

# Diskretni model kupole katedrale svetoga Jakova u Šibeniku

---

**Gelo, Dalibor; Meštrović, Mladen**

*Source / Izvornik:* **Građevinar, 2016, 68, 687 - 696**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

<https://doi.org/10.14256/JCE.1628.2016>

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:237:274915>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-15**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)



Primljen / Received: 23.3.2016.

Ispravljen / Corrected: 5.8.2016.

Prihvaćen / Accepted: 1.9.2016.

Dostupno online / Available online: 10.10.2016.

# Diskretni model kupole katedrale svetoga Jakova u Šibeniku

## Autori:

Prethodno priopćenje



**Dalibor Gelo**, mag.ing.aedif.  
Tehničko veleučilište u Zagrebu  
Graditeljski odjel  
[dgelo@tvz.hr](mailto:dgelo@tvz.hr)

[Dalibor Gelo, Mladen Meštrović](#)

## Diskretni model kupole katedrale svetoga Jakova u Šibeniku

U radu su prikazane osnove metode neglatke kontaktne dinamike na temelju koje je formuliran programski paket LMGC90. Cilj rada je prezentirati postupak izrade diskretnog modela u programu LMGC90. Izrađen je diskretni model kupole katedrale sv. Jakova u Šibeniku i na njemu je provedena time-history analiza. Dobiveni rezultati upućuju na značajna nelinearna ponašanja kupole koja je teško obuhvatiti metodom konačnih elemenata. Rezultati upućuju na kritična mjesta, to jest locirana su područja maksimalnih pomaka i kontaktnih sila.

### Ključne riječi:

diskretni element, neglatka kontaktna dinamika, LMGC90, kontaktni zakon, Gauss-Seidel

Preliminary report



Prof.dr.sc. **Mladen Meštrović**, dipl.ing.građ.  
Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet  
[mestar@grad.hr](mailto:mestar@grad.hr)

[Dalibor Gelo, Mladen Meštrović](#)

## Discrete dome model for St. Jacob cathedral in Šibenik

Principal features of the non-smooth contact dynamics method, which served as basis for the LMGC90 software formulation, are presented in the paper. The objective of the paper is to present creation of a discrete model using the LMGC90 software. The discrete dome model of the St. Jacob cathedral in Šibenik was created, and dynamic behaviour of the dome was checked by time-history analysis. The results point to a highly nonlinear behaviour of the dome, which would be difficult to detect with the finite element method. The results also reveal critical points, i.e. the maximum displacement and contact force points along the dome.

### Ključne riječi:

discrete element, non-smooth contact dynamics, LMGC90, contact law, Gauss-Seidel

Vorherige Mitteilung

[Dalibor Gelo, Mladen Meštrović](#)

## Diskretes Modell der Kuppel der Kathedrale des Heiligen Jakob in Šibenik

In dieser Arbeit werden die Grundsätze der nicht-glatte Kontaktdynamik, auf die sich das Softwarepaket LMGC90 stützt, dargestellt. Das Ziel der Arbeit ist, den Aufbau eines diskreten Modells im Programm LMGC90 darzustellen. Ein diskretes Modell der Kuppel der Kathedrale des Heiligen Jakob in Šibenik wurde erstellt und mittels Zeitverlaufsanalysen untersucht. Die Ergebnisse weisen auf ein bedeutend nichtlineares Verhalten hin, das nicht einfach mit finiten Elementen erfasst werden kann. Ebenso deuten die Resultate auf kritische Stellen, so dass Bereiche maximaler Verschiebungen und Kontaktkräfte lokalisiert werden konnten.

### Ključne riječi:

diskrete Elemente, nicht-glatte Kontaktdynamik, LMGC90, Kontaktgesetze, Gauss-Seidel

## 1. Uvod

Složeno modeliranje i nedostupnost programskih paketa samo su neki od razloga slabe prihvaćenosti diskretnih modela u inženjerskoj praksi. Metoda konačnih elemenata (MKE) je dobar matematički model za opisivanje kontinuuma, ali diskretna metoda je prikladniji odabir u području diskontinuiranih sredina. Diskretna metoda se zasniva na definiranju geometrije pojedinih elemenata, odnosno diskretnih elemenata i njihovog međusobnog kontaktnog odnosa.

Na teritoriju Republike Hrvatske nalazi se velik broj građevina od iznimne kulturne i povijesne važnosti koje su građene od kamenih blokova. Građevine izgrađene od kamenih blokova bez veziva, ili zbog upotrebe lošeg veziva, smatraju se diskontinuiranim konstrukcijskim sustavima. Katedrala sv. Jakova u Šibeniku izgrađena je od kamenih blokova bez upotrebe veziva što ju svrstava u skupinu diskontinuiranih sustava. Ovaj rad obuhvaća izradu numeričkog modela kupole katedrale sv. Jakova u Šibeniku i odziv konstrukcije pri potresnom djelovanju. Numerički model je izrađen pomoću programskog paketa LMGC90 zasnovanom na diskretnoj formulaciji.

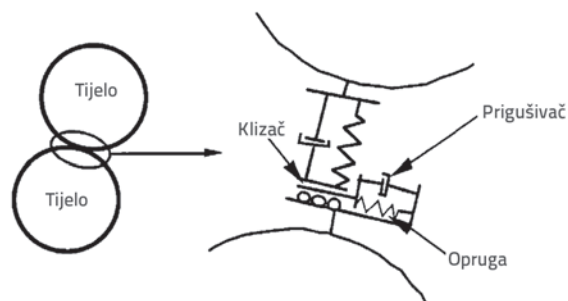
## 2. Metoda diskretnih elemenata

Metoda konačnih elemenata (MKE) široko je prihvaćena u svim područjima inženjerske prakse. Glavna karakteristika MKE-a je promatranje numeričkog modela kao neprekinute sredine. Geometrija i ponašanje neprekinute sredine opisuje se pomoću preddefiniranih konačnih elemenata. Ponašanje velikog broja problema može se opisati pomoću MKE-a, ali ako se promatra nekontinuirana odnosno isprekidana sredina potrebno je primijeniti metodu diskretnih elemenata (MDE). Diskretni numerički model opisuje se nizom individualnih neprekinutih sredina koje se nazivaju diskretnim elementima. Oni se mogu promatrati kao apsolutno kruta ili deformabilna područja. Ako se radi o deformabilnim diskretnim elementima, primjenjuje se kombinirana metoda koja se naziva metodom konačno-diskretnih elemenata [1]. Metoda konačno-diskretnih elemenata nastoji iskoristiti prednosti MKE-a i MDE-a. Interakcija između pojedinih diskretnih elemenata opisuje se pomoću kontaktnih zakona.

Kontaktne zakone između diskretnih elemenata moguće je definirati pomoću glatke i neglatke kontaktne dinamike. Glatkom dinamikom nastoji se opisati deformabilno ponašanje diskretnog elementa. Kontakti između diskretnih elemenata opisuju se pomoću opruga ili funkcija (slika 1.). Ponašanje kontakta može ovisiti o veličini preklopa, relativnoj brzini i relativnoj sili.

