

# Predviđanje stanja mostova radi optimalizacije održavanja

---

**Puž, Goran; Radić, Jure; Tenžera, Danijel**

*Source / Izvornik:* **Građevinar, 2014, 65, 1079 - 1088**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

<https://doi.org/10.14256/JCE.914.2013>

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:237:803717>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-04**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)



Primljen / Received: 8.7.2013.  
 Ispravljen / Corrected: 29.11.2013.  
 Prihvaćen / Accepted: 3.12.2013.

Dostupno online / Available online: 10.1.2014.

# Predviđanje stanja mostova radi optimalizacije održavanja

## Autori:



Doc.dr.sc. **Goran Puž**, dipl.ing.građ.  
 Institut IGH d.d., Zagreb  
[goran.puz@igh.hr](mailto:goran.puz@igh.hr)



Prof.dr.sc. **Jure Radić**, dipl.ing.građ.  
 Sveučilište u Zagrebu  
 Građevinski fakultet  
[jradic@grad.hr](mailto:jradic@grad.hr)



**Danijel Tenžera**, dipl.ing.građ.  
 Hrvatske ceste d.o.o., Zagreb  
[danijel.tenzera@hrvatske-ceste.hr](mailto:danijel.tenzera@hrvatske-ceste.hr)

Prethodno priopćenje

**Goran Puž, Jure Radić, Danijel Tenžera**

## Predviđanje stanja mostova radi optimalizacije održavanja

Sustav gospodarenja mostovima na mreži državnih cesta Republike Hrvatske ne sadrži model za prognoziranje dotrajavanja koji bi se upotrijebio pri planiranju budućih popravaka, ali je prikupljena baza podataka o stanju, odnosno numerički izraženom stupnju oštećenosti elemenata mostova. Rad prikazuje rezultate istraživanja uporabljivosti triju modela dotrajavanja u nastojanju da se ocijeni koji je od njih za naše okolnosti najpovoljniji. Najprikladnijim je ocijenjen model koji se zasniva na Markovljevom procesu.

### Ključne riječi:

sustav gospodarenja mostovima, Markovljev proces, ocjenjivanje mostova, održavanje mostova, dotrajavanje mostova

Preliminary note

**Goran Puž, Jure Radić, Danijel Tenžera**

## Bridge condition forecasting for maintenance optimisation

The bridge management system used on the national road network of the Republic of Croatia does not contain the deterioration forecasting model that could be used for planning future remedial activities. A database on the condition of bridge elements has nevertheless been compiled, containing numerical values of the degree of deterioration. Results obtained by analysing usability of three deterioration models are presented in the paper in order to estimate which one would be the most favourable for Croatian conditions. The model based on the Markov process was found to be the most appropriate.

### Key words:

Bridge management system, Markov process, bridge assessment, bridge maintenance, bridge deterioration

Vorherige Mitteilung

**Goran Puž, Jure Radić, Danijel Tenžera**

## Zustandsvorhersage von Brücken zur Erhaltungsoptimierung

Das Verwaltungssystem für Brücken des nationalen Straßennetzes in Kroatien umfasst derzeit kein Model für die Schadensprognose, das in der Planung zukünftiger Wartungsarbeiten angewandt werden könnte. Dennoch ist eine Datenbank zusammengestellt worden, die numerische Angaben der Beschädigungsgrade beinhaltet. In der vorliegenden Arbeit ist die Eignung drei verschiedener Beschädigungsmodelle für die gegebenen Bedingungen in Kroatien untersucht worden. Das auf dem Markov-Prozess beruhende Model ist als angemessenstes beurteilt worden.

### Schlüsselwörter:

Verwaltungssystem für Brücken, Markov-Prozess, Zustandsbewertung von Brücken, Brückenwartung, Beschädigung von Brücken

## 1. Uvod

Gospodarenje građevinama obuhvaća djelatnosti kojima se optimizira uporaba određene građevinske infrastrukture tako da se tijekom unaprijed određenog razdoblja ostvari najveća moguća korist. Gospodarenje mostovima razvija se u poduzeću Hrvatske ceste od 1995. godine, kada je započelo uvođenje sustava gospodarenja mostovima (eng. Bridge Management System, BMS) pod nazivom HRMOS, na temelju sustava koji primjenjuju danske direkcije za ceste [1]. Tijekom gotovo dvadeset godina primjene sustava prikupljeni su podaci o stanju elemenata mostova koji danas omogućuju izradu i kalibraciju modela za prognozu stanja. Glavni problem pri izradi modela odnosi se na procjenu brzine napredovanja procesa koji dovode do oštećenja na temelju skromnog broja uzastopnih mjerenja stanja, odnosno razina oštećenosti. Stanja su opisana kvalitativnim svojstvima: vrstom, uzrokom nastanka i predvidivim napredovanjem oštećenja, ali i kvantitativnim podacima kao što je površina elementa zahvaćena oštećenjem. U radu se prikazuje istraživanje učinkovitosti regresijskog modela, modela koji se zasniva na Markovljevim lancima i modela koji se zasniva na homogenom Markovljevom procesu.

Poduzeće Hrvatske ceste d.o.o. (HC) gospodari mrežom državnih cesta duljine 6585 kilometara na kojoj se nalazi

1538 mostova raspona većega od dva metra. Zakonom o javnim cestama [3] propisano je da HC vodi jedinstvenu bazu cestovnih podataka za osiguranje tehničko-tehnološkog jedinstva mreže javnih cesta. U bazu su uključeni i svi podaci o mostovima na javnim cestama, što daje poticaj da se razvija jedinstven model dugoročnog planiranja održavanja na strateškoj razini. Budući da bi takav model uključivao mostove u nadležnosti više cestovnih upravitelja, on mora biti jednostavan i prepoznatljiv. Naime, različiti sustavi gospodarenja mostovima ciljeve ostvaruju na vrlo različite načine, koji odgovaraju lokalnim okolnostima i značenju građevina, razini tehničke naobrazbe, tradiciji upravljanja imovinom, vlasničkim odnosima i organizaciji nadležnih službi. Glavna smetnja u razvitku sustava jest to što se nastoje iz ograničene baze podataka izlučiti učinkoviti pokazatelji za određivanje prioriteta radova sanacije i financijsko planiranje.

