazan postupak određivanja pomaka jednoga čvora. Na slici je prikazan jednostavan sistem, sastavljen od dva štapa. Štapovi se spajaju u čvoru  $\mathcal{B}$ , te u tom čvoru djeluje sila iznosa  $\mathcal{P}$ .

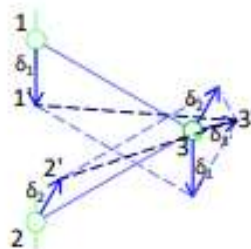
Ravnotežom čvora  $\mathcal{B}$  moguće je dobiti sile u štapovima  $1\mathcal{B}$  i  $2\mathcal{B}$ . Iz trokuta sila vidljivo je da je sila u štapu  $1\mathcal{B}$  vlačna, dok je sila u štapu  $2\mathcal{B}$  tlačna (slika 21.).



Slika 21.

Iz poznatih vrijednosti sila u štapovima te unaprijed zadanih geometrijskih karakteristika štapova može se izračunati produljenje, odnosno skraćenje štapova pomoću izraza 3. Uvrštavanjem vrijednosti u izraz 3 dobiva se produljenje štapa  $1\mathcal{B}$  ( $\Delta_{13}$ ) i duljina za koju će se skratiti štap  $2\mathcal{B}$  ( $\Delta_{23}$ ).

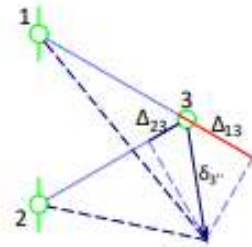
U čvorovima  $1$  i  $2$  poznati su pomaci, a potrebno je pronaći pomak točke  $\mathcal{B}$ . U prvom koraku se traži pomak čvora  $\mathcal{B}$  ( $\delta_3$ ) koji je uzrokovan pomacima čvorova  $1$  i  $2$ . Kako bi se to grafički prikazalo, zamišljeno je da je spoj štapova u čvoru  $\mathcal{B}$  prekinut, te se štapovi  $1\mathcal{B}$  i  $2\mathcal{B}$  transliraju za poznati pomak susjednih čvorova ( $\delta_1, \delta_2$ ). U stvarnosti su štapovi i dalje spojeni čvorom  $\mathcal{B}$  i zbog toga ih je potrebno zarotirati oko pomaknutih čvorova ( $1'$  i  $2'$ ) da bi se dobio položaj čvora  $\mathcal{B}'$  (slika 22.).



Slika 22.

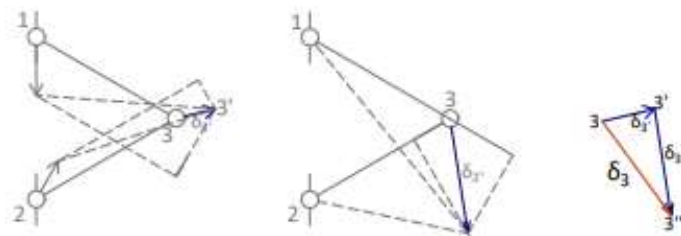
U drugom koraku odredit će se pomak čvora  $\mathcal{B}$  zbog deformacije štapova. Deformacije u štapovima pojavljuju se zbog produljenje ili skraćnja štapa. Na štap  $1\mathcal{B}$  nanosi se produljenje  $\Delta_{13}$ , a na štap  $2\mathcal{B}$  stavlja se duljina skraćnja  $\Delta_{23}$ . Nakon toga potrebno je opet zarotirati

štapove oko čvorova 1 i 2, kako bi se poklopili njihovi krajevi u točki  $3'$ . Zbog malih deformacije i malih kutova rotacije krajevi štapova opisuje male kružne lukove. Kružni lukovi mogu se zamijeniti njihovim tangentama. Iz vrhova nanesenih dužina povlače se okomice na pravce štapova i u sjecištu okomica dobiva se pomaknuti položaj čvora  $3(3')$  (slika 23.).



Slika 23.

Na kraju je potrebno pronaći ukupan pomak čvora  $3$ . Kako su pomaci vektorske veličine, tako je ukupan pomak čvora  $3$  ( $\delta_3$ ) jednak vektorskom zbroju pomaka dobivenih translacijom i rotacijom. Grafički se to može odrediti tako što se zbroje dobiveni vektori, a rezultanta je konačan pomak čvora  $3$  (slika 24.).

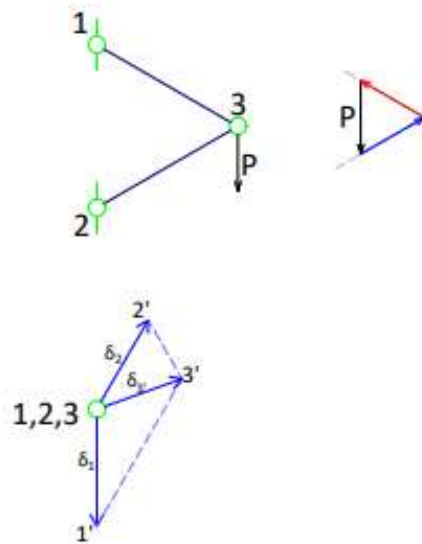


Slika 24.

Ovaj postupak primjenjiv je za nosače s manjim brojem štapova. Ako se traže pomaci u rešetkastom nosaču s većim brojem štapova ovaj opisani postupak je mukotrpan i rezultati su nepouzdana. Zbog toga postoji metoda određivanja pomaka u kojoj se plan pomaka crta neovisno o mjerilu slike nosača. Moguće je odrediti veće mjerilo i time su rezultati točniji.

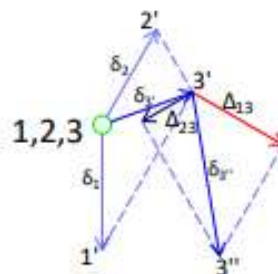
Primjer određivanje na takav način biti će prikazan na sistemu sa slike 21. Prvi korak je taj da se proizvoljno odabere točka koja je zajednička za 1, 2, 3 čvor, početni položaj koji se naziva polom. Drugi korak je da se odabere prikladno mjerilo u kojem će biti crtani vektori pomaka. Iz početnoga položaja prvo se nanose vektori pomaka poznatih susjednih čvorova ( $\delta_1, \delta_2$ ). Kako

bi se dobio pomak  $\delta_3$ , potrebno je povući pravce na krajeve poznatih pomaka, pravce okomite na štapove  $13$  i  $23$ . Tamo gdje je došlo do sjecišta pravaca nalazi se točka  $3'$  i time je dobiven pomak  $\delta_3$  koji je nastao zbog pomaka susjednih čvorova (slika 25.).



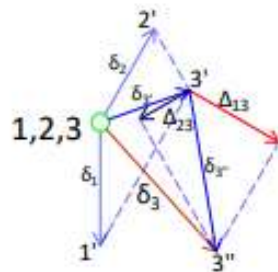
Slika 25.

Zatim se iz točke  $3'$  nanose dobivene duljine produljenja, odnosno skraćanja štapova. Duljine se nanose u smjeru zadanih štapova ( $\Delta_{13}$  i  $\Delta_{23}$ ). Nakon nanosenih duljina produljenja, skraćanja postavljaju se na krajeve pravci koji su okomiti na zadane štapove. Sjecište pravaca je točka  $3''$ , odnosno pomak  $\delta_3''$  s početkom u  $3'$  i završetkom u  $3''$ , koji je dobiven zbog utjecaja deformacija u štapovima (slika 26.).



Slika 26.

I na kraju je spojnica točaka  $\mathcal{B}$  i  $\mathcal{B}'$  ukupan pomak čvora  $\mathcal{B}$ , nastao kao zbroj pomaka zbog djelovanja pomaka susjednih čvorova i pomaka zbog djelovanja produljenja/skraćenja štapova (slika 27.).

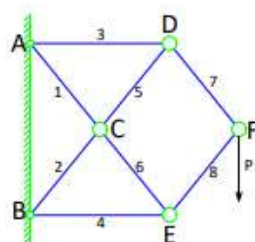


Slika 27.

#### 4.2. WILLIOTOV PLAN POMAKA ZA KONZOLNE REŠETKASTE NOSAČE

Postupak crtanja plana pomaka može se primijeniti na konzolne rešetkaste nosače. U konzolnim nosačima lako se može krenuti s rješavanjem. Ležajne se točke nepomične, pa se time poklapaju s početnom točkom, odnosno polom u planu pomaka.

Na slici 28.a. prikazan je jedan konzolni rešetkasti nosač na kojem će biti objašnjeno dobivanje pomaka čvorova. Prvo se mora odrediti mjerilo plana pomaka. U sljedećem koraku potrebno je izračunati sile u svim štapovima, te odrediti produljenja odnosno skraćenja štapova. Vrijednost sila u štapovima mogu se odrediti grafičkom metodom čvorova. Nakon poznatih vrijednosti sila u štapovima računaju se produljenja/skraćenja štapova po izrazu 3. Na slici 28.b. prikazane su veličine produljenja (+) i skraćenja (-) štapova.