Modeliranje pomoću opruga zahtijeva primjenu vremenskih koraka manjih od elastičnog vremenskog odziva kako bi se osigurala numerička stabilnost [2]. Kruti diskretni elementi zahtijevaju povećanje krutosti opruge, a smanjenje vremenskog koraka čime se produljuje trajanje proračuna. Apsolutno kruti materijali zahtijevaju infinitezimalne vremenske korake. Glatka

kontaktna dinamika primjenjuje se u modeliranju materijala s konačnom krutosti [2].



Slika 1. Model kontakta između diskretnih elemenata [2]

U neglatkoj kontaktnoj dinamici pretpostavljaju se apsolutno kruti diskretni elementi i zanemaruje se elastično ponašanje između diskretnih elemenata [2]. Za razliku od glatke metode, neglatka metoda omogućava korištenje većeg vremenskog koraka i mogućnost opisivanja "apsolutno kruti materijali". Potrebno je obratiti pažnju na odabir veličine vremenskog koraka. Veliki vremenski korak može uzrokovati preveliko prodiranje diskretnih elemenata. Prednost ove metode je u tome da dobro konvergira, što je inače velik problem kod modela s velikim brojem elemenata [2]. Neglatka kontaktna metoda je implementirana u program LMGC90 koji je baziran na *open source* kodeksu. Kod LMGC90 napisan je u Fortranu i C-u, programski jezik Python se koristi za unos ulaznih podataka. Važno je napomenuti da program radi isključivo na operativnom susavu Linux i podržava OpenMP, čime je omogućeno paralelno računanje.

### 2.1. Jednadžbe gibanja nedeformabilnih diskretnih elemenata (DE)

Gibanje nedeformabilnog diskretnog elementa opisano je Newton-Eulerovim sustavom jednadžbi [3].

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}}^T &= \mathbf{p}(t) + \mathbf{r} \\ \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{m}(t) + \mathbf{m}_r \end{aligned} \quad (1)$$

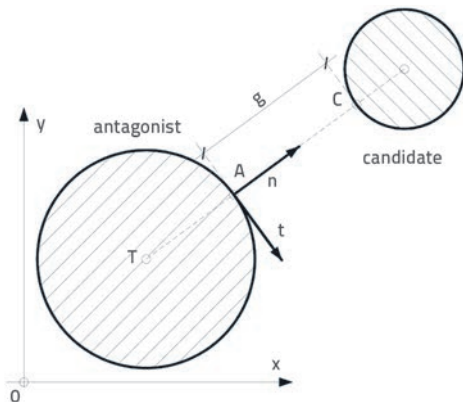
Generalizirane koordinate  $\mathbf{q}$  određuju položaj centra mase diskretnog elementa u odnosu na ishodište kartezijevog koordinatnog sustava. Deriviranjem koordinata  $\mathbf{q}$  po vremenu  $t$  definira se brzina centra mase  $\mathbf{v}^T$ :

$$\mathbf{v}^T = \dot{\mathbf{q}} \quad (2)$$

Brzina rotacije diskretnog elementa oko centra mase određena je pomoću  $\boldsymbol{\omega}$ . Veličine  $\mathbf{p}(t)$  i  $\mathbf{m}(t)$  opisuju vanjsku rezultirajuću silu i vanjski rezultirajući moment. Matrice  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{I}$  definiraju matricu masa i matricu inercija. Vektori  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{m}_r$  su sile i momenti uzrokovani kontaktom između dva diskretna elementa.

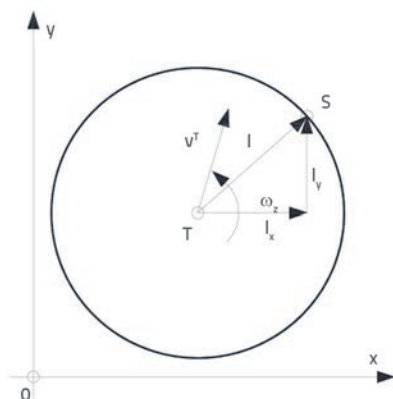
## 2.2. Interakcija diskretnih elemenata

Svaki diskretni element mora imati definirane konture, točke interakcije, materijalne karakteristike i zakon ponašanja na mjestu kontakta. Kontakt dvaju diskretnih elemenata ostvaruje se između odabrane točke interakcije i najbliže točke potencijalnog interakcijskog tijela. Radi lakšeg razumijevanja, uvodi se pojam *candidate* koji se odnosi na tijelo čiju točku interakcije promatramo. Također je uveden pojam *antagonist* koji predstavlja potencijalno tijelo interakcije.



Slika 2. Ravninski odnos između *candidatea* i *antagonista*

Na slici 2. prikazan je ravninski problem odnosa između *candidatea* i *antagonista*. Točke C i A predstavljaju potencijalno mjesto kontakta. Lokalne osi vezane su za tijelo protivljenja,  $n$  je normala na tangencijalnu ravninu. Radi lakšeg prezentiranja, problem je prikazan u dvodimenzionalnom prostoru, ali se jednostavno može proširiti u tri dimenzije [3, 4].



Slika 3. Gibanje krutog diskretnog elementa

Slika 3. prikazuje gibanje krutog diskretnog elementa u ravnini  $x$ - $y$ . Naznačene su dvije točke. Točka  $T$  označava centar mase, dok se točka  $S$  nalazi na konturi diskretnog elementa. Brzina točke  $S$  definirana je pomoću brzine centra mase  $\mathbf{v}^T$  i kutnom brzinom  $\omega_z$  koja vrši rotaciju oko osi  $z$ . Brzina točke  $S$  može se opisati izrazom

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_x^S \\ \mathbf{v}_y^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l_y \\ 0 & 1 & l_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_x^T \\ \mathbf{v}_y^T \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (3)$$

Dvodimenzionalni problem brzine točke na konture diskretnog elementa može se proširiti u trodimenzionalni problem i tada je brzina točke definirana izrazom (4):

$$\mathbf{v}^S = \mathbf{v}^T + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \quad (4)$$

pri čemu je  $\mathbf{v}^S$  vektor brzine u točki  $S$ ,  $\mathbf{v}^T$  je vektor brzine centra mase, a  $\boldsymbol{\omega}$  je vektor kutne brzine. Matrica  $\mathbf{L}$  ima sljedeći oblik:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & l_z & -l_y \\ -l_z & 0 & l_x \\ l_y & -l_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

a definira odnos između kutne brzine  $\boldsymbol{\omega}$  i brzine u točki  $S$ .

