

# Oblikovanje i proračun kupole dvorane „Krešimir Ćosić“ u Zadru

---

**Lazarević, Damir; Anđelić, Milutin; Uroš, Mario**

*Source / Izvornik:* **Građevinar, 2010, 62, 875 - 886**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:615424>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-14**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)



# Oblikovanje i proračun kupole dvorane „Krešimir Čosić“ u Zadru

Damir Lazarević, Milutin Anđelić, Mario Uroš

## Ključne riječi

*dvorana „Krešimir Čosić“, kupola, metoda duljine luka, poslijekritično ponašanje, osjetljivost prema imperfekciji, složeno izvijanje*

## Key words

*Krešimir Čosić Hall, dome, arc-length method, post-critical behaviour, imperfection sensitivity, compound buckling*

## Mots clés

*Salle de Krešimir Čosić, dôme, méthode à longueur d'arc, comportement postcritique, sensibilité à l'imperfection, flambement complexe*

## Ключевые слова

*зал „Крешимир Чосич“, купол, метод длины арки, посткритическое поведение, чувствительность к имперфекции, сложное изгибание*

## Schlüsselworte

*Halle "Krešimir Čosić", Kuppel, Verfahren der Bogenlänge, postkritisches Verhalten, Empfindsamkeit gegen Imperfektion, zusammengesetzte Knickung*

*D. Lazarević, M. Anđelić, M. Uroš*

*Izvorni znanstveni rad*

## Oblikovanje i proračun kupole dvorane „Krešimir Čosić“ u Zadru

*U radu je opisano ponašanje statičkog sustava dvorane i numerički postupci primijenjeni u proračunu konstrukcije. Detaljnije su objašnjeni problemi prouzročeni oblikovanjem kupole, s osvrtom na nužne zahvate potrebne za njihovo uklanjanje. Ukratko su opisani algoritmi upotrijebljeni za dokaz nosivosti, s nešto detaljnijim pristupom proračunu stabilnosti. Upozoreno je i na neke teškoće nastale pri proračunu građevine koje, ponajprije zbog premalo pokusa, još nisu riješene.*

*D. Lazarević, M. Anđelić, M. Uroš*

*Original scientific paper*

## Shaping and analysis of dome structure for the Krešimir Čosić Hall in Zadar

*The behaviour of the static system of the hall, and numerical procedures applied in structural analysis, are described in the paper. Problems caused by dome shape, and interventions needed to eliminate such problems, are presented in some detail. Algorithms used for proving bearing capacity are briefly presented, and the approach adopted in stability analysis is described in more detail. An emphasis is placed on some difficulties identified during structural analysis that have still remained unsolved, which is primarily due to insufficient number of experiments.*

*D. Lazarević, M. Anđelić, M. Uroš*

*Ouvrage scientifique original*

## Le façonnage et l'analyse du dôme de la salle de Krešimir Čosić à Zadar

*Le comportement du système statique de la salle, et les procédés numériques appliqués dans l'analyse structurelle, sont décrits dans l'ouvrage. Les problèmes causés par la forme du dôme, et les interventions nécessaires pour éliminer ces problèmes, sont présentés en détail. Les algorithmes utilisés afin de démontrer la capacité portante sont présentés dans les grandes lignes, et l'approche adoptée dans l'analyse de stabilité est décrite en plus de détail. L'accent est mis sur quelques difficultés rencontrées au cours de l'analyse structurelle qui restent encore irrésolues, ce qui est surtout dû aux essais inadéquats.*

*Д. Лазаревић, М. Анђелић, М. Урош*

*Оригинална научна работа*

## Строение и расчет купола зала „Крешимир Чосич“ в г. Задаре

*В работе описано поведение статической системы зала и цифровые процедуры, использованные при расчете конструкции. Подробно освещены проблемы, вызванные строением купола, указаны меры, необходимые для их устранения. В краткой форме описаны алгоритмы, примененные для доказательства несущей способности, приведен более подробный подход к расчету стабильности. Обращено внимание на некоторые трудности, возникшие при расчете сооружения, которые, прежде всего, из-за недостатков испытания, еще не устранены.*

*D. Lazarević, M. Anđelić, M. Uroš*

*Wissenschaftlicher Originalbeitrag*

## Gestaltung und Berechnung der Kuppel der Halle "Krešimir Čosić" in Zadar

*Im Artikel beschreibt man das Verhalten des statischen Systems der Halle und die in der Berechnung angewendeten numerischen Verfahren. Detailliert erklärt man die Probleme die die Gestaltung der Kuppel verursachen, mit Hinblick auf die nötigen Eingriffe für deren Beseitigung. Kurz beschreibt man die für den Nachweis der Tragfähigkeit gebrauchten Algorithmen, mit etwas detaillierterem Zutritt zur Berechnung der Stabilität. Es wird auch auf einige Schwierigkeiten hingewiesen die bei der Berechnung des Bauwerks auftraten, die vorerst wegen Mangel an Experimenten noch nicht gelöst sind.*

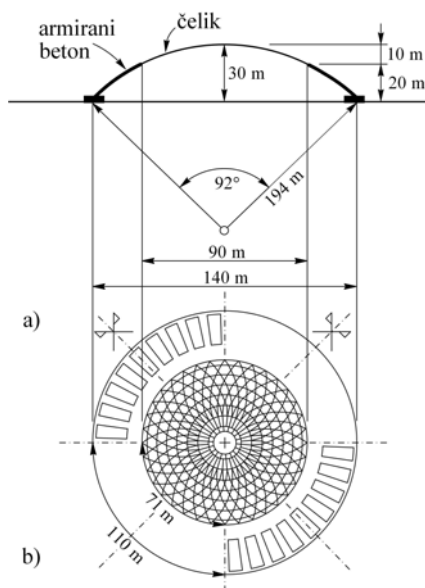
Autori: Prof. dr. sc. **Damir Lazarević**, dipl. ing. građ.; prof. emer. dr. sc. **Milutin Anđelić**, dipl. ing. građ.; **Mario Uroš**, dipl. ing. građ., Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet, Zagreb

## 1 Uvod

Dvorana „Krešimir Ćosić“ u Zadru novi je sportski, po najprije košarkaški centar koji je dostojno zamijenio dotrajalo zdanje poklonika košarke – poznatu dvoranu u Jazinama. Ubrzo nakon izvedbe dvorana je, zbog osobitog izgleda, postala urbanističkim i sportskim obilježjem suvremenog Zadra. Projekt dvorane izradila je tvrtka Arhitektonski atelier Hrčić, projektiranje i građenje, d. o. o. iz Zagreba, (glavni projektant prof. dr. sc. Marijan Hrčić), a projekt konstrukcije tvrtka D&Z, d. o. o., (projektant konstrukcije Davor Uglešić, dipl. ing. građ.). Na poziv tvrtke IGH, d. d. iz Zagreba koja je obavljala nadzor izvedbe dvorane (nadzorni inženjer Josip Bošnjak, dipl. ing. građ.), djelatnici Katedre za statiku dinamiku i stabilnost konstrukcija Zavoda za tehničku mehaniku Građevinskog fakulteta u Zagrebu izvršili su nužne izmjene [1] radi jednostavnije izvedbe i uklanjanja manjkavosti izvornog projekta. Pri tome je analizirano i nekoliko načina podupiranja svježeg betona, uz provjeru glavnih nosivih elemenata skele. Nakon preliminarnih proračuna odlučeno je preoblikovati i prednapeti temeljni prsten, ukrotiti područje oko otvora i zamijeniti dio punostijene kupole rešetkastom inačicom.