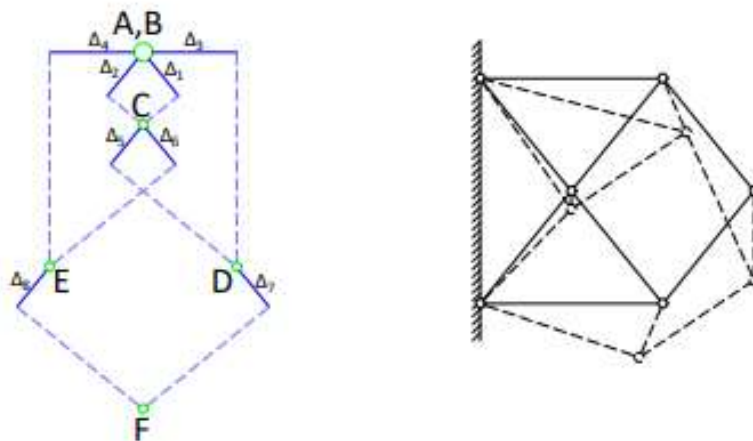
a.

| ŠTAP | $\Delta_i$ (cm) |
|------|-----------------|
| 1    | +0.05           |
| 2    | -0.05           |
| 3    | +0.10           |
| 4    | -0.10           |
| 5    | -0.05           |
| 6    | +0.05           |
| 7    | +0.05           |
| 8    | -0.05           |

b.

Slika 28.

Crtanje plana pomaka počinje s čvorom  $C$ . Čvor  $C$  je štapovima  $1$  i  $2$  povezan s nepomičnim čvorovima  $A$  i  $B$ . Ako su čvorovi  $A$  i  $B$  nepomični, njihov je pomak jednak nuli i time se poklapaju sa početnom točkom, odnosno polom. Na pomak čvora  $C$  utječu samo promjene duljine štapova  $1$  i  $2$ . U planu pomaka od početne točke nanose se promjene duljine štapova  $1$  i  $2$  ( $\Delta_1$  i  $\Delta_2$ ) koje leže na pravcima paralelnim štapovima  $1$  i  $2$ . Na krajeve vektora produljena postavljaju se pravci koji su okomiti na štapove  $1$  i  $2$ . Tamo gdje se sijeku ta dva pravca nalazi se točka  $C$ . Vektor s početnom točkom pola i završnom točkom  $C$  konačni je pomak čvora  $C$ . Nakon poznatoga pomaka čvora  $C$  može se odrediti pomak čvorova  $D$  i  $E$ . Čvor  $D$  je štapovima  $3$  i  $5$  vezan za čvorove  $A$  i  $C$ . Iz točke  $A$  nanosi se produljenje štapa  $3$  ( $\Delta_3$ ), a iz točke  $C$  se nanosi skraćanje štapa  $5$  ( $\Delta_5$ ). Zatim se postavljaju pravci koji su okomiti na zadane štapove, sjecište tih pravaca pokazuje mjesto pomaka čvora  $D$ . Sljedeći čvor kojem se traži pomak je čvor  $E$ . Pomak čvora  $E$  i na kraju čvora  $F$  traži se na jednak način kao i kod čvorova koji su prethodno opisani. Na slici 29. prikazan je cijeli Williotov plan pomaka za zadani primjer.



Slika 29.

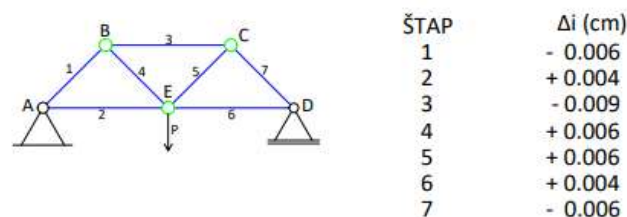
Iz Williotova plana pomaka može se lako očitati vrijednost vektora pomaka za svaki čvor zadane rešetke. Pomak nekog čvora iskazuje se vektorom pomaka sa početnom točkom u polu i završnom točkom za koju se traži pomak. Naravno, očitana vrijednost pomaka nije konačna vrijednost jer je plan pomaka crtan u nekom mjerilu, pa je točna vrijednost ona vrijednost koja se dobiva proračunom u zadanom mjerilu.



#### 4.3. WILLIOTOV PLAN POMAKA ZA GREDNE REŠETKASTE NOSAČE

Williotov plan pomaka za gredne rešetkaste nosače nije moguće crtati odmah, nego je potrebno postaviti neku pretpostavku da bi se moglo početi s crtanjem plana pomaka. Gredni rešetkasti nosač oslonjen je na dva ležajeva. Jedan je ležaj nepomičan; zna se da on nema pomaka te da se ta točka poklapa s polom u planu pomaka. Drugi je ležaj pomičan ležaj; za njega se zna da ima moguć pomak u smjeru dopuštenoga pomaka prikazanoga na ležaju. Za određivanje Williotova plana pomaka potrebna su dva poznata pomaka čvora da bi se moglo krenuti u rješavanje, što u grednom nosaču nije slučaj, pa treba prije početka rješavanja uvesti neku dodatnu pretpostavku.

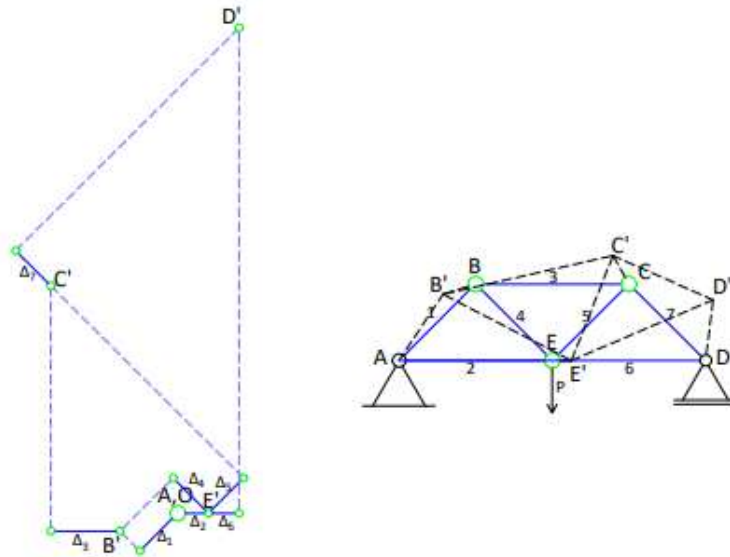
U nastavku će biti riješen i objašnjen zadatak određivanja pomaka čvorova (slika 30.). Tijek rješavanja zadatka započinje pronalaženjem reakcija sistema. Nakon što se odrede reakcije sistema potrebno je pronaći sile u svim štapovima grednoga rešetkastoga nosača. U sljedećem koraku potrebno je izračunati promjene duljine štapova po poznatom izrazu 3. Nakon određenih promjena duljina štapova potrebno je odrediti mjerilo u kojem će se crtati Williotov plan pomaka.



Slika 30.

Crtanje započinje čvorom  $A$ , te se uvodi pretpostavka za štap  $AE$ . Štap  $AE$  zadržava svoj položaj i nakon deformacije što znači da čvor  $E$  ima samo horizontalan pomak koji je jednak produljenju štapa  $AE$  ( $\Delta_2$ ). Kada su poznati pomaci čvorova  $A$  ( $A'$ ) i  $E$  ( $E'$ ) moguće je odrediti pomak čvora  $B$ . Iz pola, početne točke na planu pomaka nanose se promjena duljine štapa 1 ( $\Delta_1$ ), te iz točke pomaka čvora  $E$  ( $E'$ ) nanosi se produljene štapa 4 ( $\Delta_4$ ). Okomicama na produljenja dobiva se položaj pomaka čvora  $B$  ( $B'$ ). Sljedeći čvor u kojem se traži pomak je čvor  $C$ . Čvor  $C$  spojen je štapovima 3 i 5 za čvorove u kojima su poznati pomaci.

Nanošenjem promjene duljine štapova ( $\Delta_3$  i  $\Delta_5$ ) i postavljenjem okomica na njih dobiva se položaj pomaka čvora  $C$  ( $C'$ ). Na isti način dolazi se i do pomaka čvora  $D$  ( $D'$ ) (slika 31.).