Izradu modela dotrajavanja omogućuju nalazi glavnih pregleda mostova, koji se, prema sadašnjim propisima, obavljaju najmanje jedanput u šest godina. Pritom se primjenjuje tehnika vizualnog pregleda, a rezultat se numeričke ocjene stanja 13 elemenata mosta, odnosno cjelina koje zajedno čine most i čitave građevine. Ocjene stanja elemenata mosta u rasponu su od 1 do 5. Ocjena 1 znači da oštećenja nema ili su zanemariva, dok najviša ocjena 5 znači

Tablica 1. Podaci o mostovima priređeni za analizu, kao izvadak iz baze SGM Hrvatskih cesta – primjer osnovnih podataka i podataka o rezultatima pregleda

Opći podaci o mostu						Numeričke ocjene stanja, raspon 1 do 5						
Naziv mosta	Godina izgradnje	Ukupna dužina [m]	Ukupna širina [m]	Broj raspona	Maks. raspon [m]	Godina pregleda	Površina	Upornjaci	Stupovi	Ležajevi	Ploča	Most općenito
Velika Ves I	1969.	15,0	10,4	1	5,3	1997.	2	2		1	2	2
						2000.	2	2		1	2	2
						2002.	1	1		1	3	3
						2009.	1	1		1	4	4
Sigetac Ludbreški	1988.	44,0	9,9	3	16,0	1998.	1	1	1	1	1	2
						2000.	2	1	1	1	1	2
						2003.	2	1	1	1	1	2
						2008.	3	2	2	2	2	2
NV Frigis	1979.	64,0	12,6	4	15,3	1997.	1	2	2	1	1	2
						2002.	1	2	2	2	2	2
						2008.	2	2	2	2	2	2
NV Klajnova	1971.	61,0	12,6	4	15,3	1996.	2	2	2	1	3	3
						2002.	3	2	2	2	4	3
						2008.	2	2	2	2	4	3
Drnje	1930.	36,0	5,6	1	11,5	1998.	1	1		1	1	2
						2003.	3	2		1	3	4
						2009.	3	2		1	3	4

da su oštećenja dovela element u neupotrebljivo stanje. Metodologija pregledavanja i njezina ograničenja opisani su u radu [2], gdje se predlaže kontinuirano unapređivanje sustava vizualnog pregleda organizacijom radionica za inženjere koji obavljaju vizualne preglede, pripremom kvalitetnih pomagala (priručnika), uspostavljanjem motivacije i komunikacije između stručnjaka (inspektora) koji obavljaju poslove pregleda te podizanjem odgovornosti na višu razinu. Struktura podataka o mostovima prikazana je izvatkom iz baze podataka u tablici 1.

U radu su analizirane ocjene stanja rasponskog sklopa (u radu se rabi termin "ploča" preuzet iz sustava gospodarenja Hrvatskih cesta) jer jedinstvena ocjena cijelog mosta ne pruža cjelovit podatak. Naime, prema protokolu kojim se koristi HRMOS pravilo je da ocjena čitavog mosta ne može biti viša od one dodijeljene najoštećenijem dijelu (skupini dijelova) mosta niti niža od one dodijeljene bilo kojoj skupini dijelova mosta, no u cjelini je njezino dodjeljivanje vrlo subjektivno.

## 2. Predviđanje budućeg stanja mostova

### 2.1. Općenito

Problem prognoze dotrajavanja može se formulirati na sljedeći način: potrebno je izgraditi teorijski model koji će opisati proces degradacije i omogućiti predviđanje stanja mosta tijekom vremena, uzimajući u obzir prirodni okoliš, način korištenja i održavanje.

U mreži cesta postoji veći broj mostova različite starosti i stanja, a građevine sličnog tipa – manji betonski mostovi čine većinu od ukupnog broja mostova [2]. U sklopu sustavnoga gospodarenja po jedinstvenoj metodologiji do sada su provedena četiri glavna pregleda u razmaku od približno četiri godine. Izdvojen je statistički uzorak na 107 mostova koji su pregledavani od 1996., ali na njima nisu obavljani značajniji popravci (slika 1.).



Slika 1. Most pod upravom Hrvatskih cesta prije sanacije 2012. godine – karakteristična oštećenja vijenca i rasponskog sklopa

Osim korištenja podataka o pregledima, za razradu modela usvojene su sljedeće početne pretpostavke:

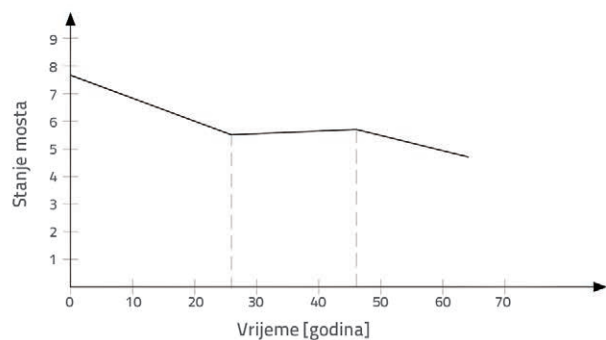
- ocjene elemenata mostova dobivene redovitim pregledima približno odgovaraju stanjima koja se mogu povezati s određenim postupcima sanacije, odnosno tipskim troškovnicima,
- glavni degradacijski procesi na građevinama istog tipa su isti i napreduju sličnom brzinom, stoga ima smisla tražiti statističku vezu starosti i stanja mosta,
- promatra se jednosmjernan proces dotrajavanja koji napreduje od nižih (boljih) prema višim stanjima,
- za obradu su odabrani mostovi na kojima nije bilo značajnih konstrukcijskih sanacija (utjecaj popravaka nije modeliran).

### 2.2. Razvitak prognostičkih modela

Modele dotrajavanja u osnovi možemo podijeliti na matematičke (statističke), empirijske i fizikalne. Statistički modeli oblikuju se na osnovi obrade podataka o stanju većeg broja mostova, empirijski modeli zasnovani su na iskustvu, dok su fizikalni modeli zasnovani na poznavanju i modeliranju procesa koji uzrokuju oštećenja. Brojni SGM primjenjuju razne modele dotrajavanja [5], no zajednička im je značajka da sadrže mogućnost kalibracije, odnosno naknadnog prilagođavanja modela na osnovi spoznaja prikupljenih praćenjem procesa dotrajavanja.

Regresijski matematički modeli razvijaju se od 80-ih godina prošlog stoljeća, dakle od vremena kada su se već prikupile baze podataka o izvršenim pregledima. Načinjeni su linearni i nelinearni modeli za prognozu budućeg tijeka procesa na skupinama mostova vezanim zajedničkim obilježjima [6]. Istraživanja ovisnosti stanja mosta o starosti provedena u SAD rezultirala su karakterističnim krivuljama (slika 2.) na kojima se mogu prepoznati karakteristične faze uporabnog vijeka mosta:

- strmi pad tijekom prvih 20 do 25 godina,
- približno horizontalan ili lagano penjući dio između 25 i 45 godina,
- blaži pad između 45 i 60 godina.