## 2 Oblik konstrukcije

Srednja je ploha kupole rotacijska, definirana tragom koji ostavlja kružni luk rotacijom oko uspravne osi položene njegovim tjemenu. Radi se zapravo o odsječku sfere promjera 140 m i visine 30 m. Središnji kut odsječka iznosi  $92^\circ$ , a glavni je polumjer sfere 194 m (slika 1.a).



Slika 1. Geometrijski opis kupole: a) presjek, b) tloris

Do visine od 20 m kupola je izgrađena od armiranog betona, a ostatak, raspona 90 m i visine 10 m, izveden je u

čeliku. Omjer visine prema rasponu (smjelost) čitave kupole iznosi  $1/4,7$ , a čeličnog dijela  $1/9$ , što smatramo plitkom kupolom.

Na slici 1.b označene su tipične četvrtine kupole. Dvije nasuprotne četvrtine ab dijela sadrže po devet približno pravokutnih otvora širine 10 m i visine 23 m. Razmaci su među otvorima približno 5 m. Preostale su četvrtine jedini punostijeni dijelovi kupole. Duljina četvrtine pri temelju iznosi 110 m, a u podnožju čelične kupole 71 m. Lučni je raspon ab dijela oko 35 m. Ovako oblikovane četvrtine čine kupolu samo dvoosno simetričnom. Čelični dio tvori posebno oblikovana mreža cijevnih profila, završena tjemnim prstenom promjera 12 m. Oblik konstrukcije određuje osnovne sastavnice i ponašanje statičkog sustava.

## 3 Statički sustav

Radi lakšeg objašnjenja principa nosivosti kupole, statički sustav možemo raščlaniti na tri osnovna dijela: rešetkastu kupolu, zakrivljeni višepoljni okvir i punostjenu ljusku. Rešetkasti se dio oslanja na ostatak kupole preko završnog ab prstena, a čitava kupola na tlo preko ab temeljnog prstena (slika 2.).



Slika 2. Sastavnice statičkog sustava kupole: 1 – rešetkasta kupola, 2 – završni prsten, 3 – punostjena ljuska, 4 – zakrivljeni višepoljni okvir, 5 – temeljni prsten

Čitatelji mogu prepoznati „zastarjelu“ hijerarhijsku raščlambu od „krova prema temelju“ koja više nije potrebna radi proračuna konstrukcije. Suvremenim pristupom kupolu proračunavamo kao cjelinu, metodom konačnih elemenata. Ipak, smatramo da su raščlavljenja nužna jer pridonose razumijevanju principa nosivosti, toka unutarnjih sila i tumačenju rezultata numeričkih proračuna.

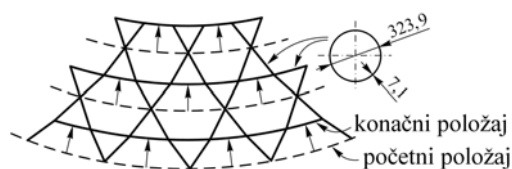
U sljedećim ćemo odjeljcima razjasniti sastavnice statičkog sustava, uz isticanje problema koji su uvjetovali njihovo oblikovanje.

### 3.1 Rešetkasta kupola

Kupolu tvori jednoslojna mreža čeličnih cijevi promjera 323,9 mm, debljine stijenke 7,1 mm sa čvorovima u zavarenoj izvedbi. Težina konstrukcije iznosi  $0,34 \text{ kN/m}^2$ .

Prstenaste sile izravno preuzimaju kružno položene cijevi, a lučne se sile preuzimaju posredno, cijevima poligonalno zakrivljenim prema meridijanima kupole. Zbog prekida cijevi lučnog smjera kupola je ukrućena tjemnim prstenom izvedenim od zakrivljenog cijevnog profila promjera 508 mm, debljine stijenke 12,5 mm.

Mreža je nastala preoblikovanjem rešetkaste kupole s približno trokutnim poljima, pomicanjem prstenastih cijevi u lučnome smjeru za polovinu međusobne udaljenosti (slika 3.). Na taj se način u čvoru spajaju samo tri štapa (prstenasti prolazi kontinuirano, a lučni se prekidaju), što olakšava izvedbu, ali dokaz stabilnosti čini složenijim jer propisima i preporukama nije obuhvaćen ovako specifičan oblik kupole. Zbog toga smo pristupili proračunima poslijekritičnih grana nosivosti perturbacijom idealne geometrije modela odabranim oblicima izbočenja. Isti su oblici poslužili i za pristup imperfekcijama (vidjeti pododjeljak 4.3.2).

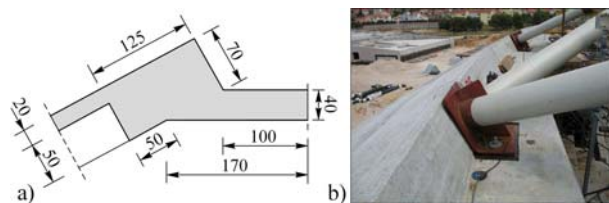


Slika 3. Oblikovanje rešetkaste kupole

U oblikovanju rešetke sudjelovao je mr. sc. E.Hemerich [2], a sa suradnikom I. Šošićem, dipl. ing. građ. (oboje djelatnici IGH, d. d. iz Zagreba) izradio je i izvedbenu dokumentaciju čeličnog dijela kupole.

### 3.2 Završni armiranobetonski prsten

Oslanjanje čeličnog dijela kupole na armiranobetonski ostvareno je armiranobetonskim prstenom 70/125 cm, koji je zbog problema izbočenja gornjeg ruba ab dijela trebalo ojačati ukrotom 40/100 cm (slika 4.a). Iako bismo, statički gledano, ukrotu mogli učinkovitije postaviti (vidjeti pododjeljak 4.3.1), odabrani položaj ne smeta gledateljima na vrhu tribina, omogućuje jednostavni detalj oslanjanja čeličnog dijela (slika 4.b) i stvara dodatni prostor za smještaj instalacija.



Slika 4. Završni ab prsten: a) oblik i dimenzije, b) oslonac rešetkaste kupole

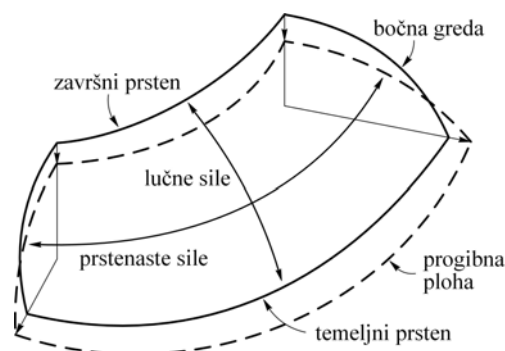
### 3.3 Punostjena ljuska

Na punostijenom dijelu kupola nosi kao tanka ljuska, debljine 20 cm, pozitivne Gaussove zakrivljenosti. Do-

miniraju, dakle, membranske sile: u horizontalnim presjecima kupole prstenaste (obručne), a u vertikalnim presjecima lučne (meridijalne) sile (slika 5.).

