

Poopćene minimalne mreže u oblikovanju prednapetih konstrukcija od uždadi

Fresl, Krešimir; Gidak, Petra; Vrančić, Romana

Source / Izvornik: **Građevinar, 2013, 65, 707 - 720**

Journal article, Published version

Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)

<https://doi.org/10.14256/JCE.902.2013>

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:237:130537>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-06-30**

Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,
University of Zagreb](#)



Primljen / Received: 8.6.2013.
 Ispravljen / Corrected: 24.7.2013.
 Prihvaćen / Accepted: 1.8.2013.
 Dostupno online / Available online: 10.9.2013.

Poopćene minimalne mreže u oblikovanju prednapetih konstrukcija od užadi

Autori:



Prof.dr.sc. **Krešimir Fresl**, dipl.ing.građ.
 Sveučilište u Zagrebu
 Građevinski fakultet
 Zavod za tehničku mehaniku
fresl@grad.hr



Petra Gidak, dipl.ing.građ.
 Sveučilište u Zagrebu
 Građevinski fakultet
 Zavod za tehničku mehaniku
pgidak@grad.hr



Romana Vrančić, bacc. ing. građ.
 Sveučilište u Zagrebu
 Građevinski fakultet
rvrancic@student.grad.hr

Izvorni znanstveni rad

Krešimir Fresl, Petra Gidak, Romana Vrančić

Poopćene minimalne mreže u oblikovanju prednapetih konstrukcija od užadi

Problem nalaženja oblika prednapetih konstrukcija od užadi formuliran je kao varijacijski problem čija su rješenja minimalne i poopćene minimalne mreže. Uvedena su kinematička ograničenja koja omogućuju zadavanje duljina odabranih štapova. Analizirana je primjena Newton-Krylovovih metoda u rješavanju nelinearnih jednadžbi ravnoteže te je opisana i analizirana iteracijska primjena metode gustoća sila u kojoj se gustoće sila u nekom koraku određuju na temelju zadanih uvjeta i rezultata prethodnoga koraka.

Ključne riječi:

prednapeta konstrukcija od užadi, nalaženje oblika, poopćena minimalna mreža, kinematičko ograničenje, Newton-Krylovljeva metoda, metoda gustoća sila

Original scientific paper

Krešimir Fresl, Petra Gidak, Romana Vrančić

Generalized minimal nets in form finding of prestressed cable nets

Form finding problem of prestressed cable structures is formulated as a variational problem whose solutions are minimal and generalized minimal nets. Kinematic constraints are introduced that allow assignment of chosen lengths to elements. Application of Newton-Krylov methods for solving nonlinear equations of equilibrium is analysed. Iterative application of force density method, where force densities in each iteration step are determined based on given conditions and results of previous step, is described and analyzed.

Key words:

prestressed cable nets, form finding, generalized minimal net, kinematic constraint, Newton-Krylov method, force density method

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

Krešimir Fresl, Petra Gidak, Romana Vrančić

Verallgemeinerte Minimalnetze im Entwurf vorgespannter Seilkonstruktionen

Das Problem der Formfindung vorgespannter Seilkonstruktionen ist als Variationsproblem formuliert, dessen Lösungen Minimalnetze und verallgemeinerte Minimalnetze darstellen. Kinematische Einschränkungen, die das Bestimmen der Länge ausgewählter Stabelemente ermöglichen, sind eingeführt. Der Einsatz von Newton-Krylov-Verfahren beim Lösen nichtlinearer Gleichgewichtsgleichungen ist analysiert und die iterative Anwendung der Kraftdichtemethode, bei der die Kraftdichte in jedem Iterationsschritt aufgrund der gegebenen Konditionen und der Resultate im vorherigen Schritt ermittelt wird, ist ebenfalls beschrieben und untersucht.

Schlüsselwörter:

vorgespannte Seilkonstruktion, Formfindung, verallgemeinertes Minimalnetz, kinematische Einschränkung, Newton-Krylov-Verfahren, Kraftdichtemethode

1. Uvod

Većina konstrukcijskih elemenata preuzima i prenosi opterećenja različitim vrstama naprezanja i njihovim kombinacijama: vlakom, tlakom i posmikom. To dovodi do složenih razdioba naprezanja koja se mogu vidjeti u fotoelastičnim eksperimentima. Uže, međutim, ima zanemarujuću fleksijsku krutost, nedostatnu da omogućiti prenošenje većih sila okomitih na svoju os. Ono, isto tako, ne može preuzeti tlačne sile. Zbog toga ono pod djelovanjem opterećenja mijenja oblik kako bi se u njemu razvile uravnotežujuće vlačne sile, uz jednolike razdiobe vlačnih naprezanja po ploštinama poprečnih presjeka. Posljedica je toga da uže bitno mijenja ravnotežnu konfiguraciju ako sile koje djeluju na njega promijene položaj, pravac ili smisao djelovanja. S druge strane, kako su sve točke poprečnoga presjeka jednako napregnute, uže je pri prijenosu sila vrlo učinkovito.

Budući da uže, samo za sebe, pri promjeni opterećenja mijenja ravnotežnu konfiguraciju, održavanje oblika gipkih konstrukcije od užadi osigurava se tako da se ona slažu u mrežu koja tvori antiklastičnu plohu (plohu negativne Gaussove zakrivljenosti). U najjednostavnijim slučajevima postoje dvije familije užadi: ulegnuta užad preuzima (dominantno gravitacijsko) opterećenje, a ispupčena užad, razapeta približno okomito na ugnutu, služi za stabilizaciju. Užad uz to mora biti prednapeta, jer se vlačno naprezanje u cijeloj mreži mora održati pri svim kombinacijama opterećenja; primjerice, pri djelovanju vjetrova familije užadi mogu zamijeniti uloge.

Zbog svega su toga geometrijski oblik i vrijednosti prednaponskih sila presudni za statičko (a, naravno, i dinamičko) ponašanje gipke konstrukcije od užadi - antiklastičan oblik i prednapinjanje daju joj takozvanu geometrijsku krutost. I obratno, zakoni statike određuju njezin oblik: geometrijski oblik neposredno odražava sustav sila u ravnoteži; proizvoljno odabrani oblik i vrijednosti prednaponskih sila teško će zadovoljiti uvjete ravnoteže. U tome je stanoviti paradoks: naizgled slobodni, razvedeni,

gotovo organski oblici prednapetih konstrukcija od užadi (slika 1.) određeni su u stvari strogim, neumitnim i neumoljivim zakonima statike [1].

Prva je faza projektiranja prednapete konstrukcije od užadi stoga nalaženje njezina oblika prije nanošenja korisnoga opterećenja, a najčešće i uz zanemarivanje vlastite težine. Pod pojmom *nalaženja oblika* razumijevamo određivanje početne ravnotežne konfiguracije koja obuhvaća geometrijski oblik konstrukcije i vrijednosti prednaponskih sila.

Do kraja šezdesetih godina prošloga stoljeća jedini je način nalaženja oblika bila izrada fizičkih modela. Frei Otto je za svoje projekte upotrebljavao modele od tkanine i žica te opne od sapunice [1]. Iako fizički modeli pružaju koristan uvid u ponašanje gipkih konstrukcija, vrlo je teško, čak i fotogrametrijskim postupcima, dovoljno točno odrediti koordinate pojedinih točaka, a da o mogućnosti točnijeg određivanja vrijednosti sila i naprezanja i ne govorimo. Stoga su se vrlo rano počeli razvijati računalni modeli i metode.

Iscrpn prikazi različitih postupaka nalaženja oblika prednapetih konstrukcija od užadi dani su u [2, 3], tako da ćemo se ovdje ograničiti na skicu, selektivno spominjući tek neke postupke.

Jedna od prvih računalnih metoda proširenje je geometrijski nelinearnoga proračuna sustava ravnih zglobnih štapova metodom pomaka: probna se konfiguracija pod neuravnoteženim prednaponskim silama progiba (veliki pomaci uz male deformacije) i tako postupno približava ravnotežnoj konfiguraciji [4]. Nažalost, pritom je teško kontrolirati pomake i sile, tako da se u nekim dijelovima kabela mogu pojaviti i tlačne sile. Uz to, kako je riječ o inačici metode pomaka, treba pretpostaviti konstitucijsku vezu pomaka i sila, ali ta veza ne mora odgovarati stvarnom materijalu, jer je, pokazat ćemo, nalaženje oblika statička zadaća.

U metodi gustoća sila, koju su početkom sedamdesetih godina razvili H.-J. Schek, K. Linkwitz i njihovi suradnici, nelinearni je problem nalaženja oblika lineariziran drugačijim udruživanjem" veličina koji dovodi do pojma gustoće sile [5-7]. Rad [7] sadrži izvod jednadžbi metode iz potpunoga



Slika 1. Frei Otto: Njemački paviljon na izložbi Expo '67 u Montrealu



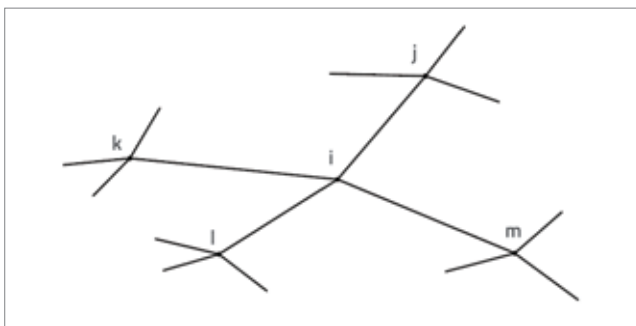
sustava jednadžbi ravnoteže, jednadžbi kompatibilnosti i konstitucijskih jednadžbi uz primjenu metode najmanjih kvadrata. Metodu gustoća sila detaljnije će se opisati u poglavlju 7., a jednadžbe će se izvesti neposredno, iz jednadžbi ravnoteže. Ta se metoda i danas često primjenjuje, a razvijena su i brojna njezina proširenja i poopćenja. Već je u [5] uvedena nelinearna inačica metode gustoća sila koja dopušta zadavanje dodatnih ograničenja.

Problem nalaženja oblika može se shvatiti i kao varijacijski problem, problem nalaženja minimuma [8-10], odnosno, kao što će se u poglavlju 5. pokazati, kao općenitiji problem nalaženja stacionarnih točaka stanovitih funkcija. Takav pristup smatramo najprirodnijim.

U radu [11] autori kao "temeljne parametre" u nalaženju oblika konstrukcija od platna prepoznaju topologiju plohe, geometriju plohe, geometrijske rubne uvjete, razdiobu napreznja te volumne i površinske sile. Iako uvrštene u temeljne parametre, volumne i površinske sile (vlastita težina, opterećenje) rijetko se, rekostmo već, u fazi nalaženja oblika uvode u proračun. Formulacije zadaće nalaženja oblika ovise o tome koji se parametri zadaju, a koji se smatraju nepoznanicama. U kontekstu konstrukcija od užadi govorit će se o topologiji i geometriji mreže te, umjesto o razdiobi napreznja, o vrijednostima prednaponskih sila u užadi.