Slika 2. Prikaz ovisnosti ocjene stanja mosta i starosti, prema podacima Nacionalnog registra mostova u SAD (ocjene stanja u rasponu su od 9, što znači neoštećeno, do 1 što znači najlošije stanje) [7]

Ovakva razdioba ocjena po godištima objašnjena je na sljedeći način:

- Tijekom prvih 25 godina aktiviraju se skriveni nedostaci, koje pripisujemo pogreškama u projektiranju i izvedbi mosta.
- U razdoblju od 25. do 30. godine obavljaju se prvi veći popravci koji utječu na blago povećanje prosječne ocjene, koja se stabilizira. Mogući prisutni dugotrajni procesi uzrokuju prikrivena oštećenja, koja se pri ocjenjivanju najčešće ne registriraju.
- Kod mostova starijih od 45 godina primjetno je da su projektirani općenito prema nižim standardima (propisi za opterećenja, propisi koji reguliraju konstruiranje nosivih elemenata), pa su na njima uočena relativno veća oštećenja.
- Mostovi stariji od 60 godina ne čine mjerodavan uzorak.

Statistički regresijski modeli primjenjuju eksponencijalnu funkciju za simulaciju oblika prikazane krivulje, a u neke od njih interpoliran je nagli skok – poboljšanje uslijed sanacije oko tridesete godine uporabnog vijeka.

Sustav gospodarenja mostovima koji se primjenjuje u Japanu [8] sadrži krivulje napredovanja oštećenja u vremenu kojima se određuje preostali vijek trajanja elementa mosta. Krivulje slijede teorijske formule kojima se modeliraju različiti mehanizmi dotrajavanja. Konkretno, degradacija betonskih elemenata uslijed karbonatizacije i penetracije klorida modelirana je formulama koje je usvojilo Japansko društvo inženjera građevine. Rezultati teorijskog proračuna se uspoređuju s rezultatima mjerenja, pa se krivulje dotrajavanja kalibriraju. Koriste se i formule kojima se procjenjuje dotrajavanje uslijed zamora betonskih ploča, a planira se uvesti i formule kojima bi se modeliralo oštećivanje uslijed smrzavanja, kemijskih utjecaja i alkalno – agregatne reakcije. Dakle, teorijski modeli procesa dotrajavanja kalibriraju se iskustvenim podacima.

Model dotrajavanja mostova koji se primjenjuje u sustavu gospodarenja mostovima, razrađen za Hrvatske autoceste, također koristi krivulje dotrajavanja koje povezuju starost mosta i veličinu oštećenja [9]. Pregledom se ustanovi vrsta, faza, položaj i veličina oštećenosti, prema referentnom opisu u katalogu. Granične točke svake faze napredovanja oštećenja definirane su izmjerljivim veličinama. Krivulje, izvorno oblikovane na osnovi iskustva i literature, treba kalibrirati prema provedenim ispitivanjima.

Jedan od najpoznatijih komercijalnih sustava gospodarenja mostovima je Pontis [10]. Najzastupljeniji je u Sjedinjenim Američkim Državama, gdje je razvijen pod patronatom Udruženja državnih uprava za autoceste i promet (AASHTO – American Association of State Highway and Transportation Officials), a prihvaćen je i u susjednoj Mađarskoj. Sustav sadrži statističke modele dotrajavanja zasnovane na teoriji Markovljevih lanaca, što je najčešće korišten stohastički model procesa starenja (dotrajavanja). Model ugrađen u računalni algoritam određuje vjerojatnost prelaska dijela određenog

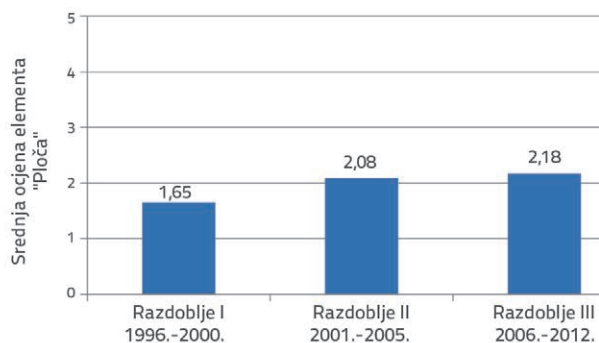
elementa iz boljšeg u lošije stanje. Parametri modela izvorno ugrađeni u računalni algoritam sadrže inženjerske procjene vremena zadržavanja određenih dijelova elementa u određenom stanju, a kasnije se podaci ažuriraju statističkom obradom ocjena.

Model koji se zasniva na homogenom Markovljevom procesu s konačnim skupom stanja i kontinuiranim parametrom, opisan u radu [4] upotrijebljen je zato što ima određenih prednosti pred modelom Markovljevog lanca. Omogućuje jasnije objasniti mjerene ili opažene podatke. Taj se model ne koristi u komercijalnim programima za gospodarenje.

### 3. Analiza rezultata pregleda karakterističnih mostova

#### 3.1. Uzorak za statističku obradu

Istraživanje je provedeno na uzorku izdvojenom iz najzastupljenije skupine mostova u bazi podataka. Korišteni su podaci o stanju rasponskog sklopa armiranobetonskih grednih mostova starih između 10 i 80 godina, koji se nalaze u različitim uvjetima okoliša. Uzorak sadrži 107 mostova s jednim ili više raspona jednakog ili većeg od pet metara, a analizirane su ocjene stanja dobivene vizualnim pregledima u razdoblju od 1996. do 2012. godine. Zbog vremenskog pomaka provedbe glavnih pregleda, podaci su svrstani u tri vremenske cjeline: razdoblje 1996-2000., razdoblje 2001.-2005., razdoblje 2006.-2012. Odabrani su mostovi na kojima tijekom uporabnog vijeka nisu zabilježeni značajni popravci. Na slici 3. je histogram srednjih ocjena stanja rasponskog sklopa koji prikazuje blago pogoršanje svojstava u razdoblju od 1996. do 2012. godine.

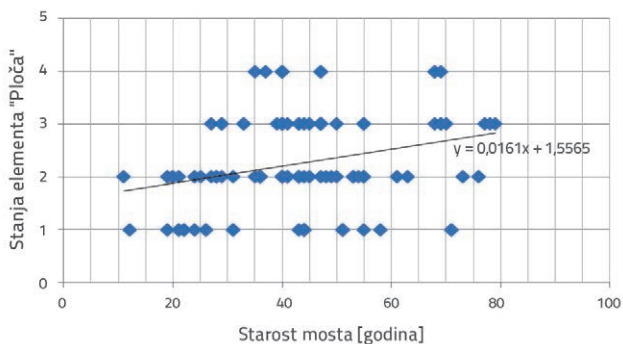


Slika 3. Srednje ocjene stanja rasponskog sklopa (element "ploča") na uzorku od 107 sličnih mostova na državnim cestama Republike Hrvatske

#### 3.2. Regresijski model

Primijenjen je jednodimenzionalni regresijski model u kojem je vrijeme  $t$  neslužajna varijabla, a ocjena stanja građevine  $S$  slučajna varijabla. Pretpostavljen je oblik regresijske funkcije  $\mu$  i s parametrima koji su određeni na temelju statističkih

podataka, tj. na temelju niza od  $n$  sparenih mjerenja  $(t_1, S_1), (t_2, S_2), \dots, (t_n, S_n)$  veličina  $t$  i  $S$ . Graf regresijske funkcije (regresijska krivulja) zorno prikazuje vremensku ovisnost promatrane pojave. Vrijednost regresijske funkcije u danom trenutku ima značenje očekivane (srednje) vrijednosti promatrane pojave, što znači da su u stvarnosti moguća odstupanja, koja se također mogu teorijski procjenjivati s pomoću regresijskog modela. Po uzoru na modele razrađene u SAD [6] provjerena je eksponencijalna regresijska krivulja, no rezultat je pokazao da je za prikazani skup podataka jednako uporabljiv i pravac (slika 4).