Na bočnim rubovima ljuske postoji prekid prstenastih sila, pa prostorni prijenos opterećenja biva bitno narušen. Slab doprinos prstenastog smjera čini slobodne (neukrućene) pobočke ljuske deformabilnima jer nose više ravninski (lučno). Da bismo spriječili pretjerane progibe, rubove je trebalo ukrotiti lučnim gredama 50/70 cm.

Slično tomu, na gornjem i donjem rubu ljuske postoji prekid lučnih sila, pa je gornji rub ukrućen spomenutim završnim prstenom, a donji je ojačan podebljanjem na 30 cm, uz izvedbu spoja upetoga u temeljni prsten.



Slika 5. Punostjeni dio kupole s položajima rubnih elemenata

### 3.4 Zakrivljeni višepoljni okvir

U statičkom smislu, područje kupole oko otvora možemo smatrati zakrivljenim višepoljnim okvirom koji leži na srednjoj plohi sfere (slika 6.). Okvir tvore blago zakrivljeni stupovi i visoka, zakrivljena prečka. Stupove možemo smatrati upetima u temeljni prsten, a prečku upetom u punostjenu ljusku. Debljina stijenki poprečnih presjeka iznosi 20 cm, uz podebljanje na 30 cm u području upetosti stupova.



Slika 6. Elementi zakrivljenoga višepoljnog okvira; istaknut je prekid prstenastih i lučnih sila

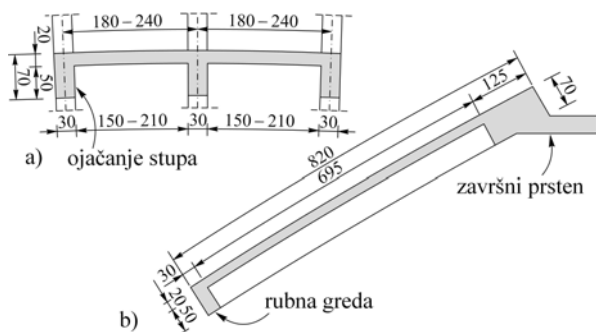
Stupovi se ponašaju kao klasični Bernoulli–Navierovi štapovi. Razlog je tomu mala debljina stupova prema visini i položaju otvora koji prekidaju prstenaste sile

(slika 6.), pa djelovanje ljuske nije moguće. Prema tome, stupovi nose dominantno podužno (lučno), ponajprije uzdužnim tlačnim silama, a u manjoj mjeri i savijanjem oko slabije osi. Zbog djelovanja momenata i problema izvijanja, potaknutog zakrivljenom osi, stupove je trebalo ojačati ukrutama 30/70 cm (slika 7.a).

Stupove možemo smatrati i zakrivljenim gredama s jasno definiranim rasponom, poprečnim preuzimanjem opterećenja i djelovanjem savijanja (momenata i poprečnih sila u vertikalnoj ravnini položenoj kroz os). Međutim, zbog dominantnog utjecaja uzdužnih sila, manje uobičajenog za gredu i ponašanja područja s otvorima kao višepoljnog okvira, odlučili smo ove nosive elemente ipak zvati stupovima.

Zaista, uzdužna tlačna sila centrirala rezultantu u presjeku, čime umanjuje učinke savijanja i omogućuje malu debljinu stupova (70 cm) prema rasponu (23 m). Pri savijanju bez uzdužnih sila, debljina bi grede iznosila najmanje 1/15 raspona (oko 150 cm).

Otvori prekidaju i lučne sile (slika 6.), pa se ni u prečki ne može aktivirati princip nosivosti ljuske. Ona, prema tome, nosi dominantno prstenasto, kao visokostjeni kontinuirani nosač velike visine prema rasponu (širini otvora). I prečka je pretežno opterećena uzdužnim tlačnim silama i savijanjem, ali protivno stupovima savijanje djeluje oko jače osi. Zbog problema izvijanja, dodatno naglašenog savijanjem, gornji je rub prečke ukrućen završnim prstenom, a donji je, zbog prekida, ali i skretanja lučnih sila oko otvora, trebalo ojačati rubnom gredom (slika 7.b).

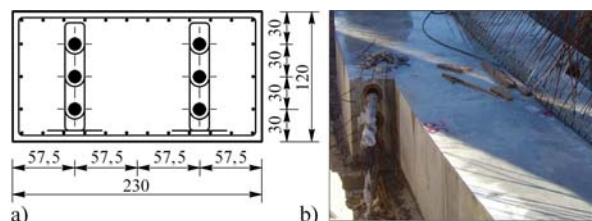


Slika 7. Poprečni presjeci elemenata višepoljnog okvira: a) vitkog stupa, b) visokostjene prečke

### 3.5 Temeljni prsten

Potisak kupole preuzima centrično prednapeti temeljni prsten 230/120 cm (slika 8.a). Na prstenu je izvedeno osam lizena za unos prednaponske sile i sidrenje natega (slika 8.b). Pri izboru izmjera poprečnog presjeka vodilo se računa o vertikalnom pritisku na tlo, najvećem tlačnom naprezanju u prstenu (prije rasterećenja kupolom) i prostoru za smještaj natega i armature, posebno u području lizena.

Pomoć pri izradi glavnog i izvedbenog projekta prednapinjanja pružio je Marijan Šteković, dipl. ing. građ., iz tvrtke Viadukt, d. d. iz Zagreba.



Slika 8. Temeljni prsten: a) dimenzije, položaj armature i natega, b) detalj lizene

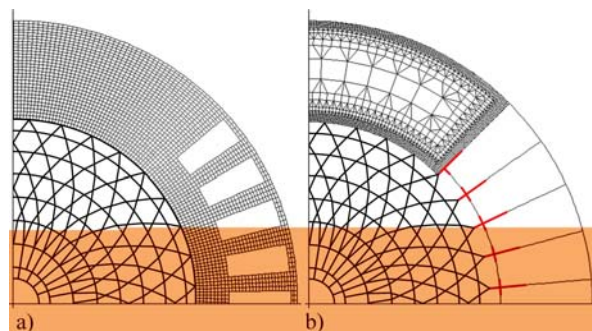
## 4 Proračun konstrukcije

U nastavku ćemo razjasniti neke posebnosti proračuna konstrukcije koje bi, prema našem mišljenju, mogle zanimati čitatelje. Spomenimo odmah da su statički i dinamički proračuni provedeni programom SAP 2000 [3], a proračun stabilnosti programom otvorenog koda FEAP (izvorno pisanog u f77) [4], kojemu je algoritam za analizu stabilnosti dopunjen s nekoliko rutina. Važne sastavnice projekta, poput proračuna skele, dimenzioniranja presjeka i oblikovanja detalja, trebalo bi obraditi u posebnom članku.

