

# O proračunu zidova s otvorima

---

**Fresl, Krešimir; Lazarević, Damir; Hak, Sanja; Šavor Novak, Marta**

*Source / Izvornik:* **Građevinar, 2015, 67, 103 - 121**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:014053>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-10-05**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)



# O proračunu zidova s otvorima

PRIPREMILI:

Krešimir Fresl, Damir Lazarević,  
Sanja Hak, Marta Šavor Novak

Profesoru Simoviću u spomen

## 1. Uvod

Zidovi s otvorima konstrukcijski su sistemi sastavljeni od punih zidova u istoj ravnini, međusobno spojenih gredama krutosti kojih su razmjerno male u odnosu na krutosti zidova, ali ne tako male da je njihovo sudjelovanje u povećanju nosivosti sistema zanemarivo. Puni zidovi, razdvojeni susjednim nizovima otvora, nazivaju se i posmičnim zidovima. Budući da su posmični zidovi gredama povezani u sustav u kojem djeluju tako da je nosivost sklopa veća od zbroja nosivosti pojedinih zidova, zidovi s otvorima nazivaju se i povezanim zidovima, dok se nazivom spojne grede naglašava uloga koju one imaju. U okviru ovoga članka zidove s otvorima analizirat ćemo kao nosive elemente namijenjene preuzimanju ekvivalentnih statičkih horizontalnih djelovanja u svojoj ravnini. Horizontalna se djelovanja u zidove s otvorima najčešće unose kao koncentrirane sile u razinama stropnih ploča.

Razvoj numeričkih postupaka - ponajprije metode konačnih elemenata - i njihovih programskih realizacija, kao i brzih računala s velikim memorijskim prostorom, omogućili su proračun armiranobetonskih objekata visokogradnje kao cjelovitih prostornih sklopova. Zidove iz cjeline izdvajamo radi provjere ili analize dobivenih rezultata te radi dimenzioniranja ili, ako je postupak dimenzioniranja automatiziran, radi provjere armature. No, ako je dispozicija zgrade klasična, sa zidovima tlocrtno svrstanima u dva simetrična, međusobno okomita niza, povezana stropnim pločama krutima u njihovim ravninama, i s jasnim hijerarhijskim slijedom prijenosa opterećenja između nosivih elemenata, pojedini se zidovi mogu bez veće pogreške s pripadnim opterećenjima i rubnim uvjetima izdvojiti i analizirati primjenom modela utemeljenoga na ravninskom stanju naprezanja. Štoviše, usporedbe rezultata proračuna primjera opisanih u članku, a i još nekih, pokazuju da ravninski štapni modeli izdvojenih zidova s otvorima daju rezultate visoke točnosti, usporedive s modelima s ravninskim konačnim

Odbor za dodjelu nagrada znanstvenim radnicima, imenovan odlukom Sabora SR Hrvatske br. 786 od 30. ožujka 1973. godine, u sastavu:

predsjednik: prof. dr Milen Prelog,

članovi: Ing. Ante Adorić, prof. Neda Andrić, prof. dr Ljubomir Božović, prof. dr Marcel Delak, prof. dr Rudolf Filipović, dr ing. Božidar Frančić, dr Siniša Maričić, Iven Martinec, dipl. ekon., Juraž Kazmilić dipl. prav. i dr Ivo Šlaus,

donio je na temelju Zakona o Republičkom fondu za naučni rad na svojoj sjednici dne 11. srpnja 1973. godine

O D L U K U  
o nagrađivanju znanstvenih radnika

III Nagradom "Nikola Tesla" i novčanom iznosom od po Din 10.000.- nagrađuju se:

6. Prof. dr Veselin Simović izvanredni profesor Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu za znanstveni rad na području teorije konstrukcija i stručnog djela "Zidovi s otvorima i okvirne konstrukcije".

Slika 1. Odluka o dodjeli nagrade Nikola Tesla

elementima, iako, primjerice, štapni model deveteroetažnog zida s jednim nizom otvora ima u metodi sila 27 nepoznanica (po tri nepoznate vrijednosti unutarnjih sila u svakoj gredi), a u općoj metodi pomakâ 54 nepoznanice (18 slobodnih čvorova s po tri stupnja slobode), dok je broj nepoznanica u modelu s konačnim elementima veći od 11000. (Kako je riječ ponajprije o povijesnom prikazu, a i zbog činjenice da je metoda konačnih elemenata danas alat svakodnevne konstruktorske prakse i neizbježna tema znanstvenih članaka o proračunu konstrukcija, nećemo se njome posebno baviti.)

Za doprinos proračunu zidova s otvorima Veselinu Simoviću dodijeljena je godine 1973. Republička nagrada Nikola Tesla za znanstveni rad (slika 1.). Opisu postupka koji je uveo početkom sedamdesetih godina [1, 2] posvećen je središnji, najopsežniji dio članka. Autorovo smo izlaganje slijedili po duhu, ako već ne po slovu.

Postupcima predloženima u vrijeme "ručnih" proračuna potpomognutih "šiberom" cilj je bio ostvarivanje zadovoljavajuće točnosti uz smanjenje opsega proračuna - kako trajanje proračuna ne bi ovisilo o broju nepoznanica, tražena su rješenja u "zatvorenom" obliku.

U postupku koji je predložio M. Tessier, a poopćio i proširio Otto Werner [3], rješava se diferencijalna jednadžba progibne linije zida, a potom se primjenom konstitucijskih relacija izračunavaju vrijednosti unutarnjih sila. Široku je primjenu našao postupak u kojem se diskretne veze zidova spojnim gredama "razmazuju" u zamjenjujuću neprekinutu elastičnu vezu. Posmična sila u njoj nepoznanica je diferencijalne jednadžbe. Korijeni su postupka u radovima A. Ržanjčina o spojenim gredama [4], a razvio ga je i iscrpno razradio Riko Rosman u nizu članaka u domaćim [5, 6] i inozemnim časopisima te u knjižici [7] (u njoj je dan i popis radova objavljenih u inozemnim časopisima).

I V. Simović je izveo rješenje u zatvorenom obliku. No, on je zadržao diskretne veze zidova, tako da je jednadžba koju rješava diferencijalska, a ne diferencijalna [8].

Vjerujemo da postupak V. Simovića nije zastario niti da bi ga "moderniji" postupci trebali potisnuti u zaborav, kao, uostalom, ni mnoge druge "ručne" - približne ili grafičke - postupke. Ručni postupci omogućavaju nalaženje približnih vrijednosti unutarnjih sila i pomaka za potvrdu valjanosti rješenja dobivenih proračunima uporabom računalnih programa. Računalni se programi danas rutinski primjenjuju u svakodnevnoj projektantskoj praksi, a njihova je uporaba neophodna za smanjivanje netočnosti uzrokovanih pojednostavnjenjima bez kojih je ručni proračun neprovediv, ali će oprezan inženjer provjeriti prihvatljivost opsežnih rezultata računalne analize usporedbom s približnim, ručno izračunanim vrijednostima. Jednostavnost opisa konstrukcije u grafičkom sučelju (uz automatsko generiranje mreže konačnih elemenata), brzina kojom računala provode proračune i barokni prikaz rezultata ne smiju dati lažnu sigurnost da se računalni program može upotrebljavati bez poznavanja i bez razumijevanja teorijske podloge i algoritama kojima je ta podloga u programu realizirana te da su rezultati ispravni i da je konstrukcija "dobra" samim time što je proračun proveden računalnim programom. Jednako brzo kao ispravno rješenje računalo može zbog pogreške u ulaznim podacima ili zbog pogreške u programskom kôdu ili zbog gomilanja pogrešaka zaokruživanja ili zbog neke druge predvidive ili nepredvidive pogreške dati pogrešne rezultate... pogrešne, ali često ne tako pogrešne da bi to bilo jasno uočljivo. Inženjer mora znati kako ispravno rješenje "izgleda", a to znači da mora znati oblikovati i (bez računala) proračunati pojednostavnjeni model konstrukcije. U ručnom proračunu inženjer ima neposrednu i potpunu kontrolu nad svakim korakom i nad svakim međurezultatom.

U knjizi [9] su, osim nalaženja približnih vrijednosti za provjeru rezultata računalnih proračuna, kao razlozi primjene ručnih postupaka navedene i razmjerno brza provjera i prilagodba probnih, na temelju inženjerskoga iskustva odabranih dimenzija konstrukcijskih elemenata te razmjerno brz odabir

manjeg broja s konstrukcijskoga ili s ekonomskog gledišta povoljni(jih) konstrukcijskih sklopova koje će imati smisla točnije proračunati. Nakon obrazloženja smislenosti i svrhovitosti primjene približnih postupaka u inženjerskoj praksi opisan je spomenuti postupak R. Rosmana s neprekinutom elastičnom vezom kojom je zamijenjen niz otvora. Taj je postupak prikazan i knjizi [10], a ušao je i u predavanja predmeta Visoke građevine na smjeru Konstrukcije diplomskoga studija na Građevinskom fakultetu u Zagrebu [11]. Zbog svoje je diskretne prirode postupak V. Simovića intuitivno prihvatljiviji od postupka s neprekinutom vezom između zidova, a izrazi kojima su dana rješenja diferencijalnih jednadžbi jednostavniji su (rješenja diferencijalnih jednadžbi sadrže hiperbolne funkcije [7] ili trigonometrijske redove [5]), tako da je i provedba postupka lakša i brža.

U posljednjem odjeljku članka ukratko je opisan proračun zidova s otvorima općom metodom pomakâ. Taj proračun, kao i proračun metodom sila bez uvođenja pretpostavaka kojima se smanjuje broj nepoznanica, daje točna rješenja - naravno, u okviru (linearne) štapne statike. Provedene usporedbe rezultata proračuna postupkom V. Simovića s rezultatima proračuna općom metodom pomakâ pokazuju moguća ograničenja njegove primjenjivosti ili, drugim riječima, vrste zidova za koje se rezultati mogu smatrati pouzdanima.

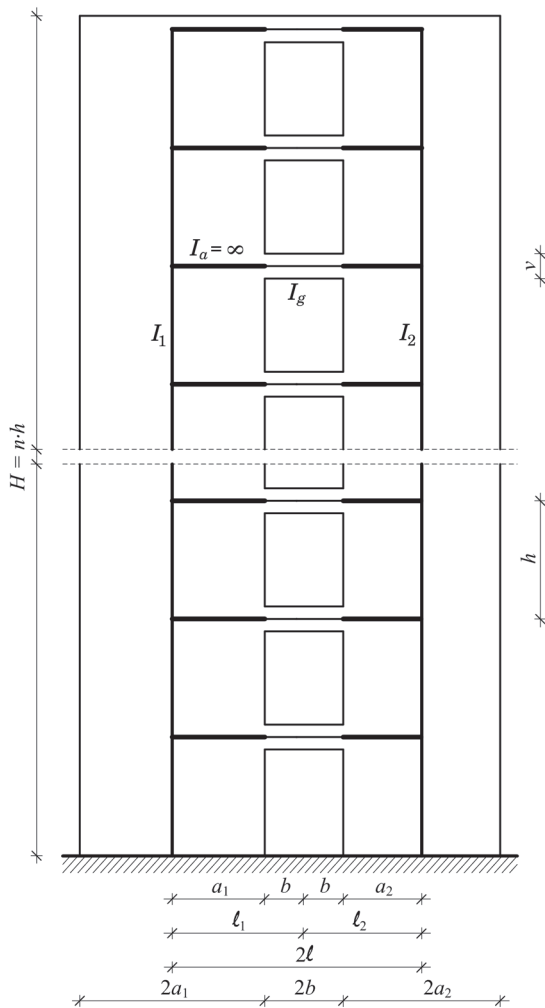
## 2. Postupak Veselina Simovića

Postupak proračuna primjenom diferencijalnih jednadžbi, koji je V. Simović predložio u svojoj disertaciji [1] u travnju 1969. godine te potom potpunije i detaljnije razradio u prvom, opsežnijem dijelu knjige [2], objavljene krajem 1971. godine, izveden je iz metode sila. Postupak je dobar i za provođenje na računalu, pa je, iako su to još bili rani dani primjene računala u građevinarstvu, Heinrich Werner izradio računalni program ZID-E, koji je upotrijebljen u proračunu više stotina visokih zgrada u Hrvatskoj, u drugim republikama tadašnje države i u inozemstvu [12]. Kasnije je, početkom osamdesetih godina, Zvonimir Žagar napisao program za džepno računalo (u to vrijeme popularan TI 59) za proračun zidova s jednim nizom otvora [13]. U radu [14] opisana su tri postupka određivanja slobodnih oscilacija zidova s otvorima po proračunskoj shemi i s osnovnim sistemom uvedenima u postupku V. Simovića, a rezultati su uspoređeni s rezultatima dobivenima proračunom standardnom metodom sila.

Proračunska je shema zida s otvorima štapni sistem, ali su, za razliku od "običnoga" okvira, samo dijelovi greda između otvora, duljina  $2b$ , elastični, dok se njihovi dijelovi "unutar" posmičnih zidova, duljina  $a_1$  i  $a_2$ , uzimaju apsolutno krutima (slika 2.). Stupovi etaža, u koje su posmični zidovi podijeljeni po visini, po cijeloj su svojoj duljini elastični.

Pri savijanju posmičnih zidova i greda poprečni presjeci ostaju ravni, ali ne i okomiti na savijene osi. Pretpostavka o ravnim presjecima opravdana je i za zidove zato što su njihove visine višestruko veće od širina, a progibne su im linije bliske

konzolnima, jer znatno mekše grede ne mogu značajnije ograničiti zaokretanja u spojevima sa zidovima.



Slika 2. Proračunska shema zida s otvorima u postupku V. Simovića

Primjena "klasične" metode sila dovodi do razmjerno velikih sustava linearnih jednadžbi: za zid sa  $e$  etaža i  $n$  nizova otvora broj je nepoznanica  $3en$ . U predračunalno vrijeme, pa i u vrijeme ograničene (i skupe) uporabe računala koja su zauzimala cijele sobe, rješavanje je većih sustava jednadžbi zahtijevalo mnogo vremena i usredotočenosti: broj računskih operacija potrebnih za rješavanje sustava koji sadrži  $m$  linearnih jednadžbi sa  $m$  nepoznanica proporcionalan je sa  $m^3$ . Kako su koeficijenti u jednadžbama metode sila koeficijenti popustljivosti, i samo oblikovanje sustava jednadžbi može biti dugotrajno, pa i podložno pogreškama, posebno ako se dijagrami unutarnjih sila u jediničnim stanjima "protežu" po većem dijelu sistema. Uz nekoliko pretpostavaka i, time, pojednostavnjenja, V. Simović je sustav jednadžbi metode sila preveo u linearne diferencijske jednadžbe s konstantnim koeficijentima.

Mehaničke su pretpostavke:

- grede su uzdužno (apsolutno) krute;

- u polovištima elastičnih dijelova greda su točke infleksije njihovih progibnih linija, što znači da su u tim polovištima momenti savijanja jednaki nuli;
- progibne linije posmičnih zidova međusobno su jednake po cijeloj visini zida.