Slika 4. Regresijski model dotrajavanja rasponskog sklopa betonskih mostova u mreži Hrvatskih cesta

Model prikazan na slici 4. možemo objasniti na sljedeći način: u desetoj godini uporabe most će se naći u stanju 1 ili u stanju 2. Stanje 2 je najvjerojatnije oko četrdesete godine životnog vijeka, nakon čega se polako mijenja prema stanju 3. Većina mostova starih osamdesetak godina bit će u stanju 3, a nakon toga nemamo podataka za analizu.

Prosječna ocjena od desete godine uporabnog vijeka, kada iznosi 1,6, pa do osamdesete godine uporabnog vijeka, kada iznosi 2,8, mijenja se za odprilike jedan stupanj oštećenosti. Ovakav rezultat – skok u stanju dotrajivosti za 1 u sedamdeset godina, ne odgovara iskustvu da mostovi dotrajavaju znatno brže. Ovu pojavu možemo tumačiti nedostatkom modela, ali i time što je poznato da je upravitelj cesta (i mostova) obavljao određene popravke u proteklom razdoblju, koji nisu evidentirani u bazi podataka (kroz radove redovitog održavanja). Kod primjene regresijskog modela, u uzorku smiju biti samo oni mostovi, odnosno elementi mostova koji nikada nisu bili značajno popravljani.

### 3.3. Model Markovljevog lanca

Markovljevi procesi opisuju fizičku stvarnost gdje se promjene tijekom vremena zbivaju na slučajan način tako da vjerojatnosti stanja procesa u budućnosti ovise samo o stanju procesa u sadašnjosti, a ne ovise o tijeku procesa u prošlosti [11]. U konkretnom slučaju vrijedi osnovna pretpostavka pri oblikovanju reprezentativnog uzorka mostova za statističku obradu. U uzorku smiju biti svi mostovi, odnosno elementi

mostova na kojima nije bilo značajnijih popravaka u razdoblju od 1996. do 2012. godine. Teoretski, za model nije bitno jesu li mostovi popravljani prije 1996. godine.

Markovljev lanac je poseban slučaj Markovljevog procesa s diskretnim parametrom [9] koji je, u ovom slučaju, vrijeme. Pomoću Markovljevog lanca računa se vjerojatnost da se most ili element mosta u određenom trenutku nađe u određenom stanju. Broj stanja (stupnjeva dotrajivosti) u kojima se Markovljev proces može naći je konačan (u našem slučaju radi se o pet stanja). Također, potrebno je pretpostaviti da je između dva uzastopna pregleda moguć prelazak iz boljšeg u lošije stanje najviše za jednu razinu ocjene stanja. Naime, ponekad se dogodi da se između dva uzastopna pregleda mosta, promijeni ocjena mosta ili elementa mosta i za više od jedne razine stanja, no ipak to su rijetki slučajevi kod kojih se ne može isključiti subjektivnost percepcije motritelja prilikom vizualnog pregleda [2].

Pretpostavlja se da je riječ o homogenom Markovljevom lancu kod kojega prijelazne vjerojatnosti  $p_{ij}$  ne ovise o vremenu ( $t_n, t_{n+1}$ ). Promatra se proces koji ima konačan broj  $r$  diskretnih stanja. U tom slučaju matrica  $P$  prijelaznih vjerojatnosti je kvadratna matrica  $r$ -tog reda s elementima  $p_{ij}$  pri čemu vrijedi  $0 \leq p_{ij} \leq 1$ .

Ako se još pretpostavi da tijekom jednog diskretnog trenutka (od  $t_n$  do  $t_{n+1}$ ) proces može ili ostati u istom stanju ili prijeći u prvo sljedeće, više stanje, matrica prijelaznih vjerojatnosti izgleda ovako:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{22} & p_{23} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & p_{r-1,r-1} & p_{r-1,r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} p_{11} + p_{12} = 1 \\ p_{22} + p_{23} = 1 \\ \dots \\ p_{r-1,r-1} + p_{r-1,r} = 1 \end{matrix} \quad (1)$$

gdje je:

- $P$  - matrica prijelaznih vjerojatnosti,
- $p_{ij}$  - vjerojatnost da proces prijeđe iz stanja  $i$  u trenutku  $t_n$  u stanje  $j$  u trenutku  $t_{n+1} > t_n (i \neq j)$ ,
- $p_{ii}$  - vjerojatnost da proces ostane u stanju  $i$  u vremenu od trenutka  $t_n$  do  $t_{n+1}$ .

Teorija Markovljevih lanaca jamči da je suma svakog retka matrice (1) jednaka 1:

$$\sum_{j=1}^r p_{ij} = 1 \quad (2)$$

Osim matrice prijelaznih vjerojatnosti, za određivanje vjerojatnosti stanja procesa u nekom trenutku u budućnosti potrebno je poznavati i vektor vjerojatnosti početnog stanja:

$$p(0) = [p_1(0) \ p_2(0) \ \dots \ p_r(0)] \quad (3)$$

gdje  $p_i(0)$  ( $i = 1, \dots, r$ ) označuje vjerojatnost da se proces u početnom trenutku ( $t = 0$ ) nađe u  $i$ -tom stanju. U našem

Tablica 2. Razdioba ocjena stanja rasponskog sklopa mostova odabranog uzorka po razdobljima pregleda

Razdoblje	Referentna godina	Stanje 1	Stanje 2	Stanje 3	Stanje 4	Stanje 5
1996. – 2000.	2000.	59	33	15	0	0
2001. – 2006.	2006.	35	42	25	5	0
2007. – 2012.	2012.	26	47	26	8	0

slučaju vektor početnog stanja nastao je temeljem prvoga niza pregleda mostova.

Uz poznatu matricu prijelaznih vjerojatnosti  $P$  i poznati vektor vjerojatnosti početnog stanja može se odrediti vektor vjerojatnosti stanja  $p(t_n)$  u bilo kojem trenutku  $t_n$  koji iskazuje vjerojatnosti da proces u određenom trenutku  $t_n$  poprimi neko od  $r$  stanja, a izražen je matričnom jednadžbom:

$$p(t_n) = p(0) P^n \tag{4}$$

gdje je

$$p(t_n) = [p_1(t_n) \ p_2(t_n) \ p_3(t_n) \ \dots \ p_r(t_n)] \tag{5}$$

Pri tome je  $p_i(t_n)$  ( $i = 1, \dots, r$ ) vjerojatnost da se proces u trenutku  $t_n$  nađe u  $i$ -tom stanju.