2. Proračunski model mreže kabela

Za oblikovanje proračunskoga modela mreže pretpostavit će se da su kabeli potpuno savitljivi i da su bez težine. Razmatrati će se samo faza nalaženja oblika, pa neće biti ni vanjskoga opterećenja. Unesemo li u kabele prednaponske vlačne sile, između njih će u točkama u kojima se križaju djelovati kontaktne sile. Ako kabeli jedni po drugima mogu klizati bez trenja, te će sile biti normalne na dodirne plohe, dok će uz trenje postojati i tangencijalne komponente. Kako su površine dodirnih ploha zanemarivo male, kontaktne ćemo sile smatrati koncentriranim. Zbog pretpostavljene potpune savitljivosti kabel opterećen samo koncentriranim silama poprima oblik ravninske ili prostorne poligonalne linije, tako da će odsječci između točaka u kojima se neki kabel križa s drugima biti ravni (slika 2.).



Slika 2. Čvor i , priključeni štapovi i susjedni čvorovi

Iako se zbog debljine kabela njihove osi u križištima mimoilaze, pretpostavit ćemo da su ta križišta geometrijske točke, to jest, da se osi kabela u njima sijeku. Uz navedene pretpostavke možemo u proračunskom modelu uzeti da su odsječci kabela između križišta zglobni štapovi, a križišta zglobni čvorovi u koje su štapovi centrično priključeni. Sustav zglobno spojenih štapova može se kao proračunski model zadržati i u fazi izračunavanja ponašanja mreže pod djelovanjima raznih opterećenja, ako ta opterećenja prikažemo koncentriranim silama u čvorovima.

Osim unutarnjih čvorova u kojima se kabeli križaju, mreža će imati i ležajne čvorove u kojima su kabeli spojeni s "krutim" rubnim i , rjeđe, unutarnjim linijskim i točkastim osloncima. Pod pojmom "krutih" oslonaca razumijevamo "tradicionalne" konstrukcijske elemente poput greda, lukova, "jarbola", "sidara", koji, naravno, nisu apsolutni kruti, ali čvorove na njima možemo smatrati nepomičnima. Položaji ležajnih čvorova zadani su unaprijed - u proračunskom modelu to su geometrijski rubni uvjeti. Jedan od načina na koji projektant može utjecati na oblik mreže promjena je razmještaja i oblika čvrstih oslonaca, odnosno u modelu, geometrijskih rubnih uvjeta. Promijenjeni rubni uvjeti pritom su ulazni podaci za ponovljeni postupak nalaženja oblika.

Budući da su u fazi nalaženja oblika položaji unutarnjih čvorova nepoznanice, te ćemo čvorove nazivati i slobodnima. Skup oznaka slobodnih čvorova označit ćemo sa N_f , a skup oznaka ležajnih čvorova sa N_s . Broj je slobodnih čvorova $n_f = \text{card} N_f$ dok je broj ležajnih čvorova $n_s = \text{card} N_s$. Za skup oznaka svih čvorova vrijedi $N = N_f \cup N_s$, a kako je $N_f \cap N_s = \emptyset$, bit će $n = \text{card} N = n_f + n_s$.

Štap između čvorova i i j označit ćemo sa (i, j) , a skup oznaka svih štapova sa B ; broj je štapova $n_b = \text{card} B$. Čvorove koji su štapovima povezani sa čvorom i zvat ćemo "susjedima" čvora i , a skup njihovih oznaka označit ćemo sa N_i .

Topologija mreže opisuje povezanost štapova i čvorova: štapove koji "pripadaju" jednom kabelu, štapove koji su priključeni u neki čvor, "susjede" nekog čvora i slično. Topologija mreže unaprijed je zadana.

Geometrija ili oblik mreže ključni je parametar u nalaženju oblika. Oblik mreže mora zadovoljiti konstrukcijske, funkcionalne i estetske zahtjeve. On je u proračunskom modelu određen koordinatama čvorova. Budući da je traženi oblik mreže ravnotežna konfiguracija prednaponskih vlačnih sila u sustavu zglobno spojenih štapova, koordinate su slobodnih čvorova temeljne nepoznanice u postupku nalaženja oblika. U nekim je slučajevima pogodno, pa i potrebno osim uvjeta ravnoteže sila u čvorovima uvesti i dodatne uvjete izražene u obliku kinematičkih ograničenja koja povezuju nepoznate koordinate.

Vrijednosti prednaponskih vlačnih sila u kabelima ili u štapovima mogu biti unaprijed zadane, ali mogu biti i nepoznanice koje se određuju uravnoteženjem čvorova i , možda, zadovoljavanjem dodatnih kinematičkih ograničenja.

3. Ravnoteža slobodnog čvora i

Osnovu postupka nalaženja oblika prednapetih konstrukcija od užadi čine jednadžbe ravnoteže čvorova na koje djeluju samo sile prednapinjanja u priključenim štapovima.

Za svaki slobodni čvor i možemo napisati tri jednadžbe ravnoteže - jednadžbe ravnoteže projekcija sila u priključenim štapovima na tri koordinatne osi:

$$\sum_{j \in N_i} S_{i,j} \cos \alpha_{i,j} = 0, \sum_{j \in N_i} S_{i,j} \cos \beta_{i,j} = 0, \sum_{j \in N_i} S_{i,j} \cos \gamma_{i,j} = 0 \quad (1)$$

pritom su

- $S_{i,j}$ vrijednost sile u štapu (i, j) , s pozitivnim smislom djelovanja od čvora i prema čvoru j ,
- $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}, \gamma_{i,j}$ kutovi između koordinatnih osi i i štapa (i, j) , orijentirane od i prema j ,

tako da su

$$\cos \alpha_{i,j} = \frac{x_j - x_i}{\ell_{i,j}}, \cos \beta_{i,j} = \frac{y_j - y_i}{\ell_{i,j}}, \cos \gamma_{i,j} = \frac{z_j - z_i}{\ell_{i,j}} \quad (2)$$

gdje je

$$\ell_{i,j} = \ell(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (3)$$

duljina štapa (i, j) . Uvrstimo li (2) i (3) u (1), dobit ćemo sustav nelinearnih algebarskih jednadžbi

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_i} S_{i,j} \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= 0, \\ \sum_{j \in N_i} S_{i,j} \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= 0, \\ \sum_{j \in N_i} S_{i,j} \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

za $i \in N_f$. Sustav, prema tome, sadrži $3n_f$ jednadžbi.

Bilo koji skup n_f koordinatnih trojki (x_i, y_i, z_i) , $i \in N_f$ i n_b vrijednosti sila $S_{i,j}$, $(i, j) \in B$, koji zadovoljava te jednadžbe tvori ravnotežnu konfiguraciju. Jednadžbe sustava (4) ne sadrže funkcije ili koeficijente (kao što su, primjerice, koeficijenti matrice krutosti u metodi pomaka) kojima je izražena konstitucijska veza produljenja kabela i vrijednosti sila u njima, tako da je ravnotežna konfiguracija mreže neovisna o modulima elastičnosti kabela i površinama njihovih poprečnih presjeka. Problem je nalaženja oblika, prema tome, statički problem, a njegovo je rješenje "čisti, nematerijalizirani ravnotežni oblik" [6].

4. Minimalna mreža kabela

Ukupna duljina kabela u mreži dana je funkcijom \mathcal{L} definiranom:

$$\mathcal{L}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in N_f}) = \sum_{(i,j) \in B} \ell_{i,j} \quad (5)$$

Iako u izraz za ukupnu duljinu uvaži ulaze koordinate svih čvorova, koordinate su ležajnih čvorova poznate, tako da je \mathcal{L} funkcija koordinata slobodnih čvorova, $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{3n_f} \rightarrow \mathbb{R}$. Izjednačimo li s nulom njezine derivacije po koordinatama slobodnih čvorova, dobit ćemo sustav $3n_f$ jednadžbi sa $3n_f$ nepoznanica rješenje kojeg su koordinate slobodnih čvorova za koje funkcija \mathcal{L} poprima minimum:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in N_f})}{\partial x_i} = 0, \frac{\partial \mathcal{L}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in N_f})}{\partial y_i} = 0, \frac{\partial \mathcal{L}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in N_f})}{\partial z_i} = 0$$

za $i \in N_f$. Pritom će izraz za derivaciju funkcije \mathcal{L} po jednoj od koordinata čvora i sadržavati samo pribrojnik koji u brojniku sadrže istu koordinatu susjednih čvorova; primjerice,

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in N_f})}{\partial x_i} = - \sum_{j \in N_i} \frac{x_j - x_i}{\ell_{i,j}} = 0$$

Rješenje sustava možemo shvatiti i kao nultočku vektorske funkcije vektorske varijable,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_f) = \mathbf{0},$$

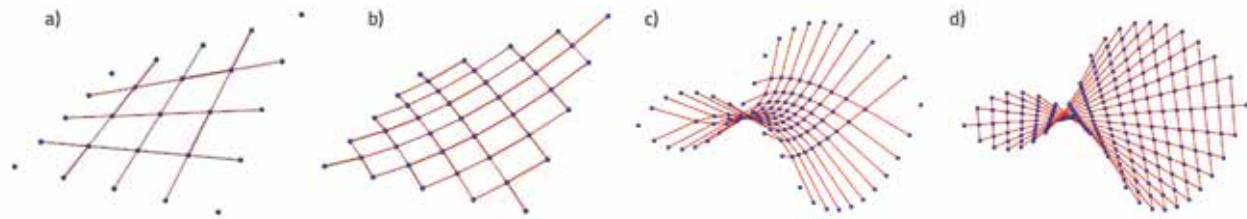
gdje je $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{3n_f} \rightarrow \mathbb{R}^{3n_f}$, a koordinate su slobodnih čvorova svrstane u vektor $\mathbf{x}_f \in \mathbb{R}^{3n_f}$. Ako je S konstanta, $S \neq 0$, onda je

$$\frac{\partial (S\mathcal{L}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in N_f}))}{\partial \mathbf{x}_i} = S \frac{\partial \mathcal{L}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in N_f})}{\partial \mathbf{x}_i} \quad etc.$$

što znači da se "položaj" minimuma (točka u prostoru \mathbb{R}^{3n_f}) ne mijenja; mijenja se samo njegova vrijednost. Prema tome, ako su vrijednosti sila u svim štapovima (i, j) međusobno jednake, $S_{i,j} = S$, sustav (4) možemo interpretirati kao iskaz uvjeta minimuma ukupne duljine užadi: koordinate slobodnih čvorova, dobivene kao rješenje sustava, daju oblik mreže za koji je zbroj duljina kabela manji od zbroja duljina kabela u bilo kojem drugom obliku koji mreža može poprimiti. Takav oblik mreže nazivamo *minimalnom* ili *geodetskom mrežom kabela*; on, pokazali smo, formalno-matematički ne ovisi o vrijednosti sile S , ali za fizički ostvarivo rješenje sila mora biti vlačna, $S > 0$.

Na slikama 3.a i 3.b prikazane su minimalne mreže nad tlocrtnim područjem $[0, 1] \times [0, 1]$ s rubnim čvorovima čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu $z = \frac{1}{2}xy$, kabeli mreže na slici a) izvodnice su hiperboličkog paraboloida. Minimalne mreže prikazane na slikama 3.c i 3.d razapete su nad tlocrtnim područjem $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Koordinate njihovih rubnih čvorova zadovoljavaju jednadžbu $z = \ln(\cos x / \cos y)$.