Prema teoriji sastavljenih greda iz treće pretpostavke slijedi da su vrijednosti momenata savijanja u pojedinim posmičnim zidovima u horizontalnom presjeku kroz cijeli zid na visini  $z$  jednake vrijednosti ukupnoga momenta savijanja u tom presjeku pomnoženoj omjerima fleksijskih krutosti posmičnih zidova i zbroja tih krutosti, odnosno, omjerima momenata tromosti  $I_j$  zidova i njihova zbroja  $I_z$ :

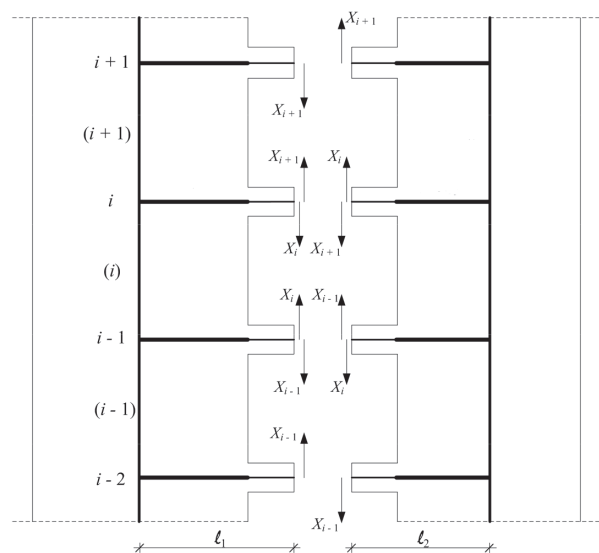
$$M_j(z) = M(z) \frac{I_j}{I_z}. \quad (1)$$

Kako bi se omogućio prijevod u diferencijske jednadžbe s konstantnim koeficijentima, pretpostaviti treba i stanovitu pravilnost: po visini zida se, na dijelovima koji obuhvaćaju nekoliko etaža (u graničnom slučaju barem jednu), moduli elastičnosti i posmika, debljine zidova i greda, visine etaža, širine otvora, kao ni visine greda ne mijenjaju.

## 2.1. Zid s jednim nizom otvora

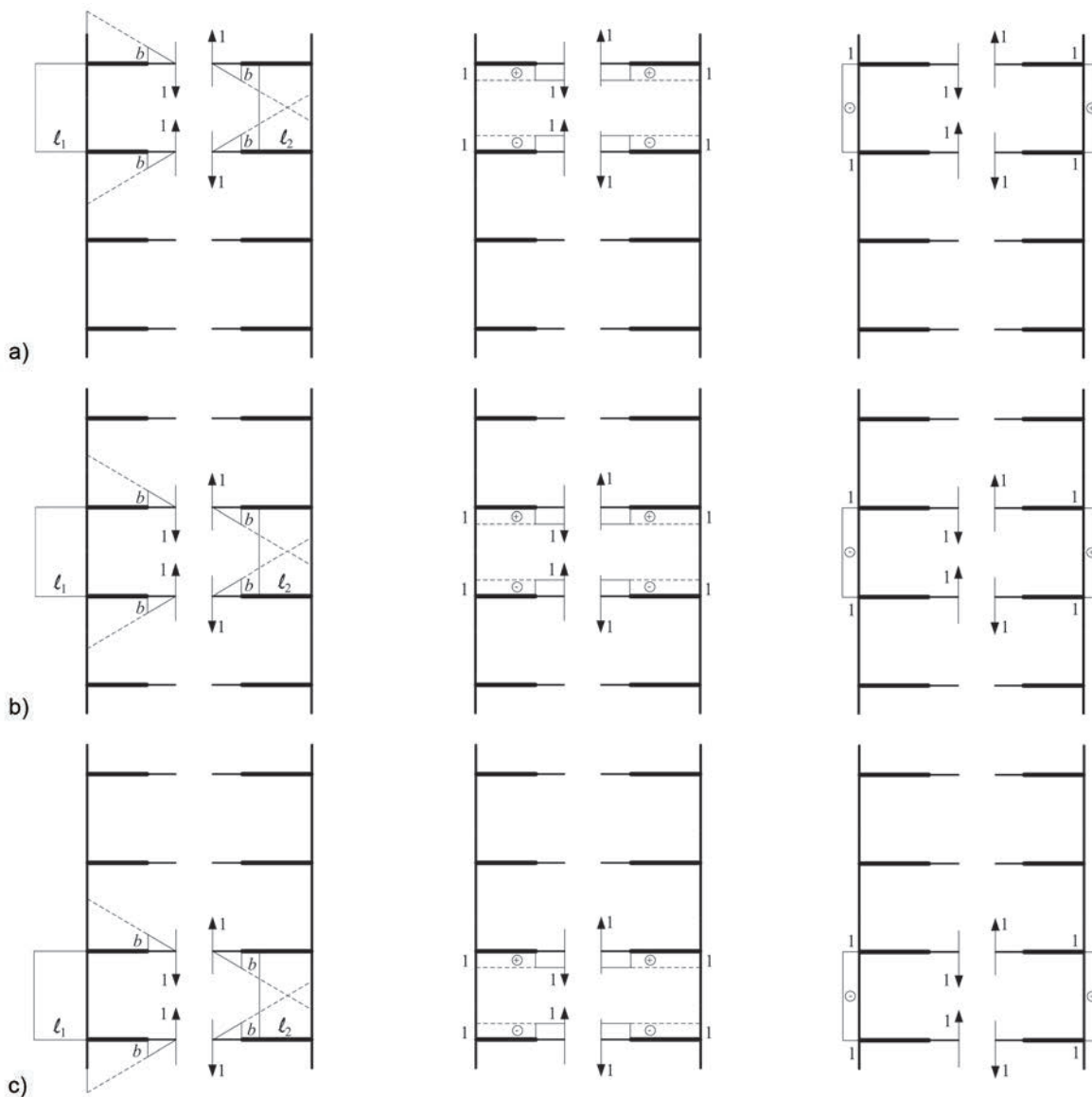
### 2.1.1. Osnovno rješenje

Osnovne zamisli postupka prikazat ćemo u (gotovo) najjednostavnijem slučaju: pretpostavit ćemo da su netom spomenute geometrijske i materijalne karakteristike jednake na cijeloj visini zida.



Slika 3. Dio osnovnog sistema za zid s jednim nizom otvora

Raskidanjem svih greda u polovini njihova raspona dobiven je osnovni sistem sastavljen od dviju vertikalnih konzola s horizontalnim istakama. Uz prve dvije mehaničke pretpostavke,



Slika 4. Jedinični dijagrami  $m$ ,  $t$  i  $n$ : a) polje  $i+1$ ; b) polje  $i$ ; c) polje  $i-1$

u presjecima kao statički neodređene ostaju samo poprečne sile. Te su neodređene sile grupirane: umjesto jednoga para suprotno orijentiranih sila neodređenoj vrijednosti  $X_i$  pridružena je grupa djelovanja koja sadržava dva para sila (slika 3.). I, s druge strane, raskinuta veza nije "zamijenjena" jednim, nego dvama parovima sila koji pripadaju grupama pridruženima dvjema neodređenim vrijednostima,  $X_i$  i  $X_{i+1}$ . U općem slučaju, grupa djelovanja može sadržavati nekoliko parova sila ili parova momenata ili i parova sila i parova momenata, a neodređena je vrijednost, kojoj je grupa pridružena, koeficijent kojim je izražen doprinos svih djelovanja grupe stvarnom stanju izvornoga neodređenog sistema.

Grupu  $i$ , silama i momentima koje su dane pogodno odabrane vrijednosti (koje mogu, ali i ne moraju biti jedinične), nazvat ćemo  $i$ -tom osnovnom grupom, a stanje u kojem se osnovni sistem nalazi pri njezinu djelovanju  $i$ -tim osnovnim stanjem (ako

su vrijednosti jedinične, uvrženiji je naziv jedinično stanje). Ukupan broj neodređenih vrijednosti - dakle, broj grupa statički neodređenih djelovanja - jednak je, kao i u "klasičnoj" formulaciji metode sila, stupnju statičke neodređenosti izvornoga sistema. Neodređena se djelovanja grupiraju radi (računske) ortogonalizacije ili radi lokalizacije [15]. Osnovna stanja  $i$  i  $j$  nazivaju se ortogonalnima ako pripadni koeficijent popustljivosti  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$  iščezava. Pri potpunoj ortogonalizaciji iščezavaju svi koeficijenti za koje je  $i \neq j$ , tako da je sustav jednadžbi neprekinutosti dijagonalan. Iako je tada rješavanje sustava trivijalno ( $X_i = -\delta_{i0}/\delta_{ii}$ ), provedba potpune ortogonalizacije često traži složen(ij)e grupe, a time i dugotrajnije izračunavanje preostalih koeficijenata  $\delta_{ij}$  i slobodnih članova  $\delta_{i0}$ . Lokalizacijom se pak utjecaj grupe djelovanja ograničava na razmjerno mali dio sistema, pa se time najčešće postiže i stanoviti stupanj ortogonalnosti.

Kao što se na jediničnim dijagramima prikazanim na slici 4. može vidjeti, provedenim je grupiranjem neodređenih sila ostvarena značajna lokalizacija: utjecaj grupe  $i$  proteže se samo na stupove i gredu  $i$ -te etaže i na gredu etaže  $i-1$ . Zahvaćeni dio sistema nazvat ćemo  $i$ -tim poljem. Susjedna polja dijele gredu, a polja koja nisu susjedna nemaju ništa zajedničko, tako da je  $\delta_{ij} \neq 0$  ako i samo ako su  $i$  i  $j$  susjedna polja, to jest, ako je  $j = i-1$  ili  $j = i+1$ . Stoga su jednadžbe neprekinutosti za raskinute veze u kojima djeluju sile grupa  $i = 2, \dots, n-1$  tročlane jednadžbe:

$$\delta_{i,i-1} X_{i-1} + \delta_{i,i} X_i + \delta_{i,i+1} X_{i+1} + \delta_{i,0} = 0. \quad (2)$$

Za raskinute veze u kojima djeluju sile prve grupe jednadžba je neprekinutosti

$$\delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,2} X_2 + \delta_{1,0} = 0, \quad (3)$$

dok je za veze u kojima djeluju sile  $n$ -te grupe jednadžba

$$\delta_{n,n-1} X_{n-1} + \delta_{n,n} X_n + \delta_{n,0} = 0. \quad (4)$$

Parovi neodređenih sila  $i$ -te grupe djeluju u raskidima u gredama  $i-1$  i  $i$ , tako da su, kinematički, koeficijenti popustljivosti  $\delta_{ij}$  i slobodni član  $\delta_{i,0}$  stanovite linearne kombinacije orijentiranih duljina relativnih pomaka u tim raskidima, izazvanih djelovanjima parova sila osnovnih grupa  $j$ i djelovanjem vanjskoga opterećenja, a  $i$ -ta pak jednadžba neprekinutosti iskazuje iščezavanje linearne kombinacije orijentiranih duljina pomaka u tim raskidima. Primjenom teorema o virtualnim silama može se pokazati da su koeficijenti u linearnoj kombinaciji jednaki vrijednostima sila  $i$ -te osnovne grupe, uzevši u obzir orijentacije sila i pomaka. Označimo li orijentirane duljine relativnih pomaka u raskidima greda  $i-1$  i  $i$  sa  $\delta_{i-1}^\circ$  i  $\delta_i^\circ$ , linearna kombinacija koja odgovara  $i$ -toj grupi sila bit će  $\delta_i = -1 \cdot \delta_{i-1}^\circ + 1 \cdot \delta_i^\circ$ . Naime, uzeli smo da su sile u osnovnim grupama jedinične, a orijentacije relativnih pomaka prikazane na slici 5. smatrat ćemo pozitivnima, tako da par sila  $i$ -te osnovne grupe u raskidu grede  $i$  djeluje u pozitivnom smislu relativnih pomaka, dok je u raskidu grede  $i-1$  smisao djelovanja sila suprotan od pozitivnoga smisla pomaka.

Prema slici 4.b. koeficijent popustljivosti  $\delta_{ij}$  sadržava doprinose momenata savijanja i poprečnih sila u elastičnim dijelovima greda  $i$ -toga polja, duljina  $2b$ , te doprinose momenata savijanja i uzdužnih sila u stupovima tog polja:

$$\delta_{i,j} = 2 \frac{2b^3}{3EI_g} + 2 \frac{2kb}{GF_g} + \frac{(2l)^2 h}{EI_z} + \frac{h}{EF_1} + \frac{h}{EF_2} \quad (5)$$

( $k$  je koeficijent prosječne raspodjele posmičnih naprezanja; za pravokutne je presjeka njegova vrijednost 1,2). Pretpostavili smo da se moduli elastičnosti i posmika, kao ni geometrijske karakteristike zidova i greda ne mijenjaju po visini, pa  $\delta_{ij}$  ne ovisi o  $i$  za  $i=2, \dots, n$ , odnosno,  $\delta_{2,2} = \delta_{3,3} = \dots = \delta_{n,n}$ . Razlikuje se samo  $\delta_{1,1}$ , jer najdonje polje ima samo jednu, gornju gredu:

$$\delta_{1,1} = \delta_{i,i} - \left( \frac{2b^3}{3EI_g} + \frac{2b}{GF_g} \right) \quad (6)$$

Dvama su susjednim poljima zajedničke unutarnje sile u gredi koju dijele, pa koeficijent popustljivosti  $\delta_{i,i-1}$  sadržava doprinose momenata savijanja i poprečnih sila u gredi  $i$ , zajedničkoj poljima  $i-1$  i  $i$  (slike 4.a. i b.), a koeficijent  $\delta_{i,i+1}$  doprinose momenata savijanja i poprečnih sila u gredi  $i+1$  između polja  $i$  i  $i+1$  (slike 4.b. i c.):

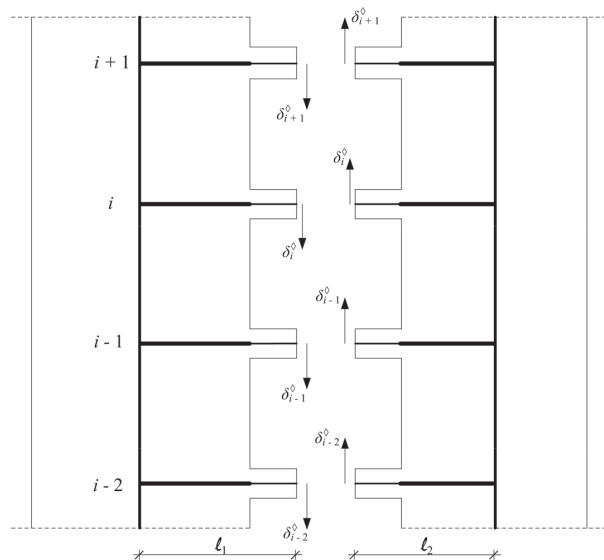
$$\delta_{i,i-1} = \delta_{i,i+1} = - \left( \frac{2b^3}{3EI_g} + \frac{2b}{GF_g} \right) \quad (7)$$

Kako su moduli elastičnosti i posmika, rasponi i poprečni presjeci svih greda jednaki,  $\delta_{i,i-1}$  i  $\delta_{i,i+1}$  ne ovisi o  $i$ : svi su  $\delta_{i,i-1}$  i  $\delta_{i,i+1}$  međusobno jednaki.