### 4.1 Numerički modeli

Modeli se sastoje od štapnih i plošnih elemenata, temeljenih na teoriji drugog reda i malim deformacijama (SAP), odnosno geometrijski točnom pristupu i konačnim deformacijama (FEAP). U potonjem je slučaju odabrana linearno-elastična veza između Lagrangeova tenzora deformacija i drugog Piola–Kirchhoffova tenzora napreznja [5, 6]. Usvojeni (Saint–Venant–Kirchhoffov) zakon ponašanja posjeduje određene slabosti pri velikim deformacijama (bez obzira na iznose pomaka i kutova zakreta), ali o uzrocima slabosti i njihovu svladavanju ovdje ne bismo raspravljali [7, 8]. Konačni su elementi ravni, na mjestima većih ekscentričnosti povezani apsolutno krutim kinematičkim ograničenjima.

Proračuni su provedeni uporabom dvaju numeričkih modela. Jedan je model klasičan, s plošnim pristupom stijenci i štapnim pristupom temeljnom prstenu, ukrućenjima i rešetkastoj kupoli (slika 9.a).



Slika 9. Pristupi području s otvorima: a) plošni, b) štapni, s istaknutim položajima kinematičkih ograničenja

U drugome je modelu, prema zapažanjima iz odjeljka 3.4, čitavo područje oko otvora modelirano štapno, uz primjenu spomenutih ograničenja u područjima čvorova okvira (slika 9.b). To su mjesta višestrukih sjecišta greda koje ukružuju stupove i prečku, što takva područja čini vrlo krutima, ponajprije u vlastitoj ravnini. U skladu sa štapnim pristupom, visokostjeni je nosač prečke aproksimiran Timošenkovim štapom. Premda se radi o nešto lošijoj aproksimaciji prečke (zbog velike visine prema rasponu), pogoršanoj popuštanjem čvorova okvira, ustanovljeno je dobro podudaranje među rezultatima proračuna usvojenih modela. Time je potvrđena pretpostavka o približno okvirnom (zapravo štapnom) ponašanju kupole u području otvora.

Stoga, iako je vanjski oblik konstrukcije kupola, samo se punostjene četvrtine ponašaju kao klasična ljuska koju treba modelirati plošnim elementima. Štoviše, radi dobre aproksimacije momenata lučnog smjera, gušća je mreža potrebna samo pri rubovima gdje promjena debljine i upetost ljuske u rubne elemente uzrokuju lokalni ekstrem koji brzo iščezava s odmakom od ruba, pa podalje, stoga, prevladava membransko stanje naprezanja koje možemo aproksimirati puno većim elementima. Zbog dobre aproksimacije i uvjetovanosti modela veličina elemenata mora biti razumna, a promjena gustoće mreže postupna.

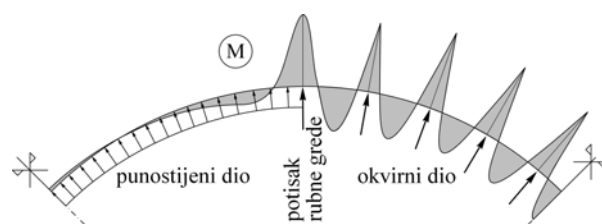
Opisanim pristupom dominantno štapni model sadrži upola manje nepoznanica od pretežito plošnog modela, što je omogućilo brže proračune većeg broja inačica, posebno pri provjerama stabilnosti kupole. Štoviše, štapni modeli pridonose razjašnjenju toka unutarnjih sila, učinkovito postavljajući armature i provjeri složenijih inačica temeljenih na konačnim elementima, kojima integracija naprezanja po presjeku može stvarati teškoće. Istaknimo na kraju znatan porast broja uvjetovanosti jako nelinearnih, velikih modela jer treba iteracijski riješiti veliki sustav jednadžbi. Brojne operacije koje pri tome treba izvršiti uzrokuju akumulaciju pogreške zaokruživanja koja utječe na točnost proračuna [9]. Prema tome, treba težiti što manjem sustavu koji još uvijek dobro aproksimira problem koji rješavamo. Pri tome je poznat povoljan učinak kinematičkih ograničenja kojima eliminiramo članove s velikim krutostima.

#### 4.2 Statički proračun

Statički proračun konstrukcije za djelovanje vlastite težine i prednapona napravljen je u tri faze. Najprije je izvršen proračun modela temeljnog prstena s prednaponom, zatim je priključen ab dio i konačno je dodana rešetkasta kupola. Takav pristup jamči pravilan unos prednaponske sile u numerički model. Postupak je očito nelinearan jer postoji promjena statičkog sustava (matrice krutosti i vektora opterećenja) tijekom proračuna. Ostala opterećenja djeluju na kupolu kao cjelinu.

##### 4.2.1 Proračun temeljnog prstena

Vlačna sila u prstenu poništena je prednapinjanjem. Prednaponska sila iznosa 15 000 kN određena je na temelju potiska faktoriranoga osnosimetričnog opterećenja (vlastite težine, stalnog i pokretnog tereta). Radi se o konačnom iznosu sile preostalom nakon svih gubitaka. Zbog dominantnog utjecaja uzdužne sile prednapinjanje je obavljeno centrično, sa šest natega po poprečnom presjeku temelja i četiri natege po njegovu opsegu (ukupno 24 natege). Mali doprinos savijanja postoji samo u području otvora (slika 10.), jer koncentrirano djelovanje uzdužnih sila u stupovima unosi poremećaj u membransko stanje naprezanja.



Slika 10. Dijagram momenata savijanja u temeljnom prstenu

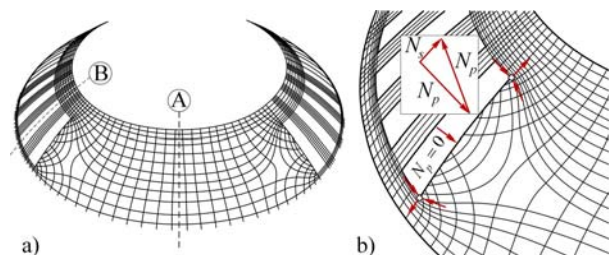
Na punostjenom dijelu dominira jednoliki radijalni potisak ljuske. Tlačna je linija, poput osi temelja, praktično kružna pa je utjecaj savijanja gotovo zanemariv. Postoji, doduše, utjecaj koncentriranog potiska rubne grede, ali prema Saint Venantovu principu brzo iščezava s odmakom od ruba. Možemo zamijetiti da oblik momentnog dijagrama potvrđuje okvirno djelovanje kupole u području otvora. Utjecaji potresa preuzeti su dodatnom mekom armaturom ploštine 200 cm<sup>2</sup>. Opterećenje vjetrom nije se pokazalo mjerodavnim.