Vektor vjerojatnosti odnosi se na trenutačno stanje određenog mosta za koji se radi predviđanje. Matrica prijelaznih vjerojatnosti predstavlja povijesno svjedočanstvo o tome kako elementi sličnog tipa i starosti dotrajavaju. U slučaju konkretnog uzorka polazište modela je u podacima o stanju rasponskog sklopa za uzorak od 107 mostova iz baze podataka, koji su pripremljeni na način prikazan u tablici 2. Matrica prijelaznih vjerojatnosti poprima sljedeći oblik:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & p_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

gdje su:

$p_{11}, p_{22}, p_{33}, p_{44}$  - vjerojatnosti da proces ostane u stanju  $i$  ( $i = 1$  do 4) tijekom šestogodišnjeg razdoblja između pregleda,

$p_{55}=1$  - jer element iz stanja 5 ne može prijeći ni u jedno drugo stanje,

$p_{12}, p_{23}, p_{34}, p_{45}$  - vjerojatnosti da proces prijeđe u više stanje u istom razdoblju.

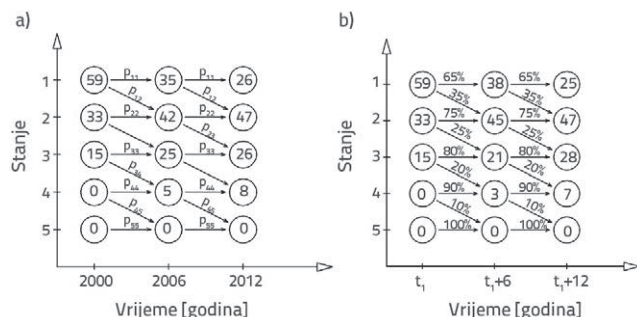
Kako bismo modelom opisali kontinuiranu prirodu procesa dotrajavanja, prijelazne vjerojatnosti se računaju na temelju relativnih frekvencija promatranih događaja. Pri tome se za svaki most u svakom prijelaznom razdoblju mogu definirati dva događaja: prvi događaj se definira kao "ostanak u istom

stanju, a drugi kao "prijelaz u više (lošije) stanje". S obzirom na to da se raspoloživo podacima o mjerenu stanja u tri diskretne vremenske točke (tablica 2.), odnosno za dva prijelazna razdoblja moguće je prikazati  $107 \times 2 = 214$  događaja, odnosno prijelaza. Prijelazne vjerojatnosti računaju se iz relativnih frekvencija događaja (tablica 3.).

Tablica 3. Izračun prijelaznih vjerojatnosti; crveno označene vrijednosti u modelu su korigirane empirijskim spoznajama

Prelazak iz stanja u stanje		Frekvencija	Ukupan broj opaženih događaja	Vjerojatnosti	
1	1	35+26=61	59+35=94	$P_{11}$	0,65
1	2	94-61=33		$P_{12}$	0,35
2	2	(42+47)-33=56	33+42=75	$P_{22}$	0,75
2	3	75-56=19		$P_{23}$	0,25
3	3	(25+26)-19=32	15+25=40	$P_{33}$	0,80
3	4	40-32=8		$P_{34}$	0,20
4	4	(8+5)-8=5	0+5=5	$P_{44}$	1
4	5	5-5=0		$P_{45}$	0
5	5	0	0	$P_{55}$	1

Primjerice, prema podacima o stanju rasponskog sklopa za uzorak od 107 mostova, pojavljuje se  $f_{11} = 61$  događaj kod kojih stanje 1 ostaje nepromijenjeno i  $f_{12} = 33$  događaja kod kojih dolazi do prelaska u više (lošije) stanje 2. Odgovarajuće relativne frekvencije, tj. prijelazne vjerojatnosti su  $p_{11} = 61/94 = 0,648936$  i  $p_{12} = 33/94 = 0,351064$ . Analogno se računaju i ostale prijelazne vjerojatnosti (slika 5).



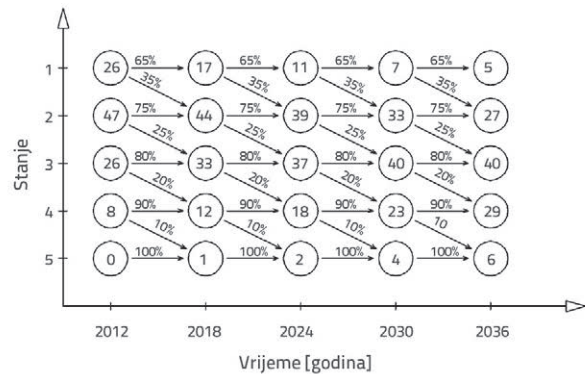
Slika 5. a) Podloga za izračun prijelaznih vjerojatnosti: prikaz triju nizova ocjena, prema tablici 2; b) model Markovljevog lanca koji teorijski opisuje dotrajavanje prikazano nizovima na slici 5.a

Iz prikazanih podataka proizlazi da u razdoblju između dva pregleda teško oštećenje (ocjena 4) nikada ne prelazi u ono zbog kojeg treba ograničiti promet (ocjena 5). U stvarnosti ta se pojava događa, a nedostatak opažanja nastaje zbog činjenice da se pri detekciji stanja 4 brzo poduzimaju popravci (u ovom slučaju "brzo" znači unutar roka od 6 godina). Iskustvo pokazuje da najmanje 10 % mostova tijekom razdoblja između pregleda prelazi iz stanja 4 u stanje 5, pa je tim empirijskim podatkom korigirana matrica prikazana na slici 5.b.

Uz ovako izračunane vrijednosti koeficijenata matrice prijelaznih vjerojatnosti, za prognozu dotrajavanja u budućnosti koristi se vektor početnog stanja (7), određen posljednjim raspoloživim nizom rezultata iz 2012. godine:

$$p(0) = [0,24 \quad 0,44 \quad 0,24 \quad 0,08 \quad 0,0] \quad (7)$$

Prognoza stanja elemenata mostova u šestogodišnjim intervalima, prikazana na slici 6., može se interpretirati na sljedeći način: 24 godine nakon posljednjeg obavljenog mjerenja stanja, bez popravaka i intervencija, od 26 mostova u stanju 1 ostat će ih samo pet. Broj mostova u stanju 2 smanjuje se sa 47 na 27, dok će se broj mostova u stanju 3 povećati sa 26 na 40. Broj mostova u stanju 4 za 12 godina povećat će se za deset. U početnom mjerenju nema mostova u najlošijem stanju, a to je stanje 5, ali bez popravaka na kraju promatranog razdoblja bit će šest mostova.