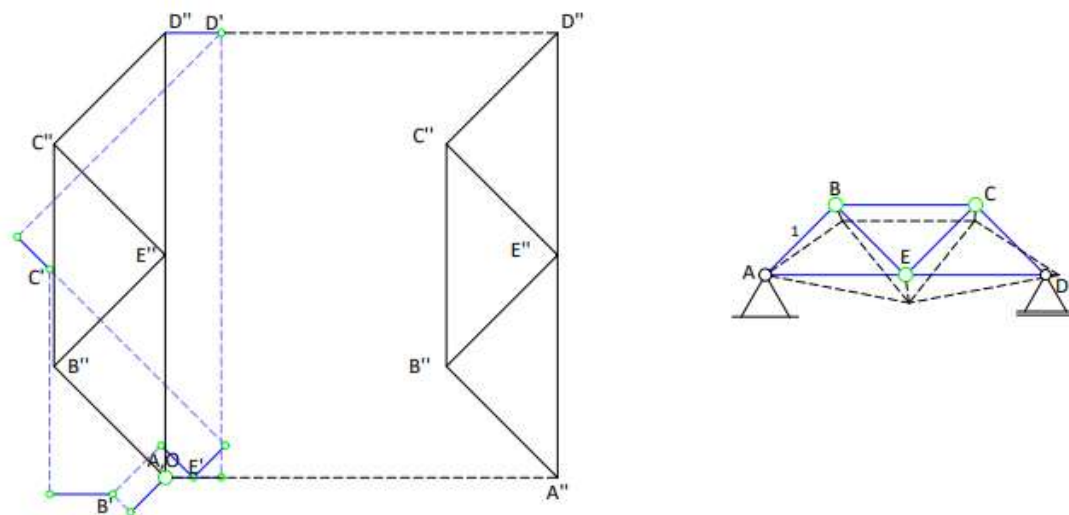
Slika 31.

Sa slike 31. vidi se da su pronađene sve točke pomaka u planu pomaka ( $A', B', C', D'$ ). Vektori povučeni iz pola  $O$  do traženih točaka pomaci su odgovarajućih čvorova rešetke (pravac i iznos pomaka). Nanoseći ih na nosač u točnom mjerilu, može se iscrtati deformirani oblik nosača koji je nastao zbog opterećenja.

Deformirani oblik rešetke ne zadovoljava uvjet ležaja  $D$ . U ležaju  $D$  moguć je samo pomak po horizontalnom pravcu, a na slici 31. vidi se da postoji i pomak u vertikalnom smjeru. To se dogodilo zbog uvođenja dodatne pretpostavke za štap  $AE$  koja je očito bila pogrešna. Zbog pogrešne, odnosno netočne pretpostavke potrebno je napraviti korekciju plana pomaka kako bi se zadovoljio uvjet ležaja  $D$ .

Korekcija se vrši tako da je deformiranu rešetku potrebno zarotirati oko nepomičnog čvora  $A$ . Rešetka se rotira sve dok točka  $D'$  ne dođe na horizontalan položaj u kojem više ne postoji vertikalni pomak. Rotiranje rešetke prouzročilo je neke dodatne pomake i ostalih čvorova rešetke. Zaključuje se da crtanjem Williotova plana pomaka nije završio zadatak, te da to nisu konačni pomaci čvorova. Konačni pomaci čvorova dobivaju se kao vektorski zbrojevi pomaka nastalih rotiranjem rešetke i pomaka iz Williotova plana pomaka.

Stvarni pomaci čvorova jako su mali u odnosu na duljine štapova, odnosno na veličinu cijeloga nosača, pa je iz tog razloga deformirani oblik rešetke jako sličan nedeformiranom obliku nosača. Iz te činjenice proizlazi da se dodatan pomak čvora  $D$  rotirajući oko točke  $A$ , rotirao po pravcu koji je okomit na pravac  $AD$ . Isto tako se sve točke čvorova rotiraju po pravcima koji su okomiti na pravac koji prolazi točkom  $A$  i točkom koja se rotira. Rotacijom oko iste točke sve veličine pomaka su proporcionalne radijusima rotacije. Iz toga slijedi da je traženi pomak točke  $D'$  jednak vertikalnoj komponenti vektora pomaka  $\overrightarrow{DD'}$  koji je na Williotovom planu pomaka označen kao vektor  $\overrightarrow{OD'}$ . Na identičan način određuje se pomaci svih ostalih točaka kojima je uzeto da je vektor  $\overrightarrow{OD''}$  jednak vertikalnoj komponenti vektora  $\overrightarrow{OD'}$  na Williotovom planu pomaka. Preostale pomake čvorova nastale zbog zaokretanja rešetke rješava se tako da se ucrtava figura  $OB''C''E''D''$  koja je geometrijski slična figuri  $ABCED$ , ali zaokrenuta za  $90^\circ$  u odnosu na pravi položaj rešetke. Vektori  $\overrightarrow{B''O}$ ,  $\overrightarrow{C''O}$ ,  $\overrightarrow{E''O}$  i  $\overrightarrow{D''O}$  označuju pomake čvorova  $B, C, E, D$  nastale rotacijom deformirane rešetke. Ti vektori proporcionalni su i okomiti na radijuse rotacije što proizlazi iz geometrijske sličnosti i zaokrenutosti figura za  $90^\circ$ .



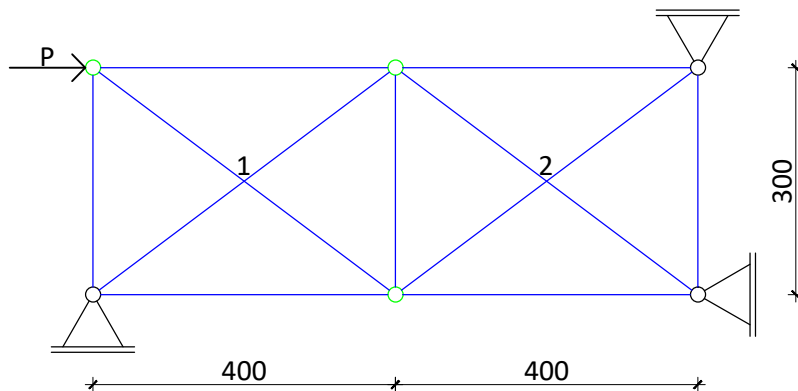
Slika 32.

Na slici 32. mogu se očitati vektori konačnih pomaka čvorova. Konačni pomaci čvorova su vektori  $\overrightarrow{B''B}$ ,  $\overrightarrow{C''C}$ ,  $\overrightarrow{E''E}$  i  $\overrightarrow{D''D}$ . Prenošenjem vektora pomaka u određenom mjerilu na

nedeformirani nosač, dobiva se konačna deformirana figura grednoga rešetkastoga nosača. Na deformiranome nosaču vidi se da su oba ležajna uvjeta ispunjena. Čvor  $A$  nije se pomaknuo, a čvor  $D$  se pomaknuo samo po horizontalom pravcu.

## 5. PRIMJER

U primjeru na slici je potrebno pronaći sile u svim štapovima rešetkastoga sistema, te pronaći pomake čvorova sistema. Rešetkasti sistem je statički neodređen te će se sile u štapovima rešetke dobiti pomoću metode sila (jednadžbe kompatibilnosti), a međukoraci pronalaženja sila i na kraju konačno rješenje će biti napravljeno grafičkom metodom Maxwell-Cremoninim planom sila.



### 5.1. SILE U ŠTAPOVIMA REŠETKASTOGA NOSAČA

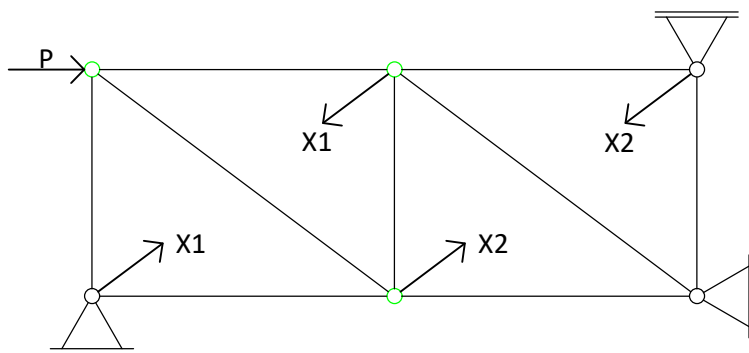
Na rešetkasti nosač djeluje koncentrirana sila u čvoru iznosa  $P = 125 \text{ kN}$ . Štapovi u točkama 1 i 2 se međusobno mimoilaze. Svi štapovi imaju jednake dimenzije poprečnoga presjeka i jednake module elastičnosti ( $EA = 500\,000 \text{ kN}$ ).