Treba istaknuti da se ovim pristupom ne oslanjamo na moguće povoljno djelovanje horizontalne krutosti tla na preuzimanje potiska kupole. Iako je procijenjen znatan iznos krutosti, trošnost i malo vertikalno opterećenje površinskog tla, a posebno mogući radovi u blizini (primjerice iskopi za potrebe temeljenja ili provođenja infrastrukture novog objekta) mogu smanjiti predložene vrijednosti. Time bi nosivost prstena, pa i čitave konstrukcije, bila ugrožena jer je poznata osjetljivost kupole na horizontalne pomake temelja. Zbog toga smo smatrali rizičnim rabiti horizontalnu krutost tla kao važnu sastavnicu statičkog sustava kupole.

##### 4.2.2 Proračun armiranobetonskog dijela kupole

Neprekinutost i uzajamno podupiranje prstenastih i lučnih trajektorija jamče veliku nosivost kupole. U našem slučaju, na žalost, veliki otvori prekidaju prirodan tok, ponajprije prstenastih sila, čime je narušen ovaj, temeljni, princip nosivosti. Dolazeći iz punostjenog dijela, prstenaste trajektorije moraju zaobići područje s otvorima pa su prisiljene naglo se razdvojiti i skrenuti u prečku i te-

meljni prsten (slika 11.a). Prirodan, usporedni tok trajektorija do ruba punostjenog dijela nije moguć jer uvjet ravnoteže okomito na neopterećeni rub zahtijeva iščežavanje prstenastih sila, odnosno vrijedi  $N_p = 0$  (slika 11.b). Važno je zamijetiti da skretanjem dijela trajektorija u temelj i prečku nastaje lom prstenastih sila čija rezultanta, zapravo skretna sila  $N_s$ , daje znatna vlačna naprezanja u rubnoj gredi. Zbog toga je greda armirana prilično velikom simetričnom armaturom ( $78,5 \text{ cm}^2$ ,  $\mu = 2,24\%$ ). Pojavu je lako objasniti poligonom membranskih sila i položajem rezultante na krajevima grede (slika 11.b).



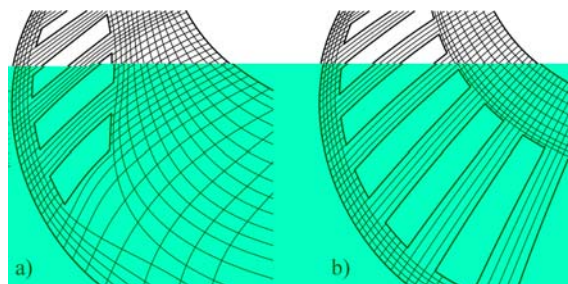
Slika 11. Skica trajektorija membranskih sila: a) globalni tijek, b) detalj skretanja oko otvora

Promatanjem trajektorija možemo uočiti još nekoliko zanimljivosti. Najprije, izravno djelovanje prstenastih sila na rubnu gredu spriječeno je rasteretnim učincima: skretanjem trajektorija i lučnim djelovanjem. Nadalje, blisko položene prstenaste trajektorije pri uglovima prvog otvora dokaz su velikoga lokalnoga tlačnog naprezanja (potvrđenog mjerenjem). Konačno, gusta se raspodjela trajektorija pruža i dalje, u temeljni prsten i prečku. Koncentraciju je lako objasniti zapažanjem da rezultanta prstenastih sila istog iznosa prolazi odabranim presjecima A i B, ali je ploština poprečnog presjeka na mjestu B puno manja (slika 11.a). Gušće trajektorije znače i veće uzdužne sile: vlačne u temelju, poništene prednapinjanjem, i tlačne u prečki koju je trebalo ojačati protiv izvijanja. Zamjećujemo da podalje od poremećaja krajnjim otvorima (u presjeku A) prevladava klasična razdioba prstenastih i lučnih trajektorija, svojstvena punostjenoj kupoli.

Veliki otvori čine i izvedbu kupole složenijom jer nije moguće zatvoriti prstenaste trajektorije do samoga kraja izvedbe. Tek izvedbom prečke i završnog prstena postizemo kontinuitet prstenastih sila i u tom smislu činimo kupolu zatvorenom. Stalna „otvorenost“ kupole tijekom izvedbe i mjestimično velika iskorištenost skele prevagnula je (nakon provjere nekoliko inačica) u korist podupiranja čitave kupole. Zbog toga je utrošena velika količina oplata i skele.

Osjetljivost kupole prema imperfekciji zahtijeva preciznu izvedbu i vrlo krutu skelu koja ne dopušta pretjerane progibe pod teretom svježeg betona. To se najbolje postiže niskom razinom naprezanja, odnosno predimenzioniranjem elemenata podupiranja koju, na žalost, nismo mogli u potpunosti ostvariti.

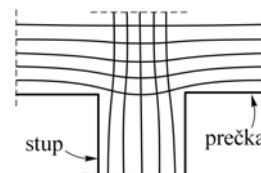
Problem grubog prekida prstenastih sila mogao se riješiti preoblikovanjem kupole na dva načina: postupnim smanjivanjem visine otvora prema punostjenom dijelu (slika 12.a) ili potpunim otvaranjem kupole nizom jednakih otvora (slika 12.b). U prvome bismo slučaju postigli puno blaže skretanje trajektorija u prečku i manje skretne sile. U drugome bi slučaju skretanje trajektorija i svi popratni učinci u potpunosti iščežnuli.



Slika 12. Preoblikovanje ab dijela: a) postupno smanjenje visine otvora, b) potpuno otvaranje ab dijela

Jasno je da otvori prekidaju i lučne trajektorije koje, prema tome, moraju skrenuti u stupove okvira. Zbog toga raste koncentracija trajektorija i tlačne sile u stupovima, što je zahtijevalo provjeru protiv izvijanja. Ipak nije teško zamijetiti da veće teškoće nastaju zbog prekida prstenastih nego lučnih trajektorija.

Skicama trajektorija smo pokušali, pomalo zaboravljениm pristupom, objasniti temeljne principe nosivosti i probleme prouzročene oblikovanjem kupole. Sekundarne učinke, poput blagog krivljenja trajektorija na spojevima stupova s temeljnim prstenom i prečkom (slika 13.) nismo crtali jer nemaju utjecaja na globalni tok membranskih sila, nego unose samo slab, lokalni poremećaj.



Slika 13. Lokalno krivljenje trajektorija

Dodavanjem rešetkaste kupole raspodjela membranskih sila na ab dijelu kupole ostaje praktički nepromijenjena. Razlog je jednostavan: težina čeličnog dijela iznosi manje od 5% težine ab dijela. Ipak, potisak rešetkaste kupole utječe na stabilnosti ab dijela.