Na slici 2. udaljenost između potencijalnog mjesta kontakta dviju diskretnih elemenata određena je vektorom  $\mathbf{g}$ , a promjena vektora  $\mathbf{g}$  u vremenu definira relativnu brzinu između diskretnih elemenata. Nadalje će se relativna brzina između diskretnih elemenata označavati sa slovom  $\mathbf{U}$ . Brzine potencijalnih točki kontakta *candidatea* i *antagonista* određene su izrazom (4), a njihova razlika definira relativnu brzinu

$$\mathbf{U} = \mathbf{v}_C^T + \boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{L}_C - \mathbf{v}_A^T + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{L}_A \quad (6)$$

pri čemu su  $\mathbf{v}_C^T$  i  $\mathbf{v}_A^T$  brzine centra mase *candidatea* i *antagonista*, a  $\boldsymbol{\omega}_C$  i  $\boldsymbol{\omega}_A$  kutne brzine *candidatea* i *antagonista*. Izraz (6) može se preformulirati kao

$$\mathbf{U} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{L}_C - \mathbf{I} - \mathbf{L}_A] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_C^T \\ \boldsymbol{\omega}_C \\ \mathbf{v}_A^T \\ \boldsymbol{\omega}_A \end{bmatrix} \quad (7)$$

ili kao

$$\mathbf{U} = \mathbf{H}^T \mathbf{v} \quad (8)$$

pri čemu je:

$$\mathbf{H}^T = [\mathbf{I} \quad \mathbf{L}_C - \mathbf{I} - \mathbf{L}_A] \quad (9)$$

Matrice  $\mathbf{L}_C$  i  $\mathbf{L}_A$  odgovaraju matrici  $\mathbf{L}$  za potencijalne točke kontakta *candidatea* i *antagonista* dok je  $\mathbf{I}$  jedinična matrica dimenzije  $3 \times 3$ . Izraz (8) temeljna je jednačba NSCD metode, a povezuje relativne brzine između potencijalnog mjesta kontakta dvaju diskretnih elemenata i globalne brzine istih potencijalnih točki kontakta. Skalarni produkt jednačbe (8) s jediničnim vektorom  $[\bar{n}_x \quad \bar{t}_x \quad \bar{m}_x]^T$  koji definira lokalni koordinatni sustav, transformira relativne brzine u smjeru lokalnih osi kao što je prikazano na

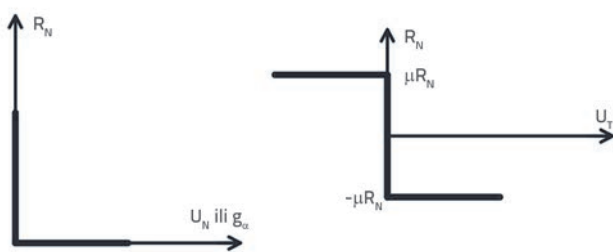
slici 2. Uvodi se indeks  $a$  koji označava svaki potencijalni kontakt u sustavu s više diskretnih elemenata. Transformacijom i uvođenjem indeksa  $a$ , izraz (8) poprima sljedeći oblik

$$\mathbf{U}_\alpha = \mathbf{H}_\alpha^T \mathbf{v}_\alpha \quad (10)$$

Također je moguće pomoću izraza (10) uspostaviti odnos

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{H}_\alpha \mathbf{R}_\alpha \quad (11)$$

gdje je  $\mathbf{r}_\alpha$  odnos kontaktnih sila u globalnom sustavu, a  $\mathbf{R}_\alpha$  kontaktna sila u lokalnom sustavu određena pomoću kontaktnog zakona.  $\mathbf{H}_\alpha^T$  je transponirana matrica  $\mathbf{H}_\alpha$  [3].



Slika 4. Signorinijev i Coulombov kontaktni zakon

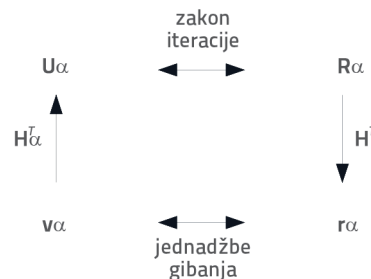
Kontaktni zakoni određuju odnose između relativne brzine ili udaljenosti  $g$  i kontaktnih sila. Postoji cijeli niz kontaktnih zakona, ali najčešće se primjenjuju Signorinijev i Coulombov zakon, prikazani na slici 4. Na temelju Signorinijeva kontaktnog zakona utvrđuje se je li ostvaren kontakt između diskretnih elemenata. Ako je udaljenost  $g$  pozitivna, kontakt nije ostvaren, odnosno normalna kontaktna sila  $\mathbf{R}_N$  je jednaka nuli. Kada je udaljenost  $g$  jednaka nuli, aktivira se normalna kontaktna sila  $\mathbf{R}_N$  koja može poprimiti beskonačne veličine [5]. Veličina kontaktne sile  $\mathbf{R}_N$  ovisi o veličinama sile koje djeluju na diskretne elemente [5]. Ako je model izrađen od apsolutno krutih diskretnih elemenata, normalna kontaktna sila  $\mathbf{R}_N$  određuje se pomoću impulsa, a ovisi o relativnoj brzini  $\mathbf{U}_N$  i odabranoj veličini vremenskog koraka  $\Delta t$ . Signorinijev zakon može se matematički opisati pomoću sljedećih izraza:

$$\begin{aligned} g > 0 &\Rightarrow \mathbf{R}_N = 0 \\ g = 0 &\Rightarrow \mathbf{R}_N \geq 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Coulombov kontaktni zakon prikazan je na slici 4. Ako se radi o suhom trenju, veličina sile trenja odnosno tangencijalna kontaktna sila  $\mathbf{R}_T$  ovisi o koeficijentu trenja  $\mu$  i normalnoj kontaktnoj sili  $\mathbf{R}_N$ . Matematički Coulombov zakon može se prikazati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_T > 0 &\Rightarrow \mathbf{R}_T = -\mu \mathbf{R}_N \\ \mathbf{U}_T = 0 &\Rightarrow -\mu \mathbf{R}_N \leq \mathbf{R}_T \leq \mu \mathbf{R}_N \\ \mathbf{U}_T < 0 &\Rightarrow \mathbf{R}_T = \mu \mathbf{R}_N \end{aligned} \quad (13)$$

$\mathbf{U}_T$  je tangencijalna relativna brzina.



Slika 5. Veza između globalnih i lokalnih nepoznanica

Slika 5. prikazuje vezu između globalnih i lokalnih nepoznanica. Globalne nepoznanice vezane su uz centar mase tijela ili točke mreže. Kao globalne nepoznanice pojavljuju se pomaci  $\mathbf{q}$ , brzine  $\dot{\mathbf{q}}$ , rezultirajuće sile i momenti  $\mathbf{r}$ . Lokalne nepoznanice vežu se uz udaljenost između dva tijela  $\mathbf{g}$ , relativnu brzinu između dva tijela  $\mathbf{U}$  i silu  $\mathbf{R}$ .