U prvome koraku potrebno je odrediti stupanj statičke određenosti. Na prvi pogled nosač izgleda statički određen prema rasporedu i broju vanjskih veza, ali rešetkasti nosači trebaju zadovoljiti izraz za minimalan broj zglobnih štapova (izraz 2) koji glasi; broj štapova je jednak dvostrukom broju čvorova. Iz toga slijedi da je minimalan broj stupnjeva slobode za ravninski rešetkasti sistem:

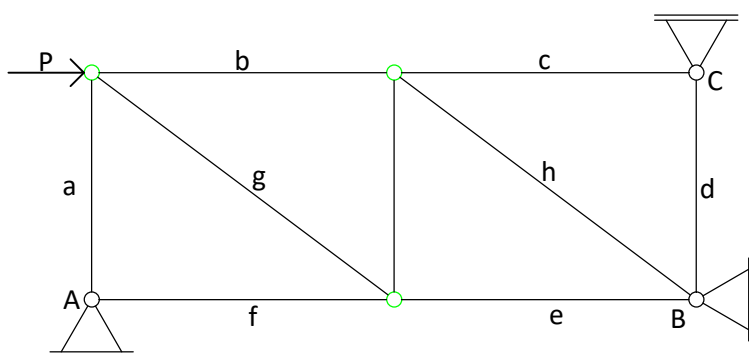
$$S_{min} = 2n - b$$

Ako se pomični ležajevi zamijene istovrijednim spojevima s podlogom u obliku zglobnog štapa, broj štapova jednak je 14, a broj čvorova 6, te se iz toga dobije da je  $S_{min} = -2$ , što znači da je sistem dva puta statički neodređen. U sljedećem koraku je potrebno raskinuti dva štapa koji omogućavaju uzdužni pomak jednoga od razdvojenih dijelova u odnosu na drugi, ali da ne dopuštaju međusobni poprečni pomak i međusobni kut zaokreta. Štapovi ostaju na sistemu, ali oni ne mogu prenijeti uzdužnu silu. Nakon toga dobije se osnovni sistem koji je statički određen i geometrijski nepromjenjiv.

Osnovni sistem koji je odabran za ovaj primjer prikazan je na sljedećoj stranici.

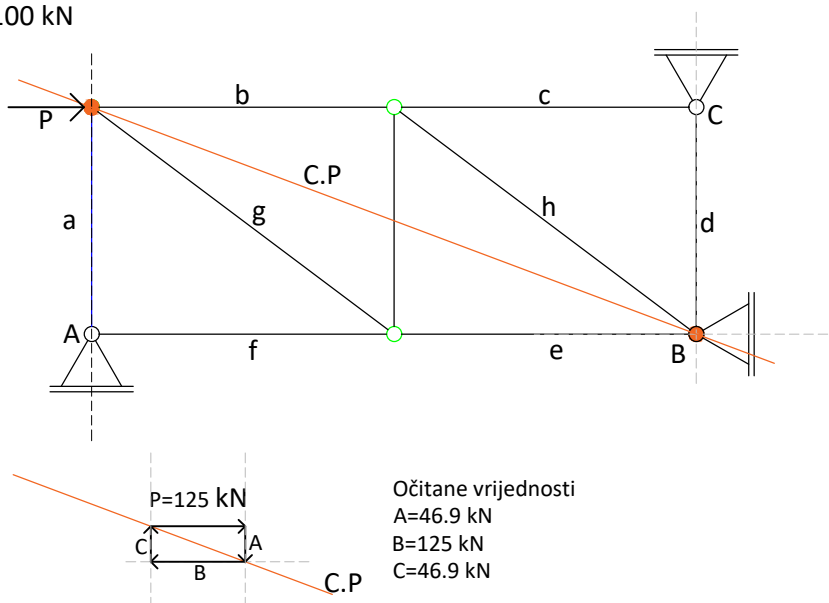


U sljedećem koraku potrebno je izračunati vrijednosti sila u štapovima osnovnoga sistema za vanjsko opterećenje. Prvo se pomoću Culmannova postupka dobiju reakcije ležajeva te se nakon toga kreće u ravnotežu čvorova kako bi se dobile vrijednosti sila u štapovima sistema.



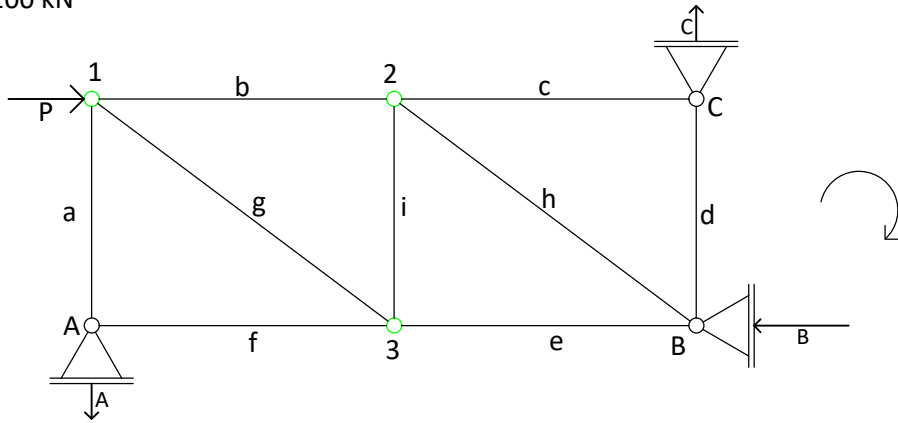
Reakcije sistema (Culmannov postupak)

$M_{sila} \quad 1 \text{ cm} = 100 \text{ kN}$



Sile u štapovima sistema (Maxwell-Cremonin plan sila)

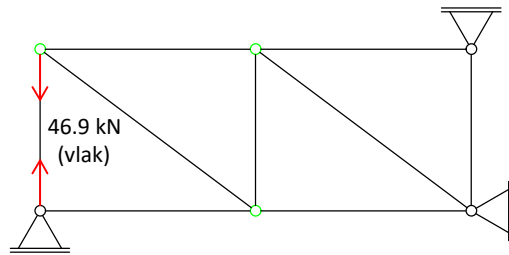
$M_{sila} \ 1 \text{ cm} = 100 \text{ kN}$



Čvor A

$S_a|A$

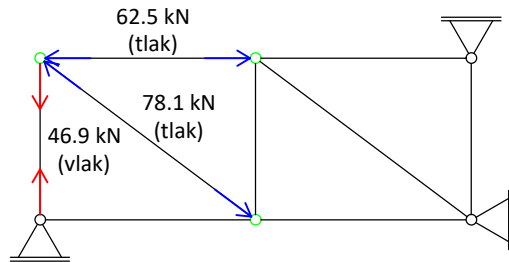
Očitane vrijednosti  
 $S_a=46.9 \text{ kN}$   
 $S_f=0 \text{ kN}$



Čvor 1

$A S_a \begin{matrix} S_g \\ P \\ S_b \end{matrix}$

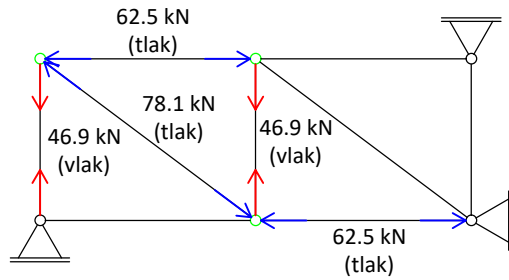
Očitane vrijednosti  
 $S_g=78.1 \text{ kN}$   
 $S_b=62.5 \text{ kN}$



Čvor 3

$A S_a \begin{matrix} S_e \\ S_g \\ S_i \\ P \\ S_b \end{matrix}$

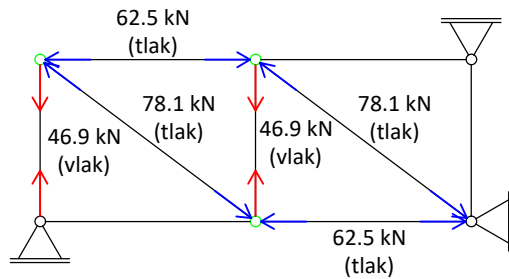
Očitane vrijednosti  
 $S_i=46.9 \text{ kN}$   
 $S_e=62.5 \text{ kN}$



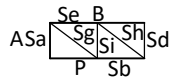
Čvor 2

$A S_a \begin{matrix} S_e \\ S_g \\ S_i \\ S_h \\ P \\ S_b \end{matrix}$

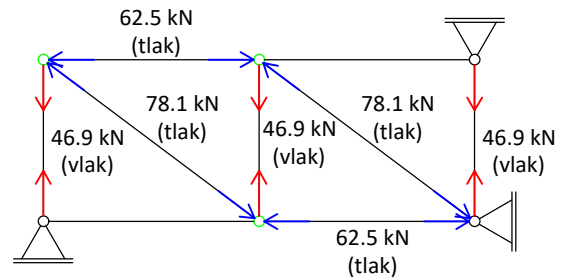
Očitane vrijednosti  
 $S_c=0 \text{ kN}$   
 $S_h=78.1 \text{ kN}$



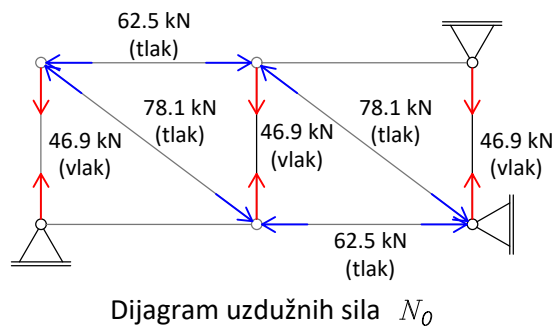
### Čvor B



Očitane vrijednosti  
 $S_d = 46.9 \text{ kN}$

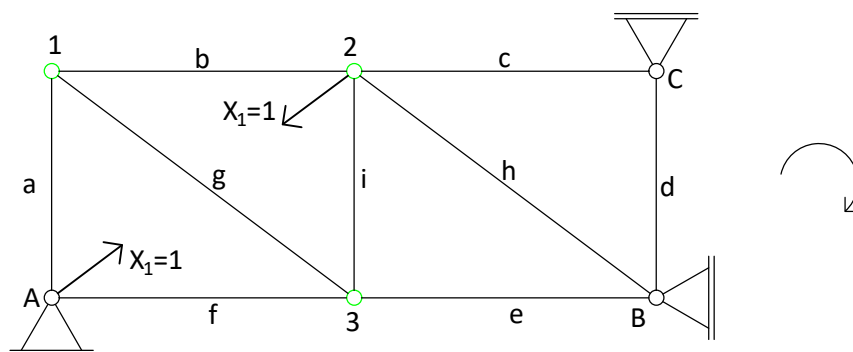


Uravnoteženjem čvora  $B$  dobile su se vrijednosti sila u svim štapovima, a time i dijagram uzdužnih sila ( $N_0$ ) za osnovni sistem opterećen vanjskim opterećenjem.