Slika 6. Prognoza razdiobe mostova po stanjima u budućim šestogodišnjim intervalima modelom Markovljevog lanca

### 3.4. Model Markovljevog procesa

Osnovne teorijske postavke stohastičkog modela zasnovanog na Markovljevom modelu stvarnog fizikalnog procesa prikazane su u radu [4]. Za određivanje vjerojatnosti stanja  $j$  u danom trenutku  $t$  treba znati prijelazne vjerojatnosti  $p_{ij}(t)$  koje se izvede iz nekih pretpostavki, na primjer o fizikalno – kemijskom procesu (ili procesima) dotrajavanja mosta. Budući da je riječ o funkcijama, to će uvijek biti težak problem koji se u praksi često i ne može riješiti. Povoljna je, međutim, okolnost da Markovljevo svojstvo ("samo sadašnjost utječe na budućnost, a ne i prošlost") omogućuje određivanje ovih funkcija na temelju njihovih "infinitezimalnih značajki". To

Tablica 4. Podaci o pregledima pet mostova s ilustracijom načina zaključivanja o vremenu opstanka mosta u n-tom stanju

Naziv mosta	Rezultati pregleda								Zaključak		
	Pregled 1		Pregled 2		Pregled 3		Pregled 4		Stanje	>n [god]	<n [god]
	Starost [god]	Ocjena	Starost [god]	Ocjena	Starost [god]	Ocjena	Starost [god]	Ocjena			
Nadvožnjak Frigis	18	1	23	2	29	2	-		1	18	23
									2	-	-
Nadvožnjak Klajnova	25	3	31	4	37	4	-		3	-	31
									4	6	-
Sigetac Ludbreški	10	1	12	1	15	1	20	2	1	15	20
Drnje	68	1	73	3	79	3	-		1	68	73
									2	-	5
									3	6	-
Velika Ves	28	2	31	2	33	3	40	4	2	3	33
									3	-	9
Prosječno vrijeme opstanka mosta u n-tom stanju									1	33	39
									2	5	19
									3	6	20
									4	6	-



znači da teorija homogenih Markovljevih procesa jamči da funkcije zadovoljavaju određene diferencijalne jednačbe u kojima se kao koeficijenti pojavljuju veličine:

$$\lambda_{ij} = \frac{dp_{ij}(0)}{dt}, \quad i, j = 1, 2, \dots, r \tag{8}$$

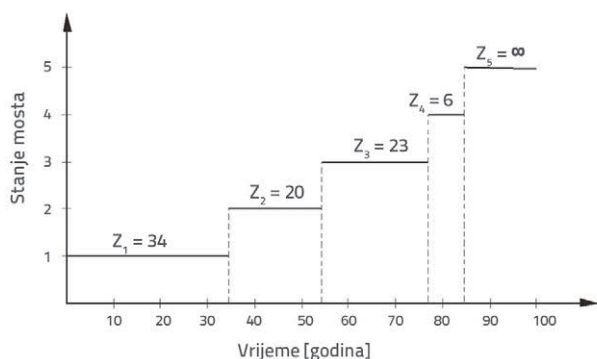
gdje je  $\frac{dp_{ij}(0)}{dt}$  vrijednost derivacije funkcije  $p_{ij}(t)$  po varijabli  $t$ , za  $t = 0$ .

Uvede li se oznaka  $Z_i$ , sa značenjem vremena opstanka procesa u  $i$ -tom stanju, teorija homogenih Markovljevih procesa pokazuje da je  $Z_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) slučajna varijabla kojoj pripada eksponencijalna razdioba s parametrom  $-\lambda_{ii} = \lambda_i \geq 0$ , iz čega slijedi da je očekivano vrijeme opstanka procesa u stanju  $i$ :

$$E[Z_i] = \frac{1}{\lambda_i}, \quad i = 1, \dots, r \tag{9}$$

Ulazni parametar za model je vrijeme opstanka elemenata mostova u određenom stanju. Ovaj podatak ne proizlazi izravno iz baze podataka, koja sadrži mjerenja stanja u konkretnom trenutku. Stoga je razvijen postupak zaključivanja, odnosno procjene vremena koje element provede u svakom od stanja po načelima matematičke logike, prikazan u tablici 4. ilustracijom na primjeru nekoliko mostova. Budući da na veličine  $\lambda_i$  izravno utječe vrijeme opstanka elementa u određenom stanju, važno je napomenuti da u uzorku smiju biti samo takvi mostovi, odnosno elementi mostova koji nikada nisu bili značajno popravljani. Kada to ne bi bilo tako, tada zaključci o vremenima opstanka u pojedinim stanjima ne bi bili točni.

Detaljnijom obradom prije opisanih statističkih uzoraka određena su vremena opstanka  $Z_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) elementa mosta u svakom od karakterističnih stanja. Grafički prikaz ovih vrijednosti oblikuje trajektoriju dotrajavanja na slici 7.



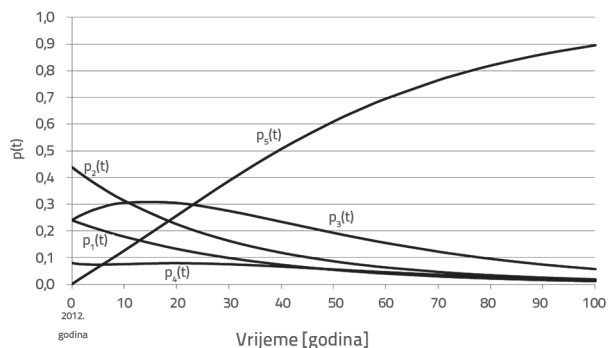
Slika 7. Trajektorija dotrajavanja (srednje vrijednosti iz tablice 4.) pripremljena za izradu modela za element rasponske konstrukcije betonskog mosta

Važno je uočiti da prikazani postupak daje vremenski okvir unutar kojeg statistički podaci pokazuju da se nalazi vrijeme opstanka mosta u određenom stanju. Konačan odabir vremenskog roka koji će poslužiti za modeliranje (trajektoriju

procesu) može se unaprijediti usporedbom statističkog modela s fizikalno – kemijskim modelom, primjerice jednim od modela za proračun uporabnog vijeka prikazanim u radu [12]. Ispitivanja nužna za kalibraciju fizikalno – kemijskog modela provedena su na nekolicini mostova u mreži državnih cesta, ali mogu poslužiti za prilagođavanje parametara statističkog modela.

Pomoću teorije prikazane u radu [4] računaju se formule za određivanje vjerojatnosti svakog od 5 stanja u bilo kojem trenutku vremena  $t$ . Vektor početnih vjerojatnosti isti je kao za model s Markovljevim lancem (7).

Za poznato početno stanje i poznata vremena opstanka u svakom stanju (a to su parametri modela) dalje se računaju konkretne vjerojatnosti da se element mosta u nekom trenutku nađe u svakom od stanja. Grafički prikaz stanja dan je grafikonom na slici 8, a možemo ga objasniti na sljedeći način: stanje 2 najvjerojatnije je približno deset godina od početka promatranja procesa, stanje 3 od deset. do 23. godine promatranja, a nakon toga je najvjerojatnije stanje 5. Stanje 4 nikada nije najvjerojatnije, ali stagnira na oko 8 % tijekom četrdesetak godina.