### 3. Diskretni model kupole katedrale sv. Jakova u Šibeniku

Institut za povijest i umjetnost u Zagrebu posjeduje nacрте katedrale sv. Jakova u Šibeniku. U arhivi se mogu pronaći nacрте u dva mjerila 1:200 i 1:50 koji se čuvaju na pausu, jer zasad ne postoji digitalna verzija. U Institutu se mogu dobiti nacрте četiriju pročelja, dva uzdužna presjeka, dva poprečna presjeka i tlocrt. Uzdužni presjeci definirani su ravninama koji presijecaju katedralu po osi simetrije i kroz bočni brod. Ravnine poprečnih presjeka presijecaju katedralu kroz tri broda i središte kupole.

Izrada numeričkog modela ne zahtijeva "savršenu" preciznost, odnosno odstupanje od nekoliko centimetara u odnosu na izvedeno stanje neće znatno utjecati na točnost rješenja. U okviru ovoga rada koriste se nacрте u mjerilu 1:200. Smatraju se dovoljno preciznima za izradu kvalitetnog numeričkog modela. Obavljen je i vizualni pregled katedrale čime su prikupljeni dodatni podaci potrebni za izradu modela. Vizualnim pregledom utvrđena je pravilnost slaganja kamenih blokova i raspored čeličnih zatega.

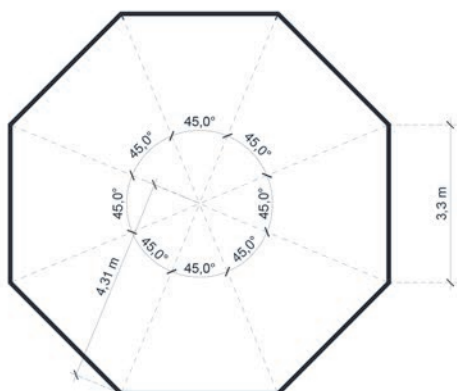
#### 3.1. Geometrija kupole

Tlocrt kupole ima oblik osmerokuta, stranice u bazi imaju duljinu 330 cm. Visina kupole je definirana od vijenca do akroterija i iznosi 600 cm. Osam rebara se spaja u tjemenu kupole i čine osnovni nosivi sustav. Na slici 6. shematski je prikazan raspored rebara. Rebra su međusobno povezana središnjim blokom koji povezuje rebra u cjelinu. Središnji blok s rebrima čini luk. Kut između dviju osi rebara je  $45^\circ$ . Svako rebro sastavljeno je od deset elemenata. Visina rebara je 55 cm po cijeloj dužini rebara, a širina se mijenja. Širina rebara je 50 cm u peti, a 38 cm u tjemenu [6].

Proučavanjem nacрте utvrđeno je da se oblik rebara može dobro opisati pomoću parabole. Izrazom (14) definirana je os rebara

$$z(x) = -\frac{h}{r^2}x^2 + h \quad [0,431] \quad (14)$$

Parabola je određena s dva parametra  $h$  i  $r$ , vrijednost  $h$  definira visinu kupole, odnosno predstavlja dužinu između ishodišta i tjemena parabole, a  $r$  je polumjer opisane kružnice osmerokuta. Odabrane vrijednosti parametara  $h$  i  $r$  su 600,0 cm i 431,0 cm.



Slika 6. Raspored osi rebara

### 3.2. Rebra

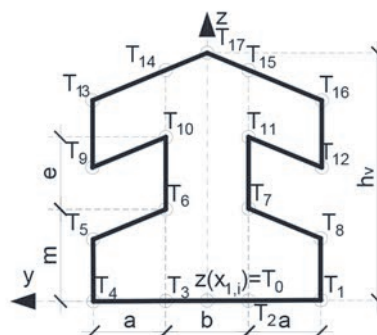
Uvidom u dokumentaciju utvrđeno je da se svako rebro sastoji od deset segmenata podjednake duljine što omogućava uvođenje pretpostavke da su svi segmenti jednake duljine. Prethodna tvrdnja omogućava da se postave uvjeti za duljinu pojedinog segmenta, odnosno njegov položaj. Duljina i položaj pojedinog segmenta definira se pomoću  $h$ ,  $r$ ,  $r_1$  i brojem segmenata. Parametar  $r_1$  definira veličinu središnjeg kamena odnosno koordinatu početka rebra. Za određivanje duljine pojedinog segmenta potrebno je najprije izračunati ukupnu duljinu parabole na području od  $r_1$  do  $r$ . Ukupnu duljinu parabole na području od  $r_1$  do  $r$  možemo izračunati pomoću izraza:

$$d_i(h, r, r_1) = 0,5r\sqrt{\frac{4h^2}{r^2} + 1} - 0,5r_1\sqrt{\frac{4h^2}{r^2} + 1} - \frac{0,25}{\sqrt{\frac{h^2}{r^2}}} \sinh^{-1}\left(2r_1\sqrt{\frac{h^2}{r^2}}\right) + \frac{0,25}{\sqrt{\frac{h^2}{r^2}}} \sinh^{-1}\left(\frac{2h^2}{r^3\sqrt{\frac{h^2}{r^2}}}\right) \quad (15)$$

Izraz (15) izveden je na temelju poznatog izraza za duljinu luka. Duljina pojedinog segmenta definira se dijeljenjem duljine luka s brojem segmenata. Uvrsti li se duljina segmenta umjesto ukupne duljine luka u izraz (15), moguće je izračunati vrijednost  $r$  koja određuje završetak segmenta. Određivanje vrijednosti  $r$  provedeno je numerički pomoću programskog jezika *python*, napisan je kod koji računa završne koordinate pojedinog segmenta rebara. Rezultat proračuna je lista koordinata koje će se u nastavku teksta označavati sa  $x_1$ .

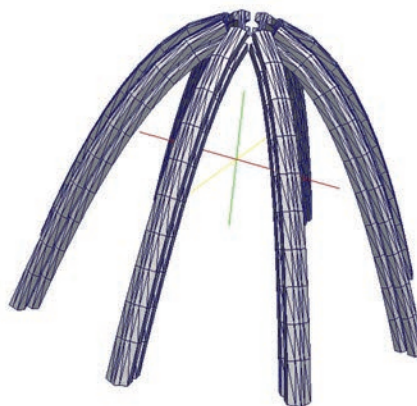
Poprečni presjek rebra definiran je sa sedamnaest karakterističnih točaka (slika 7.). Koordinate karakterističnih točaka definiraju se od referentne točke  $T_0$  koja je određena s

listom koordinata  $x_1$  i izrazom (15). Ostalih šesnaest koordinata poprečnog presjeka određuje se pomoću zadanih geometrijskih karakteristika presjeka i pravca okomitog na tangentu funkcije (15) u točki  $T_0$ .