Nadalje se traže vrijednosti sila u štapovima na osnovnom sistemu od opterećenja jediničnim silama na mjestima raskinutih štapova. Kako se pojavljuje par jediničnih sila suprotne orijentacije, jedinične sile ne mijenjaju ravnotežu sistema, pa nema ni reakcija, odnosno vrijednosti reakcija jednake su nuli. Prvo se traže vrijednosti sila u štapovima sistema samo za opterećenje  $X_1=1$ , te se dobije dijagram uzdužnih sila  $n_1$ . Nakon što se dobije dijagram  $n_1$  traži se dijagram  $n_2$  na sistemu koji je opterećen samo  $X_2=1$ .

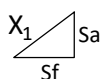




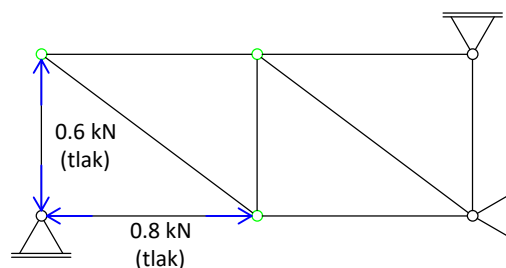
Sile u štapovima sistema za  $X_1=1$  (Maxwell-Cremonin plan sila)

$M_{sila}$  10 cm = 1 kN

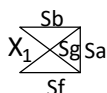
Čvor 2



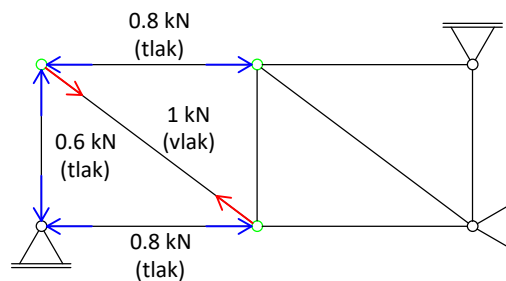
Očitane vrijednosti  
 $S_f=0.8$  kN  
 $S_a=0.6$  kN



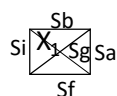
Čvor 1



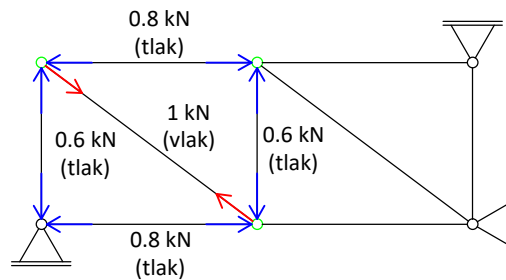
Očitane vrijednosti  
 $S_b=0.8$  kN  
 $S_g=1$  kN



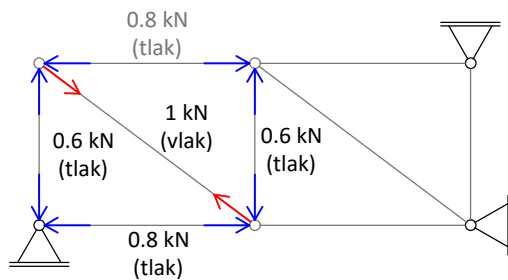
Čvor 3



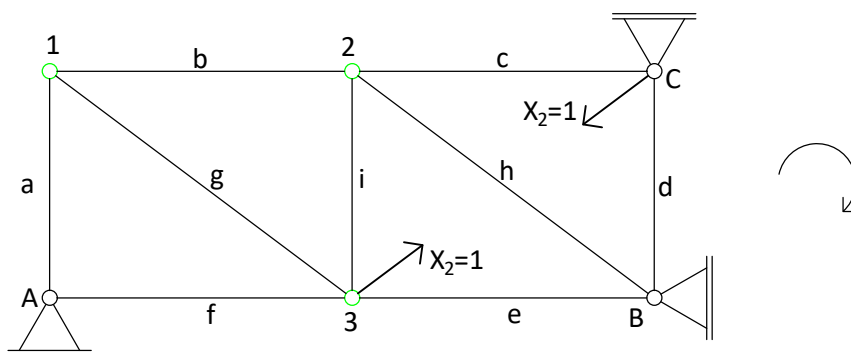
Očitane vrijednosti  
 $S_i=0.6$  kN  
 $S_e=0$  kN



Ako je sila u štapu  $e$  jednaka nuli onda su i sile u štapovima  $d$  i  $h$  jednake nuli, a to povlači da je i sila u štapu  $c$  jednaka nuli. Ravnotežom čvora  $B$  dobile su se sve vrijednosti sile u štapovima sistema.



Dijagram uzdužnih sila  $n_1$



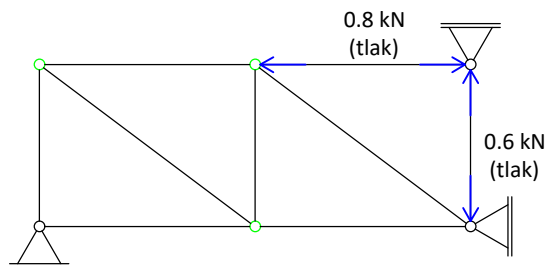
Sile u štapovima sistema za  $X_2=1$  (Maxwell-Cremonin plan sila)

$M_{sila} \ 10 \text{ cm} = 1 \text{ kN}$

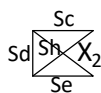
Čvor C



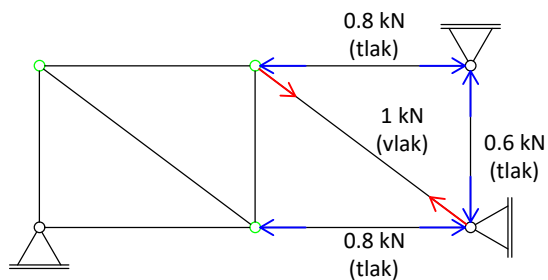
Očitane vrijednosti  
 $S_c=0.8 \text{ kN}$   
 $S_d=0.6 \text{ kN}$



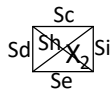
Čvor B



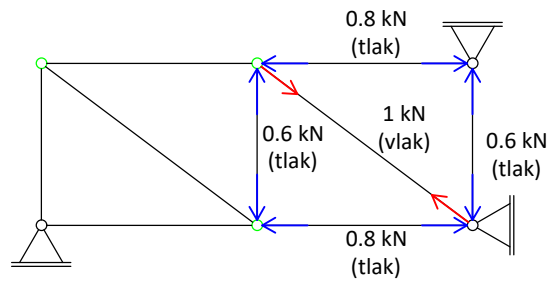
Očitane vrijednosti  
 $S_e=0.8 \text{ kN}$   
 $S_h=1 \text{ kN}$



Čvor 2

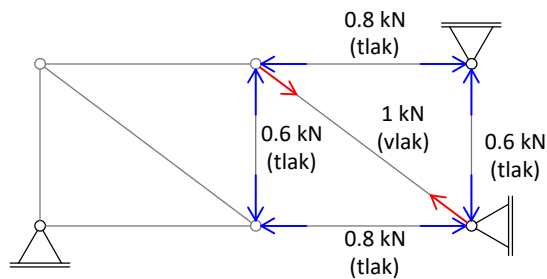


Očitane vrijednosti  
 $S_e = 0.6 \text{ kN}$   
 $S_b = 0 \text{ kN}$



Sila u štapu  $b$  jednaka je nuli te kako bi čvor 1 bio u ravnoteži, sile u štapovima  $a$  i  $g$  isto trebaju biti nula. Prema tome je i sila u štapu  $f$  jednaka nuli.

Ravnotežom čvora 2 dobile su se sve vrijednosti sila u štapovima, a time i dijagram uzdužnih sila ( $n_2$ ) od jediničnog opterećenja  $X_2$ .