Primjeri sa slike 3. riješeni su primjenom programske funkcije newton_krylov, sadržane u programskom paketu SciPy [12] koji je (uz mnoge druge) uključen u simbolički programski paket Sage [13, 14]. Ta je funkcija programska realizacija Newton-Krilovljeva postupka rješavanja sustava nelinearnih jednadžbi, odnosno nalaženja nultočke vektorske funkcije vektorske varijable [15, 16]. Newton-Krilovljev postupak inačica je poznatoga Newton-Raphsonova postupka [15, 17]. U svakom se koraku vanjske, Newton-Raphsonove petlje linearni sustavi:



Slika 3. Minimalne mreže

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{J}^{(k)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) = 0$$

rješavaju odabranim Krilovljevim iteracijskim postupkom (unutarnja petlja), pri čemu se umnošci Jacobijeve matrice $\mathbf{J}^{(k)} = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$ i vektora \mathbf{v} izračunavaju neposredno, bez izračunavanja same matrice, tako da se aproksimiraju numeričkom derivacijom

$$\mathbf{J}^{(k)}\mathbf{v} \approx [\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)} + \varepsilon\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})]/\varepsilon$$

gdje je ε mali broj, primjerice broj nešto veći od korijena strojne točnosti prikaza realnih brojeva $\varepsilon_{\text{mach}}$.

U funkciji `newton_krylov` mogu se za rješavanje sustava linearnih jednažbi upotrijebiti Krilovljevi postupci Conjugate Gradient Squared (cgs), BConjugate Gradient STABILIZED (bicgstab), MINimum RESidual (minres), Generalized Minimal RESidual (gmres) [15] i "Loose" GMRES (lgmres) [18] (zadržani su engleski nazivi, jer, koliko nam je poznato, uvriježeni hrvatski ne postoje).

Globalna se konvergencija u funkciji `newton_krylov` osigurava pretraživanjem po pravcu. Pritom se za određivanje duljine koraka mogu odabrati Armijov kriterij bez dodatnoga kriterija o zakrivljenosti ili s njim (Wolfeovi kriteriji) [15].

Za pripremu vektorske funkcije vektorske varijable (uvođenje niza simboličkih varijabli za koordinate čvorova, definiranje funkcija ℓ_{ij} i \mathcal{L} , deriviranje funkcije \mathcal{L} po svim njezinim varijablama) koja je ulazni parametar funkcije `newton_krylov` upotrijebljene su simboličke mogućnosti programa Sage.

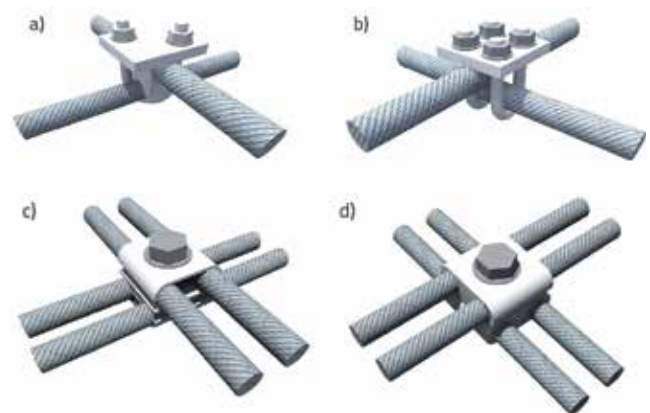
U tablici 1. prikazani su podaci o trajanju proračuna za nalaženje oblika mreže sa slike 3.b. Mreža ima 25 slobodnih čvorova, što znači da sustav sadrži 75 jednažbi sa 75 nepoznanica. Za početnu aproksimaciju rješenja uzeto je da svi slobodni čvorovi leže u ravnini $z=0$ tvoreći pravilnu mrežu. Kriterij za prekid iteracijskog postupka bio je $\|\mathbf{r}^{(k)}\|_{\infty} \leq 6 \cdot 10^{-6}$, gdje je $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_f^{(k)})$ rezidual.

Da bi mreža mogla doći u minimalnu konfiguraciju, ne smije se tijekom prednapinjanja spriječiti klizanje kabela jednih po drugima. Tek nakon postizanja konačnoga minimalnog oblika kabeli se u točkama u kojima se križaju međusobno povezuju kako bi se povećala krutost mreže i onemogućilo daljnje klizanje kabela nakon nanošenja opterećenja. Nekoliko je vrsta spojeva kabela prikazano na slici 4. (da se izbjegne potreba za kabelima velikih promjera poprečnih presjeka,

mreže većih raspona često se izvode s dva usporedna tanja kabela, slike 4.c i 4.d.

Tablica 1. Trajanje proračuna inačicama Newton-Krilovljeva postupka

Postupak rješavanja linearnih sustava	Pretraživanje po pravcu	Broj koraka vanjske petlje	Trajanje proračuna
cgs	armijo	5	45,21 s
cgs	wolfe	4	44,22 s
bicgstab	armijo	5	36,98 s
bicgstab	wolfe	4	36,23 s
minres	armijo	5	22,24 s
minres	wolfe	4	25,16 s
gmres	armijo	5	27,21 s
gmres	wolfe	4	28,62 s
lgmres	armijo	5	40,08 s
lgmres	wolfe	4	36,32 s



Slika 4. Spojevi kabela (prema [19])

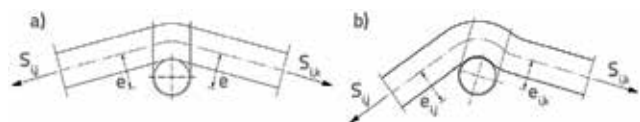
5. Poopćene minimalne mreže kabela

Lako je vidjeti da za međusobno različite vrijednosti sila S_{ij} sustav jednažbi ravnoteže (4) izražava uvjete minimuma funkcije \mathcal{L} dane izrazom

$$\mathcal{E}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in \mathcal{N}_f}) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{B}} S_{i,j} \ell_{i,j} \quad (6)$$

Spoje li se u čvoru dva mimoilazna užeta prije no što se izjednače vrijednosti sila uzduž njih, spoj mora s jednoga užeta

na drugo, "poprečno", osim normalne kontaktne sile prenijeti i tangencijalnu (koja sprečava klizanje užadi). Kako jedno uže prelazi preko ili ispod drugoga, njihove se osi ne sijeku (sijeku se samo u našem proračunskom modelu). Budući da vrijednosti sile u dva priključena štapa u čvoru jednoga užeta nisu jednake, $S_{ij} \neq S_{ik}$, neće biti jednake ni vrijednosti momenata tih sila u odnosu na os poprečnog užeta: $e_{ij} S_{ij} \neq e_{ik} S_{ik}$ (slika 5.a). Čvor će se zaokrenuti kako bi se smanjio krak sile veće vrijednosti i time uravnotežili momenti: $e_{ij} S_{ij} = e_{ik} S_{ik}$ (slika 5.b). Razlike vrijednosti sile u štapovima jednoga užeta trebale bi biti što manje, tako da i izokretanje čvorova bude malo.

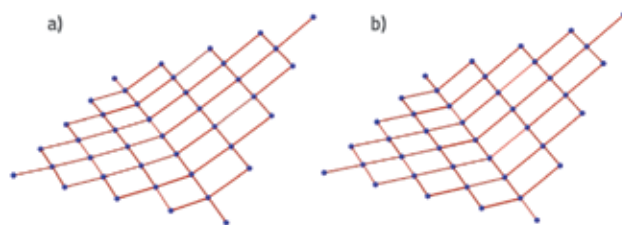


Slika 5. Izobličenje spoja kabela

Napinju li se različiti kabeli različitim silama i spoje u čvorovima tek kad dokližu u ravnotežnu konfiguraciju, uzduž pojedinih će kabela vrijednosti sile S_{ij} biti međusobno jednake, pa se čvorovi neće izobličiti. Takve mreže, s različitim vrijednostima sile u različitim kabelima, ali nepromjenjivih uzduž kabela, nazvat ćemo "prirodnim" *poopćenim minimalnim mrežama kabela* (jer "[m]reža dolazi u prirodnu ravnotežnu konfiguraciju ako se za prednapinjanja omogućiti klizanje", [10]), za razliku od "apstraktnoga" *poopćenja* u kojem su vrijednosti sile S_{ij} međusobno potpuno neovisne. Treba, međutim, reći da će se, nakon povezivanja kabela, pod promjenjivim opterećenjem vrijednosti sile u štapovima mijenjati u različitim omjerima, pa ni u "prirodnim" mrežama neće više uzduž pojedinih kabela biti jednake. No, te će razlike biti malene u odnosu na vrijednosti prednaponskih sila.

Mogućnost zadavanja različitih vrijednosti sile u različitim kabelima bitno povećava skup oblika ostvarivih u oblikovanju

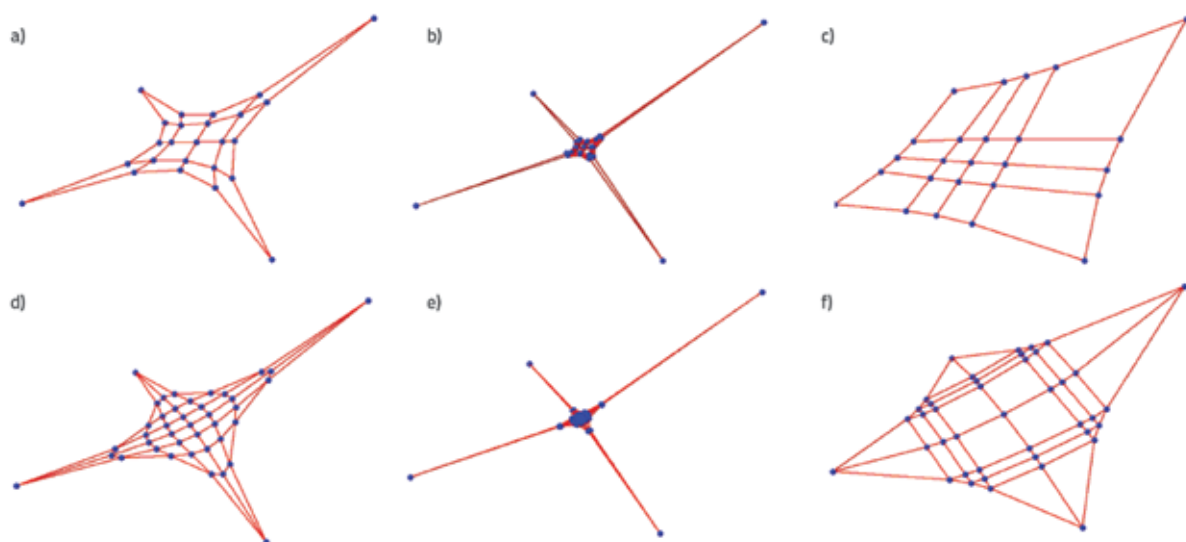
prednapetih konstrukcija od užadi; pritom su važni omjeri vrijednosti sile u kabelima, a ne njihove "apsolutne" vrijednosti. Ako se sile u drugim kabelima ne mijenjaju, odabrano se uže povećanjem sile u njemu nateže, pa se ukupna duljina štapova od kojih je sastavljeno smanjuje, pri čemu se prostorna poligonalna linija koju ti štapovi tvore izravnavava i približava pravocrtnoj spojnici njegovih krajeva (slika 6., usporedite sa slikom 3.b); iako je uže poligonalna linija, a ne krivulja, često se kaže da se natezanjem njegova zakrivljenost smanjuje.