Slika 8. Vjerojatnosti stanja za element rasponske konstrukcije betonskog mosta: prognoza načinjena temeljem podataka o pregledima od 1998. do 2012., modelom Markovljevog procesa

Za planiranje održavanja bitno je uočiti da ovako postavljen model dotrajavanja može odgovoriti na sljedeća pitanja:

1. Kolika je vjerojatnost da se element nakon deset godina nađe u stanju 5, odnosno koliki je postotak mostova na kojima će se morati poduzeti sanacije uz zatvaranje prometa ako se do 2022. godine ne poduzmu značajniji popravci?

Vrijednost se može neposredno izračunati ili očitati s grafikona:

$$p_5(10) = 0,1257 \approx 13 \%$$

2. Kolika je vjerojatnost  $p(20)$  da element 2032. godine neće biti u stanju "oštećeno"?

Vjerojatnost da je element u stanju 1 ( $p_1(20)$ ), 2 ( $p_2(20)$ ), 3 ( $p_3(20)$ ) ili 4 ( $p_4(20)$ ) u 2032. godini iznosi:

$$p_1(20) + p_2(20) + p_3(20) + p_4(20) = 1 - p_5(20) = 1 - 0,2563 = 0,7437$$

Tražena vjerojatnost izražena u postocima iznosi 74,4 %  $\approx$  74 %, pa se može reći da 74 % elemenata neće biti oštećeno.

3. U kojem će trenutku, odnosno nakon koliko će godina vjerojatnost da element dođe u najlošije stanje (5, oštećeno) premašiti 50 %?

Na grafu funkcije  $p_5(t)$  vidljivo je da će se to dogoditi približno nakon četrdeset godina.

4. Koje je očekivano stanje elementa nakon trideset godina uporabe mosta bez održavanja?

Osim vjerojatnosti pojedinih stanja, očekivano stanje dotrajalošće građevine u nekom trenutku  $t$  za model  $s$  5 stanja može se zapisati kao:

$$E[S(t)] = 1 \cdot p_1(t) + 2 \cdot p_2(t) + 3 \cdot p_3(t) + 4 \cdot p_4(t) + 5 \cdot p_5(t)$$

Uvrštavanjem konkretnih vrijednosti u formulu dobiva se:

$$E[S(t)] = 1 \cdot 0,099314 + 2 \cdot 0,163553 + 3 \cdot 0,27465 + 4 \cdot 0,075779735 + 5 \cdot 0,386703458 = 3,49$$

Vidljivo je da je očekivano stanje nakon trideset godina približno 3.

#### 4. Rasprava o prednostima i nedostacima prikazanih modela

Cilj istraživanja bio je oblikovati takav model napredovanja procesa da se omogući predvidjeti buduće dotrajavanje svih sličnih građevina ili elemenata građevina u mreži. Kad se ocjenjuje model, bitno je postaviti dva pitanja:

1. Što treba učiniti na pripremi postojećih podataka za proračun?
2. Na koja pitanja odgovaraju rezultati modeliranja?

*Regresijski model* izrađuje se neposredno iz postojećih podataka (uređenih parova starost mosta – ocjena stanja), pa je u tom smislu najmanje zahtjevan. Međutim, rezultat pokazuje da ovo nije uporabljiv alat za prognozu stanja, već samo upozorava na sklonost propadanju pojedinih elemenata. Naime, graf funkcije prikazan na slici 3. nalazi se u blizini ocjene 2 tijekom gotovo cijelog uporabnog vijeka mosta. Kako bi se grafovi uobličili za sve elemente, vjerojatno bi se dobile smjernice za usporedbu u smislu da jedan element dotrajava brže od drugoga. Izmjena regresijske funkcije (npr. odabir eksponencijalne funkcije umjesto pravca) ne bi bitno promijenila rezultat, pa je ovaj model ocijenjen najlošijim.

Model koji se zasniva na *teoriji Markovljevih lanaca* najčešći je u svjetskoj praksi, no zahtijeva kontinuirani niz mjerenja u pravilnim razmacima, ne duljim od dvije godine. No, pregledi se ne obavljaju uvijek u jednakim razmacima niti dovoljno često da bismo model koji se temelji na Markovljevim lancima prihvatili kao optimalan za podatke kojima raspolažemo.

Podaci kojima smo raspolagali u istraživanju prilagođeni su modelu svođenjem na referentne godine – konkretno, ako je

pregled načinjen 2004., ocjena se prenosi na referentnu godinu 2006., što ne mora biti ispravno. Dakle, glavni nedostaci modela proističu iz rada na diskretnoj vremenskoj skali (intervali od po šest godina) i teškoća u vezi s korekcijom parametara na osnovi iskustva. U konkretnom slučaju model bi bio prihvatljiv da postoji niz primjerice od npr. pet mjerenja stanja u razmacima po dvije godine, to više što šestogodišnji razmaci između prognoziranih stanja nisu dostatni za planiranje (potrebna je prognoza za iduću godinu i četverogodišnja razdoblja). Također, pojam prijelaznih vjerojatnosti nije blizak inženjerskom načinu razmišljanja o dotrajavanju mostova.

Model koji se temelji na *homogenom Markovljevom procesu* zasniva se na podacima o vremenu opstanka elementa mosta u određenom stanju. Procjene o tome koliko će dugo nešto trajati bliske su inženjerskom načinu razmišljanja (na primjer: ako ga ne popravimo, ovaj most će potrajati još  $n$  godina...). I ovaj model zahtijeva određenu pripremu podataka, odnosno statističko određivanje vremena opstanka procesa u određenom stanju, no taj je problem uspješno riješen prikazanim algoritmom.

U usporedbi s prethodna dva, ovaj model je najprimjenjiviji jer se prepoznavanjem procesa koji uzrokuje oštećenje elementa mosta tijekom opstanka u određenom stanju mogu procijeniti ako se primijeni fizikalno – kemijski model dotrajavanja. Učinkovitost modela za proračun uporabnog vijeka armiranobetonskih konstrukcija istražena je na primjerima naših mostova [12], stoga je opravdano ustvrditi da se oni mogu koristiti za korekciju statistički određenih parametara dotrajavanja. Povezivanjem ocjene mosta s aktivnim procesom može se preciznije odrediti trenutak kada element mosta prelazi iz jednog stanja u drugo, što omogućuje pouzdanije mjerenje stanja. Za koroziju armature to može izgledati ovako: stanje 2 – inicijacija korozije, stanje 3 – aktivna korozija, stanje 4 – vidljiva korozija i oštećenje armature. Proračun broja godina koje će sklop provesti u jednom od stanja omogućuje bolju dokazivost pri planiranju jer su stanja povezana s poznatim metodama popravaka (povezivanje pojma stanja s tipskim troškovnikom daljnji je zadatak u razradi postupka).