Dijagram uzdužnih sila  $n_2$

U sljedećem je koraku potrebno pronaći stvarne vrijednosti sila u raskinutim štapovima ( $X_1$  i  $X_2$ ). Potrebne su dvije jednačbe kompatibilnosti koje zajedno čine sustav jednačbi iz kojeg se mogu odrediti nepoznate sile. Jednačbe kompatibilnosti su:

$$\delta_{1,1}X_1 + \delta_{1,2}X_2 + \delta_{1,0} = 0$$

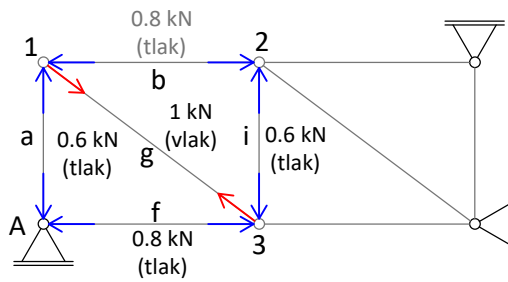
$$\delta_{2,1}X_1 + \delta_{2,2}X_2 + \delta_{2,0} = 0$$

U jednačbama se nalaze koeficijenti popustljivosti ( $\delta_{1,1}$ ,  $\delta_{1,2}$ ,  $\delta_{2,1}$ ,  $\delta_{2,2}$ ) i slobodni članovi ( $\delta_{1,0}$ ,  $\delta_{2,0}$ ) koji se obično izračunavaju prema izrazima

$$\delta_{i,j} = \frac{1}{AE} \sum_{k=1}^b n_{j,k} n_{i,k} l_k \quad i \quad \delta_{i,0} = \frac{1}{AE} \sum_{k=1}^b N_{0,k} n_{i,k} l_k$$

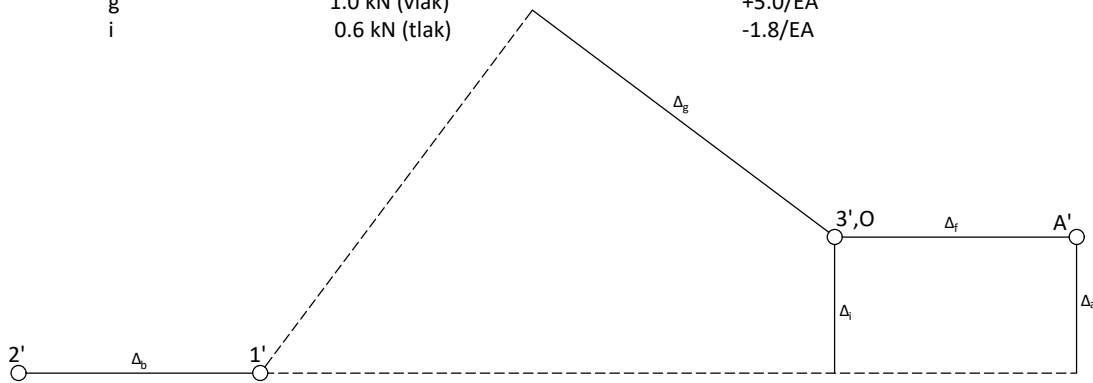
ali ovdje će biti određeni pomoću Williotovih planova pomaka.

## Koeficijenti popustljivosti dobiveni iz Williotova plana pomaka



Dijagram uzdužnih sila  $n_f$

| ŠTAP | VRIJEDNOSTI SILA U ŠTAPOVIMA (kN) | PROMJENE DULJINE ŠTAPA (m) |
|------|-----------------------------------|----------------------------|
| a    | 0.6 kN (tlak)                     | -1.8/EA                    |
| f    | 0.8 kN (tlak)                     | -3.2/EA                    |
| b    | 0.8 kN (tlak)                     | -3.2/EA                    |
| g    | 1.0 kN (vlak)                     | +5.0/EA                    |
| i    | 0.6 kN (tlak)                     | -1.8/EA                    |



$$\delta_{1,1}(W) = \frac{12.3}{AE}$$

$$\delta_{2,2}(W) = \delta_{1,1}(W)_{(\text{centralnosimetričan sistem})} = \frac{12.3}{AE}$$

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1} = \delta_{2,1}(W) = \frac{1.1}{AE}$$

Williotovi planovi crtani su za rešetkasti sistem u kojem nema raskinutih štapova. No, kao što je rečeno, ti su štapovi ostali u sistemu, a koeficijenti popustljivosti izražavaju relativne pomake u točkama prekida. Zbog toga koeficijentima  $\delta_{1,1}(W)$  i  $\delta_{2,2}(W)$  treba dodati promjene duljina raskinutih štapova zbog jediničnih sila:

$$\delta_{1,1}(1) = \frac{1^2 \cdot 5}{AE} = \frac{5}{AE}$$

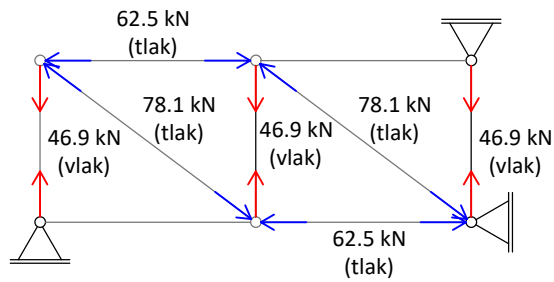
$$\delta_{2,2}(1) = \frac{1^2 \cdot 5}{AE} = \frac{5}{AE}$$

pa su

$$\delta_{1,1} = \delta_{1,1}(W) + \delta_{1,1}(1) = \frac{17.3}{AE}$$

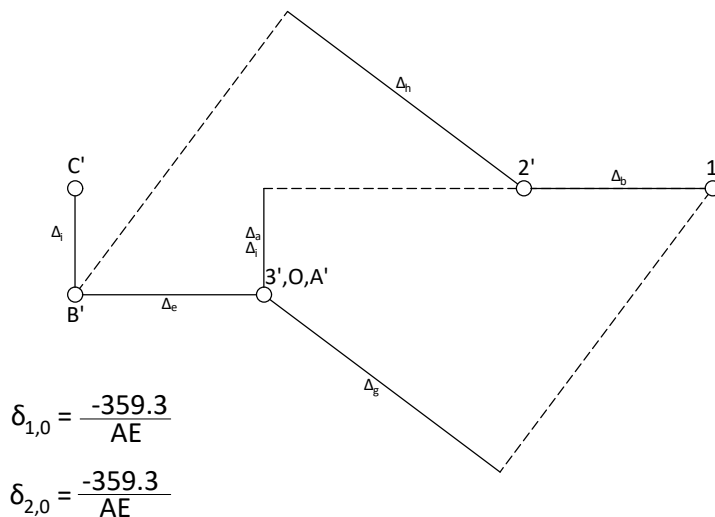
$$\delta_{2,2} = \delta_{2,2}(W) + \delta_{2,2}(1) = \frac{17.3}{AE}$$

## Slobodni članovi



Dijagram uzdužnih sila  $N_0$

| ŠTAP | VRIJEDNOSTI SILA U ŠTAPOVIMA (kN) | PROMJENE DULJINE ŠTAPA (m) |
|------|-----------------------------------|----------------------------|
| a    | 46.9 kN (vlak)                    | +140.7/EA                  |
| f    | 0.0 kN                            | 0.00                       |
| b    | 62.5 kN (tlak)                    | -250.0/EA                  |
| g    | 78.1 kN (tlak)                    | -390.5/EA                  |
| e    | 62.5 kN (tlak)                    | -250.0/EA                  |
| i    | 46.9 kN (vlak)                    | +140.7/EA                  |
| c    | 0.0 kN                            | 0.00                       |
| d    | 46.9 kN (vlak)                    | +140.7/EA                  |
| h    | 78.1 kN (tlak)                    | -390.5/EA                  |



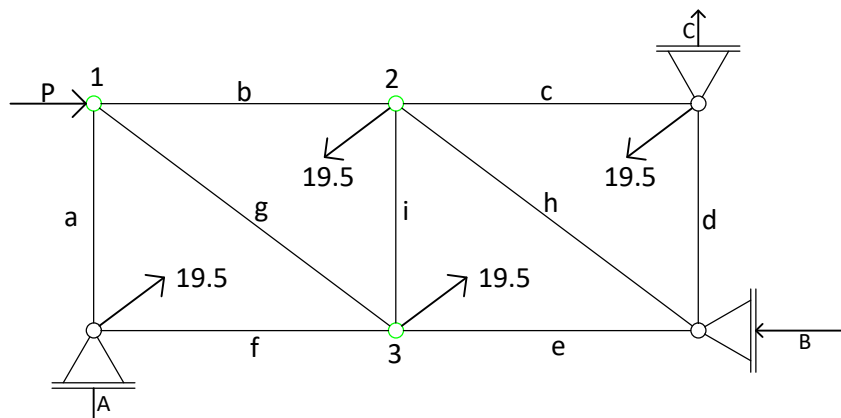
Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u jednadžbe kompatibilnosti i rješavanjem sustava jednadžbi dobivaju se nepoznate veličine  $X_1$  i  $X_2$ .

$$X_1 = 19.5$$

$$X_2 = 19.5$$

Dobivene vrijednosti su konačne vrijednosti sila u štapovima zadanog sistema na mjestu raskinutih veza. Posljedni korak je taj da se odrede sile u svim ostalim štapovima zadanog sistema.