Slika 6. Sile u jednom kabelu: a) deset puta veća; b) pedeset puta veća od sile u ostalim kabelima

Mreže užadi u primjerima na slikama 3. i 6. imaju "krute" rubove (grede, recimo), pa su koordinate svih rubnih čvorova poznate. Prednapete konstrukcije od užadi često se, međutim, rade s rubnom užadi. Ti su rubni kabeli samo u nekim točkama, obično krajnjima, spojeni s "krutim" konstrukcijskim elementima, tako da su poznate koordinate samo tih, "ležajnih" čvorova. Stoga nalaženje oblika rubnih kabela postaje dijelom nalaženja oblika cijele mreže. U rubnim su kabelima vrijednosti sile znatno veće negoli u unutarnjima.

Međutim, kao što primjeri na slici 7. pokazuju, može se dogoditi da po rubnom kabelu dva čvora ili više njih "otkližu" u jednu točku. To će se dogoditi neovisno o vrijednostima sile u rubnim kabelima - ni znatnim povećanjem vrijednosti tih sila u odnosu na vrijednosti sile u priključenim kabelima ne možemo spriječiti



Slika 7. Međusobno približavanje čvorova: a), b) i d), e) sile u svim kabelima jednake, c) i f) sile u rubnim kabelima deset puta veće od sile u unutarnjima

neograničeno približavanje i stapanje čvorova. Povećavanjem vrijednosti sila u rubnim kabelima možemo približavanje čvorova "usporiti" (Slike 7.a i 7.c u usporedbi sa 7.e te 7.b i 7.d u usporedbi s 7.f), ali netrivialno "nesingularno" ravnotežno stanje ne postoji. Osim što je sa stajališta oblikovanja mreže nesmisleno, stapanje čvorova dovodi do problema i u numeričkom rješavanju sustava jednadžbi ravnoteže (4). Padnu li dva čvora u istu točku, duljina je štapa između njih jednaka nuli, a nuli su jednake i razlike pojedinih koordinata čvorova, pa su po uvrštavanju u jednadžbe ravnoteže - u pribrojnicima kojih su razlike koordinata u brojnici, a duljine u nazivnicima - odgovarajući pribrojnici neodređeni izrazi 0/0, što dovodi do prekida rada računalnog programa, ponajčešće s nerazumljivom porukom o greški. Zbog toga ćemo spriječiti klizanje u spojevima unutarnjih kabela s rubnim kabelom (spoj je prikazan na slici 8.) i kinematičkim ograničenjima propisati duljine štapova na rubnim kabelima:

$$\ell_{i,j} = \bar{\ell}_{i,j} \quad (7)$$

za $(i,j) \in \mathcal{B}_c$; skup oznaka štapova duljina kojih je zadana označili smo sa \mathcal{B}_c a njihov broj sa n_c , $n_c = \text{card}\mathcal{B}_c$.



Slika 8. Spoj unutarnjeg kabela na rubni (prema [19])

Kinematička ćemo ograničenja u proračun uvesti s pomoću Lagrangeovih multiplikatora [20]. Jednadžbe ograničenja (7) pisat ćemo stoga u obliku

$$\ell_{i,j} - \bar{\ell}_{i,j} = 0 \quad (8)$$

lijeve strane pomnožiti novouvedenim varijablama $\lambda_{i,j}$, nazvanima Lagrangeovim multiplikatorima, i pribrojiti funkciji \mathcal{E} . Time dobivamo novu funkciju $\mathcal{E}_c : \mathbb{R}^{3n_f+n_c} \rightarrow \mathbb{R}$, definiranu izrazom

$$\mathcal{E}_c(\{\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k\}_{k \in N_f}, \{\lambda\}_{(i,j) \in \mathcal{B}_c}) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{B}} S_{i,j} \ell_{i,j} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{B}_c} \lambda_{i,j} (\ell_{i,j} - \bar{\ell}_{i,j}) \quad (9)$$

Izjednačavanjem s nulom derivacija funkcije \mathcal{E}_c po koordinatama slobodnih čvorova dobivamo (nakon množenja sa -1) jednadžbe

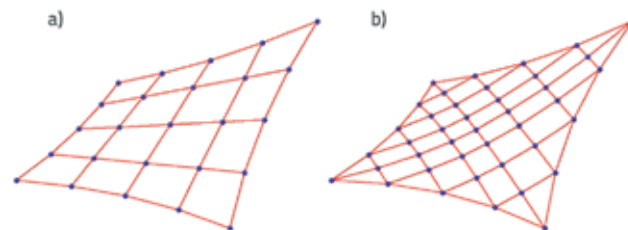
$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_i} S_{i,j} \frac{x_j - x_i}{\ell_{i,j}} + \sum_{j \in N_i^c} \lambda_{i,j} \frac{x_j - x_i}{\ell_{i,j}} &= 0 \\ \sum_{j \in N_i} S_{i,j} \frac{y_j - y_i}{\ell_{i,j}} + \sum_{j \in N_i^c} \lambda_{i,j} \frac{y_j - y_i}{\ell_{i,j}} &= 0 \\ \sum_{j \in N_i} S_{i,j} \frac{z_j - z_i}{\ell_{i,j}} + \sum_{j \in N_i^c} \lambda_{i,j} \frac{z_j - z_i}{\ell_{i,j}} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

za $i \in N_f$ pri čemu smo sa N_i^c označili skup oznaka "susjeda" čvora i koji su s njim povezani štapovima zadane duljine. Izjednačavanje pak s nulom derivacija funkcije \mathcal{E}_c po Lagrangeovim multiplikatorima daje jednadžbe kinematičkih ograničenja (8). Jednadžbe (10) i (8) zajedno čine sustav koji sadrži $3n_f + n_c$ jednadžbi sa $3n_f + n_c$ nepoznanica; sada su, naime, osim koordinata slobodnih čvorova, nepoznanice i multiplikatori $\lambda_{i,j}$. Jednadžbe (10) možemo pisati i u obliku

$$\sum_{j \in N_i \setminus N_i^c} S_{i,j} \frac{x_j - x_i}{\ell_{i,j}} + \sum_{j \in N_i^c} (S_{i,j} + \lambda_{i,j}) \frac{x_j - x_i}{\ell_{i,j}} = 0 \quad \text{etc.}$$

iz kojega se vidi da su multiplikatori $\lambda_{i,j}$ dodatne vrijednosti sila, potrebne da se osiguraju tražene duljine štapova. To znači da više nemamo potpunu "kontrolu" nad silama u kabelima - zadane vrijednosti sila u rubnim kabelima promijenit će se za vrijednosti $\lambda_{i,j}$ koje nisu poznate prije rješavanja sustava. I, kao što se, budući da smo spriječili klizanje, moglo očekivati, vrijednosti sila u štapovima rubnog kabela neće biti međusobno jednake.

Na slici 9. prikazane su dvije mreže sa zadanim duljinama štapova na rubnim kabelima. Za duljine rubnih štapova odabrane su srednje vrijednosti duljina štapova na pojedinim rubnim kabelima određene nakon pet koraka iteracijske metode gustoća sila (odjeljak 8.) uz dopušteno klizanje svih kabela. U svim su unutarnjim štapovima vrijednosti sila 1. Početne vrijednosti sila u štapovima rubnih kabela bile su 10. Dobivene vrijednosti $\lambda_{i,j}$ u rasponu su od -0,524 do 0,309, što znači da se konačne vrijednosti sila u rubnim kabelima kreću u rasponu od 9,476 do 10,309.



Slika 9. Minimalne mreže s rubnim kabelima sa zadanim duljinama odsječka između čvorova

I za rješavanje sustava jednadžbi (10) upotrijebljena je funkcija newton_krylov. Konvergencija je, međutim, razočaravajuće spora. Primjerice, za nalaženje oblika mreže sa slike 9.b, uz uporabu Armijovoga kriterija u pretraživanju po pravcu i postupka lgmres za rješavanje linearnih sustava, te uz kriterij prekida iteracijskog postupka $\|r^{(k)}\|_\infty \leq 1 \cdot 10^{-5}$, trebala su 22 koraka vanjske petlje, a proračun je trajao 850 s. Nešto je brža konvergencija uz uporabu strožih Wolfeovih kriterija: 18 koraka vanjske petlje u 732 s. Razlog tome nije veći broj jednadžbi i nepoznanica (u odnosu na tablicu 1.): dodatnih 12×3 koordinata čvorova na rubnim kabelima i 16 multiplikatora, odnosno dodatnih 36 jednadžbi ravnoteže i 16 jednadžbi kinematičkih ograničenja. Konvergencija je znatno

usporena zato što, kao što ćemo pokazati u sljedećem odjeljku, uporaba Lagrangeovih multiplikatora problem pretvara iz problema minimizacije u problem sedlaste točke.

6. Steinerov problem

Najjednostavniji primjer prostorne mreže jedan je slobodan čvor spojen s podlogom četirima štapovima, pri čemu četiri ležajna čvora nisu u jednoj ravnini (možemo uzeti da su na slici 2. čvorovi j, k, l i m ležajni i da je i slobodan čvor). Prirodna poopćena minimalna mreža sadržavat će dva ukrížena kabela. Problem nalaženja oblika ima tri nepoznanice - koordinate slobodnoga čvora.

Odreknemo li se prostornosti, slobodan čvor možemo za podlogu vezati trima štapovima. Unesemo li prednaponske sile u štapove, slobodni će čvor doći u ravninu koju određuju tri ležajna čvora. Sa statičkoga stajališta to slijedi iz činjenice da je ravnoteža triju sila nemoguća ako one ne leže u istoj ravnini. Sa stajališta minimizacije ukupne duljine štapova lako se vidi da će zbroj duljina spojnica triju točaka u ravnini s točkom izvan nje biti veći od zbroja duljina spojnica s ortogonalnom projekcijom te točke na ravninu.

U ravnini se, dakle, problem nalaženja oblika, formuliran kao problem minimizacije, može izreći na sljedeći način: treba naći sustav pravčastih odsječaka koji povezuju točke A, B i C, a ukupna im je duljina najmanja. Tako izražen, problem nosi ime Jacoba Steinera (1796.-1863.), iako ga je već ranije, 1646. godine, postavio Pierre de Fermat (1601.-1665.), a vjerojatno ga je iste te godine dijelom riješio Evangelista Torricelli (1608.-1647.) [21].