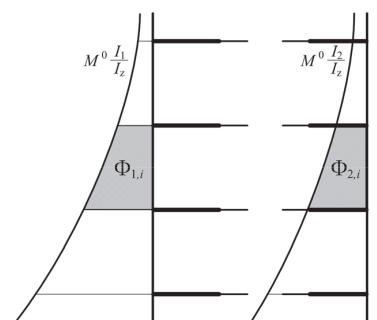
Označimo li sa  $\Phi_i$  ploštinu dijela površine dijagrama ukupnih momenata savijanja zbog vanjskoga opterećenja koja pripada polju  $i$ , bit će  $\Phi_{i,1} = \Phi_{i,1} / l_1$  i  $\Phi_{i,2} = \Phi_{i,2} / l_2$ , pa je slobodni član, prema slikama 4.b. i 6.,

$$\delta_{i,0} = \frac{1}{EI_1} \Phi_{i,1} l_1 + \frac{1}{EI_2} \Phi_{i,2} l_2 = \frac{2l}{EI_z} \Phi_i. \quad (8)$$

Ploštine  $\Phi_{i,1}$ ,  $\Phi_{i,2}$  i  $\Phi_i$  smatrat ćemo "orijentiranim" veličinama: uzet ćemo da su ploštine dijelova površina s lijeve strane osi stupova pozitivne, a da su ploštine dijelova desno od osi negativne.



Slika 5. Pozitivne orijentacije relativnih pomaka u raskinutim vezama



Slika 6. Opći dijagram  $M^\circ$



Da istaknemo neovisnost koeficijenata popustljivosti o  $i$ , uvest ćemo oznake  $\bar{\delta} = \delta_{i,i}$  za  $i = 2, \dots, n$  i  $\bar{\delta} = \delta_{i,i-1} = \delta_{i+1,i}$ , pa jednadžbe neprekinutosti (2), (3) i (4) prelaze u

$$\bar{\delta} X_{i-1} + \bar{\delta} X_i + \bar{\delta} X_{i+1} + \delta_{i,0} = 0, \tag{9}$$

$$\delta_{1,1} X_1 + \bar{\delta} X_2 + \delta_{1,0} = 0, \tag{10}$$

$$\bar{\delta} X_{n-1} + \bar{\delta} X_n + \delta_{n,0} = 0. \tag{11}$$

Uzmemo li da su nepoznanice  $X_i$  članovi niza  $\{X_i\}_{i=0}^\infty$ , jednadžbu (9) možemo smatrati *nehomogenom linearnom diferencijskom jednadžbom drugoga reda s konstantnim koeficijentima*. Mehaničko značenje grupa djelovanja imaju, naravno, samo članovi niza za  $i = 1, \dots, n$ .

Diferencijska jednadžba je jednadžba koja sadržava nekoliko članova nepoznatoga niza indeksi kojih su opći brojevi. Takva se jednadžba naziva i *rekurzijskom relacijom* [16], jer je njome opći član niza definiran rekurzivno, pomoću prethodnih članova, što postaje očiti(ji)m napišemo li jednadžbu (9) u obliku

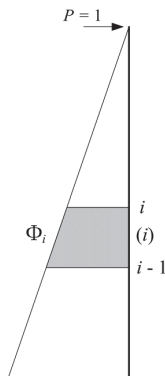
$$X_{i+1} = -X_{i-1} - \bar{\delta} X_i / \bar{\delta} - \delta_{i,0} / \bar{\delta}. \tag{12}$$

Osim članova  $X_i$  nepoznatoga niza  $\{X_i\}_{i=0}^\infty$  u jednadžbi (9) se u slobodnome članu, koji prema (8) možemo pisati u obliku  $\delta_{i,0} = \omega \Phi_i$ , pojavljuje i član  $\Phi_i$  niza  $\{\Phi_i\}_{i=0}^\infty$ . Članovi tog niza, međutim, vrijednosti su poznate funkcije

$$\Phi : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi : i \mapsto \Phi(i), \tag{13}$$

jer je, rekosmo,  $\Phi_i = \Phi(i)$  orijentirana ploština dijela površine dijagrama ukupnih momenata savijanja izazvanih poznatim vanjskim opterećenjem. Primjerice, na slici 7. prikazan je dijagram ukupnih momenata izazvanih djelovanjem jedinične horizontalne koncentrirane sile na vrhu zida, po osi  $n$ -te grede, orijentirane slijevna nadesno. Vrijednosti momenata u razinama greda  $i-1$  i  $i$  su

$$M_{i-1}^0 = -(n-i+1)h \quad i \quad M_i^0 = -(n-i)h, \tag{14}$$



Slika 7. Dijagram  $M^0$  za opterećenje jediničnom silom u osi najgornje grede

pa je, kao površina pripadnoga trapeza,

$$\Phi_i = \Phi(i) = -h^2 i + \left(n + \frac{1}{2}\right) h^2. \tag{15}$$

Jednadžbu (9) najčešće pišemo u obliku

$$\bar{\delta} X_{i-1} + \bar{\delta} X_i + \bar{\delta} X_{i+1} = -\omega \Phi_i, \tag{16}$$

sa slobodnim članom s desne strane znaka jednakosti. Ako je njezin slobodni član jednak nuli, jednadžba je *homogena*, dok je jednadžba s od nule različitim slobodnim članom *nehomogena*. Ako su svi njezini pribrojnici, koji sadržavaju članove  $X_i$  nepoznatoga niza, monomi prvoga stupnja, diferencijska je jednadžba linearna. U jednadžbi (16) koeficijent  $\bar{\delta}$  uz  $X_i$  kao ni koeficijenti  $\bar{\delta}$  uz  $X_{i-1}$  i  $X_{i+1}$ , nisu funkcije varijable  $i$ , pa je riječ o jednadžbi s konstantnim koeficijentima.

Red diferencijske jednadžbe razlika je najvećega i najmanjeg indeksa članova niza koji se u njoj pojavljuju. Kako je  $(i+1) - (i-1) = 2$ , jednadžba (16) drugog je reda.

Za poznavanje  $n$ -toga člana niza zadanog diferencijskom jednadžbom poznavati treba svih prethodnih  $n-1$  članova. Riješiti diferencijsku jednadžbu znači pronaći funkciju

$$X : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad X : i \mapsto X(i) \tag{17}$$

kojom su članovi niza  $\{X_i\}_{i=0}^\infty$  definirani neposredno, u ovisnosti o svojim indeksima,  $X_i = X(i)$ . Odredbenu funkciju  $X$  i njome zadani niz  $\{X_i\}_{i=0}^\infty$  možemo poistovjetiti - matematičari će ionako reći da niz jest funkcija cjelobrojne varijable te da je indeksni zapis  $X_i$  samo sažetiji oblik "funkcijskoga" zapisa  $X(i)$ .

Dobiveni je niz *opće rješenje* diferencijske jednadžbe: ako je diferencijska jednadžba  $n$ -toga reda, njezino će opće rješenje sadržavati  $n$  neodređenih koeficijenata. Za izdvajanje *posebnoga rješenja* treba zadati  $n$  članova niza. Ako je to prvih  $n$  članova, ili, općenitije, bilo kojih  $n$  uzastopnih članova, riječ je o *početnim uvjetima*. Ako pak zadani članovi nisu uzastopni, govorimo o *rubnim uvjetima*. Rubni uvjeti mogu biti i složenijih oblika od jednostavno zadanih vrijednosti - za diferencijsku jednadžbu (16) rubni su uvjeti zadani jednadžbama (10) i (11). Naziv "rubni" postaje sada smisleni(ji)m: riječ je o uvjetima koje članovi traženoga niza moraju zadovoljiti na krajevima njegova dijela koji nas zanima, na rubu područja kojemu dajemo fizikalni smisao - u našem primjeru, u najdonjem i najgornjem polju. Budući da su  $\bar{\delta} > 0$ ,  $\omega > 0$  i  $\bar{\delta} < 0$ , bit će

$$-\bar{\delta} / \bar{\delta} = \alpha > 0 \quad i \quad -\omega / \bar{\delta} = \omega > 0. \tag{18}$$

Podijelimo li stoga jednadžbu (16) sa  $\bar{\delta}$ , dobit ćemo

$$X_{i-1} - \alpha X_i + X_{i+1} = \omega \Phi_i. \tag{19}$$

Neka su nizovi  $\{K_i\}_{i=0}^\infty$  i  $\{L_i\}_{i=0}^\infty$  bilo koja dva rješenja jednadžbe (19), što znači da za bilo koja tri njihova uzastopna člana vrijedi

$$K_{i-1} - \alpha K_i + K_{i+1} = \omega \Phi_i \quad \text{i} \quad L_{i-1} - \alpha L_i + L_{i+1} = \omega \Phi_i. \quad (20)$$

Oduzmemo li drugu jednakost od prve, dobit ćemo

$$[K_{i-1} - L_{i-1}] - \alpha [K_i - L_i] + [K_{i+1} - L_{i+1}] = 0, \quad (21)$$

pa je, prema tome, niz  $\{K_i - L_i\}_{i=0}^{\infty}$  rješenje homogene diferencijske jednačine

$$X_{i-1} - \alpha X_i + X_{i+1} = 0. \quad (22)$$

Kako je ta jednačica dobivena "brisanjem" slobodnoga člana jednačice (19), nazivamo je *pripadnom homogenom diferencijskom jednačicom* te jednačice.

Slijedi da je opće rješenje nehomogene linearne diferencijske jednačice (19) niz članova kojega su zbrojevi odgovarajućih članova jednoga njezina posebnog rješenja  $\{X_i^{(p)}\}_{i=0}^{\infty}$  i općeg rješenja  $\{X_i^{(h)}\}_{i=0}^{\infty}$  pripadne homogene diferencijske jednačice (22):

$$\{X_i\}_{i=0}^{\infty} = \{X_i^{(h)}\}_{i=0}^{\infty} + \{X_i^{(p)}\}_{i=0}^{\infty}. \quad (23)$$

Pretpostavit ćemo da su članovi niza  $\{X_i^{(h)}\}_{i=0}^{\infty}$  oblika

$$X_i^{(h)} = r^i. \quad (24)$$

Uvrštavanje pretpostavljenoga rješenja u jednačicu (22) daje

$$r^{i-1}(1 - \alpha r + r^2) = 0. \quad (25)$$

Ako je  $r^{i-1} = 0$ , onda je, za  $i-1 > 0$ ,  $r = 0$ , pa dobivamo trivijalno rješenje, niz  $\{0\}_{i=0}^{\infty}$ . Jednačicu

$$r^2 - \alpha r + 1 = 0 \quad (26)$$

nazivamo *karakterističnom jednačicom* jednačice (22). Njezina su rješenja

$$r_1 = \frac{1}{2}(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}) \quad \text{i} \quad r_2 = \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}). \quad (27)$$

Višeteve formule za korijene polinoma daju  $r_1, r_2 = 1$  i  $r_1 + r_2 = \alpha$ . Svaka tri uzastopna člana nizova  $\{r_1^k\}_{k=0}^{\infty}$  i  $\{r_2^k\}_{k=0}^{\infty}$  zadovoljavaju jednačicu (22), a budući da je ta jednačica linearna, lako je pokazati da će je zadovoljiti i po tri uzastopna člana nizova  $\{C_1 r_1^k + C_2 r_2^k\}_{k=1}^{\infty}$ , pri čemu su  $C_1$  i  $C_2$  dvije po volji odabrane konstante, nazvane integracijskim konstantama. Opće je rješenje homogene diferencijske jednačice (22) stoga

$$\{X_i^{(h)}\}_{i=0}^{\infty} = \{C_1 r_1^i + C_2 r_2^i\}_{i=0}^{\infty}, \quad (28)$$

pa je opće rješenje nehomogene jednačice (19)

$$\{X_i\}_{i=0}^{\infty} = \{C_1 r_1^i + C_2 r_2^i + X_i^{(p)}\}_{i=0}^{\infty}. \quad (29)$$

Posebno rješenje  $\{X_i^{(p)}\}_{i=0}^{\infty}$  jednačice (19) ovisi o njezinu slobodnom članu  $\omega \Phi_i$ , a time, posredno, o vanjskom opterećenju. Djeluje li, primjerice, jedinična koncentrirana sila po osi  $n$ -te grede, funkcija  $\Phi$  zadana je izrazom (15). Uz

$$\gamma_{n,1} = -\omega h^2 \quad \text{i} \quad \gamma_{n,0} = \omega \left(n + \frac{1}{2}\right) h^2 \quad (30)$$

slobodni je član

$$\omega \Phi_i = \gamma_{n,1} i + \gamma_{n,0}, \quad (31)$$

što znači da je niz  $\{\omega \Phi_i\}_{i=0}^{\infty}$  određen linearnom funkcijom. Pretpostavimo li da su članovi posebnog rješenja  $\{X_i^{(p)}\}_{i=0}^{\infty}$  istoga oblika,

$$X_i^{(p)} = a_n i + b_n, \quad (32)$$

uvrštavanjem u jednačicu (19) nakon sređivanja dobivamo

$$a_n = \frac{\gamma_{n,1}}{2 - \alpha} \quad \text{i} \quad b_n = \frac{\gamma_{n,0}}{2 - \alpha}. \quad (33)$$

Skup svih rješenja jednačice (17) sadržava  $\infty$  nizova (29), jer i za  $C_1$  i za  $C_2$  možemo odabrati  $\infty$  vrijednosti. Iz tog skupa moramo izdvojiti niz koji zadovoljava rubne uvjete (10) i (11). Dijeljenjem sa  $\bar{\delta}$  rubni uvjeti prelaze u

$$-\alpha_1 X_1 + X_2 = \omega \Phi_1 \quad (34)$$

i

$$X_{n-1} - \alpha X_n = \omega \Phi_n, \quad (35)$$

gdje je  $\alpha_1 = -\bar{\delta}_{1,1} / \bar{\delta} > 0$ . Usporedba izraza (6) i (7) pokazuje da je  $\bar{\delta}_{1,1} = \bar{\delta} + \bar{\delta}$ , pa je  $\alpha_1 = \alpha - 1$ .