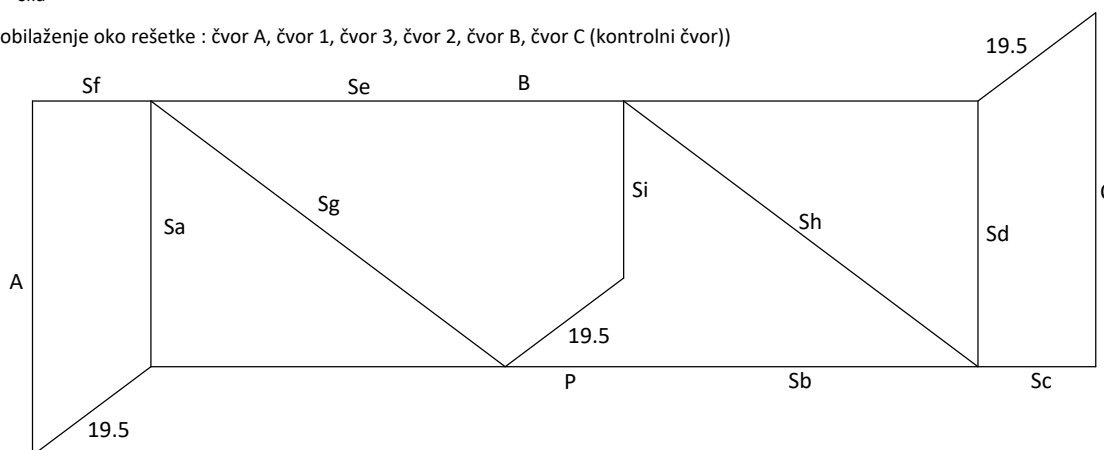
Kako je zadani sistem u odnosu na podlogu statički određen i kako reakcije ovise samo o vanjskim opterećenjima, reakcije zadanoga sistema i reakcije osnovnoga sistema opterećenoga samo vanjskim opterećenjima su jednake vrijednosti.



Sile u svim štapovima sistema (osim raskinutih) odredit će se pomoću M-C plana sila na osnovnom sistemu opterećenom silom  $P$  te silama  $X_1$  i  $X_2$  s vrijednostima 19.5 kN. Taj je sistem u istom statičkom stanju kao zadani neodređeni sistem

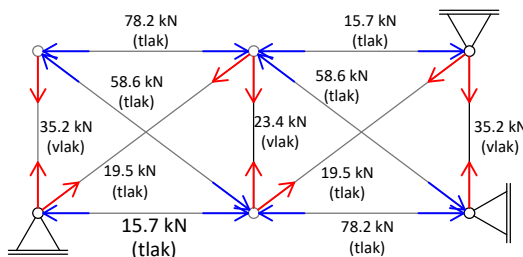
$$M_{sila} \ 5 \text{ cm} = 10 \text{ kN}$$

(obilježnje oko rešetke : čvor A, čvor 1, čvor 3, čvor 2, čvor B, čvor C (kontrolni čvor))



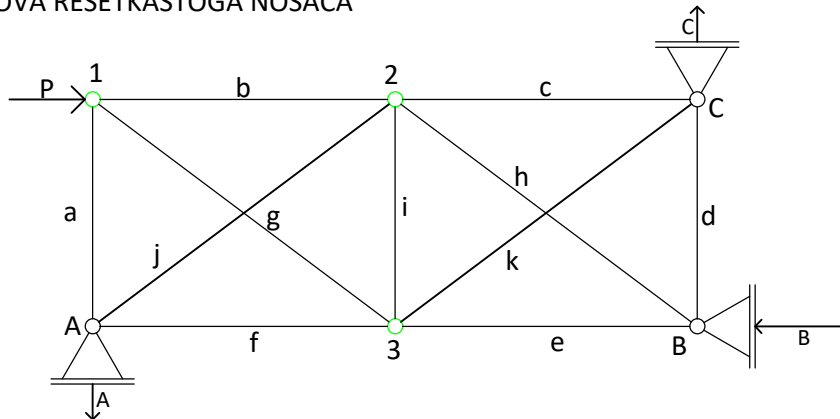
Očitane vrijednosti sila u štapovima

- Sa = 35.2 kN (vlak)
- Sf = 15.7 kN (tlak)
- Sb = 78.2 kN (tlak)
- Sg = 58.6 kN (tlak)
- Se = 78.2 kN (tlak)
- Si = 23.4 kN (vlak)
- Sc = 15.7 kN (tlak)
- Sd = 35.2 kN (vlak)
- Sh = 58.6 kN (tlak)



Konačni dijagram uzdužnih sila  $N$

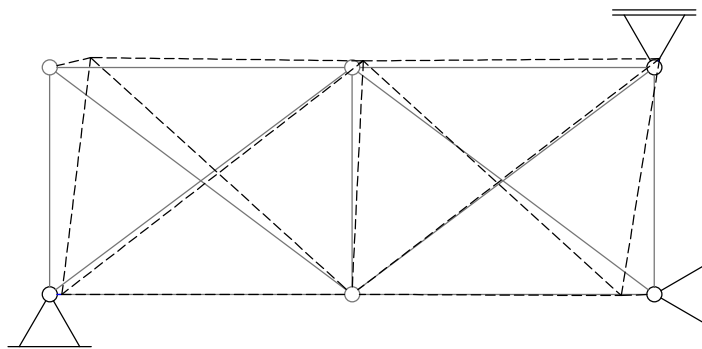
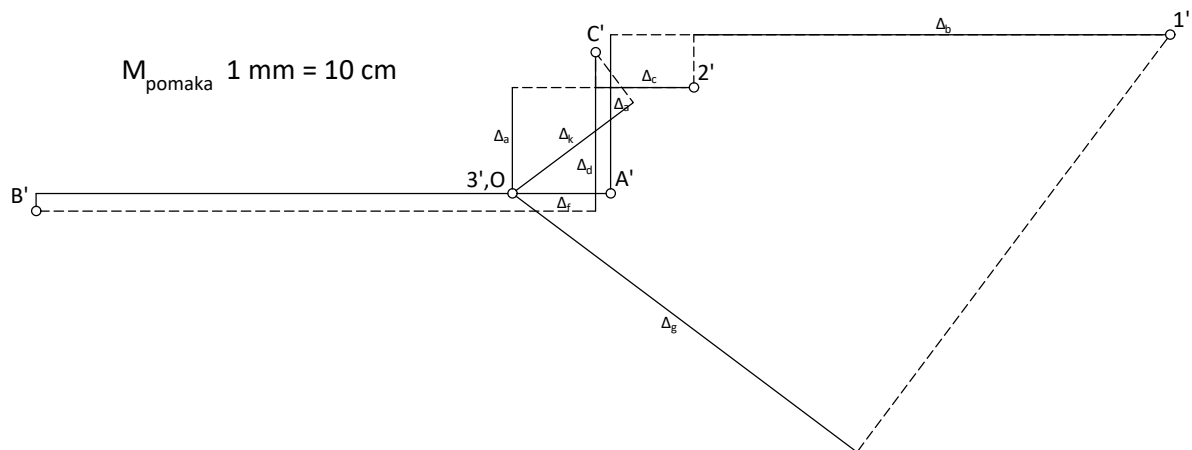
## 5.2. POMACI ČVOROVA REŠETKASTOGA NOSAČA



| ŠTAP | VRIJEDNOSTI SILA U ŠTAPOVIMA (kN) | PROMJENE DULJINE ŠTAPA (mm) |
|------|-----------------------------------|-----------------------------|
| a    | 35.2 kN (vlak)                    | +0.21                       |
| f    | 15.7 kN (tlak)                    | -0.13                       |
| b    | 78.2 kN (tlak)                    | -0.63                       |
| g    | 58.6 kN (tlak)                    | -0.56                       |
| e    | 78.2 kN (tlak)                    | -0.63                       |
| i    | 23.4 kN (vlak)                    | +0.14                       |
| c    | 15.7 kN (tlak)                    | -0.13                       |
| d    | 35.2 kN (vlak)                    | +0.21                       |
| h    | 58.6 kN (tlak)                    | -0.56                       |
| j    | 19.5 kN (vlak)                    | +0.19                       |
| k    | 16.5 kN (vlak)                    | +0.19                       |

### Pretpostavke

- čvor 3 je nepomičan čvor,
- štap f zadržava horizontalan položaj (pomak čvora A jednak je promjeni duljine štapa f).