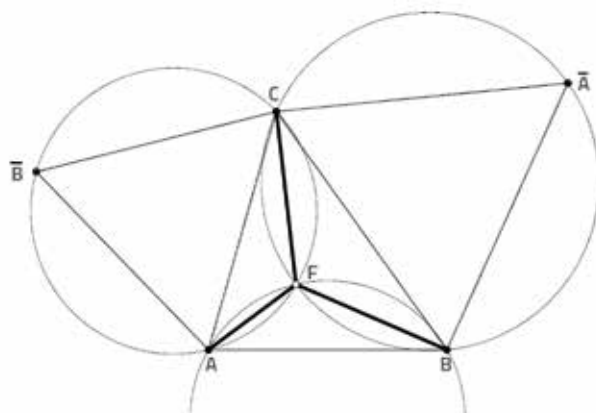
Ako su svi kutovi trokuta s vrhovima A, B i C manji od 120° , onda je jedinstvena točka F, nazvana Fermatovom točkom, za koju je zbroj duljina odsječaka AF, BF i CF najmanji moguć, točka unutar trokuta za koju vrijedi $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120^\circ$, (slika 10.a). Geometrijski je dokaz valjanosti rješenja dan, primjerice, u [21]. Uzmemo li da su (A, F), (B, F) i (C, F) napete niti, možemo predložiti jednostavan i sažet "statički dokaz": sile su u sva tri kabela međusobno jednake, $S_{A,F} = S_{B,F} = S_{C,F} = S$, pa je ravnotežni trokut sila jednakostraničan; u jednakostraničnu trokutu kutovi imaju 60° , a njihovi pak sukuti 120° (slika 10.b). Drugim riječima, u Fermatovoj je točki minimum funkcije \mathcal{E} definirane izrazom

$$\mathcal{E}(x_F, y_F) = S l_{A,F} + S l_{B,F} + S l_{C,F}$$



Slika 10. a) Rješenje Steinerova problema. b) Ravnoteža triju sila

Jedna od geometrijskih konstrukcija Fermatove točke temelji se na stavku (poopćenju Talesova poučka) da su svi obodni kutovi kružnice nad istom tetivom, s jedne njezine strane, međusobno jednaki i da je zbroj dvaju obodnih kutova s različitih strana tetive 180° . Konstruiramo li nad odsječcima AC i BC kružnice obodni kutovi kojih su 120° na onim stranama tih odsječaka na kojima leže točke B i A, sjeći će se te kružnice osim u točki C i u Fermatovoj točki F. Budući da sa suprotnih strana odsječaka njihovi obodni kutovi imaju 60° , te je kružnice lako konstruirati: nad odsječcima AC i CB konstruirat ćemo jednakostranične trokute $\triangle AC\bar{B}$ i $\triangle CB\bar{A}$ s vrhovima na suprotnim stranama od onih na kojima obodni kutovi moraju imati 120° ; tražene su kružnice kružnice kroz vrhove tih trokuta (slika 11.). Kroz točku F proći će i treća kružnica, opisana jednakostraničnom trokutu nad odsječkom AB s vrhom \bar{C} na strani suprotnoj od točke C.



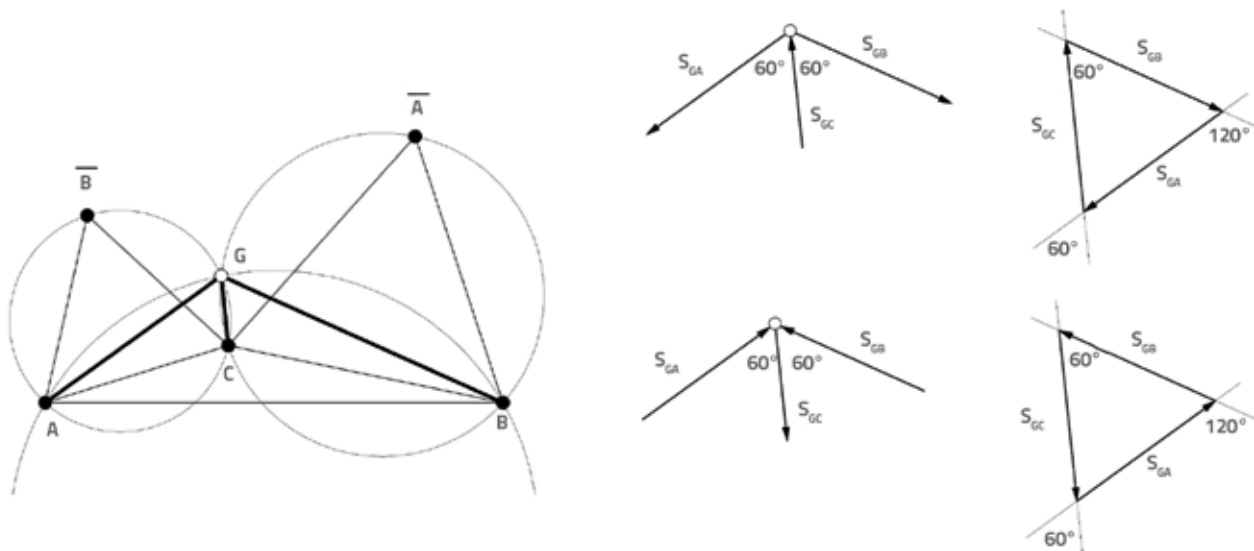
Slika 11. Geometrijska konstrukcija rješenja Steinerova problema

Ako jedan od kutova trokuta $\triangle ABC$, pretpostavimo kut u vrhu C, ima 120° ili više, onda je tražena najkraća poveznica točaka A, B i C sastavljena od odsječaka AC i CB (taj je slučaj izdvojen tek 1834. godine [21]). Konstruiramo li, međutim, na isti način kao u prvom slučaju, kružnice s tetivama AC i CB, sjeći će se sada oni njihovi lukovi koji su na istim stranama tih tetiva kao i trokutu $\triangle AC\bar{B}$ i $\triangle CB\bar{A}$ dakle, na stranama na kojima obodni kutovi imaju 60° (slika 12.a); dobiveno ćemo sjecište označiti sa G. Sada će, prema tome, kutovi između spojnica AG i CG i između spojnica CG i BG imati 60° , dok će kut između spojnica AG i BG imati 120° . U statičkoj je interpretaciji točka G čvor u kojem se sastaju štapovi (A, G), (B, G) i (C, G) u kojima su sile jednakih intenziteta, ali su sile $S_{G,A}$ i $S_{G,B}$ vlačne, dok je sila $S_{G,C}$ tlačna (slika 12.b) ili obratno (slika 12.c). Prema tome, opisana konstrukcija minimizira funkciju \mathcal{E} danu izrazom

$$\mathcal{E}(x_G, y_G) = S l_{A,G} + S l_{B,G} - S l_{C,G}$$

pri čemu je S intenzitet sila u štapovima, $S = |S_{A,G}| = |S_{B,G}| = |S_{C,G}|$.

Kao primjer Steinera problema, neka su zadane točke A(0, 0), B(5, 0) i C(1,425; 5). Kutovi trokuta $\triangle ABC$ manji su od 120° , pa postoji Fermatova točka unutar njega.



Slika 12. a) Geometrijska konstrukcija rješenja inačice Steinerova problema; b) i c) Sustavi vlačnih i tlačnih štapova

Ukupna je duljina niti, kao funkcija koordinata točke F u kojoj su niti međusobno spojene,

$$\mathcal{L}: (x_F, y_F) \rightarrow \sqrt{x_F^2 + y_F^2} + \sqrt{(x_F - 5)^2 + y_F^2} + \sqrt{(x_F - 1,425)^2 + (y_F - 5)^2}$$

Graf funkcije \mathcal{L} je ploha $\Gamma_{\mathcal{L}}$ prikazana na slici 13.a). Ta je ploha konveksna pa ima najnižu točku, a funkcija \mathcal{L} minimum. (Funkciju nazivamo konveksnom ako je spojnica bilo kojih dviju točaka na njezinu grafu iznad njega ili, formalno, ako vrijedi $f(ax + (1 - a)y) \leq af(x) + (1 - a)f(y)$.)

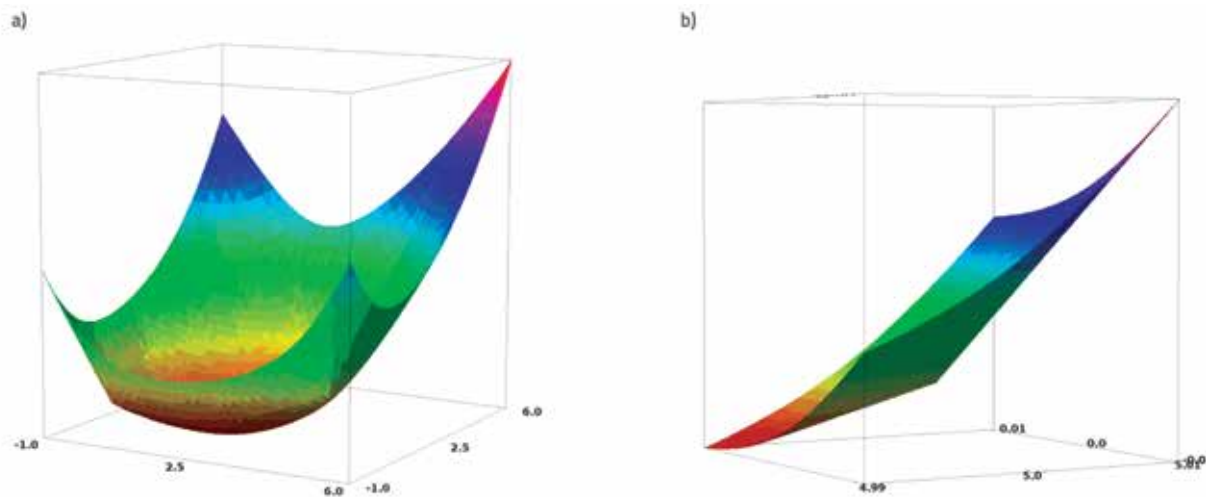
Izjednačavanjem derivacija funkcije \mathcal{L} po koordinatama točke F s nulom dobivamo sustav jednačbi

$$\frac{x_F}{\sqrt{x_F^2 + y_F^2}} + \frac{x_F - 5}{\sqrt{(x_F - 5)^2 + y_F^2}} + \frac{x_F - 1,425}{\sqrt{(x_F - 1,425)^2 + (y_F - 5)^2}} = 0$$

$$\frac{y_F}{\sqrt{x_F^2 + y_F^2}} + \frac{y_F}{\sqrt{(x_F - 5)^2 + y_F^2}} + \frac{y_F - 5}{\sqrt{(x_F - 1,425)^2 + (y_F - 5)^2}} = 0$$

Derivacije funkcije \mathcal{L} nisu definirane u točkama A, B i C: uvrstimo li koordinate neke od njih u izraze za derivacije, u svakom će izrazu brojnik i nazivnik jednog od pribrojnika biti jednaki nuli. To među ostalim znači da iteracijski postupak rješavanja sustava jednačbi ne smijemo započeti u nekoj od tih točaka. Isto tako, iteracijski će postupak propasti zalutamo li tijekom postupka u neku od njih, a možda čak i, zbog numeričkih grešaka, u njihovu blizinu. Nepostojanje derivacija odraženo je na plohi $\Gamma_{\mathcal{L}}$ šiljcima u točkama $(x_A, y_A, \mathcal{L}_A)$, $(x_B, y_B, \mathcal{L}_B)$ i $(x_C, y_C, \mathcal{L}_C)$; dio oko točke $(x_B, y_B, \mathcal{L}_B)$ uvećan je na slici 13.b).

Fermatova je točka F(1,843503; 1,367735). Poznato je da su iteracijski postupci rješavanja sustava nelinearnih jednačbi osjetljivi na izbor početne aproksimacije rješenja [22, 23]. Kao primjer, na slici 14. prikazani su brojevi koraka u vanjskoj petlji pri rješavanju sustava primjenom funkcije newton-krylov uz rješavanje linearnoga sustava metodom gmres. Svaka je točka obojena bojom koja odgovara



Slika 13. Graf funkcije \mathcal{L}

broju koraka potrebnih za dosizanje rješenja (s točnošću $\|r^{(k)}\|_{\infty} \leq 1 \cdot 10^{-5}$) ako je rješavanje započelo u njoj; iz točaka označenih bojom najvećega broja koraka najvjerojatnije se ne može doći do rješenja (ne možemo napraviti nebrojeno mnogo koraka da utvrdimo da postupka divergira). U sva je četiri slučaja odabrano područje prekriveno pravilnom mrežom koja sadrži 101×101 točaka. Područje na prvoj slici je kvadrat $[-5, 10] \times [-5, 10]$, tako da je obuhvaćen cijeli trokut ΔABC (iz njegovih vrhova, kao što znamo, ne možemo ni krenuti, a nije poželjno krenuti ni iz njihove blizine), dok su na preostale tri slike područja veličina $5 \times 5, 0,2 \times 0,2$ i $0,002 \times 0,002$ sa središtem u točki C.