Slika 7. Aproximacija poprečnog presjeka

Parametri poprečnog presjeka  $m$ ,  $e$ ,  $a$ ,  $b$  i  $h_v$  mijenjaju se duž osi rebra i moraju se izračunati zasebno za svaki spoj između dva segmenta rebra. Za postizanje traženog oblika presjeka segment rebra je sastavljen od šest četverostranih prizmi koje se ponašaju kao jedan diskretni element odnosno kruto nedeformabilno tijelo. Napisan je program koji definira model rebara. Taj program polazi kroz dvije petlje. Jedna petlja definira segmente duž osi rebra, a druga petlja oblikuje novo rebro zarotirano za  $45^\circ$  (slika 8.).



Slika 8. Model rebara

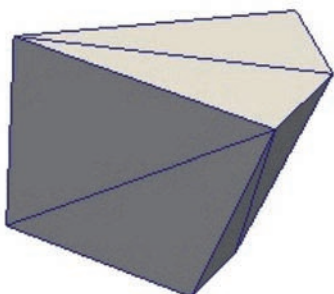
### 3.3. Središnji kamen

Središnji kamen ima funkciju povezivanja rebra u cjelinu, odnosno postizanja zatvorene strukture. Središnji kamen modeliran je tako da povezuje više standardnih diskretnih elemenata u cjelinu koja se ponaša kao jedan apsolutno kruti diskretni element.

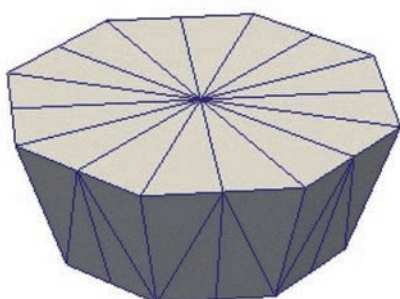
Slika 9. prikazuje jedan segment središnjeg kamena koji je definiran s osam točaka i dvanaest trokutastih ploha. Potpuni model središnjeg kamena (prikazan na slici 10.) nastaje rotacijom segmenta sa slike 9. Os rotacije smještena je u



ishodištu koordinatnog sustava, odnosno podudara se sa koordinatom z osi.



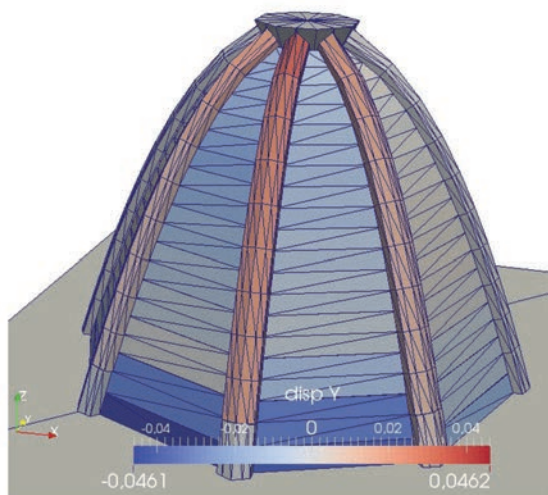
Slika 9. Jedan segment središnjeg kamena



Slika 10. Model središnjeg kamena

### 3.4. Pokrov

Pokrov kupole izveden je od kamenih blokova trapezastog oblika. Blokovi pokrova ispunjavaju prostor između rebara i oslanjaju se na rebra. U rebrima je izveden utor u koji se umeću pokrovni elementi. Na spoju dvaju pokrovnih elemenata pojavljuje se preklap, a gornja ploča prelazi preko donje. Pokrovni elementi izvedeni su zakrivljeni kako bi što bolje pratili nagib zakrivljenosti kupole (slika 11.).

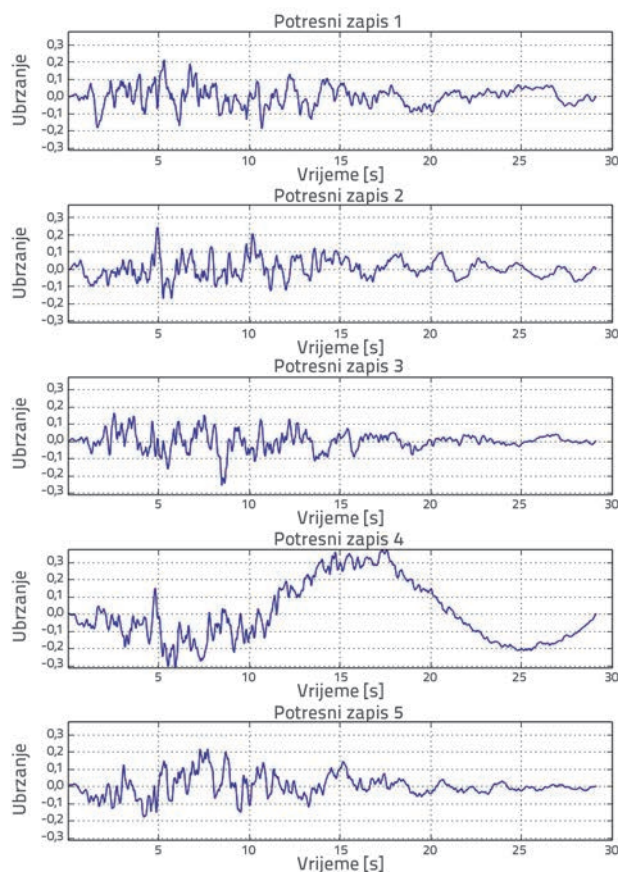


Slika 11. Diskretni model kupole katedrale sv. Jakova u Šibeniku

Ovako složeni oblik pokrovnih elemenata vrlo je teško numerički opisati. Iz tog razloga uvedena su pojednostavnjenja u modelu. Zanimarena su preklapanja na spoju dvaju pokrovnih elemenata i zakrivljenost se aproksimira s dvije plohe. Pojedini elementi pokrova su definirani pomoću geometrije rebara. Detaljno je definirana geometrija jednog pokrovnog elementa, a preostali se elementi dobivaju pomoću dvostruke petlje. Prva petlja definira elemente duž rebra, a druga između susjednih rebara.

### 4. Dinamički odziv kupole

U radu su prikazane dvije dinamičke analize. Provedena je analiza za realne podatke prema akcelerogramu El Centro [7] koji je uvećavan s faktorima 1,5, 2,0, 2,5, 3,0 radi definiranja potpunog otkazivanja kupole. Druga analiza provodi se pomoću pet umjetno generiranih potresnih zapisa (slika 12.).



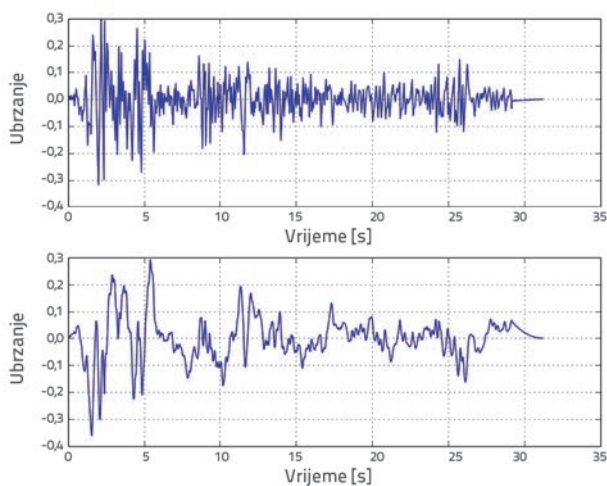
Slika 12. Umjetno generirani potresni zapisi

Potresni zapisi su generirani pomoću programa Seismo Artif 2016 [8, 9]. Definiran je elastični spektar prema EC8 [10] pomoću parametara koji odgovaraju lokaciji katedrale sv. Jakova u Šibeniku.