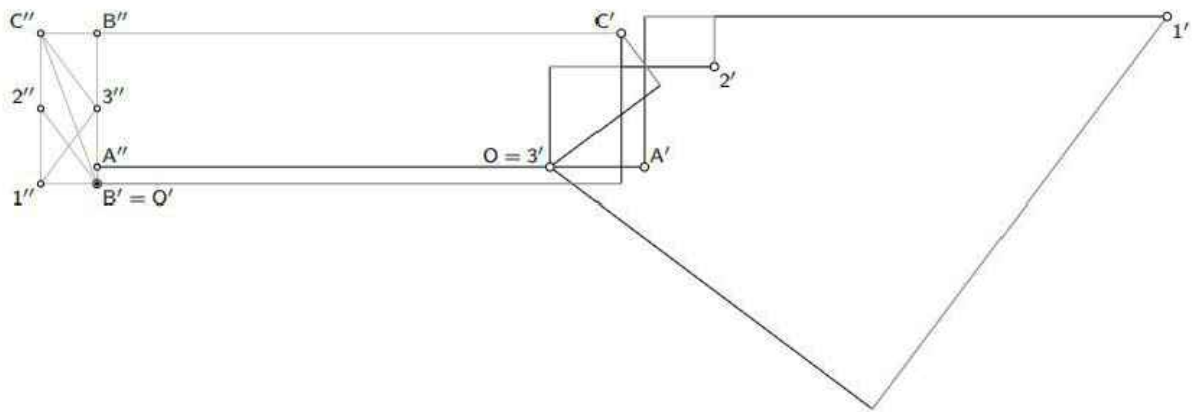
Crtanjem Williotova plana pomaka nisu dobiveni konačni pomaci čvorova. Kod ležaja  $A$  ispunjen je rubni uvjet, dok kod ležajeva  $B$  i  $C$  rubni uvjeti nisu ispunjeni. Potrebno je napraviti korekciju plana pomaka kako bi se ispunili rubni uvjeti.

U prvom će se koraku zadovoljiti rubni uvjet u ležaju  $B$ . Potrebno je cijeli sistem pomaknuti udesno (translacija u horizontalnom smjeru) tako da ležaj  $B$  dotakne vertikalni pravac. U Williotovu planu pomaka potrebno je naznačiti da je  $B'$  novi pol  $O'$  (rubni uvjet ležaja  $B$  - horizontalan pomak jednak je nuli). Točka  $A$  se može pomicati samo po horizontalnom pravcu, pa je  $A''$  na vertikali kroz  $O'$ . Ukupni pomak točke  $A$  je  $A''A'$ ; to je zbroj pomaka  $OA'$  zbog produljenja štapa i pomaka  $A''O$  koji je jednak horizontalnoj komponenti pomaka kojim je ležaj  $B$  doveden u svoj vertikalni položaj.

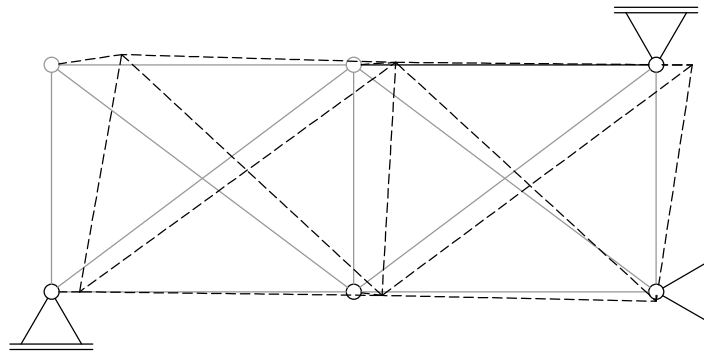
U drugom će se koraku zadovoljiti rubni uvjet ležaja  $C$ . Potrebno je zarotirati sistem oko točke (središte rotacije) u kojoj se sijeku vertikalni pravac kroz točku  $A$  (okomica na mogući pomak u ležaju  $A$ ) i horizontalni pravac kroz točku  $B$  (okomica na mogući pomak u ležaju  $B$ ). U Williotovu planu pomaka središte rotacije se nalazi malo ispod novoga položaja ležaja  $A$ , odnosno u novom polu  $O' = B'$ . Rotirani položaj  $C''$  točke  $C$  je u sjecištu pravca kroz  $O'$  okomito na spojnicu točaka  $A$  i  $C$  u rešetki (pri rotaciji oko  $A$  (oko točke neznato ispod  $A$ ) točka  $C$  putuje po okomici na spojnicu s točkom  $A$ ) i horizontalnoga pravca kroz točku  $C'$  (pomak ležaja  $C$  moguć je samo po horizontalnom pravcu); pomak točke  $C$  je  $C''C'$ . Rotirani položaj  $3''$  točke  $3$  je u sjecištu pravca kroz  $O'$  koji je okomit na spojnicu točaka  $A$  i  $3$  u rešetki (putanja točke  $3$  pri rotaciji oko točke  $A$ ) i pravca kroz  $C''$  koji je okomit na spojnicu točaka  $C$  i  $3$  u rešetki (putanja točke  $3$  pri rotaciji oko točke  $C$ ). Rotirani položaj  $1''$  točke  $1$  je u sjecištu pravca kroz  $O'$  koji je okomit na spojnicu točaka  $A$  i  $1$  u rešetki i pravca kroz  $3''$  koji je okomit na spojnicu točaka  $3$  i  $1$  u rešetki. Rotirani položaj  $2''$  točke  $2$  je u sjecištu pravca kroz  $O'$  koji je okomit na spojnicu točaka  $A$  i  $2$  u rešetki i pravca kroz  $1''$  koji je okomit na spojnicu točaka  $1$  i  $2$  u rešetki i rotirani položaj  $B''$  točke  $B$  je u sjecištu pravca kroz  $O'$  koji je okomit na spojnicu točaka  $A$  i  $B$  u rešetki i pravca kroz  $C''$  koji je okomit na spojnicu točaka  $B$  i  $C$  u rešetki.

Pomak svake točke rešetke jednak je vektoru koji ima početak u točki s dvije crtice i završetak u točki s jednom crticom.





*Korekcija Williotova plana pomaka (konačni pomaci čvorova)*



*Deformirani oblik rešetkastoga nosača*

Duljina pomaka hvatišta sile  $P$  očitava se iz Williotova plana pomaka gdje je napravljena korekcija. Hvatište sile  $P$  nalazi se u čvoru 1. Duljina pomaka čvora 1 je  $d(1'', 1') = 1.6$  mm. Horizontalna komponenta je neznatno kraća (analitičko je rješenje 1.568 mm), jer je vertikalna komponenta razmjerno mala (pa je korijen zbroja kvadrata horizontalne i vertikalne komponente gotovo jednak horizontalnoj komponenti).

## 6. ZAKLJUČAK

U ovom radu su objašnjeni neki grafički postupci rješavanja ravninskih rešetkastih nosača. Grafički postupci koji su objašnjeni su metoda čvorova, Maxwell-Cremonin plan sila i Culmannov postupak. U svakom grafičkom postupku osim teorijskog objašnjenja riješen je i jednostavan primjer. Isti tip rešetkastoga nosača riješen je posebno svakom navedenom metodom. Kod rješavanja rešetke, odnosno traženja sila u štapovima pojedinom metodom, dobile su se jednake vrijednosti sila u štapovima. Može se zaključiti da su navedene metode točne i da prikazuju realna rješenja sistema.

Grafički postupci primjenjivi su za konačno rješavanje samo statički određenih konstrukcija što im je nedostatak, ali oni daju zornost, jednostavnost, preglednost te se brzo može doći do rješenja što im je velika prednost.

Grafičko određivanje pomaka čvorova rešetkastoga sistema prikazano je pomoću Williotova plana pomaka. Iz Williotova plana pomaka može se odrediti i vidjeti deformirani oblik rešetkastoga sistema pod opterećenjem.

## 7. LITERATURA

1. V. Simović: *Građevna statika I*, Građevinski institut Zagreb, 1998.
2. V. Andrejev: *Mehanika – I. dio, Statika*, Tehnička knjiga Zagreb, 1976.
3. M. Anđelić: *Građevna statika II*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2005.

## **Grafički postupci rješavanja ravninskih rešetkastih nosača**

### **Sažetak**

U radu su prikazane grafičke metode nalaženja vrijednosti sila u svim ili samo u nekim štapovima ravninskih rešetkastih nosača (metoda čvorova, Maxwell-Cremonin plan sila, Culmannov postupak) i određivanja pomaka čvorova tih nosača (Williotov plan pomaka). U drugom su dijelu rada grafički postupci primijenjeni u rješavanju neodređenog sistema metodom sila.

**Ključne riječi:** rešetkasti nosači, metoda čvorova, Maxwell-Cremonin plan, Culmannov postupak, Williotov plan

## **Graphical methods for plane trusses**

### **Abstract**

Graphical methods for determining the values of forces in all or in some bars of a truss (method of joints, Maxwell-Cremona diagram, Culmann procedure) and for determining displacements of their joints (Williot diagram) are described. In the second part graphical procedures were applied in solving an indeterminate system by the method of forces.

**Keywords:** truss girder, method of joints, Maxwell-Cremona diagram, Culmann procedure, Williot diagram