Uvrstimo li odgovarajuće članove niza (29) u uvjet (34), dobit ćemo nakon sređivanja

$$(r_1 - \alpha_1) r_1 C_1 + (r_2 - \alpha_1) r_2 C_2 = \omega \Phi_1 + \alpha_1 X_1^{(p)} - X_2^{(p)}, \quad (36)$$

a kako su  $\alpha_1 = \alpha - 1$  i  $\alpha = r_1 + r_2$ , podizraz s lijeve strane znaka jednakosti prelazi u

$$(1 - r_2) r_1 C_1 + (1 - r_1) r_2 C_2. \quad (37)$$

Posebno rješenje  $\{X_i^{(p)}\}_{i=0}^{\infty}$  ne mora zadovoljiti rubne uvjete, ali, naravno, zadovoljava jednačicu (19); za  $i=1$  je

$$X_0^{(p)} - \alpha X_1^{(p)} + X_2^{(p)} = \omega \Phi_1, \quad (38)$$

odakle je

$$\omega \Phi_1 + \alpha_1 X_1^{(p)} - X_2^{(p)} = X_0^{(p)} - (\alpha - \alpha_1) X_1^{(p)}, \quad (39)$$



te rubni uvjet prelazi u jednadžbu

$$(1-r_2)r_1C_1+(1-r_1)r_2C_2=X_0^{(p)}-X_1^{(p)}. \tag{40}$$

Grupa sila  $X_0$  ne postoji, pa se čini da vrijednost  $X_0^{(p)}$  nema "fizikalnoga" smisla. No,  $X_0^{(p)}$  je, formalno, član niza  $\{X_0^{(p)}\}_{i=0}^\infty$  zadanoga funkcijom

$$X^{(p)}: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad X^{(p)}: i \mapsto X^{(p)}(i), \tag{41}$$

tako da se vrijednost  $X_0^{(p)} = X^{(p)}(0)$  može izračunati. Primjerice, za  $X^{(p)}(i) = a_n i + b_n$  su  $X_0^{(p)} = b_n$  i  $X_1^{(p)} = a_n + b_n$ , pa je u rubnom uvjetu (40) s desne strane znaka jednakosti

$$X_0^{(p)} - X_1^{(p)} = -a_n. \tag{42}$$

Uvrstimo li pak odgovarajuće članove niza (29) u uvjet (35), sređivanjem dobivamo

$$(r_1^{-2} - \alpha r_1^{-1})r_1^{n+1}C_1 + (r_2^{-2} - \alpha r_2^{-1})r_2^{n+1}C_2 = \omega\Phi_n - X_{n-1}^{(p)} + \alpha X_n^{(p)}. \tag{43}$$

Podizraz slijeva možemo, uz  $r_1 \cdot r_2 = 1$ , prevesti u

$$(r_2^2 - \alpha r_2)r_1^{n+1}C_1 + (r_1^2 - \alpha r_1)r_2^{n+1}C_2, \tag{44}$$

a kako su  $r_1$  i  $r_2$  rješenja karakteristične jednadžbe (26), slijeva na kraju ostaje

$$-r_1^{n+1}C_1 - r_2^{n+1}C_2. \tag{45}$$

Podizraz zdesna možemo pojednostavniti, kao i u prvom rubnom uvjetu, primjenom činjenice da posebno rješenje zadovoljava jednadžbu (19), pa je za  $i = n$

$$X_{n-1}^{(p)} - \alpha X_n^{(p)} + X_{n+1}^{(p)} = \omega\Phi_n, \tag{46}$$

tako da rubni uvjet (35) daje jednadžbu

$$r_1^{n+1}C_1 + r_2^{n+1}C_2 = -X_{n+1}^{(p)}. \tag{47}$$

Grupa sila  $X_{n+1}$ , kao ni  $X_0$ , ne postoji, ali je  $X_{n+1}^{(p)} = X^{(p)}(n+1)$ . Za  $X^{(p)}(i) = a_n i + b_n$  je  $X^{(p)}(n+1) = a_n(n+1) + b_n$ .

Jednadžbe (40) i (47) tvore sustav dviju linearnih algebarskih jednadžbi s nepoznicama  $C_1$  i  $C_2$ . Uvrštavanje vrijednosti dobivenih rješavanjem tog sustava u (29) daje niz koji zadovoljava diferencijsku jednadžbu (19) i rubne uvjete (34) i (35).

Uzdužne sile u stupovima polja  $i$  suprotno su orijentirane, a po apsolutnoj su vrijednosti međusobno jednake:

$$N_{1,i} = -N_{2,i} = -X_i. \tag{48}$$

Vrijednost je ukupnoga momenta savijanja u nekom presjeku z polja  $i$

$$M_i(z) = M^0(z) - 2\ell X_i. \tag{49}$$

Vrijednost poprečne sile u  $i$ -toj gredi razlika je vrijednosti statički neodređenih sila koje se u njoj "preklapaju":

$$T_i = X_i - X_{i+1}. \tag{50}$$

**Primjer 1.** Kao prvi primjer, riješit ćemo simetričan zid s devet etaža. Uz oznake sa slike 2., neka su  $h = 3,2$  m,  $2a_1 = 2a_2 = 5$  m,  $2b = 2$  m i  $v = 0,6$  m. Neka su uz to debljine posmičnih zidova ( $t_1$  i  $t_2$ ) i spojnih greda ( $t_g$ ) međusobno jednake; vrijednosti unutarnjih sila (za razliku od pomakâ) ne ovise o odabranoj debljini, tako da možemo uzeti da je  $t_1 = t_2 = t_g = 1$  m. Uzet ćemo i da su  $E = 3 \cdot 10^7$  kN/m<sup>2</sup> i  $v = 0$ .

Prema izrazima (5) i (7) su  $\bar{\delta} = 3,29602 \cdot 10^{-6}$  m i  $\bar{\bar{\delta}} = -1,50123 \cdot 10^{-6}$  m, tako da su, prema (18),  $\alpha = 2,19554$  i  $\omega = 0,00746053$ . Prema (15) je  $\Phi_i = -3,2^2 + (9+0,5) \cdot 3,2^2$ , pa je diferencijska jednadžba

$$X_{i-1} - 2,19554 X_i + X_{i+1} = 0,00746053(-10,24i + 97,28). \tag{51}$$

Izrazi (27) daju rješenja  $r_1 = 0,644894$  i  $r_2 = 1,55064$  karakteristične jednadžbe, a izrazi (33) uz izraze (30) koeficijente  $a_n = 0,390698$  i  $b_n = -3,71163$  u posebnom rješenju, pa je

$$X_i = C_1 \cdot 0,644894^i + C_2 \cdot 1,55064^i + 0,390698i - 3,71163. \tag{52}$$

Integracijske konstante  $C_1$  i  $C_2$  rješenja su sustava jednadžbi (40) i (47),

$$-0,355106 C_1 + 0,550643 C_2 = -0,390698, \tag{53}$$

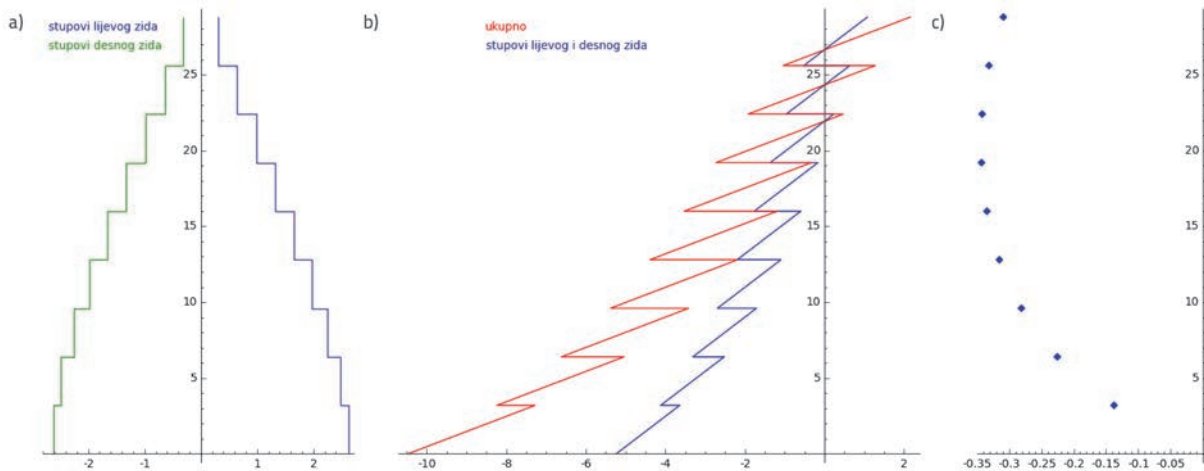
$$0,0124417 C_1 + 80,3746 C_2 = -0,195349, \tag{54}$$

tako da je rješenje diferencijske jednadžbe niz opći član kojega je

$$X_i = 1,09620 \cdot 0,644894^i - 0,00260017 \cdot 1,55064^i + 0,390698i - 3,71163. \tag{55}$$

Opseg je proračuna neovisan o broju etaža - broj etaža pojavljuje se kao konstanta u izrazu za  $\Phi_i$  i u jednadžbi (47) izvedenoj iz rubnog uvjeta na vrhu zida.

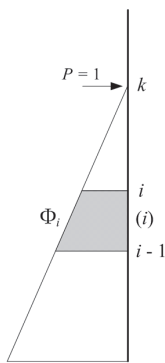
Prema (48), članovi niza za  $i = 1, \dots, 9$  vrijednosti su uzdužnih sila u stupovima desnoga posmičnog zida, a uz promjenu predznaka i u stupovima lijevog; dijagrami su prikazani na slici 8.a. Vrijednosti ukupnih momenata savijanja - zbrojeva momenata u stupovima lijevoga i desnog zida - izračunavamo prema izrazu (49), a vrijednosti u lijevim i desnim stupovima dobivamo množenjem vrijednosti ukupnih momenata omjerima fleksijskih krutosti posmičnih zidova i krutosti zida. Kako je zid simetričan, vrijednosti u stupovima jednake su polovinama ukupnih vrijednosti (slika 8.b.). I napokon, vrijednosti poprečnih sila u spojnim gredama izračunavamo prema izrazu (50) (slika 8.c.).



Slika 8. Simetričan zid s jednim nizom otvora - postupak V. Simovića: dijagrami a) uzdužnih sila u stupovima; b) momenata savijanja u stupovima; c) poprečnih sila u gredama

2.1.1. Sila u osi k-te grede

Uzet ćemo sada da jedinična koncentrirana sila djeluje po osi k-te grede za  $k < n$  (slika 9.).



Slika 9. Dijagram  $M^p$  za opterećenje jediničnom silom u osi k-te grede

Greda  $k$  dijeli zid u dva područja. Na dijelu zida iznad nje, u poljima  $k+1$  do  $n$ , bit će  $M^p=0$ , pa će stoga ploštine dijelova površine momentnoga dijagrama biti izražene članovima "trivijalnoga" niza  $\{\Phi_{2,i}\}_{i=0}^{\infty} = \{0\}_{i=0}^{\infty}$ . Ispod  $k$ -te grede, u poljima 1 do  $k$ , vrijednosti su momenata u razinama grede  $i-1$  i  $i$

$$M_{i-1}^0 = -(k-i+1)h \quad i \quad M_i^0 = -(k-i)h. \tag{56}$$

Kako je na gornjem dijelu zida problem opisan homogenom diferencijskom jednadžbom, "homogeno" rješenje

$$\{X_{2,i}\}_{i=0}^{\infty} = \{C_1 r_1^i + C_2 r_2^i\}_{i=0}^{\infty} \tag{57}$$

ujedno je i njezino opće rješenje. Mehaničko značenje imaju, naravno, samo njegovi članovi  $X_{2,k+1}, \dots, X_{2,n}$ . Na donjem je dijelu zida problem opisan diferencijskom jednadžbom čiji je slobodni član

$$\omega \Phi_{1,i} = \gamma_{k,1} i + \gamma_{k,0} \tag{58}$$

uz

$$\gamma_{k,1} = -\omega h^2 \quad i \quad \gamma_{k,0} = \omega \left(k + \frac{1}{2}\right) h^2, \tag{59}$$

pa će njezino opće rješenje sadržavati i posebno rješenje,

$$\{X_{1,i}\}_{i=0}^{\infty} = \{C_3 r_1^i + C_4 r_2^i + X_{1,i}^{(p)}\}_{i=0}^{\infty}. \tag{60}$$

Pretpostavimo li ponovo da su članovi posebnoga rješenja istoga oblika kao slobodni član,

$$X_{1,i}^{(p)} = a_k i + b_k, \tag{61}$$

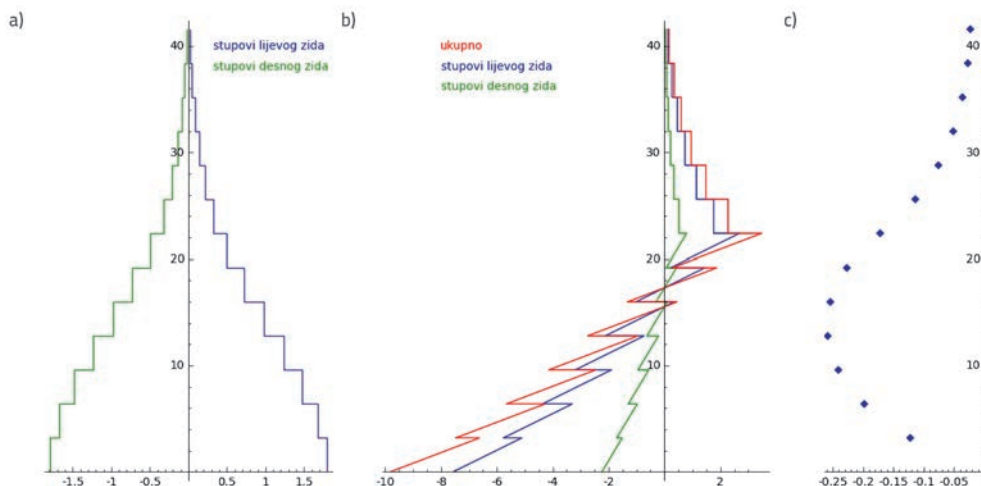
dobit ćemo, po uvrštavanju u jednadžbu (19) i izjednačavanju pripadnih koeficijenata,

$$a_k = \frac{\gamma_{k,1}}{2-\alpha} \quad i \quad b_k = \frac{\gamma_{k,0}}{2-\alpha}. \tag{62}$$

Mehaničko će značenje imati članovi  $X_{1,1}, \dots, X_{1,k}$  niza (60). Rješenja (57) i (60) sadrže četiri neodređena koeficijenta  $C_1, \dots, C_4$ . Za izračunavanje njihovih vrijednosti potrebna su četiri rubna uvjeta; uz uvjete u poljima 1 i  $n$ , na dnu i na vrhu zida, upotrijebit ćemo i uvjete u poljima  $k$  i  $k+1$ , ispod i iznad hvatišta jedinične sile, jer je  $k+1$  donje rubno polje dijela zida na kojem mehaničko značenje imaju članovi niza (57), dok je  $k$  gornje rubno polje dijela na kojem mehaničko značenje imaju članovi niza (60). Na vrhu zida mora biti zadovoljen uvjet (35), ali kako je  $\Phi_{2,n} = 0$  i rubni je uvjet homogen:

$$X_{n-1} - \alpha X_n = 0. \tag{63}$$

U tom dijelu mehaničko značenje imaju članovi niza (57). Uvrstimo li u (63) izraze za članove  $X_{2,n-1}$  i  $X_{2,n}$  podizraz s lijeve



Slika 10. Nesimetričan zid s jednim nizom otvora, sila u osi *k*-te grede - postupak V. Simovića: dijagrami a) uzdužnih sila u stupovima; b) momenata savijanja u stupovima; c) poprečnih sila u gredama

strane možemo pojednostavniti na isti način kao u izvodu jednadžbe (47), tako da prvi rubni uvjet daje

$$r_1^{n+1}C_1 + r_2^{n+1}C_2 = 0. \tag{64}$$

I polje *k*+1 pripada gornjem dijelu zida. Jednadžba

$$X_k - \alpha X_{k+1} + X_{k+2} = 0, \tag{65}$$

dobivena iz jednadžbe (19) za *i* = *k*+1 uz  $\Phi_{2,k+1} = 0$ , drugi je rubni uvjet. Za  $X_{k+1}$  i  $X_{k+2}$  uvrštavamo članove niza (57), a za  $X_k$  član niza (60). Drugi rubni uvjet nakon sređivanja daje jednadžbu

$$r_1^k C_1 + r_2^k C_2 - r_1^k C_3 - r_2^k C_4 = X_{1,k}^{(p)}. \tag{66}$$

Polje *k* pak pripada donjem dijelu zida. Jednadžba (19) za *i*=*k* daje

$$X_{k-1} - \alpha X_k + X_{k+1} = \omega \Phi_{1,k}, \tag{67}$$

pri čemu za  $X_{k-1}$  i  $X_k$  treba uvrstiti članove niza (60), a za  $X_{k+1}$  član niza (57), pa treći rubni uvjet prelazi u jednadžbu

$$r_1^{k+1} C_1 + r_2^{k+1} C_2 - r_1^{k+1} C_3 - r_2^{k+1} C_4 = X_{1,k+1}^{(p)}. \tag{68}$$

Rubni uvjet u prvom polju, u dnu zida, dan je izrazom (34), pri čemu za  $X_1$  i  $X_2$  treba uvrstiti članove niza (60). Četvrti će rubni uvjet dati jednadžbu

$$(1 - r_2)r_1 C_3 + (1 - r_1)r_2 C_4 = X_{1,0}^{(p)} - X_{1,1}^{(p)}. \tag{69}$$

Greda u osi koje djeluje sila dijeli zid u dva područja. Djeluje li na zid *m* sila, trebat će ga podijeliti u *m*+1 područje, što znači da će rješenje sadržavati *m*+1 niz i da će trebati izračunati 2(*m*+1) integracijskih konstanta rješavanjem sustava koji sadrži 2(*m*+1) jednadžbi. Druga je, jednostavnija i učinkovitija

možućnost primjena superpozicije: na opisani način provesti proračun za svaku silu zasebice pa zbrojiti rješenja.