#### 4.3 Proračun stabilnosti

Za takav složeni statički sustav nema teorijskog rješenja, propisanog postupka ili preporuke za procjenu nosivosti. Kupoli, doduše, pripada linearna prijekritična (primarna) grana funkcije ravnoteže, pa možemo primijeniti rješenje problema vlastitih vrijednosti. Prema tome, moguće je odrediti kritično opterećenje (vlastitu vrijednost) i pripadni oblik izbočenja (vlastiti vektor). Na žalost, dobiveni je iznos opterećenja redovito veći od realnog (eksperimentalno određenog), ponajprije zbog osjetljivosti ku-

pole prema imperfekcijama. Razlozi osjetljivosti leže u prisutnosti kubnog člana u izrazu za energiju koji uzrokuje pad poslijekritične (sekundarne) grane funkcije ravnoteže i u pojavi višestrukih ili bliskih vlastitih vrijednosti (grozda) koje taj pad ponekad čine vrlo strmim. Smanjenju kritične sile pridonosi i plastično popuštanje, ali je često od sekundarnog značenja, jer velike vitkosti kupola i mali iznosi propisanih imperfekcija često odgađaju plastično popuštanje na poslijekritičnu granu, nakon gubitka stabilnosti.

Nije lako odrediti koeficijent smanjenja kritičnog opterećenja (engl. *knockdown factor*), odnosno koeficijent sigurnosti zbog ovih učinaka [10]. Naslućujemo da rješenje leži u velikom broju raznovrsnih pokusa do sloma, poput onih koji se provode na štapnim uzorcima i koji su temelj većine propisa. Na žalost, cjeloviti su objekti najčešće unikati pa se takvi pokusi ne provode, osim iznimno na umanjenim modelima i malom broju uzoraka.

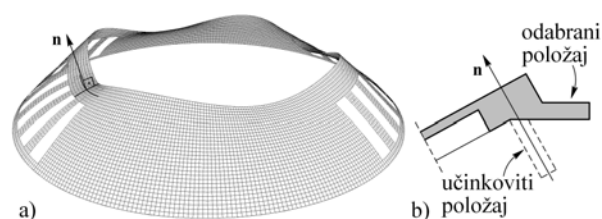
U slučaju velikog iznosa kritičnog opterećenja (10 i više puta većeg od zadanog), konstrukciju smatramo sigurnom pa detaljna provjera stabilnosti nije potrebna. Ovako visoki iznos sigurne razine opterećenja ne znači da kupola mora preuzeti deset puta veće opterećenje nego da, osim nepouzdanosti opterećenja i materijala, utjecaji imperfekcija znatno ugrožavaju njezinu nosivost. Vrijednost je, doduše, određena ispitivanjem punostjenih, vrlo vitkih, uzdužno opterećenih cilindara i radialno pritisnutih sfera kao poznatih primjera izrazite osjetljivosti prema imperfekciji. Rešetkaste kupole dvorana su manjih vitkosti, pa je ovako visoka razina sigurnosti često pretjerana. Ipak, manji koeficijent sigurnosti ne jamči stabilnu konstrukciju. Treba provesti strože dokaze.

U nedostatku pokusa preostaje numerički procijeniti nosivost kupole na temelju funkcija ravnoteže određenih primjenom geometrijski i materijalno nelinearnog proračuna. Pri tome nije teško zadati iznos maksimalne imperfekcije koju bismo trebali poštovati prilikom izvedbe, ali mjerodavni oblik (moguća prostorna razdoba) koji daje najmanju nosivost ostaje nepoznat. Nadalje, u uvjetima izrazite nelinearnosti rješenje nije jedinstveno (postoji više mogućnosti), pa iteracijski postupci u kojima treba istodobno zadovoljiti geometrijske i materijalne kriterije konvergencije mogu odvesti prema pogrešnom rješenju.

I pri proračunu stabilnosti treba voditi računa o diskretizaciji modela i opterećenja. Progušćenje mreže konačnih elemenata pridonosi boljoj aproksimaciji oblika izbočenja (valova u prstenastom i lučnom smjeru), a podjela štapnih elemenata aproksimaciji lokalnog izvicanja među čvorovima rešetkaste kupole. Prirasti opterećenja u području višestrukih ili bliskih vlastitih vrijednosti moraju biti dovoljno mali, a pokazatelji koji potvrđuju prekoračenje tih vrijednosti vrlo pouzdani, jer algoritam proračuna može „preskočiti“ neku (najopasnije je prvu) vlastitu vrijednost i nastaviti nekontrolirani proračun po labilnoj grani. Pojava je posebno opasna u uvjetima potpune simetrije [11].

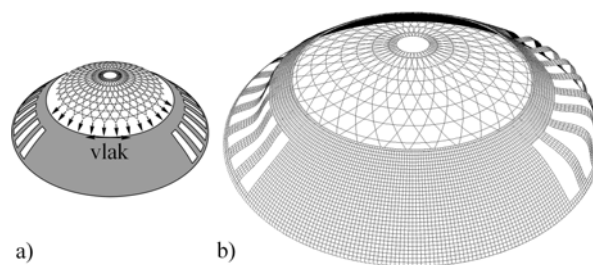
#### 4.3.1 Problem stabilnosti ab dijela kupole

U vertikalno opterećenom ab dijelu kupole, oslonjenom na prednapeti temeljni prsten, djeluju samo tlačne sile. Na mjestima prekida trajektorija jednog smjera učinak međusobnog podupiranja slabi. Prekid lučnih sila ističe problem izbočenja gornjeg ruba ljuske, a prekid prstenastih sila izvicanje stupova. Izbočenje gornjeg ruba (zapravo završnog prstena i prečke) nastaje u smjeru normale na kupolu (slika 14.a), pa je prirodna zamisao izvesti ukrutu koja izravno povećava moment tromosti oko slabije osi presjeka, odnosno u smjeru normale (isprekidano na slici 14.b).



Slika 14. Stabilnost gornjeg ruba ab dijela kupole: a) oblik izbočenja, b) položaj ukrute

Međutim, zbog nespretnog položaja (zadiranja u prostor najgornjih sjedišta) ojačanje je postavljeno horizontalno, čime je izgubilo na učinkovitosti, ali je ipak osiguralo dovoljno povećanje krutosti u smjeru normale. Zamjećujemo da potisak rešetkaste kupole smanjuje tlačnu silu u završnom prstenu (slika 15.a), čime pridonosi njegovoj stabilizaciji. Prema tome, problem izbočenja gornjeg ruba izražen je nakon otpuštanja oplata ab dijela, prije montaže rešetkaste kupole. Nasuprot tome, potisak uzrokuje porast uzdužnih sila u stupovima, pa izvicanje treba provjeriti za konačno stanje (slika 15.b).



Slika 15. Potisak rešetkaste kupole [pod a)], oblik izbočenja s dominantnim izvicanjem stupova [pod b)]

Ukrute 30/70 cm pridonose dovoljnom povećanju momenta tromosti stupova, što rješava problem njihova izvicanja.

Ovim su ukrućenjima postignuti veliki iznosi kritičnog opterećenja ab dijela (9 i više) pa nije trebalo provesti detaljan proračun stabilnosti. Na žalost, pri proračunu rešetkaste kupole našli smo se u puno složenijoj situaciji.