Ubrzanje tla  $a_{gs}$  iznosi 0,19 g, vrijednost je očitana na karti potresnih područja Republike Hrvatske [11] za kategoriju tla A i povratno razdoblje 475 godina. Odabran je faktor važnosti

objekta 1,4, pretpostavljena udaljenost od epicentra je 10 km, prosječna brzina smicanja vala je  $v_{s,30} = 940$  m/s. Pretpostavljen je 5-postotni faktor prigušenja i jačina potresa  $M_s = 7,5$ . Na temelju definiranog elastičnog spektra pomoću programa Seismo Artif 2016 generirani su umjetni potresni zapisi. Integracija i korekcija, odnosno "baseline correction" potresnog zapisa El Centro i umjetno generiranih zapisa, provedena je pomoću programa Prisma [12].

U programu LMGC90 omogućeno je zadavanje dva tipa djelovanja, sile i brzine. Budući da su nam poznata ubrzanja akceleroograma El Centro i umjetno generiranih potresnih zapisa potrebno je provesti integraciju i korekciju kako bi se dobile brzine tla odnosno baze. Pobuda se nanosi samo u smjeru osi x (slika 13.).



Slika 13. Potresni zapis El Centra

Iteracija se provodi pomoću nelinearne Gauss-Seidelove metode (NLGS). Pretpostavlja se sustav od dvije jednačbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} ax + by &= \lambda \\ cx + dy &= \delta \end{aligned} \quad (16)$$

Pomoću njega objasniti će se Gauss-Seidelove metode.  $a, b, c, d, \lambda$  i  $\delta$  su konstantne veličine. Jednačba 16 može se preformulirati tako da vrijedi:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{\lambda - by_n}{a} \\ y_{n+1} &= \frac{\delta - cx_n}{d} \end{aligned} \quad (17)$$

Postupak iteracije provodi se na način da se pretpostavljaju inicijalne vrijednosti  $x_0$  i  $y_0$  koje se uvrštavaju u izraz (17). Novi set vrijednosti uvrštava se u izraz (16), a ako su jednačbe zadovoljene s odgovarajućom točnošću, postupak se prekida ili ponovno uvrštava u izraz (17). Ovaj postupak iteracije naziva se Jacobievom metodom. Gauss-Seidelova metoda je modifikacija

Jacobieve metode, koristi se ista iterativna shema, samo što se unutar iste iteracije koriste nove vrijednosti, odnosno čim je poznata nova vrijednost - ona se koristi u izračunu sljedeće vrijednosti. Iz izraza (18) vidljivo je da se za izračun vrijednosti  $y_{n+1}$  koristi vrijednost  $x_{n+1}$ .

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{\lambda - by_n}{a} \\ y_{n+1} &= \frac{\delta - cx_{n+1}}{d} \end{aligned} \quad (18)$$

Isti princip može se primijeniti i na sustav nelinearnih jednačbi [13].

Broj iteracija u programu LMGC90 definiran je s dva parametra  $gs\_it_1$  i  $gs\_it_2$  [3]. Prva petlja određena je veličinom  $gs\_it_2$  i nazivamo je kontrolna petlja. U svakom koraku petlje provodi se kontrola točnosti, odnosno utvrđuje zadovoljava li rješenje kriterij točnosti. Ako su zadovoljeni uvjeti tražene točke, daljnja iteracija se prekida. Druga petlja je podpetlja prve petlje i određena je vrijednošću  $gs\_it_1$ . Za razliku od prve petlje, druga petlja nema mogućnost prekidanja iteracije kada se postigne željena točnost jer se ne provodi kontrola točnosti u svakom koraku iteracije. Time se skraćuje trajanje proračuna. U tablici 1. prikazani su odabrani parametri iteracije.

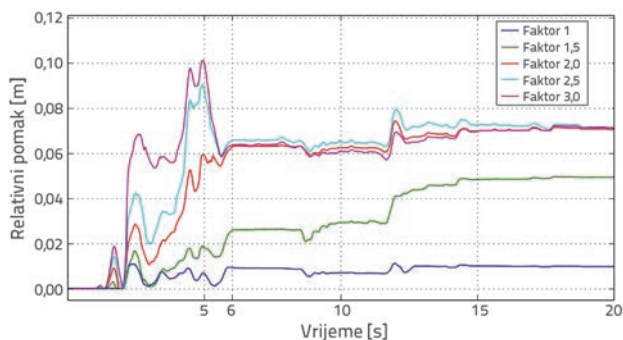
Tablica 1. Odabrani parametri iterativnog postupka

Tolerancija	$\Theta$	Veličina vremenskog koraka	$gs\_it_1$	$gs\_it_2$
0,1666 <sup>-3</sup>	0,5	0,002	2000	10

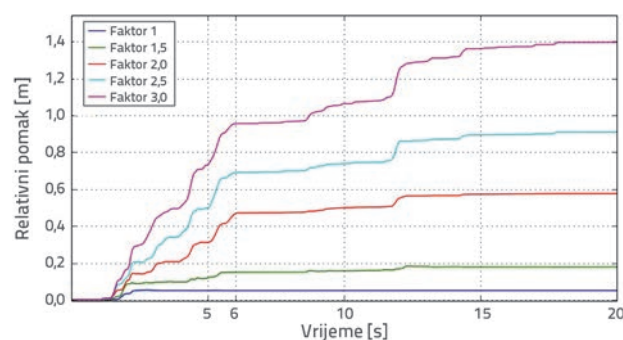
U svojoj disertaciji De Castro Oliveira [14] utvrđuje prosječni koeficijent trenja između kamenih blokova. Određen je koeficijent trenja  $\mu = 0,62$  koji će se primijeniti u nastavku ovog rada. Prosječna težina kamena je 2350 kN/m<sup>3</sup> [15].

Rezultati se prikazuju pomoću ParaView [16] koji omogućava praćenje promjene konstrukcije u vremenu. Analizom rezultata za potresni zapis El Centro i faktor uvećanja 1 uočeno je da dolazi do trajnih deformacija zbog smicanja između pojedinih blokova. Slika 11. prikazuje zaostale pomake kupole. Može se lako uočiti da dolazi do nelinearnih pomaka između prvog i drugog reda elemenata rebra. Na slici 14. prikazan je relativni odnos između prva dva reda kamenih blokova rebra za različite faktore uvećanja potresnog zapisa prema akceleroogramu El Centro. Iz slike 14. može se uočiti da nakon 6 sekundi odziv kupole je takav da relativni pomaci između promatranih kamenih blokova poprimaju konstantnu vrijednost za faktore uvećanja 2, 2,5, 3. Daljnji pomaci uzrokovani su otvaranjem kupole odnosno međusobnim udaljavanjem rebra. Taj fenomen je prikazan na slici 15. koja prikazuje relativni odnos između dva nasuprotna rebra u njihovoj bazi.