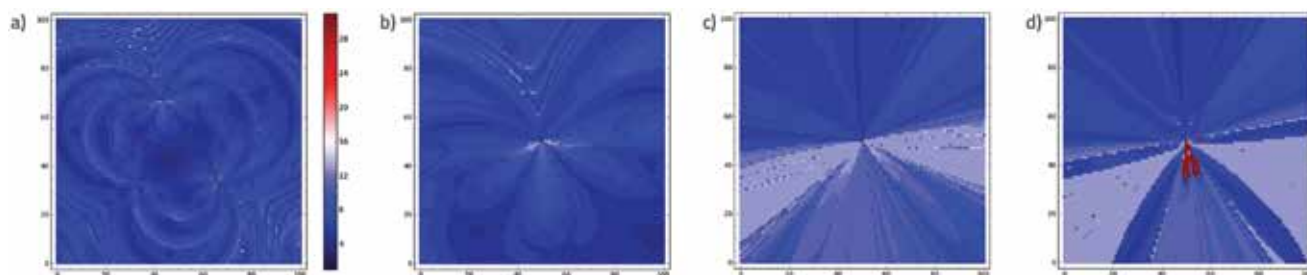
Propisat ćemo sada duljinu niti (A, F): $\ell_{A,F} = 2$ (u rješenju Steinerova problema je $\ell_{A,F} = 2,295474$). Množenjem uvedenog kinematičkog ograničenja Lagrangeovim multiplikatorom $\lambda_{F,A}$ i pribrajanja funkciji \mathcal{L} , dobivamo funkciju

$$\mathcal{E}_C : (x_F, y_F, \lambda_{F,A}) \rightarrow \sqrt{x_F^2 + y_F^2} + \sqrt{(x_F - 5)^2 + y_F^2} + \sqrt{(x_F - 1,425)^2 + (y_F - 5)^2} + \lambda_{F,A} (\sqrt{x_F^2 + y_F^2} - 2)$$

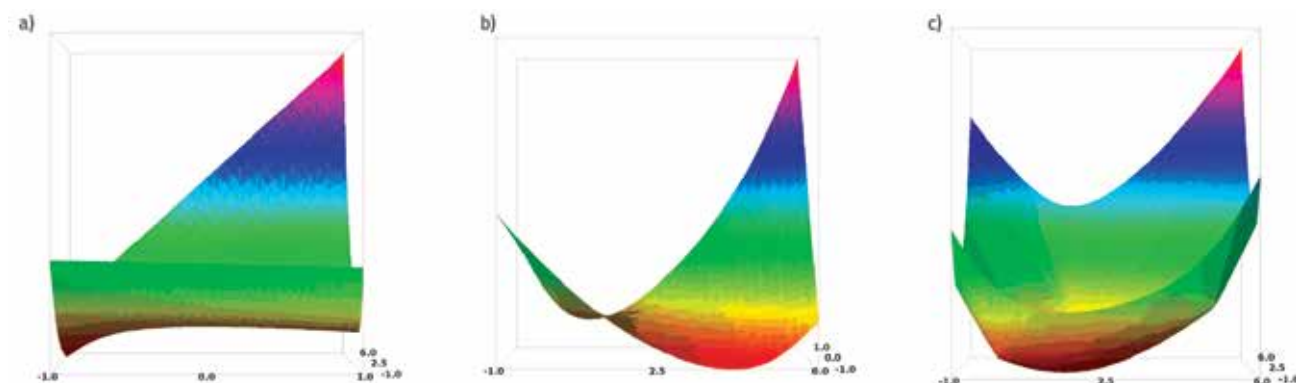
Kako je to funkcija triju varijabli, njezin je graf hiperploha u četverodimenzionalnom prostoru. Presjek hiperplohe i hiperravnine $x_F = 1,604358$ ploha je u trodimenzionalnom prostoru te hiperravnine. Drugim riječima, ta je ploha graf funkcije $\mathcal{E}_C(1,604358; \cdot; \cdot)$ dviju varijabli y_F i $\lambda_{F,A}$. U prikazu na slici 15.a os y_F okomita je na ravninu crteža, dok je os $\lambda_{F,A}$ horizontalna os usporedna s njom. Na slici 15.b prikazan je presjek grafa funkcije \mathcal{E}_C hiperravninom $y_F = 1,194167$; sada je os x_F usporedna s ravninom crteža, a os $\lambda_{F,A}$ okomita na nju.

I na kraju, graf funkcije $\mathcal{E}_C(\cdot; \cdot; 0,117318)$ prikazan je na slici 15.c). Ta je ploha vrlo slična grafu funkcije \mathcal{L} (slika 13.a), što nije nimalo slučajno - naime, $\mathcal{L} = \mathcal{E}_C(\cdot, \cdot, 0)$. Grafovi svih funkcija $\mathcal{E}_C(\cdot, \cdot, \lambda_{F,A})$ za odabrane $\lambda_{F,A}$ konveksne su plohe. Grafovi funkcija $\mathcal{E}_C(x_F, \cdot, \cdot)$ i $\mathcal{E}_C(\cdot, y_F, \cdot)$ to, međutim, nisu (slike 15.a i 15.b). Presjeci tih ploha ravninama $\lambda_{F,A} = \text{const}$ jesu konkavne krivulje, ali su presjeci prve plohe ravninama $y_F = \text{const}$, a druge ravninama $x_F = \text{const}$ pravci (slike 16.a i 16.b). U najnižoj točki konveksne plohe, koja odgovara minimumu funkcije kojoj je ploha graf, dirna je ravnina horizontalna, a ploha je cijela iznad nje. Horizontalne dirne ravnine ploha sa slika 15.a i 15.b) te plohe ujedno i sijeki (primjerice, za plohu sa slike 16.b, slika 16.c). Diralište horizontalne dirne ravnine koja plohu dira i siječe naziva se sedlastom točkom, a sama ploha sedlastom plohom. Ploha je dijelom iznad, a dijelom ispod dirne ravnine u sedlastoj točki, što znači da sedlasta točka nije najniža točka plohe, te da funkcija, graf koje je ta ploha, nema minimum. Izjednačavanje derivacija funkcije s nulom izražava uvjete stacionarnosti, koji su samo za funkcije s konveksnim grafovima uvjeti minimuma. Budući da plohe $\mathcal{E}_C(x_F, \cdot, \cdot)$ i $\mathcal{E}_C(\cdot, y_F, \cdot)$ nemaju minimume (iako ga funkcija $\mathcal{E}_C(\cdot, \cdot, \lambda_{F,A})$ ima), minimum nema ni funkcija \mathcal{E}_C . Uvjeti stacionarnosti funkcije \mathcal{E}_C su:

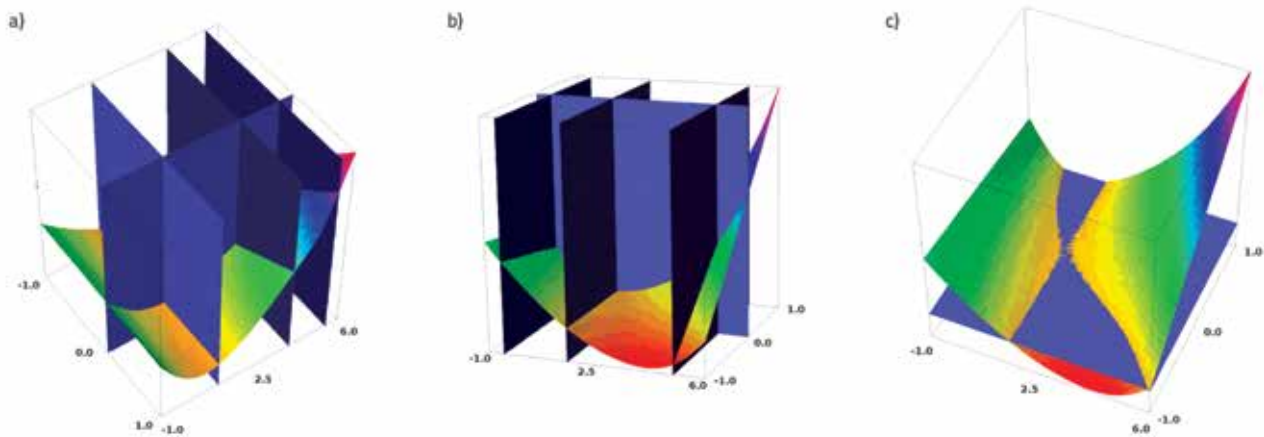
$$\begin{aligned} \frac{(1 + \lambda_{F,A})x_F}{\sqrt{x_F^2 + y_F^2}} + \frac{x_F - 5}{\sqrt{(x_F - 5)^2 + y_F^2}} + \frac{x_F - 1,425}{\sqrt{(x_F - 1,425)^2 + (y_F - 5)^2}} &= 0 \\ \frac{(1 + \lambda_{F,A})y_F}{\sqrt{x_F^2 + y_F^2}} + \frac{y_F}{\sqrt{(x_F - 5)^2 + y_F^2}} + \frac{y_F - 5}{\sqrt{(x_F - 1,425)^2 + (y_F - 5)^2}} &= 0 \\ \sqrt{x_F^2 + y_F^2} - 2 &= 0 \end{aligned}$$



Slika 14. Brojevi koraka do rješenja Steinerova problema



Slika 15. Grafovi funkcija $\mathcal{E}_C(1,604358; \cdot; \cdot)$, $\mathcal{E}_C(1,194167; \cdot; \cdot)$ i $\mathcal{E}_C(\cdot; \cdot; 0,117318)$



Slika 16. a) i b) Presjeci ploha $\mathcal{E}_c(1,604358; \cdot; \cdot)$ i $\mathcal{E}_c(\cdot; 1,194167; \cdot)$ vertikalnim ravninama; c) Dirna ravnina plohe $\mathcal{E}_c(\cdot; 1,194167; \cdot)$ u sedlastoj točki

Stacionarna je točka $(1,604358; 1,194167; 0,117318)$, pa su $F(1,604358; 1,194167)$ i $\lambda_{F,A} = 0,117318$, tako da, želimo li da duljina niti (A, F) bude $\ell_{A,F} = 2$, omjeri sila u nitima moraju biti $S_{F,A} : S_{F,B} : S_{F,C} = 1,117318 : 1 : 1$.

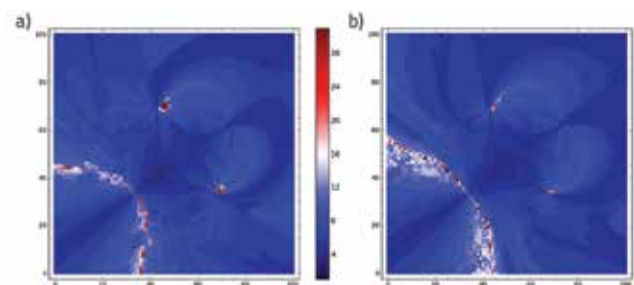
Problem nalaženja sedlaste točke funkcije mnogo je teži od problema nalaženja njezina minimuma - intuitivno, dok pri nalaženju minimuma funkcije "spuštanje nizbrdo" osigurava približavanje rješenju, u problemu traženja sedlaste točke to može biti silazak u deveti krug Danteova pakla, u $-\infty$.