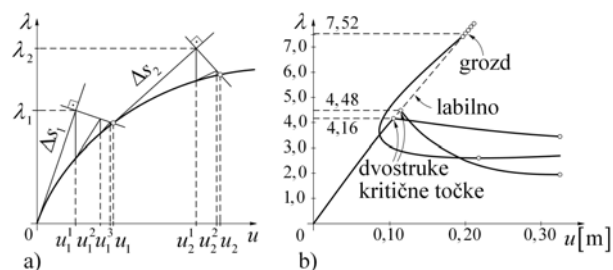


## 4.3.2 Problem stabilnosti rešetkaste kupole

Pri djelovanju vertikalnog opterećenja, svi su štapovi plitke rešetkaste kupole tlačni. Nedostatak vlačnih prstenastih sila koje stabiliziraju lučni smjer čini problem stabilnosti vrlo izraženim. Štoviše, rješenjem problema vlastitih vrijednosti dobiven je mali iznos prve vlastite vrijednosti (samo 4,16) koji, bez strogog dokaza stabilnosti, ne jamči nosivost konstrukcije.

Složena se provjera može dijelom pojednostavniti (i ubrzati) uporabom spomenutoga hijerarhijskog pristupa koji omogućuje zasebnu analizu rešetkaste kupole (ili ab dijela). Treba samo zamijetiti veliku krutost (nepopustljivost) ab prema čeličnome dijelu. Prema tome, prilikom analize ab (ili čeličnog) dijela možemo odbaciti čelični (ili ab) dio i na mjestima međusobnih spojeva zamijeniti ga opterećenjem (ili nepomičnim ležajima). U nastavku ćemo razjasniti glavne sastavnice algoritma odabranog za proračun stabilnosti čeličnog dijela na nepomičnim (preciznije zglobnim) osloncima. Nešto detaljniji opis postupka može se pronaći u [12].

*Pristup proračunu.* Algoritam proračuna temelji se na inkrementalno–iteracijskom pristupu rezidualnoj jednadžbi  $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \lambda \mathbf{f} - \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Radi se zapravo o metodi prediktor–korektor, jer inkrement (prirast) možemo smatrati prediktorom, a iteracije tumačiti korektorom inkrementalnog pokušaja [13]. Jednadžbi  $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{0}$  pripada nelinearni sustav  $\mathbf{K}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{f}$ , gdje je  $\mathbf{K}$  matrica krutosti,  $\mathbf{u}$  vektor pomaka, a  $\mathbf{f}$  i  $\lambda$  vektor i razina opterećenja. Kod problema stabilnosti, sustav redovito nema jedinstveno rješenje za svaki  $\lambda$ . Zbog toga je rezidualna jednadžba riješena inačicom (preciznije ograničenjem) potpune metode Newton–Raphson, poznatom kao linearizirana metoda duljine luka (engl. *linearised arc-length method*). Odabrano je ograničenje oblika hiperravnine, okomite na tangentu funkcije ravnoteže [14, 15]. Primjena metode za jedan stupanj slobode prikazana je na slici 16.a).



Slika 16. Proračun stabilnosti: a) linearizirana metoda duljine luka, b) analizirane funkcije ravnoteže

Ograničenjem dobivamo dodatnu jednadžbu potrebnu za određivanje parametra  $\lambda$ . Ne radi se, dakle, o unaprijed određenom iznosu, svojstvenom metodi Newton–Raphson s fiksnim prirastom sile, nego o dodatnoj nepoznanici koju treba odrediti primjenom odabranog ograničenja. Matematički gledano, matricu sustava koji

treba riješiti tvori matrica krutosti proširena izborom ograničenja. Postupak rješavanja temelji se na partijskom pristupu matrici sustava (eliminaciji po blokovima) jer time se koristimo simetrijom matrice krutosti. U svakoj je iteraciji (linearni) sustav jednadžbi riješen inačicom rastava matrice krutosti prema Choleskome  $\mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}$ , gdje je  $\mathbf{L}$  donja trokutna, a  $\mathbf{D}$  dijagonalna matrica rastava. Na taj je način moguće riješiti sustave s indefinitnom matricom krutosti, odnosno s negativnim pivota (članovima matrice  $\mathbf{D}$ ) nastalim nakon gubitka stabilnosti. Tako je moguće pratiti labilne grane funkcije ravnoteže.

Tijekom proračuna primijenjeno je jednostavno heurističko pravilo [16] promjene prirasta (duljine tangente)  $\Delta s$ . Pravilo se temelji na broju neuspjelih (uspjelih) koraka iteracije unutar inkrementa. Na taj su način glatka područja funkcije ravnoteže (primjerice blizu ishodišta) određena primjenom velikih, a područja naglih skretanja ili lomova (u okolišu kritičnih točaka) primjenom vrlo malih prirasta.

*Određivanje kritičnih točaka.* Matrica proširenog sustava je singularna u kritičnoj točki. U slučaju točke razgranjenja (engl. *bifurcation point*) singularitet je bezuvjetan, a u graničnoj je točki (engl. *limit point*) posljedica rastava matrice. Srećom, postupak proračuna rijetko konvergira točno u kritičnu točku. Ako se to slučajno i dogodi dovoljno je vratiti se korak unatrag i ponovno krenuti naprijed s malo izmijenjenim iznosom prirasta. Zahvat je poznat kao „čovjek u petlji“ (engl. *man in the loop*) i uz mogućnost kontroliranog prekida i pokretanja proračuna (engl. *save and restart*) dio je svakog suvremenog algoritma za proračun stabilnosti. Kako bismo, u trenutku pristupa kritičnoj točki, izbjegli nekontrolirani prekid postupka proračuna, algoritam mora (tijekom dekompozicije) ustanoviti smanjenje ranga matrice krutosti. ( $\mathbf{K}$  prelazi iz pozitivno definitne u pozitivno semidefinitnu matricu.) Ukratko, čim je jedan ili više pivota jednak (ili blizak) nuli, moguće su učinkovite izmjene redaka matrice koje jamče kontrolirani prekid (ili stabilan tijek) postupka eliminacije odozgo [17]. Istovremena izmjena stupaca (koja nije uvijek moguća) čuva simetriju matrice krutosti što pridonosi učinkovitom rješavanju sustava.

Opisanim postupkom možemo sigurno prekoračiti, ali ne i preciznije odrediti kritičnu točku (osim pukim slučajem). Jedna od metoda kojom je to ipak moguće učiniti jest bisekcija, temeljena na praćenju promjene predznaka pivota pri premašivanju kritične točke.

Bisekcija je sporija, ali često stabilnija od drugih pristupa, jer ne ovisi o derivaciji funkcije. To može biti presudno za uklještenje kritične točke (engl. *bracketing*) jer je glatkost funkcije ravnoteže tada često narušena.