**Primjer 2.** Zid je nesimetričan, s trinaest etaža, a jedinična sila djeluje po osi grede sedme etaže. Neka su *h* = 3,2 m, 2*a*<sub>1</sub> = 6 m, 2*a*<sub>2</sub> = 4 m, 2*b* = 2 m, *v* = 0,6 m, *t* = 1 m, *E* = 3 · 10<sup>7</sup> kN/m<sup>2</sup> i *v* = 0. Za odabrane su veličine  $\bar{\delta} = 3,27091 \cdot 10^{-6}$  m,  $\bar{\delta} = -1,50123 \cdot 10^{-6}$  m,  $\alpha = 2,17882$  i  $\omega = 0,00666118$ , pa su diferencijske jednadžbe za gornji i donji dio zida

$$X_{i-1} - 2,17882 X_i + X_{i+1} = 0, \tag{70}$$

$$X_{i-1} - 2,17882 X_i + X_{i+1} = 0,00666118(-3,2^2 i + 7,5 \cdot 3,2^2). \tag{71}$$

Rješenja su karakteristične jednadžbe  $r_1 = 0,657193$  i  $r_2 = 1,52162$ , dok su koeficijenti u posebnom rješenju donjega dijela, prema izrazima (62) uz (59),  $a_k = 0,657193$  i  $b_k = -2,86093$ . Rješenja pak sustava koji sadrži četiri jednadžbe (64), (66), (68) i (69) sa četiri nepoznanice integracijske su konstante  $C_1$  i  $C_2$  u izrazu za opći član  $X_{2,i}$  niza (57) i  $C_3$  i  $C_4$  u izrazu za član  $X_{1,i}$  niza (60), pa su

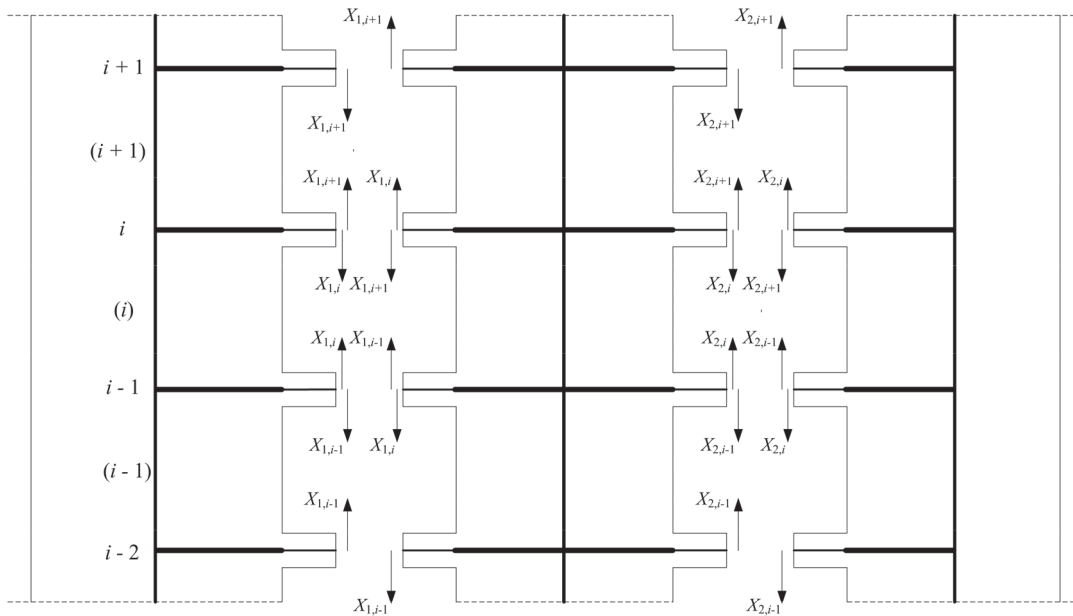
$$X_{2,i} = -9,42447 \cdot 0,657193^i + 7,40734 \cdot 10^{-5} \cdot 1,52162^i, \tag{72}$$

$$X_{1,i} = 1,08340 \cdot 0,657193^i - 0,0192862 \cdot 1,52162^i + 0,381457i - 2,86093. \tag{73}$$

Pri izračunavanju vrijednosti unutarnjih sila u izraze (48), (49) i (50) uvrštavamo  $X_{1,i}$  za *i* = 1, ..., 7, a  $X_{2,i}$  za *i* = 8, ..., 13; dijagrami su prikazani na slici 10.

### 2.2. Zidovi s više nizova otvora

Ima li zid *e* etaža i *n* nizova otvora, uz mehaničke pretpostavke navedene na početku prikaza broj je statički neodređenih vrijednosti *en*. Sustav jednadžbi metode sila može se prevesti u sustav koji sadrži *n* diferencijskih jednadžbi sa *n* nepoznatih



Slika 11. Dio osnovnog sistema za zid s dva niza otvora

nizova. Uz još jednu dodatnu pretpostavku taj se sustav može razbiti u  $n$  neovisnih diferencijskih jednadžbi, tako da se proračun zidova s više nizova otvora svodi na višestruki proračun zida samo s jednim nizom. Jednostavnosti radi, u našem ćemo se prikazu ograničiti na zid s dva niza otvora. Povećanje broja nizova usložnjava postupak i njegov opis, a ne donosi ništa pojmovno novo.

### 2.2.1. Zid s dva niza otvora

Za raskinute veze u prvom i u drugom nizu otvora u kojima djeluju  $i$ -te grupe neodređenih sila (slika 11.) jednadžbe su neprekinutosti

$$\delta_{1,i-1,i-1} X_{1,i-1} + \delta_{1,i-1,i} X_{1,i} + \delta_{1,i-1,i+1} X_{1,i+1} + \delta_{1,i-1,2} X_{2,i} + \delta_{1,i-1,0} = 0, \quad (74)$$

$$\delta_{2,i-1,i-1} X_{2,i-1} + \delta_{2,i-1,i} X_{2,i} + \delta_{2,i-1,i+1} X_{2,i+1} + \delta_{2,i-1,1} X_{1,i} + \delta_{2,i-1,0} = 0. \quad (75)$$

Koeficijenti popustljivosti  $\delta_{l,i,j}$  su, kinematički, linearne kombinacije orijentiranih duljina relativnih pomaka u raskidima u gredama  $l$ -tog niza u kojima djeluju sile  $i$ -te grupe, prouzročeni djelovanjima sila osnovnih grupa  $j$  u nizu  $J$ , a slobodni su članovi  $\delta_{l,i,0}$  linearne kombinacije orijentiranih duljina relativnih pomaka u tim raskidima, prouzročeni djelovanjem vanjskog opterećenja. Pretpostavit ćemo da su visine svih etaža jednake, da se moduli elastičnosti i posmika, kao ni debljine zidova ne mijenjaju po visini te da su u svakom nizu jednaki rasponi i poprečni presjeci svih greda. Budući da koeficijenti popustljivosti tada neće ovisiti o  $i$ , indeksnu noćnu moru možemo ponešto ublažiti uvođenjem oznaka  $\bar{\delta}_{l,i} = \delta_{l,i,i}$  i  $\bar{\delta}_{l,i} = \delta_{l,i,i-1} = \delta_{l,i,i+1}$ :

$$\bar{\delta}_{1,1} X_{1,i-1} + \bar{\delta}_{1,1} X_{1,i} + \bar{\delta}_{1,1} X_{1,i+1} + \bar{\delta}_{1,2} X_{2,i} + \delta_{1,i,0} = 0, \quad (76)$$

$$\bar{\delta}_{2,2} X_{2,i-1} + \bar{\delta}_{2,2} X_{2,i} + \bar{\delta}_{2,2} X_{2,i+1} + \bar{\delta}_{2,1} X_{1,i} + \delta_{2,i,0} = 0. \quad (77)$$

Te dvije jednadžbe tvore sustav diferencijskih jednadžbi za nizove  $\{X_{1,i}\}_{i=0}^{\infty}$  i  $\{X_{2,i}\}_{i=0}^{\infty}$ .

U  $i$ -toj se jednadžbi neprekinutosti jednoga niza otvora osim neodređenih vrijednosti tog niza pojavljuje, kao posljedica lokalizacije utjecaja neodređenih djelovanja njihovim grupiranjem, samo još  $i$ -ta neodređena vrijednost drugog niza. Uvedemo li omjere

$$\eta_i = \frac{X_{2,i}}{X_{1,i}} \quad (78)$$

jednadžbe neprekinutosti jednoga niza sadržavat će, naizgled, samo neodređene vrijednosti istog tog niza:

$$\bar{\delta}_{1,1} X_{1,i-1} + [\bar{\delta}_{1,1} + \eta_i \bar{\delta}_{1,2}] X_{1,i} + \bar{\delta}_{1,1} X_{1,i+1} + \delta_{1,i,0} = 0, \quad (79)$$

$$\bar{\delta}_{2,2} X_{2,i-1} + [\bar{\delta}_{2,2} + \bar{\delta}_{2,1} / \eta_i] X_{2,i} + \bar{\delta}_{2,2} X_{2,i+1} + \delta_{2,i,0} = 0. \quad (80)$$

Podijelimo li prvu jednadžbu sa  $\bar{\delta}_{1,1}$ , a drugu sa  $\bar{\delta}_{2,2}$ , dobit ćemo

$$X_{1,i-1} - \alpha_{1,i} X_{1,i} + X_{1,i+1} = \omega_1 \Phi_i, \quad (81)$$

$$X_{2,i-1} - \alpha_{2,i} X_{2,i} + X_{2,i+1} = \omega_2 \Phi_i, \quad (82)$$

pri čemu su

$$\alpha_{1,i} = -\frac{\bar{\delta}_{1,1} + \eta_i \bar{\delta}_{1,2}}{\bar{\delta}_{1,1}}, \quad \alpha_{2,i} = -\frac{\bar{\delta}_{2,2} + \bar{\delta}_{2,1} / \eta_i}{\bar{\delta}_{2,2}}, \quad (83)$$

$$\omega_1 = -\frac{1}{\bar{\delta}_{1,1}} \frac{2l_1}{El_z}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{\bar{\delta}_{2,2}} \frac{2l_2}{El_z}. \quad (84)$$

Jednadžbe (81) i (82) možemo neovisno rješavati samo ako pretpostavimo omjere  $\eta_i$ . A uz to, to nisu jednadžbe s konstantnim koeficijentima, jer omjeri  $\eta_i$  ovise o  $i$ . Pokazat ćemo da uz dodatnu pretpostavku da po tri uzastopna člana nizova  $\{X_{j,i}\}_{i=0}^{\infty}$  leže na pravcu - točnije, da točke  $(i-1, X_{j,i-1})$ ,  $(i, X_{j,i})$  i  $(i+1, X_{j,i+1})$  leže na pravcu - omjer  $X_{2,i} / X_{1,i}$  postaje konstantnim i da se, štoviše, može unaprijed izračunati, jer ovisi samo o geometrijskim karakteristikama zida. Iz pretpostavke o kolinearnosti slijedi da je  $X_{j,i}$  srednja vrijednost vrijednosti  $X_{j,i-1}$  i  $X_{j,i+1}$ , pa je

$$X_{j,i-1} + X_{j,i+1} = 2X_{j,i} \tag{85}$$

Time jednadžbe (81) i (82) prelaze u

$$(2 - \alpha_{j,i})X_{j,i} = \omega_j \Phi_i, \tag{86}$$

tako da su

$$X_{j,i} = \frac{\omega_j}{2 - \alpha_{j,i}} \Phi_i. \tag{87}$$

Uvrštavanje u izraz (78) za  $\eta_i$  daje

$$\eta_i = \frac{\omega_2 (2 - \alpha_{1,i})}{\omega_1 (2 - \alpha_{2,i})} \tag{88}$$

te, uz (83) i (84),

$$\eta_i = \frac{\ell_2 \bar{\delta}_{1,1} + \eta_i \bar{\delta}_{1,2} + 2\bar{\delta}_{1,1}}{\ell_1 \bar{\delta}_{2,2} + \bar{\delta}_{2,1} / \eta_i + 2\bar{\delta}_{2,2}}. \tag{89}$$

Riješimo li tu jednadžbu po  $\eta_i$ , dobivamo

$$\eta_i = \frac{\bar{\delta}_{2,1} \ell_1 - (\bar{\delta}_{1,1} + 2\bar{\delta}_{1,1}) \ell_2}{\bar{\delta}_{1,2} \ell_2 - (\bar{\delta}_{2,2} + 2\bar{\delta}_{2,2}) \ell_1}. \tag{90}$$

Budući da koeficijenti fleksibilnosti ovise samo o geometrijskim i materijalnim karakteristikama koje se po visini zida ne mijenjaju, umjesto  $\eta_i$  možemo pisati samo  $\eta$ , a uvrstimo li izraze za koeficijente fleksibilnosti, dobit ćemo

$$\eta = \frac{F_1(\ell_1 + \ell_2) + F_2 \ell_2 F_3}{F_2 \ell_1 + F_3(\ell_1 + \ell_2) F_1}, \tag{91}$$

pa izrazi (83) prelaze u

$$\alpha_1 = -\frac{\bar{\delta}_{1,1} + \eta \bar{\delta}_{1,2}}{\bar{\delta}_{1,1}} \quad \text{i} \quad \alpha_2 = -\frac{\bar{\delta}_{2,2} + \bar{\delta}_{2,1} / \eta}{\bar{\delta}_{2,2}}, \tag{92}$$

a diferencijske jednadžbe (81) i (82) postaju međusobno neovisnim jednadžbama s konstantnim koeficijentima

$$X_{1,i-1} - \alpha_1 X_{1,i} + X_{1,i+1} = \omega_1 \Phi_i, \tag{93}$$

$$X_{2,i-1} - \alpha_2 X_{2,i} + X_{2,i+1} = \omega_2 \Phi_i. \tag{94}$$

Vrijednosti su uzdužnih sila u stupovima lijevoga, srednjeg i desnog posmičnog zida

$$N_{1,i} = -X_{1,i}, \quad N_{2,i} = X_{1,i} - X_{2,i} \quad \text{i} \quad N_{3,i} = X_{2,i}. \tag{95}$$

Vrijednost ukupnoga momenta u presjeku z polja  $i$  izračunava se prema izrazu

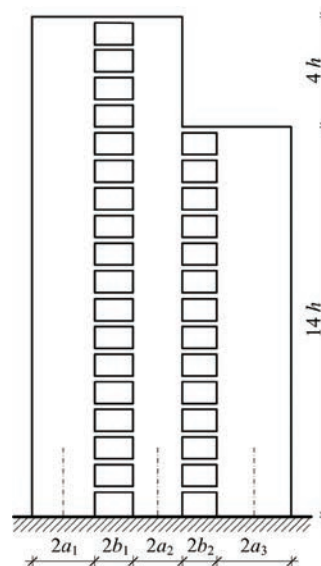
$$M_i(x) = M^0(x) - 2\ell_1 X_{1,i} - 2\ell_2 X_{2,i}. \tag{96}$$

Vrijednosti su poprečnih sila u gredama lijevoga i desnog niza

$$T_{1,i} = X_{1,i} - X_{1,i+1} \quad \text{i} \quad T_{2,i} = X_{2,i} - X_{2,i+1}. \tag{97}$$

### 2.2.2. Zid promjenjive visine

Ako su neki dijelovi zida viši od drugih, zid se po visini dijeli u onoliko područja koliko je skokova u visinama, a to znači da i svaki niz otvora, koji zasebice rješavamo, treba podijeliti u odgovarajući broj područja. Postupak rješavanja podijeljenih nizova sličan je postupku rješavanja zida opterećenoga silom koja djeluje po osi  $k$ -te grede - različita područja opisana su različitim diferencijskim jednadžbama, pa će i rješenja za različita područja biti različiti nizovi, ali će se u "spoju" dvaju područja pojaviti dodatni rubni uvjeti.