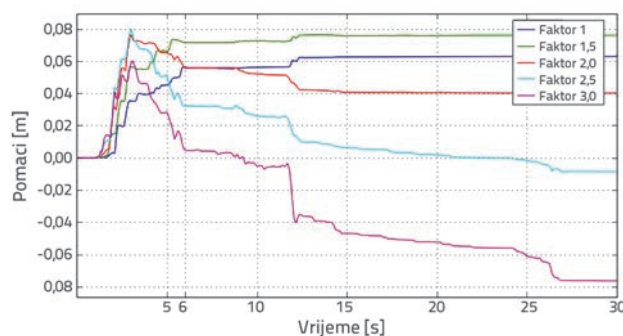


Slika 14. Relativni pomaci između prvih dva reda kamenih blokova rebra za različite faktore uvećanja potresnog zapisa prema akcelerogramu El Centro

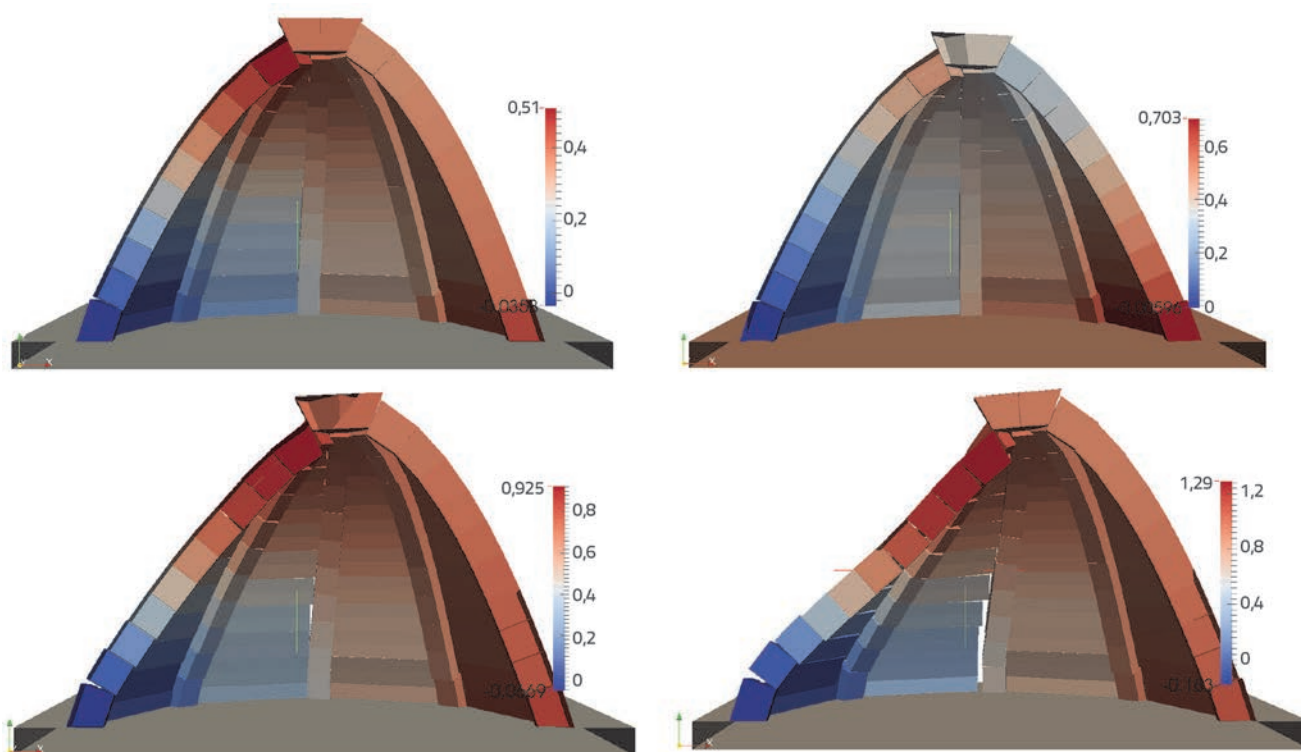


Slika 15. Relativni odnos između dva nasuprotna rebra u njihovoj bazi

Uočen je također problem istiskivanja središnjeg kamena. Uslijed naizmjenične promjene smjera potresnog djelovanja dolazi do postupnog istiskivanja središnjeg kamena. Uzrok ove pojave može biti krivo definirana geometrija središnjeg kamena i loše definirano trenje između blokova, ali ne isključuje se mogućnost da je to realno ponašanje kupole. Slika 16. prikazuje fenomene istiskivanja središnjeg kamena. Iz slike se može zaključiti da za faktore 1 i 1,5 nema daljnjeg istiskivanja nakon 6 sekundi. Zaustavljanje daljnjeg istiskivanja središnjeg kamena pripisuje se smanjenju ubrzanja, odnosno brzine tla u 6 sekundi za potresni zapis prema akcelerogramu El Centro, kao što je prikazano na slici 13. Za faktore 2, 2,5, i 3 nakon 6 sekundi dolazi do propadanja središnjeg kamena kupole. Ova pojava može se pripisati fenomenu razilaženja rebara, kao što je prikazano na slici 16.

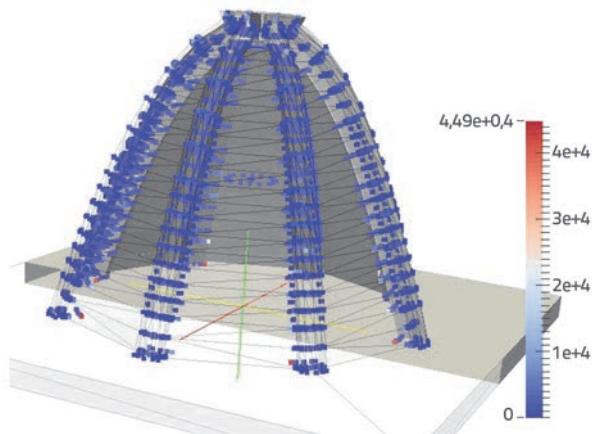


Slika 16. Istiskivanje središnjeg kamena kupole za različite faktore uvećanja potresnog zapisa prema akcelerogramu El Centro