Jacobijeve matrice u problemima sa sedlastim točkama imaju posebnu strukturu. Jednadžbe kinematičkih ograničenja ne sadrže Lagrangeove multiplikatore, pa derivacije njihovih lijevih strana po multiplikatorima iščezavaju. Stoga, ako se jednadžbe kinematičkih ograničenja svrstaju iza jednadžbi ravnoteže, a Lagrangeovi multiplikatori, kao nepoznanice, iza koordinata slobodnih čvorova, donji desni blok Jacobijeve matrice bit će kvadratna nul-matrica tipa $n_c \times n_c$. U našem primjeru $\lambda_{F,A}$ treća je nepoznanica, a jednadžba kinematičkog ograničenja treća jednadžba u sustavu koji izražava uvjete stacionarnosti, pa je Jacobijeva matrica, izračunana u točki $(1; 1; 0,1)$,

$$J = \begin{bmatrix} 0,649001 & -0,357960 & 0,707107 \\ -0,357960 & 0,619953 & 0,707107 \\ 0,707107 & 0,707107 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta matrica nije pozitivno definitna, što ograničava broj metoda kojima se linearni sustav može riješiti (gmres i lgmres primjenjive su metode).

Na slici 17. prikazani su brojevi koraka pri rješavanju sustava jednadžbi funkcijom newton-krylov pomoću metode gmres. Kako sustav sada ima tri nepoznanice, mijenjale su se početne vrijednosti dviju od njih. Na slikama 17.a i 17.b koordinate početne točke mijenjale su se u istom području kao na slici 14.a. Pritom je početna vrijednost Lagrangeova multiplikatora na slici 17.a bila $\lambda_{F,A}^{(0)} = 0,117318$, dok je na slici b) bila $\lambda_{F,A}^{(0)} = 1$. Usporedba sa slikom 14.a pokazuje da je konvergencija sada sporija.



Slika 17. Brojevi koraka do rješenja problema sa sedlastom točkom

7. Metoda gustoća sila

Označe li se omjeri S_{ij}/ℓ_{ij} u sustavu jednadžbi ravnoteže (4) sa q_{ij} sustav prelazi u

$$\sum_{j \in N_i} q_{i,j} (x_j - x_i) = 0, \sum_{j \in N_i} q_{i,j} (y_j - y_i) = 0, \sum_{j \in N_i} q_{i,j} (z_j - z_i) = 0 \quad (11)$$

za $i \in N_f$. Vrijednosti

$$q_{i,j} = S_{i,j} / \ell_{i,j} \quad (12)$$

nazivaju se *gustoćama sila*.

Umjesto vrijednosti sila S_{ij} mogu se zadati gustoće sila q_{ij} . Sada su, prema tome, nepoznate i vrijednosti sila u štapovima i koordinate čvorova (ukupno $n_b + 3n_f$ nepoznanica), ali nepoznanice povezuje dodatnih n_b jednadžbi (12). Dodatne jednadžbe, međutim, ne otežavaju rješavanje sustava. Naprotiv: u jednadžbama (11) su q_{ij} konstantni koeficijenti, pa se može lako vidjeti da se sustav jednadžbi ravnoteže "raspao" u tri međusobno neovisna sustava od n_f linearnih algebarskih jednadžbi sa po n_f nepoznanica $\{x_k\}_{k \in N_f}$, $\{y_k\}_{k \in N_f}$ i $\{z_k\}_{k \in N_f}$. Ti sustavi nisu homogeni, jer su koordinate ležajnih čvorova poznate, pa su $q_{ij}x_j$, $q_{ij}y_j$, $q_{ij}z_j$ za $j \in N_s$ slobodni članovi, različiti od nule, barem u nekim jednadžbama. Pomnožimo li sve jednadžbe istim brojem, rješenje sustava se neće promijeniti,

što znači da ono ovisi samo o omjerima gustoća sila u štapovima.

Rješavanjem sustava dobivamo koordinate slobodnih čvorova, pa se prema izrazu (3) mogu izračunati duljine l_{ij} svih štapova, a potom i sile u njima, jer su, iz (12), $S_{ij} = q_{ij} l_{ij}$.

Spomenut ćemo još, potpunosti radi, u skladu s prikazima u odjeljcima 4. i 5., i varijacijsku formulaciju metode gustoća sila: već je H.-J. Schek u [5] uočio da jednadžbe metode gustoća sila (11) izražavaju uvjete minimuma funkcije

$$\mathcal{D}(\{x_k, y_k, z_k\}_{k \in N_f}) = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in E} q_{i,j} l_{i,j}^2$$

tako da za međusobno jednake gustoće sila u svim štapovima, $q_{ij} = q$, rješenje tih jednadžbi daje oblik mreže za koji je zbroj kvadrata duljina kabela minimalan.

Budući da su sustavi (11) linearni, mogu se riješiti i direktnim postupkom poput Gaussove eliminacije; u tom slučaju ne treba pretpostaviti početne približne koordinate slobodnih čvorova (približni oblik mreže).

Svako rješenje dobiveno metodom gustoća sila, za bilo kako odabranu razdiobu gustoća sila po štapovima mreže zadane topologije, ravnotežna je konfiguracija. Razdiobu gustoća sila treba odabrati (između ∞^{nb} mogućih) tako da dobiveni oblik mreže zadovolji konstrukcijske i arhitektonske zahtjeve. No, pojam je gustoće sile "umjetan" pojam, proizašao iz formalnoga manipuliranja matematičkim izrazima. Na temelju omjera dviju veličina - jedne statičke, druge geometrijske - treba predvidjeti i oblik mreže i razdiobu prednaponskih sila u njoj. Jedan od suautora metode predlaže u radu [6], na temelju "mnogih istraživanja i praktičnih eksperimenata [...] vrlo jednostavno, gotovo trivijalno zadane gustoća sila dovoljne da proizvedu ravnotežne oblike koji mogu poslužiti kao polazište u postupku nalaženja oblika". Zamislit ćemo da je mreža zadane topologije rasprostrta na tlu između oslonaca. Štapovima u unutrašnjem području mreže, gdje su oni podjednake duljine, pridjeljuju se jedinične gustoće sila, a u rubnim područjima, često nepravilni(ji)h oblika, gdje su duljine štapova koji se spajaju u oslonce ili na rubne kabele primjetno različite, štapovima treba pridijeliti gustoće sila obrnuto proporcionalne njihovim duljinama (pritom se duljina štapova u unutrašnjosti uzima kao jedinična). Preporučiti, u stvari, možemo dati i intuitivno obrazloženje. Ako se omjeri duljina štapova u tako dobivenoj ravnotežnoj konfiguraciji nisu bitno promijenili u odnosu na omjere u početnoj, "rasprostrtoj" konfiguraciji, vrijednosti sila bit će u štapovima približno

jednake, a ako bi i postojale veće razlike, može se očekivati da će se vrijednosti sila uzduž kabela mijenjati postupno, u manjim skokovima, tako da zaokretanje čvorova (slika 5.) neće biti veliko.

Na slikama 18.a i 18.b prikazane su dvije mreže određene metodom gustoća sila; prva je mreža jednake topologije i s jednakim rubnim uvjetima ("kruti" oslonci uzduž rubova) kao minimalna mreža na slici 3.b, dok su topologija i rubni uvjeti (rubni kabeli, s "krutim" osloncima samo u uglovima čvorovima) druge mreže kao u mreži na slici 9.b. U prvom su slučaju svim štapovima dodijeljene jedinične gustoće sile, a u drugom slučaju gustoće sila u rubnim kabelima deset su puta veće od gustoća u unutaršnjima; kako su oba tlocrtna područja pravilna, nije trebalo unutaršnjim štapovima koji su spojeni u oslonce ili na rubne kabele pridijeliti drugačije gustoće sila. U mreži na slici 18.b) najveća su i najmanja vrijednost sila u unutaršnjim kabelima 1,834 i 1,234, dok su vrijednosti sila u štapovima dijagonalnoga kabela spojena u najviši čvor redom, počevši od najdonjega, 1,547; 1,434; 1,391; 1,394; 1,435; 1,515; 1,637; 1,834. U rubnim su kabelima najveća i najmanja vrijednost sila 22,924 i 19,966.

Usporedbe radi, na slici 18.c preklopljene su minimalna mreža sa slike 3.b i mreža određena metodom gustoća sila sa slike 18.a, a na slici 18.d mreža sa slike 9.b i mreža sa slike 18.b.

Kao što je u citiranom ulomku iz rada [6] rečeno, metodom gustoća sila dobiveni oblik tek je "polazište u postupku nalaženja oblika". U literaturi se obično navodi da je potreban niz pokušaja da se pronađu vrijednosti gustoća sila koje daju prihvatljivo rješenje, ali detaljnije preporuke izostaju.

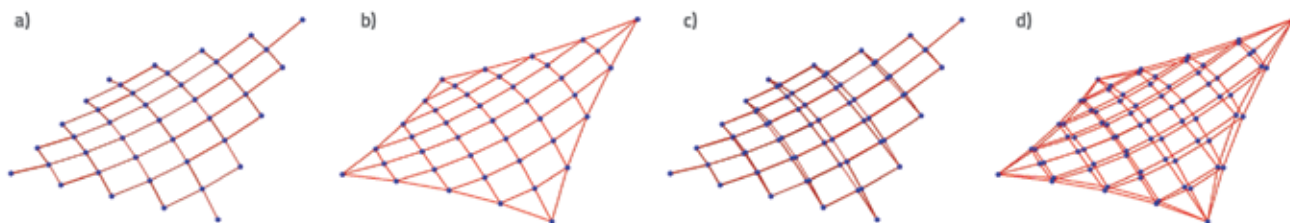
U nastavku će se uvesti sustavni postupak kojim se iteracijskom primjenom metode gustoća sila mogu zadovoljiti različiti zahtjevi navedeni u odjeljcima 4. i 5. U programskoj realizaciji metode gustoće sila primijenjena je analogija te metode i metode pomaka opisana u radu [24].

8. Iteracijska primjena metode gustoća sila

U radu [8] autori opisuju "iteracijski postupak namijenjen izračunavanju mreže s jednoliko raspodijeljenim vlačnim silama i stoga mreže minimalne duljine". U k -tom koraku iteracije gustoća sile u štapu (i, j) računa se prema izrazu

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \frac{\bar{S}}{S_{i,j}^{(k-1)}}$$

gdje su



Slika 18. a) i b) Mreže oblikovane metodom gustoća sila. c) i d) Usporedba s minimalnim mrežama

$q_{ij}^{(k-1)}$ - gustoća sile u prethodnom koraku,
 $S_{ij}^{(k-1)}$ - vrijednost sile izračunana u prethodnom koraku,
 \bar{S} - tražena vrijednost sile.