Slika 12. Zid promjenjive visine s dva niza otvora

Uzmimo, kao u primjeru sa slike 12., da lijevi niz otvora ima  $n$ , a desni  $k$  etaža, pri čemu je  $k < n$ . Za desni su niz jednadžbe neprekidnosti

$$\bar{\delta}_{2,2} X_{2,i-1} + [\bar{\delta}_{2,2} + \bar{\delta}_{2,1} / \eta] X_{2,i} + \bar{\delta}_{2,2} X_{2,i+1} = -\delta_{2,i0}, \tag{98}$$

pa je diferencijska jednadžba, dobivena dijeljenjem sa  $\bar{\delta}_{2,2}$ ,

$$X_{2,i-1} - \alpha_2 X_{2,i} + X_{2,i+1} = \omega_2 \Phi_i, \tag{99}$$

a rubni su uvjeti na dnu i na vrhu zida

$$(1-\alpha_2)X_{2,1}+X_{2,2}=\omega_2\Phi_1, \quad (100)$$

$$X_{2,k-1}-\alpha_2 X_{2,k}=\omega_2\Phi_k. \quad (101)$$

Opće je rješenje jednadžbe (99)

$$\{X_{2,i}\}_{i=0}^{\infty}=(C_{2,1}r_{2,1}^i+C_{2,2}r_{2,2}^i+X_{2,0}^{(p)})_{i=0}^{\infty}. \quad (102)$$

Uvrstimo li odgovarajuće članove tog niza u rubne uvjete, dobit ćemo, nakon izvodâ koji su jednaki izvodima za zid s jednim nizom otvora, sustav dviju jednadžbi s nepoznicama  $C_{2,1}$  i  $C_{2,2}$ :

$$(1-r_{2,2})r_{2,1}C_{2,1}+(1-r_{2,1})r_{2,2}C_{2,2}=X_{2,0}^{(p)}-X_{2,1}^{(p)}, \quad (103)$$

$$r_{2,1}^{n+1}C_{2,1}+r_{2,2}^{n+1}C_{2,2}=-X_{2,k+1}^{(p)}. \quad (104)$$

Lijevi niz otvora moramo gredom  $k$ -te etaže podijeliti u dva područja. Jednadžbe su neprekinutosti za raskinute veze u gornjem području, u kojima djeluju sile grupa  $i = k+1, \dots, n$ ,

$$\bar{\delta}_{1,1}X_{1,j-1}+\bar{\delta}_{(1,2),1}X_{1,j}+\bar{\delta}_{1,1}X_{1,j+1}=-\delta_{(1,2),j,0}, \quad (105)$$

dok su za veze u donjem području, u kojima djeluju sile grupa  $i = 1, \dots, k$ , jednadžbe neprekinutosti

$$\bar{\delta}_{1,1}X_{1,j-1}+[\bar{\delta}_{(1,1),1}+\eta\bar{\delta}_{(1,1),2}]X_{1,j}+\bar{\delta}_{1,1}X_{1,j+1}=-\delta_{(1,1),j,0}, \quad (106)$$

pri čemu  $(1,K)$  u indeksima označava  $K$  - to područje (prvo/donje ili drugo/gornje) prvoga niza otvora. Dijeljenje sa  $\bar{\delta}_{1,1}$  daje diferencijalne jednadžbe

$$X_{1,j-1}-\alpha_{(1,2)}X_{1,j}+X_{1,j+1}=\omega_{(1,2)}\Phi_j, \quad (107)$$

$$X_{1,j-1}-\alpha_{(1,1)}X_{1,j}+X_{1,j+1}=\omega_{(1,1)}\Phi_j. \quad (108)$$

Njihova su opća rješenja

$$\{X_{(1,2),i}\}_{i=0}^{\infty}=\{C_{1,1}r_{(1,2),1}^i+C_{1,2}r_{(1,2),2}^i+X_{(1,2),0}^{(p)}\}_{i=0}^{\infty}. \quad (109)$$

$$\{X_{(1,1),i}\}_{i=0}^{\infty}=\{C_{1,3}r_{(1,1),1}^i+C_{1,4}r_{(1,1),2}^i+X_{(1,1),0}^{(p)}\}_{i=0}^{\infty}. \quad (110)$$

Na vrhu je zida rubni uvjet

$$X_{(1,2),n-1}-\alpha_{(1,2)}X_{(1,2),n}=\omega_{(1,2)}\Phi_n; \quad (111)$$

uvrstimo li odgovarajuće članove niza  $\{X_{(1,2),i}\}_{i=0}^{\infty}$ , dobit ćemo

$$r_{(1,2),1}^{n+1}C_{1,1}+r_{(1,2),2}^{n+1}C_{1,2}=-X_{(1,2),n+1}^{(p)}. \quad (112)$$

Najdonje je polje gornjega područja polje  $k+1$ . Diferencijalna jednadžba (107) za  $i=k+1$  prelazi u jednadžbu

$$X_{1,k}-\alpha_{(1,2)}X_{1,k+1}+X_{1,k+2}=\omega_{(1,2)}\Phi_{k+1}. \quad (113)$$

u koju ćemo za  $X_{1,k+1}$  i  $X_{1,k+2}$  uvrstiti odgovarajuće članove niza  $\{X_{(1,2),i}\}_{i=0}^{\infty}$ , a za  $X_{1,k}$  član niza  $\{X_{(1,2),i}\}_{i=0}^{\infty}$ . Na već poznati način dobivamo

$$-r_{(1,2),1}^k C_{1,1}-r_{(1,2),2}^k C_{1,2}+r_{(1,1),1}^k C_{1,3}+r_{(1,1),2}^k C_{1,4}=-X_{(1,1),k}^{(p)}+X_{(1,2),k}^{(p)}. \quad (114)$$

Diferencijalna jednadžba (108) za  $i = k$  (najgornje polje donjeg područja) prelazi u jednadžbu

$$X_{1,k-1}-\alpha_{(1,1)}X_{1,k}+X_{1,k+1}=\omega_{(1,1)}\Phi_k. \quad (115)$$

Uvrstimo li u tu jednadžbu za  $X_{1,k-1}$  i  $X_{1,k}$  odgovarajuće članove niza  $\{X_{(1,1),i}\}_{i=0}^{\infty}$ , a za  $X_{1,k+1}$  član niza  $\{X_{(1,2),i}\}_{i=0}^{\infty}$ , dobit ćemo

$$r_{(1,2),1}^{k+1}C_{1,1}+r_{(1,2),2}^{k+1}C_{1,2}-r_{(1,1),1}^{k+1}C_{1,3}-r_{(1,1),2}^{k+1}C_{1,4}=X_{(1,1),k+1}^{(p)}-X_{(1,2),k+1}^{(p)}. \quad (116)$$

I, napokon, rubni je uvjet na dnu zida

$$(1-\alpha_{(1,1)})X_{(1,1),1}+X_{(1,2),2}=\omega_{(1,1)}\Phi_1, \quad (117)$$

pa uvrštavanjem odgovarajućih članova niza  $\{X_{(1,2),i}\}_{i=0}^{\infty}$  dobivamo, kao i ranije,

$$(1-r_{(1,1),2})r_{(1,1),1}C_{1,3}+(1-r_{(1,1),1})r_{(1,1),2}C_{1,4}=X_{(1,1),0}^{(p)}-X_{(1,1),1}^{(p)}. \quad (118)$$

**Primjer 3.** Zid s osamnaest etaža u lijevom, višem nizu i četrnaest etaža u desnom nizu (slika 12.) opterećen je jediničnom silom u osi najgornje grede višega niza. Geometrijske su veličine  $h = 3$  m,  $2a_1 = 5$  m,  $2a_2 = 4$  m,  $2a_3 = 6$  m,  $2b_1 = 2b_2 = 2$  m,  $v = 0,6$  m i  $t = 1$  m, a neka su  $k$  tomu još  $E = 3 \cdot 10^7$  kN/m<sup>2</sup> i  $\nu = 0,2$ .

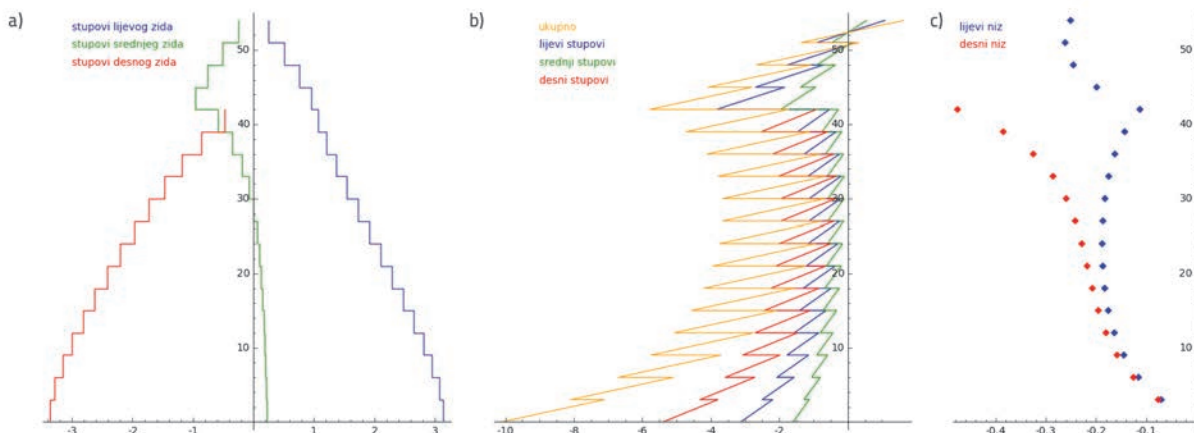
Gornji dio lijevoga niza proračunavamo kao zid s jednim nizom otvora, pa izraz (18) daje  $\alpha_{(1,2)} = 2,20151$  i  $\omega_{(1,2)} = 0,00884916$ . Donji je dio jedan od nizova zida s dva niza otvora, pa prvo izračunavamo  $\eta = 1,07103$ , a potom, prema izrazima (92),  $\alpha_{(1,1)} = 2,18513$  za lijevi i  $\alpha_2 = 2,18615$  za desni niz. Uz to su, prema izrazu (84),  $\omega_{(1,1)} = 0,00412961$  i  $\omega_2 = 0,00444727$ . Time dobivamo tri diferencijalne jednadžbe, dvije za lijevi i jednu za desni niz. Jednadžbe u stvari ne treba izrijekom napisati: rješenja karakterističnih jednadžbi pripadnih homogenih diferencijalnih jednadžbi - tri para vrijednosti - dobivamo uvrštavanjem, redom,  $\alpha_{(1,1)}$ ,  $\alpha_{(1,2)}$  i  $\alpha_2$  u izraze (27), a koeficijente u posebnim rješenjima - tri para - uvrštavanjem parova  $\alpha_{(1,1)}$ ,  $\omega_{(1,1)}$  itd. u izraze (33) i (30). Četiri rubna uvjeta u lijevom nizu otvora, (111), (113), (115) i (117), daju četiri jednadžbe (112), (114), (116) i (118) sa četiri nepoznane rješenja kojih su integracijske konstante u odredbenim izrazima dvaju nizova sadržanih u rješenju za taj niz otvora:

$$X_{(1,2),i}=377,422 \cdot 0,640691^i - 5,88564 \cdot 10^{-5} \cdot 1,56081^i + 0,395237i - 7,31188, \quad (119)$$

$$X_{(1,1),i}=0,576995 \cdot 0,652452^i - 4,19094 \cdot 10^{-4} \cdot 1,53268^i + 0,200757i - 3,71400. \quad (120)$$

Rješenje za desni niz otvora jedan je niz, s dvije integracijske konstante. Dva rubna uvjeta u desnom nizu, (100) i (101), daju potrebne dvije jednadžbe (103) i (104), pa je





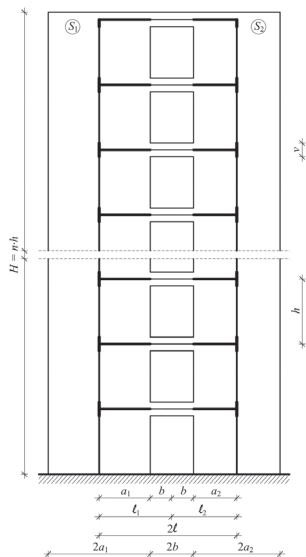
Slika 13. Zid promjenjive visine s dva niza otvora - postupak V. Simovića: dijagrami a) uzdužnih sila u stupovima; b) momenta savijanja u stupovima; c) poprečnih sila u gredama

$$X_{2,i} = 0,619200 - 0,651698i^2 - 0,00122083 \cdot 1,53445i^3 + 0,215016i - 3,97780. \quad (121)$$

Unutarnje sile u gornjem dijelu zida - u zidu samo s jednim nizom otvora - izračunavamo prema izrazima (48), (49) i (50) u koje uvrštavamo  $X_{(1,2),15}, \dots, X_{(1,2),18}$ . U donjem dijelu zida unutarnje sile izračunavamo prema izrazima (95), (96) i (97) uvrštavajući u njih  $X_{(1,1),1}, \dots, X_{(1,1),14}$  i  $X_{2,1}, \dots, X_{2,14}$ . Dijagrami unutarnjih sila prikazani su na slici 13.