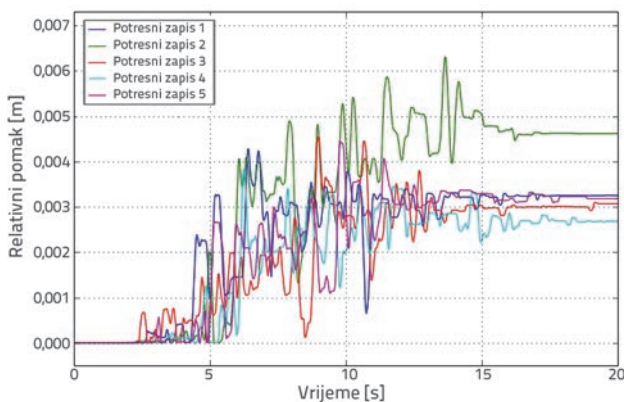
Slika 17. Odziv kupole za potresno djelovanje El Centro uvećano tri puta

Interakcija između pojedinih blokova u ParaViewu prikazuje se pomoću točkica, a boja točkice pretpostavlja veličinu sile. Iz slike 18. vidi se da su normalne interakcijske sile ujednačene duž rebara i takvo stanje ostaje za vrijeme cijelog potresnog djelovanja. Ekstremne vrijednosti se pojavljuju na spoju rebara s podlogom. Maksimalna vrijednost normalne interakcijske sile koja se pojavljuje u modelu kupole iznosi 43,2 kN. Ako se pretpostavi površina nalijeganja veličine 50x50 mm, naprezanje na mjestu kontakta je 17,28 N/mm<sup>2</sup>, što je manje od tlačne čvrstoće kamena.



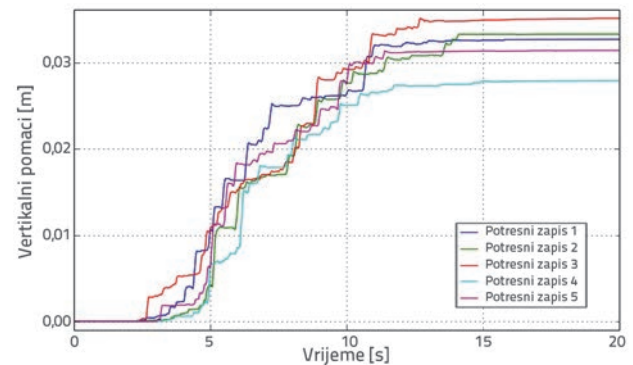
Slika 18. Normalne interakcijske sile između kamenih blokova

Za umjetno generirane potresne zapise utvrđen je odziv kupole. Analiza potresnog zapisa El Centro upozorila je na kritična mjesta pri



Slika 19. Relativni pomaci između prva dva reda kamenih blokova rebra za pet umjetno generiranih potresnih zapisa

odzivu kupole, a to su relativni pomaci između prvog i drugog reda kamenih blokova promatranog rebra i istiskivanje središnjeg kamena. Rezultati prikazani na slikama 19. i 20. upućuju na ujednačeno ponašanje svih pet umjetno generiranih potresnih zapisa.



Slika 20. Istiskivanje središnjeg kamena kupole za pet umjetno generiranih potresnih zapisa

## 5. Zaključak

U radu je prikazan pristup izrade diskretnog numeričkog modela pomoću programa LMGC90 koji se zasniva na NSCD metodi. Program LMGC90 nema grafičko sučelje te je model opisan matematički. LMGC90 se zasniva na *open source* filozofiji, što ga čini vrlo dostupnim programske paketo.

Rezultati koji su proizašli iz dinamičke analize upućuju na probleme nelinearnog ponašanja građevina izvedenih od kamenih blokova. Nelinearnost se očituje u smicanju odnosno klizanju između blokova, što je teško predvidjeti MKE-om. Model upućuje na problem istiskivanja središnjeg kamena, što može znatno utjecati na stabilnost konstrukcije, ali potrebno je provesti dodatna istraživanja.

Definiranje geometrije nedeformabilnim diskretnim elementima složen je proces, ali je jednostavno definiranje materijalnih karakteristika. Potrebno je poznavati težinu kamena i koeficijent trenja između pojedinih blokova.

Nastavak daljnjeg istraživanja podrazumijeva proširenje modela na cijelu katedralu i provođenje eksperimentalnih istraživanja radi dobivanja kvalitetnih podataka vezanih uz trenje između pojedinih diskretnih elemenata. Također izrada modela s deformabilnim diskretnim elementima može dati bolji uvid u stanje naprezanja pojedinih blokova.

## LITERATURA

- [1] Smoljanović, H.: Seizmička analiza zidanih konstrukcija metodom konačno-diskretnih elemenata, doktorski rad, Sveučilište u Splitu, 2013.
- [2] Hedman, S.: Smooth and non-smooth approaches to simulation of granular matter, magistarski rad, Umeå University, 2011.
- [3] Dubios, F., Renouf, M.: Discrete Element Methods for the simulation of divided media, Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, 2015.
- [4] Hibbeler, R. C.: Engineering Mechanics: Dynamics, Prentice Hall, 2012.

- [5] Acary, V., Jean, M.: Numerical simulation of monuments by the contact dynamics method, HAL (2009), pp. 69-78.
- [6] Čuzela, J.: Prilog obnovi kupole katedrale sv. Jakova u Šibeniku, Rad. Inst. povij. umjet. (1994), pp. 205-210.
- [7] Vibrationdata, <http://www.vibrationdata.com/elcentro.htm>, pristupljeno: 11.2.2015.
- [8] Seismo Artif 2016, <http://www.seismosoft.com/>, pristupljeno: 30.6.2016.
- [9] Seismo Artif 2016, [http://www.seismosoft.com/Public/EditorUpload/Flash/SeismoArtifv2.1\\_GettingStarted.swf](http://www.seismosoft.com/Public/EditorUpload/Flash/SeismoArtifv2.1_GettingStarted.swf), pristupljeno: 30.6.2016.
- [10] Carvalho, E.: Eurocode 8 General rules and seismic actions, Dissemination of information workshop, Brussels, 2008.
- [11] Karte potresnih područja Republike Hrvatske, <http://seizkarta.gfz.hr/karta.php>, pristupljeno 31.6.2016.
- [12] Jeong, S., Lee, K., Jang, W.: PRISM for Earthquake Engineering A Program for seismic response analysis of SDOF system, Version 1.0.2, INHA University, 2011.
- [13] Gutiérrez, J.M., Magreñán, A.A., Varona, J.L.: The "Gauss-Seidelization" of iterative methods for solving nonlinear equations in the complex plane, Applied Math. Comp., 218 (2011), pp. 2467-2479, <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2011.07.061>
- [14] De Casto Oliveira, D.V.: Experimental and numerical analysis of blocky masonry structures under cyclic loading, doktorski rad, Universidade do Minho, 2003.
- [15] Crnković, B., Šarić, Lj.: Građenje prirodnim kamenom, Sveučilište u Zagrebu, 1992.
- [16] ParaView, <http://www.paraview.org/paraview-guide/>, pristupljeno 30.6.2016.