Sva tri modela prikazana su statistički, zasnovani na obradi podataka o numerički izraženom stanju jednog elementa mosta iz baze podataka o vizualnim pregledima koje određenom metodologijom provede inženjer za mostove poduzeća "Hrvatske ceste" u razdoblju od 2000. do 2012. godine. U istom razdoblju kod nas i u svijetu provedeno je i više detaljnih ispitivanja mostova, kojima se nastojalo odrediti tip procesa koji razara most i brzinu njegovog napredovanja. S obzirom na hrvatske specifičnosti, posebno vrijedni rezultati ostvareni su na polju istraživanja korozije armature uzrokovane prodorom klorida u beton.

Daljnje istraživanje treba usmjeriti na objedinjavanje i analiziranje podataka o procesima dotrajavanja na našim mostovima te na obradu tih podataka tako da se povežu s ocjenama o mostu. U konkretnom slučaju poznato je da su

na više mostova provedeni istražni radovi koji su prethodili sanacijama. Nalaze treba povezati s ocjenama stanja koje se određuje vizualnim pregledom i tako korigirati procjene trajanja pojedinih stanja procesa. Nakon toga potrebno je povezati pojam stanja s tipskim popravcima, i to za svaki od ocjenjivanih elemenata mosta posebno. Konačni je cilj osmisliti način kako predvidjeti potrebu za popravcima kroz tehničke i financijske pokazatelje, a temeljem podataka iz baze koja već postoji, ne mijenjajući bitno metodologiju rada koja je zaživjela u Hrvatskim cestama.

## 5. Zaključak

Na osnovi postojeće baze podataka o pregledima, odnosno na osnovi rezultata pregleda provedenih od 2000. do 2012. godine, načinjena su tri modela dotrajavanja rasponskog sklopa betonskih mostova u mreži državnih cesta Republike Hrvatske, u nastojanju da se odredi koji je od njih najpogodniji za planiranje održavanja.

Svi prikazani modeli procesa uglavnom upućuju na upitnu vrijednost ulaznih podataka, a ona se očituje dugotrajnim zadržavanjem elementa konstrukcije u stanjima koja podrazumijevaju oštećenja, ali ne zahtijevaju sanaciju. Temeljem prijašnjih analiza postupka vizualnog pregleda [2] i nekih analiza provedenih popravaka [13] može se zaključiti da modeli ne prikazuju posve objektivno brzinu napredovanja procesa, što se pripisuje nevoljkosti ocjenjivača da daju višu ocjenu sve dok nije posve očito kako je sklop ugrožen do te mjere da je upitna sigurnost prometovanja.

Ako je kriterij odabira modela dotrajavanja mogućnost kombiniranja statističkih parametara s empirijskim podacima, za planiranje održavanja mostova najbolji model je onaj koji se temelji na homogenom Markovljevom procesu. U svijetu najčešće primjenjivani model na osnovi Markovljevih lanaca bio bi u prednosti kada bi se glavni pregledi obavljali češće i kada bi na raspolaganju bio dulji niz opažanja stanja.

U svakom slučaju, bazični model treba se zasnivati na statističkoj obradi podataka o registriranom stanju mostova. Razrađeni model poželjno je korigirati novim podacima o fizikalno – kemijskom procesu dotrajavanja, koji su prikupljeni ispitivanjima. U tom slučaju računsko vrijeme opstanka u određenom stanju, koje se izračuna ili procijeni, služi kao podatak temeljem kojeg se korigira parametar procesa dotrajavanja izračunan iz statističkih podataka. S obzirom na relativno mali broj raspoloživih podataka i njihovu nepouzdanost, potrebno je koristiti sve dostupne izvore podataka, one statističke, teorijske modele dotrajavanja potvrđene laboratorijskim ispitivanjima i iskustvo inženjera iz prakse.

## Zahvala

Prikazano istraživanje provedeno je uz potporu poduzeća Hrvatske ceste d.o.o., uz korištenje podataka iz Baze cestovnih podataka (BCP). Autori zahvaljuju inženjerima i rukovoditeljima koji su savjetovali, pomogli i odobrili korištenje podataka.

## LITERATURA

- [1] Kršinić, N.: Sustav za upravljanje i gospodarenje mostovima u Republici Hrvatskoj, Zbornik radova IV kongresa DHGK, Hrvatsko društvo građevinskih konstruktora, J. Radić (ur.), pp. 87-93, Cavtat 1996.
- [2] Tenžera, D., Puž, G., Radić, J.: Visual inspection in evaluation of bridge condition, GRAĐEVINAR 64 (2012) 9, pp. 717-726.
- [3] *Zakon o javnim cestama*, urednički pročišćeni tekst, Narodne novine, broj 84/11, 2011.
- [4] Puž, G., Radić, J., Stipanović Oslaković, I.: Novi model za stohastičku analizu trajnosti mostova, GRAĐEVINAR 62 (2010) 4, pp. 287-297.
- [5] BRIME – *Bridge Management in Europe*, European Commission DG VII, 4th Framework Programme; <http://www.trl.co.uk/brime/>, (20.03.2013.)
- [6] Busa, G., Cassella, M., Gazda, W.: A National Bridge Deterioration Model, Transportations Systems Center, Report SS-42-U5-26, Cambridge, MA: U.S. Department of Transportation, September 1985.
- [7] West, H.H., McClure, R.M., Gannon, E.J., Riad, H.L., Siverling, B. E.: Nonlinear Deterioration Model for the Estimation of Bridge Design Life, Research project No. 86-07, Final Report, The Pennsylvania Transportation Institute, 1989.
- [8] Yokoyama, K., Inaba, N., Honma, A., Ogata, N.: Development of Bridge Management System for Expressway Bridges in Japan; Technical Memorandum of Public Works Research Institute; VOL. 4009; pp. 99-104, Japan, 2006.
- [9] Kuvačić, B., Jurić, S.: Sustav gospodarenja građevinama u "Hrvatskim autocestama" d.o.o., Ceste i mostovi 54 (2008) 6, pp. 26-30.
- [10] Thompson, P., Small, E., Johnson, M., Marshall, A.: The Pontis Bridge Management System. Structural Engineering International 8 (4), pp. 303-308, 1998.
- [11] Pauše, Ž.: Vjerojatnost, informacija, stohastički procesi; Školska knjiga, Zagreb, 1974.
- [12] Stipanović Oslaković, I., Bjegović, D., Mikulić, D.: Matematički modeli za proračun uporabnog vijeka armiranobetonskih konstrukcija, GRAĐEVINAR 59 (2007) 9, pp. 753-766.
- [13] Tenžera, D., Futivić, K., Ukrainczyk, B.: Rehabilitation of concrete beam bridges in Croatian state road network, zbornik radova Durability of Concrete Structures: Maintenance and Reconstruction Works, Plitvice, J. Radić, M. Kušter (ur.), pp 217-222, 2012.