### 3. Metoda pomakâ

Standardna je proračunska shema zida s otvorima u metodi pomakâ prikazana na slici 14. Ta se shema obično naziva ekvivalentnim okvirom, zamjenjujućim okvirom ili okvirom sa "širokim stupovima". Uveli su je sredinom šezdesetih godina dvadesetoga stoljeća R. W. Clough, I. P. King i E. L. Wilson [17], C. F. Candy [18] i I. A. MacLeod [19]. MacLeod je u drugoj polovini sedamdesetih godina uveo i model zida koji je dio prostorne konstrukcije [20, 21].



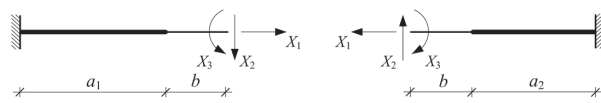
Slika 14. Proračunska shema zida s otvorima u metodi pomakâ

### 3.1. Matrica krutosti štapa

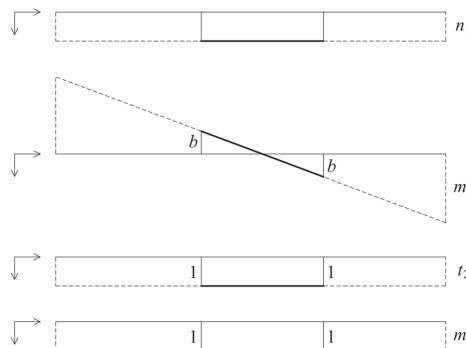
Štapani elementi kojima modeliramo grede i stupove zidova s otvorima sastavljeni su od (apsolutno) krutih dijelova na krajevima i elastičnoga dijela između njih. Kruti se dijelovi pomiču i zaokreću kao kruta/nedeformabilna tijela zajedno sa čvorovima u koje su priključeni, dok se elastični dijelovi deformiraju.

Izraze za komponente matrice krutosti u lokalnom koordinatnom sustavu izvodimo primjenom metode sila. Za osnovni sustav odabrane su dvije konzole dobivene raskidanjem štapa u polovištu elastičnoga dijela (slika 15.). Lako je pokazati da je točka raskida elastično težište štapa [20], tako da su od nule različiti samo koeficijenti popustljivosti  $\delta_{ij}$ . Uz dijagrame unutarnjih sila u jediničnim stanjima, prikazanim na slici 16., Vereščaginovim postupkom dobivamo

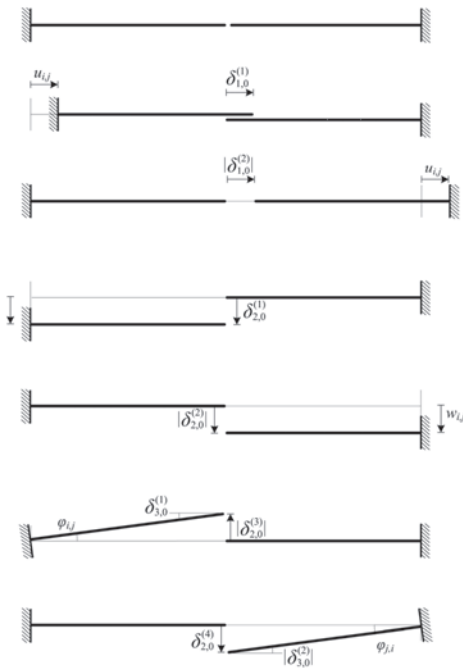
$$\begin{aligned} \delta_{1,1} &= \frac{2b}{EF}, \\ \delta_{2,2} &= \frac{2b^3}{3EI} + \frac{2kb}{GF}, \\ \delta_{3,3} &= \frac{2b}{EI}. \end{aligned} \quad (122)$$



Slika 15. Osnovni sistem za izvod izrazâ za komponente matrice krutosti



Slika 16. Jedinični dijagrami



Slika 17. Prislilni pomaci krajeva štapa

Slobodni članovi jednadžbi neprekinutosti izražavaju utjecaj "prisilnih" pomaka krajeva štapa; prema slici 17. su

$$\begin{bmatrix} \delta_{1,0} \\ \delta_{2,0} \\ \delta_{3,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_1 & 0 & -1 & -l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i,j} \\ w_{i,j} \\ \varphi_{i,j} \\ u_{j,i} \\ w_{j,i} \\ \varphi_{j,i} \end{bmatrix} \quad (123)$$

ili, matričnom "stenografijom",

$$\Delta_0 = \mathbf{P} \mathbf{u} \quad (124)$$

Budući da su  $\delta_{ij}=0$  za  $i \neq j$  matrica je sustava jednadžbi neprekinutosti

$$\mathbf{D} \mathbf{X} + \Delta_0 = \mathbf{0} \quad (125)$$

dijagonalna, pa je  $\mathbf{u}$  u rješenju

$$\mathbf{X} = -\mathbf{D}^{-1} \Delta_0 = \mathbf{0} \quad (126)$$

matrica  $\mathbf{D}^{-1}$  dijagonalna, s komponentama  $\delta_{i,i}^{\#} = 1/\delta_{i,i}, i = 1,2,3$ .

Veza između izračunanih vrijednosti  $X_i$  neodređenih djelovanja i vrijednosti (poopćenih) sila na krajevima štapa daju jednadžbe ravnoteže lijevoga i desnog dijela štapa (slika 18.). Svrstamo li

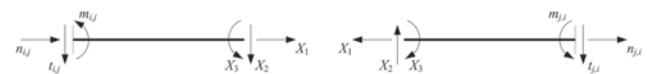
vrijednosti  $X_i$  u vektor  $\mathbf{X}$ , a vrijednosti sila na krajevima u vektor  $\mathbf{f}$ , bit će

$$\mathbf{f} = -\mathbf{P}^T \mathbf{X}. \quad (127)$$

Uvrštavanjem izraza (126) za  $\mathbf{X}$  i, potom, izraza (124) za  $\Delta_0$ , dobivamo

$$\mathbf{f} = -\mathbf{P}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{u}. \quad (128)$$

Matrica  $\mathbf{k} = \mathbf{P}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P}$  tražena je matrica krutosti štapa.



Slika 18. Sila na krajevima štapa i statički neodređene sile

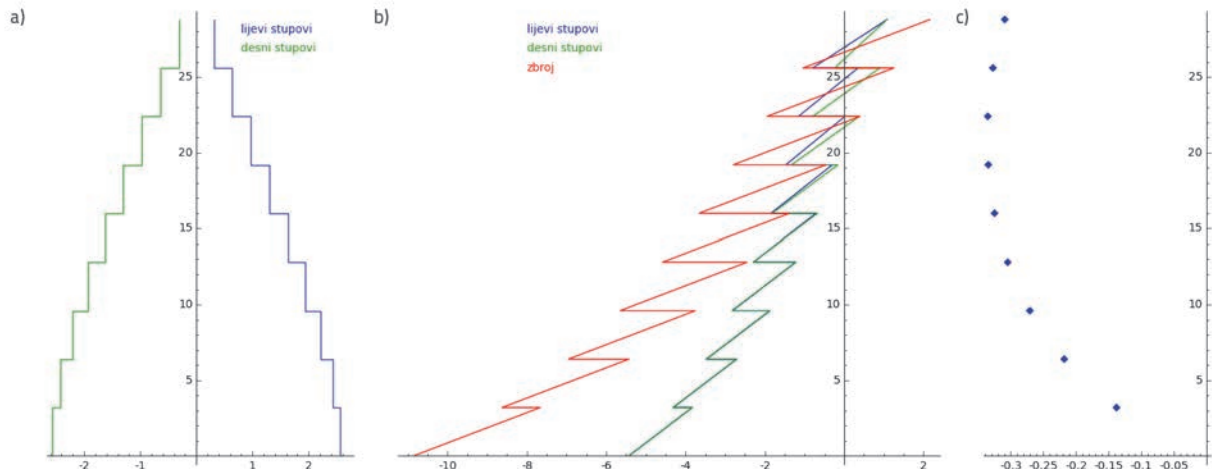
S izvedenom se matričnom krutosti daljnji proračun provodi jednakim postupkom kao za "obične" okvirne konstrukcije [22]. (Trebalo ipak napomenuti da smo se ograničili na zidove s otvorima u pravilnim vertikalnim nizovima, koji su rješivi postupkom V. Simovića. Kod nepravilnijega se rasporeda otvora može dogoditi da su neki čvorovi spojeni štapovima apsolutno krutima po cijeloj duljini. U tom slučaju treba odabrati vodeće i prateće čvorove te provesti kinematičku kondenzaciju [22].)

### 3.2. Primjeri i usporedbe

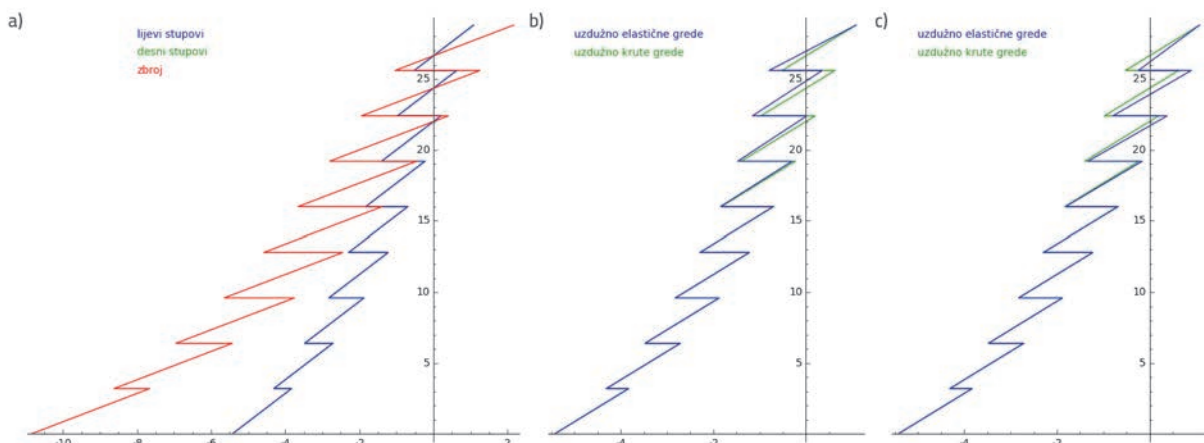
**Primjer 1., ponovo.** Vratit ćemo se na primjer simetričnoga deveteroetažnog zida s jednim nizom otvora, koji smo ranije riješili postupkom V. Simovića.

Na slici 19. prikazani su dijagrami unutarnjih sila. Iako su opći tokovi dijagrama slični tokovima odgovarajućih dijagrama sa slike 8., možemo uočiti da dijagrami momenata savijanja u stupovima lijevoga i desnog posmičnog zida sada nisu međusobno jednaki. Posljedica je to uzimanja u obzir uzdužne elastičnosti spojnih greda. Povećamo li uzdužne krutosti greda množenjem razmjerno velikim brojem, takozvanim kaznenim koeficijentom, kojim aproksimiramo neizmjerne velike krutosti (prava se apsolutna krutost može ostvariti provođenjem kinematičke kondenzacije), dijagrami momenata savijanja u lijevima i desnim stupovima će se, u granicama točnosti proračuna, preklapati (slika 20.a.). Iako se pri promjeni uzdužne krutosti greda vrijednosti momenata u stupovima mijenjaju (slike 20.b. i c.), njihov je zbroj u pojedinim horizontalnim presjecima kroz oba stupa konstantan.

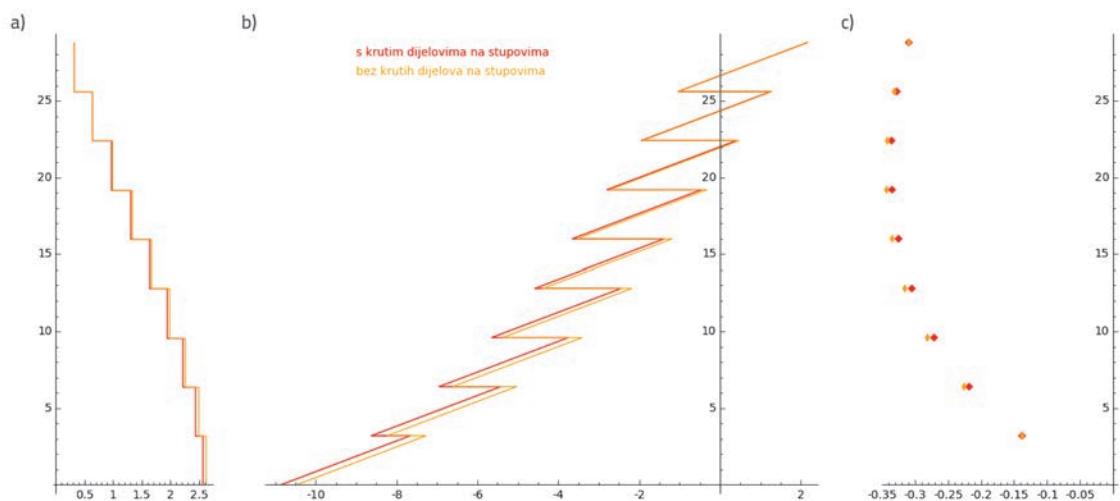
Podudaranje rezultata dobivenih proračunom postupkom V. Simovića i proračunom metodom pomaka ostvarit ćemo ako, uz aproksimaciju neizmjerne velike uzdužne krutosti greda, stupove posmičnih zidova modeliramo štapnim elementima bez krutih dijelova na krajevima, to jest, ako se s proračunske sheme sa slike 14. vratimo na shemu sa slike 2.; na slici 21. preklapljeni su



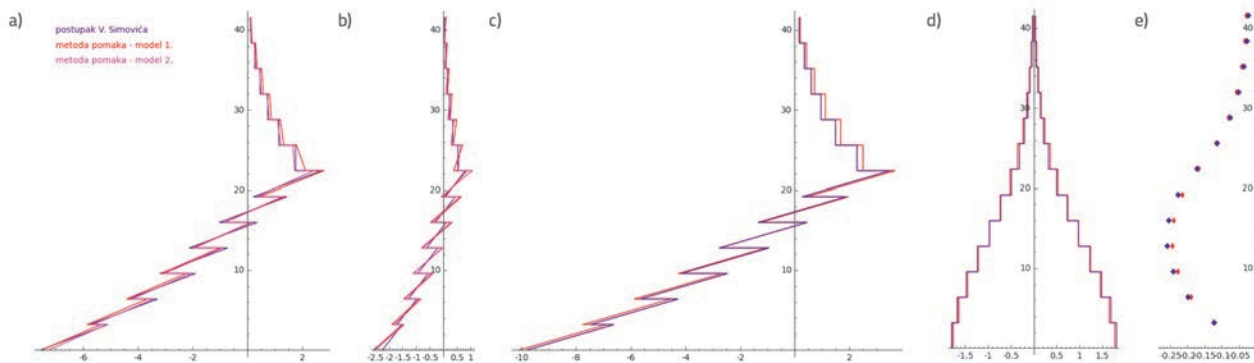
Slika 19. Simetričan zid s jednim nizom otvora - metoda pomaka, grede modelirane kao uzdužno elastične: dijagrami a) uzdužnih sila u stupovima; b) momenta savijanja u stupovima; c) poprečnih sila u gredama