Taj izraz može se obrazložiti na sljedeći način:

Neka je vrijednost sile $S_{ij}^{(k-1)}$, izračunana u $(k-1)$ -om koraku iteracije, različita od tražene vrijednosti \bar{S} . Traženu vrijednost može se dobiti množenjem vrijednosti $S_{ij}^{(k-1)}$ koeficijentom $s_{ij}^{(k)}$, $\bar{S} = s_{ij}^{(k)} S_{ij}^{(k-1)}$, tako da je $s_{ij}^{(k)} = \bar{S} / S_{ij}^{(k-1)}$. Nakon što se u k -tom koraku izračunaju koordinate čvorova i duljina $\ell_{ij}^{(k)}$, nova je vrijednost sile $S_{ij}^{(k)} = q_{ij}^{(k)} \ell_{ij}^{(k)}$. Ako se duljina štapa nije promijenila, onda je $S_{ij}^{(k)} = q_{ij}^{(k)} \ell_{ij}^{(k-1)}$. Ako je k tomu još $S_{ij}^{(k)}$ tražena vrijednost, onda je i $S_{ij}^{(k)} = s_{ij}^{(k)} S_{ij}^{(k-1)} = s_{ij}^{(k)} q_{ij}^{(k-1)} \ell_{ij}^{(k-1)}$. Usporedbom s prethodnim izrazom dobivamo $q_{ij}^{(k)} = s_{ij}^{(k)} q_{ij}^{(k-1)}$. Prema tome, ako se duljina štapa ne mijenja, gustoća sile $q_{ij}^{(k)} = q_{ij}^{(k-1)} \bar{S} / S_{ij}^{(k-1)}$ daje odmah traženu vrijednost sile. No, promjenom gustoća sile mijenja se najčešće i ravnotežna konfiguracija mreže, pa se mijenjaju i duljine štapova. Potreban je stoga iteracijski proračun kojim ćemo se postupno približiti traženoj vrijednosti.

Prethodno obrazložjenje može se sažeti ovako: Prema definiciji danoj izrazom (12), gustoća sile q_{ij} proporcionalna je vrijednosti sile S_{ij} , pa je, uz nepromijenjenu duljinu štapa, omjer vrijednosti sile u dva koraka iteracije jednak omjeru gustoća sile.

U primjerima se autori ograničavaju na mreže s "krutim" rubovima - postupak ne omogućava kontrolu vrijednosti sile u rubnim kabelima, pa čak ni različite vrijednosti sile u različitim kabelima.

No, opisani je postupak lako proširiti: traži li se postizanje različitih vrijednosti sile u različitim štapovima, gustoću sile u štapu (i, j) u k -tom koraku iteracije računat će se prema izrazu

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \frac{\bar{S}_{i,j}}{S_{i,j}^{(k-1)}} \quad (13)$$

pri čemu je $\bar{S}_{i,j}$ tražena vrijednost sile u tom štapu, koja se može razlikovati od vrijednosti sile u drugim štapovima [9, 10]. Naravno, želimo li oblikovati prirodnu poopćenu minimalnu mrežu, moramo zadati jednake vrijednosti sile u svim štapovima pojedinih kabela. Kako je $q_{i,j} / S_{i,j} = 1 / \ell_{i,j}$, gustoću sile može se računati i prema izrazu

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{\bar{S}_{i,j}}{\ell_{i,j}^{(k-1)}} \quad (14)$$

Nadalje, propisana duljina $\bar{\ell}_{i,j}$ štapa (i, j) osigurat će se tako da se gustoća sile u njemu računa prema izrazu

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{S_{i,j}^{(k-1)}}{\bar{\ell}_{i,j}} \quad (15)$$

Naime, gustoća sile je, prema definiciji, obrnuto proporcionalna duljini štapa, pa je, uz nepromijenjenu vrijednost sile, $q_{i,j}^{(k)} / q_{i,j}^{(k-1)} = \ell_{i,j}^{(k-1)} / \ell_{i,j}^{(k)}$. Zbog toga je koeficijent kojim treba pomnožiti gustoću sile iz prethodnoga koraka $\bar{S}_{i,j}^{(k-1)} / \bar{\ell}_{i,j}$, te iz

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \frac{\ell_{i,j}^{(k-1)}}{\ell_{i,j}^{(k)}} \quad (16)$$

i $\bar{S} = q_{i,j} \ell_{i,j}$ slijedi izraz (15).

Opisana iteracijska primjena metode gustoća sile ima nekoliko pogodnosti. Ponajprije, postupak konvergira prema traženom rješenju kroz niz ravnotežnih konfiguracija. Dakle, čak i ako se iteracijski postupak prekine prije no što su postavljeni uvjeti zadovoljeni uz zahtijevanu točnost, dobivena je mreža u ravnoteži. Za razliku od toga, kod drugih je iteracijskih postupaka, poput Newton-Krilovljeva, samo konačno rješenje uravnoteženo. Konfiguracije dobivene u prethodnim koracima neuravnotežene su aproksimacije traženoga oblika. Druga je prednost da se ne samo zadane sile nego i zadane duljine štapova postižu bez uvođenja Langrangeovih multiplikatora. I, treće, kao što smo u prethodnom odjeljku rekli, ne treba pretpostavljati prvu aproksimaciju rješenja jer su sustavi jednadžbi linearni, pa se mogu rješavati direktnim postupcima. Uz to, postupak je vrlo brz. Iako bi se moglo reći da sporo konvergira, jer je, primjerice, za nalaženje oblika mreža sa slika 3.b i 9.b trebalo 128 i 299 koraka, proračuni su trajali samo 3,55 s i 14,40 s. Iteracijski se postupak prekida kada je apsolutna vrijednost najveće razlike između izračunane i tražene veličine (vrijednosti sile u štapu ili duljine štapa) manja od $1 \cdot 10^{-5}$.

9. Zaključak

Problem nalaženja oblika formuliran je kao varijacijski problem određivanja stacionarnih točaka određenih funkcija, pa su minimalne mreže i poopćene minimalne mreže moguća rješenja. Minimalne su mreže ravnotežni oblici ako je razdioba vrijednosti prednaponskih sile jednolika [8], a poopćenje koje se također može formulirati kao problem minimizacije mogućnost je zadavanja različitih vrijednosti sile u štapovima mreže [9, 10]. Kao daljnje poopćenje uvedena su kinematička ograničenja koja omogućuju zadavanje duljina odabranih štapova. Varijacijska formulacija tog poopćenja, uz primjenu Lagrangeovih multiplikatora, problem je sedlaste točke. Numerički su eksperimenti pokazali da su brzina konvergencije, pa i sama konvergencija "klasičnih" iteracijskih postupaka bitno narušeni. Za pružanje zornoga objašnjenja ponašanja tih postupaka analizirano je numeričko rješavanje klasičnoga problema varijacijskog računa, Steinerova problema. Na kraju je prikazana iteracijska primjena metode gustoća sile u kojoj se gustoće sile u nekom koraku određuju na temelju zadanih uvjeta i rezultata prethodnoga koraka. Uz poznate izraze za izračunavanje gustoća sile koji omogućuju oblikovanje minimalne mreže i poopćene minimalne mreže sa zadanim različitim silama u štapovima [9, 10], uvedeni su i izrazi za gustoće sile koji omogućuju zadovoljenje kinematičkih ograničenja kojima se sprečavaju promjene duljina odabranih štapova. Niz je numeričkih eksperimenata pokazao da je iteracijska primjena metode gustoća sile prilagodljiv, učinkovit i pouzdan alat za nalaženje oblika gipkih konstrukcija od užadi.

LITERATURA

- [1] Nerdinger, W. (ed.): *Frei Otto, Complete Works - Lightweight Construction, Natural Design*, Birkhäuser, Basel, 2005
- [2] Veenendaal, D.; Block, P.: An overview and comparison of structural form finding methods for general networks, *International Journal of Solids and Structures*, 49 (2012), pp. 3741-3753
- [3] Tibert, G.: *Numerical Analysis of Cable Roof Structures*, Royal Institute of Technology, Stockholm, 1999
- [4] Argyris, J. H.; Angelopoulos, T.; Bichat, B.: A general method for the shape finding of lightweight tension structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3 (1974), pp. 135-149
- [5] Schek, H.-J.: The force density method for form finding and computation of computation of general networks, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3 (1974), pp. 115-134
- [6] Linkwitz, K.: About formfinding of double-curved structures, *Engineering Structures*, 21 (1999), pp. 709-718
- [7] Linkwitz, K.; Bahndorf, J.; Hördt, R.; Singer, P.; Ströbel, D.: Least squares methods in non-linear formfinding and analysis of prestressed and hanging nets, *Design and Realisation of Textile Roofs (workshop)*, Technische Universität, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Berlin, June 15-17, 1995, pp. C/1-C/11
- [8] Maurin, B.; Motro, R.: Investigation of minimal forms with conjugate gradient method, *International Journal of Solids and Structures*, 38 (2001), pp. 2387-2399
- [9] Dvornik, J.; Lazarević, D.: Prednapregnute gipke konstrukcije od užadi i tkanine, *Građevinar*, 47 (1995), str. 185-199
- [10] Dvornik, J.; Lazarević, D.: Višeće konstrukcije od platna i užadi, *Građevni godišnjak '97*, HDGI, Zagreb, 1997., str. 239-297
- [11] Haber, R. B.; Abel, J. F.: Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes. Part I - Formulations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 30 (1982), pp. 263-284
- [12] SciPy. *Scientific Tools for Python (Version 0.12)*, The Scipy Community, 2013, <http://scipy.org>
- [13] Stein, W. A. et al.: *Sage Mathematics Software (Version 5.9)*, The Sage Development Team, 2013, <http://www.sagemath.org>
- [14] Eröcal, B.; Stein, W.: *The Sage Project: Unifying Free Mathematical Software to Create a Viable Alternative to Magma, Maple, Mathematica and Matlab*, ICMS 2010: Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Software, (eds. Fukuda, K.; van der Hoeven, J.; Joswig, M.; Takayama, N.), Springer, 2010., pp. 12-27
- [15] Kelley, C. T.: *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1995
- [16] Knoll, D. A.; Keyes, D. E.: Jacobian-free Newton-Krylov methods: a survey of approaches and applications, *Journal of Computational Physics*, 193 (2004), pp. 357-397
- [17] Bićanić, N.; Johnson, K. H.: Who was '-Raphson? *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14 (1979), pp. 148-152
- [18] Baker, A. H.; Jessup, E. R.; Manteuffel, T.: A Technique for Accelerating the Convergence of Restarted GMRES, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 26 (2005), pp. 962--984
- [19] Buchholdt, H. A.: *An Introduction to Cable Roof Structures*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985
- [20] Lanczos, C.: *The Variational Principles of Mechanics*, University of Toronto Press, Toronto, 1970 (republication: Dover, New York, 1986)
- [21] Hildebrandt, S.; Tromba, A.: *The Parsimonious Universe. Shape and Form in the Natural World*, Springer, New York, 1996
- [22] Dvornik, J.; Lazarević, D.; Fresl, K.: The Fractal Nature of the Form Finding Equations, *Computational mechanics in the UK - 11th Annual Conference of the Association for Computational Mechanics in Engineering (United Kingdom)* (ed. Wheel, M. A.), University of Strathclyde, Glasgow, 2003, pp. 201-204
- [23] Dvornik, J.; Lazarević, D.: Fractals and formfinding - magic with real numbers, *Engineering Modelling*, 16 (2003), pp. 1-11
- [24] Gidak, P.; Fresl, K.: Programming the force density method, *IASS-APCS 2012, From spatial structures to space structures*, (ed. Seung Deog, K.), Seoul, South Korea, 2012, p. 197 (abstract, full paper on CD)