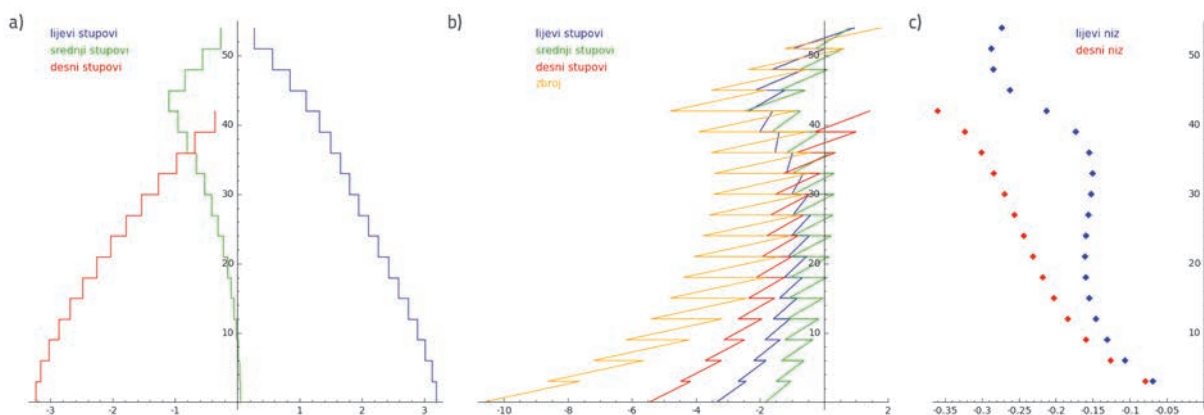
Slika 20. Simetričan zid s jednim nizom otvora - metoda pomaka: a) dijagrami momenta savijanja u stupovima - grede modelirane kao uzdužno krute; b) usporedba dijagramâ momenta savijanja u stupovima lijevoga zida za modele s uzdužno elastičnim i uzdužno krutim gredama; c) usporedba dijagramâ momenta savijanja u stupovima desnog zida



Slika 21. Simetričan zid s jednim nizom otvora - usporedbe dijagramâ unutarnjih sila za modele s krutim dijelovima na stupovima i bez njih: a) uzdužne sile u stupovima lijevog posmičnog zida; b) zbroj momenta savijanja u stupovima; c) poprečne sile u gredama



Slika 22. Nesimetričan zid s jednim nizom otvora, sila u osi  $k$ -te grede - usporedba postupka V. Simovića i metode pomakâ: dijagrami a) momenta savijanja u stupovima lijevog i b) desnog posmičnog zida; c) zbroja momenta savijanja u stupovima; d) uzdužnih sila u stupovima; e) poprečnih sila u gredama



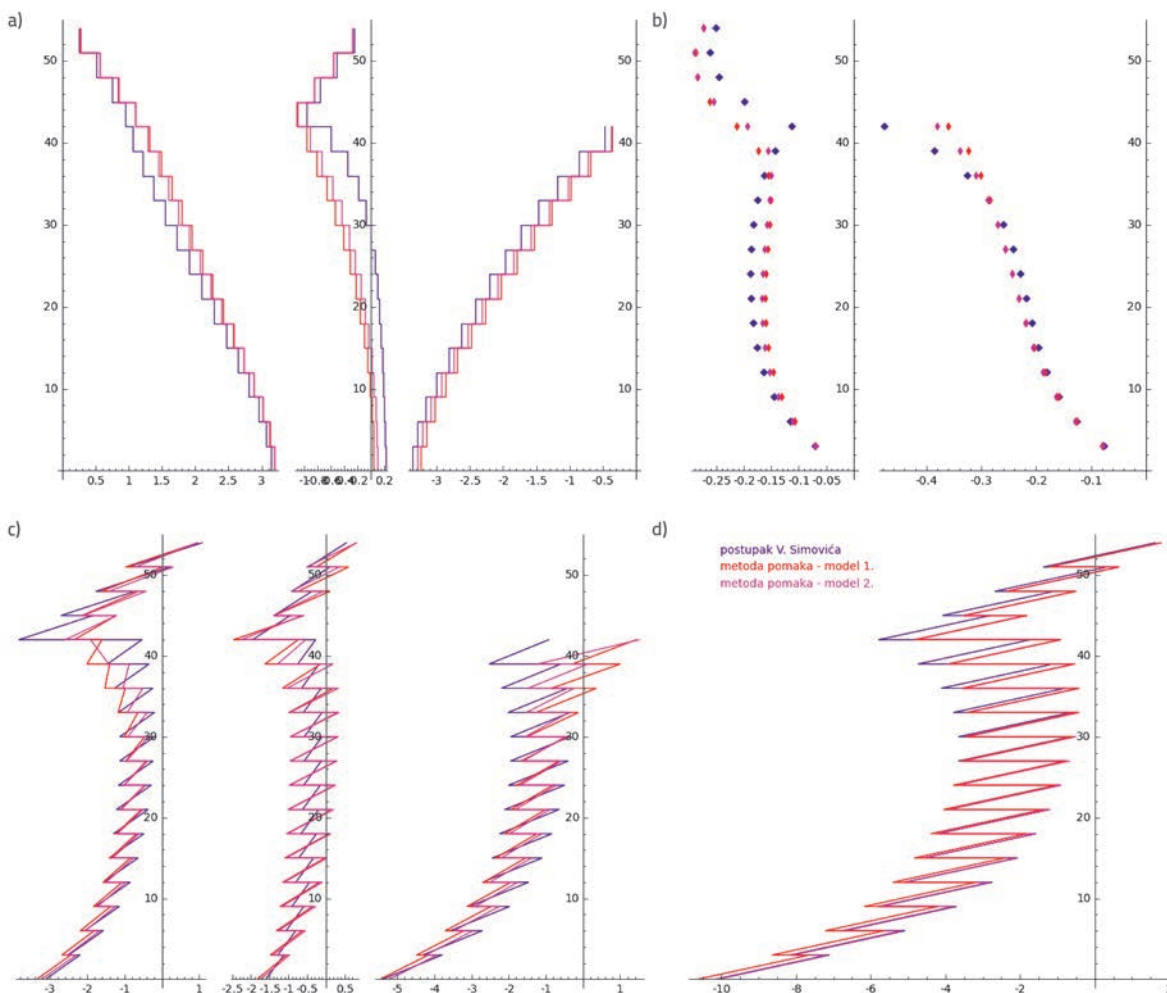
Slika 23. Zid promjenjive visine s dva niza otvora - metoda pomakâ: dijagrami a) uzdužnih sila u stupovima; b) momenta savijanja u stupovima; c) poprečnih sila u gredama

dijagrami unutarnjih sila izračunani za te dvije sheme. S druge strane, kruti dijelovi na krajevima stupova mogu se lako, kao varijacija na temu, uklopiti u postupak V. Simovića: u izraz (5) za koeficijent  $\delta_{i_i} = \bar{\delta}$  umjesto visine etaža  $h$  treba uvrstiti visinu elastičnih dijelova stupova  $h-2(v/2) = h-v$ , a za ploštine  $\Phi_i$  treba uzeti ploštine pripadnih dijelova površine dijagrama  $M^p$ ; primjerice, za dijagram sa slike 7. bit će  $\Phi_i = -h(h-v) + (n+1/2)h(h-v)$ .

**Primjer 2., ponovo.** Rezultati proračuna nesimetričnoga zida postupkom V. Simovića uspoređeni su s rezultatima proračuna metodom pomakâ po standardnoj proračunskoj shemi sa slike 14. uvažavajući uzdužnu elastičnost greda (model 1.) i po proračunskoj shemi sa slike 2. uz povećanje uzdužne krutosti greda (model 2.). Na slici 22. možemo vidjeti da se dijagrami ukupnih momenta savijanja u stupovima, uzdužnih sila u stupovima i poprečnih sila u gredama dobiveni proračunima po postupku V. Simovića i metodom pomakâ za model 2. poklapaju, ali da u dijagramima momenta savijanja u stupovima lijevoga i desnog zida postoje stanovita, ali ipak ne značajna odstupanja - jedna je od polaznih pretpostavaka postupka V. Simovića da su progibne linije posmičnih zidova međusobno jednake, ali ta je pretpostavka u potpunosti ispunjena samo za simetrične zidove s otvorima, dok je za nesimetrične zidove ispunjena tek

približno; razlike ovise o omjeru fleksijskih krutosti posmičnih zidova, a povećavaju se s povećanjem krutosti spojnih greda. Model zida za proračun metodom pomakâ ima 78 nepoznanica. Taj broj ovisi o broju etaža, ali se, za razliku od postupka V. Simovića, opseg proračuna ne mijenja povećanjem broja sila.

**Primjer 3., ponovo.** Dijagrami unutarnjih sila u zidu promjenjive visine s dva niza otvora, dobiveni proračunom standardnoga modela, prikazani su na slici 23. Na slici 24. prikazana je usporedba rezultata proračuna postupkom V. Simovića i rezultata proračuna standardnoga modela (1.) i modela bez krutih dijelova na stupovima, ali s uzdužno krutim gredama (2.). Za razliku od prethodnih primjera, mogu se uočiti značajnija odstupanja rezultata postupka V. Simovića od rezultata metode pomakâ, posebice u dijagramima poprečnih sila u gredama i dijagramima momenta savijanja u stupovima oko prijelaza s dijela zida s dva otvora na dio s jednim otvorom. Razlog je tome to što se preraspodjela momenta pri prijelazu s dva na tri posmična zida ne odvija skokovito, nego se proteže kroz nekoliko susjednih etaža - u antropomorfnj bismo interpretaciji mogli reći da suprotni smisao vrtnje momenta na najgornjim etažama trećega stupa, dobiven proračunom metodom pomakâ, znači da se taj stup odupire preraspodjeli.



Slika 24. Zid promjenjive visine - usporedba postupka V. Simovića i metode pomakâ: dijagrami a) uzdužnih sila u stupovima lijevog, srednjeg i desnog posmičnog zida; b) poprečnih sila u gredama lijevog i desnog niza; c) momenata savijanja u stupovima lijevog, srednjeg i desnog zida; d) ukupnih momenata savijanja u stupovima

Iako ih u članku nismo opisali, provedeni su i proračuni zida debljina kojega se skokovito mijenja, zida jednake visine s dva niza otvora i zida kod kojeg je najdonja etaža viša od ostalih i s većim otvorom. Podudaranja rezultata dobivenih različitim postupcima jednaka su kao u slučaju zida stalne debljine s jednim nizom otvora (primjeri 1. i 2.), s tek nešto većim odstupanjima na prijelazu s prve u drugu etažu u posljednjem spomenutom primjeru. Možemo zaključiti da će se znatnija odstupanja pojaviti samo kod zidova "nepravilne" geometrije, kao što su zidovi promjenjive visine (primjer 3.). No, premda razlike u rezultatima proračuna po različitim postupcima mogu u takvim slučajevima biti vrlo velike, ne bi trebale uzrokovati smanjenje sigurnosti, niti su građevine projektirane sedamdesetih i osamdesetih godina prošlog stoljeća zbog toga manje sigurne. Armatura je prema

različitim postupcima približno jednaka, a predznaci momenata nisu važni za dimenzioniranje, jer se armatura postavlja simetrično. Uz to, treba uzeti u obzir da pod djelovanjem ekstremnih seizmičkih i vjetrovnih ubrzanja, a prije rušenja, konstrukcija ima rezerve u plastičnom području. Inamičke se sile u duktilnoj konstrukciji smanjuju u odnosu na elastično stanje.

### Zahvala

Prof. emer. dr. sc. Josipu Dvorniku zahvaljujemo na poticajnim primjedbama, prijedlozima i savjetima.

**Adresa autora: Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, Zavod za tehničku mehaniku**

## LITERATURA

- [1] Simović, V.: *Prilog proračunu zidova s otvorima*, disertacija, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1969.
- [2] Simović, V.: *Zidovi s otvorima i okvirne konstrukcije*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.
- [3] Werner, O.: *Proračunavanje višespratnih zgrada sa krutim pregradnim stijenama*, Građevinar **12** (1960) 2, str. 37-47
- [4] Ržanjicin, A. R.: *Neki suvremeni pravci u razvitku građevne mehanike*, Građevinar **20** (1968) 11, str. 375-381
- [5] Rosman, R.: *O statičkom djelovanju nosivih poprečnih zidova višekatnih zgrada*, Građevinar **11** (1959) 8, str. 241-248
- [6] Rosman, R.: *O statičkom djelovanju nosivih poprečnih zidova višekatnih zgrada, 2. dio*, Građevinar **14** (1962) 9, str. 311-316
- [7] Rosman, R.: *Zidovi oslabljeni nizovima otvora izloženi utjecajima potresa i vjetrova*, Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Zagreb, 1966.
- [8] Graham, L. R., Knuth, D. E., Patashnik, O.: *Concrete Mathematics*, Second Edition, Addison-Wesley, Reading, 1994
- [9] Taranath, B. S.: *Structural Analysis and Design of Tall Buildings*, McGraw-Hill, New York, 1988
- [10] Smith, B. S., Coull, A.: *Tall Building Structures: Analysis and Design*, Wiley, New York, 1991
- [11] Puž, G., Vlašić, A.: *Visoke građevine*, interne bilješke s predavanja, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2014./2015.
- [12] Dvornik, J.: *Teorijska istraživanja u Zavodu za tehničku mehaniku Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu*, Spomenica u povodu 75. obljetnice Zavoda za tehničku mehaniku 1920-1995. (ur. V. Šimić), Građevinski fakultet i Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1995., str. 82-104.
- [13] Simović, V., Žagar, Z.: *Proračun zidova s otvorima džepnim računalom*, Građevinar **34** (1982) 5, str. 195-204
- [14] Simović, V., Werner, H.: *Usporedna analiza proračuna zidova s otvorima*, Građevinar **44** (1992) 12, str. 777-785
- [15] Werner, H.: *Uvod u proračun konstrukcija*, separat, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1985.
- [16] Maurer, S. B., Ralston, A.: *Discrete Algorithmic Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, 1991
- [17] Clough, R. W., King, I. P., Wilson, E. L.: *Structural Analysis of Multi-Storey Buildings*, Journal of the Structural Division, ASCE, **90** (1964) ST3, pp. 19-34
- [18] Candy, C. F.: *Analysis of Shear-Wall Frames by Computer*, New Zealand Engineering, **19** (1964) 9, pp. 342-347
- [19] MacLeod, I. A.: *Lateral Stiffness of Shear Walls with Openings*, Tall Buildings (Proceedings of a Symposium on Tall Buildings, University of Southampton), eds.: Coull, A.; Stafford Smith B., Pergamon Press, Oxford, 1967, pp. 223-244
- [20] MacLeod, I. A.: *Structural Analysis of Wall Systems*, The Structural Engineer **55** (1977) 11, pp. 487-495
- [21] MacLeod, I. A., Hosny, H. M.: *Frame Analysis of Shear Wall Cores*, Journal of the Structural Division, ASCE, **103** (1977) ST10, pp. 2037-2047
- [22] Anđelić, M.: *Građevna statika II*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2005.