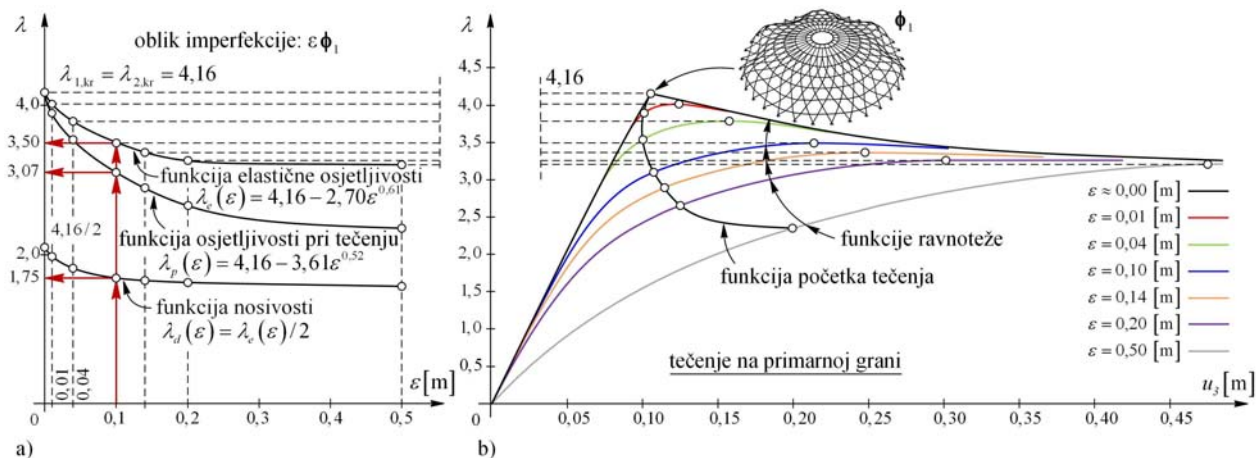
Nakon premašanja kritične točke algoritam mijenja smjer opterećenja i vraća se natrag za pola koraka. Jednoznačnu

promjenu smjera, bez obzira na tip kritične točke, jamči Berganov trenutni parametar krutosti  $\kappa = k/k_0$ , gdje je  $k = \Delta\lambda \mathbf{f}^T \Delta \mathbf{u} / (\Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u})$ ,  $k_0$  ishodišna vrijednost od  $k$ , a  $\Delta\lambda$  i  $\Delta \mathbf{u}$  su prirasti opterećenja i pomaka. Pronalaskom rješenja  $(\mathbf{u}, \lambda)$  provjerimo iznos vlastite vrijednosti  $\omega$  i nastavljamo postupak raspolavljanja dok ne postane bliska nuli (do zadovoljenja kriterija). Blizu kritične točke sustav jednadžbi je izrazito loše uvjetovan ( $\det \mathbf{K} \rightarrow 0$ ,  $\text{cond} \mathbf{K} \rightarrow \infty$ ), pa proračun vlastitih vrijednosti možemo stabilizirati malim pomakom  $\mu$  (engl. *shift*), odnosno treba riješiti sustav  $(\mathbf{K} - \mu \mathbf{I})\phi = \omega_\mu \mathbf{I}\phi$ , gdje je  $\mathbf{I}$  jedinična matrica,  $\phi$  vlastiti vektor, a  $\omega_\mu$  translirana vlastita vrijednost ( $\omega = \omega_\mu + \mu$ ). Ovaj je dio proračuna temeljen na iteraciji po potprostoru, dimenzije jednake broju vlastitih vektora uvećanom za dva, ali najviše osam, što se pokazalo dobrim izborom. Rezultat uklještenja je kritična točka  $(\mathbf{u}_{kr}, \lambda_{kr})$  s jednim ili više vlastitih vektora  $\phi_i$ . (Naravno, pripadni je  $\omega \approx 0$ .) Ako joj pripada jedan vlastiti vektor ( $i = 1$ ) zovemo je izoliranom, a u slučaju većeg broja vektora ( $i = 1, \dots, n$ ) višestrukom kritičnom točkom. Konačno, provjerom skalarnog produkta  $\phi^T \mathbf{f}$  treba odrediti tip kritične točke. Ako je jednak nuli radi se o točki razgranjenja ( $\Delta\lambda$  iščezava), a ako je različit od nule o graničnoj točki ( $\Delta\lambda$  proizvoljan).

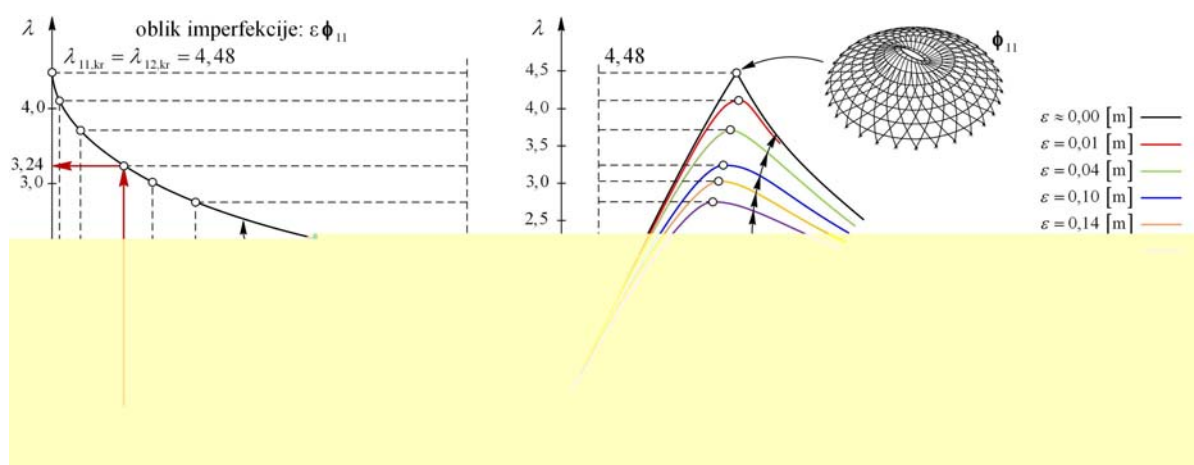
Ovim je pristupom, osim prve (dvostruke) kritične točke ( $\lambda_{1,kr} = \lambda_{2,kr} = 4,16$ ), izolirana još jedna bliska (također dvostruka) kritična točka ( $\lambda_{11,kr} = \lambda_{12,kr} = 4,48$ ), a potom i nešto udaljeniji grozd s pet vrlo bliskih oblika izbočenja ( $\lambda_{20,kr} = 7,52$  do  $\lambda_{24,kr} = 7,53$ ). Ove točke, ustanovljene kao točke razgranjenja (slika 16.b) treba ispitati jer grupiranje vlastitih vektora uzrokuje veću osjetljivost prema imperfekciji. Među njima leži još (izoliranih!) kritičnih točaka, ali ih mala osjetljivost ne čini mjerodavnima. Postoje i više kritične točke koje su zbog češćeg grupiranja osjetljivije. Međutim, radi velikog pripadnog opterećenja nisu zanimljive. Treba istaknuti do-

bro podudaranje  $\lambda_{kr}$  i  $\phi_i$  s rezultatima klasičnog problema vlastitih vrijednosti  $(\mathbf{K}_0 - \lambda \mathbf{I})\phi = \mathbf{0}$ , gdje je  $\mathbf{K}_0$  ishodišna matrica krutosti jer je prijekritična grana kupole gotovo linearna. (Razlika među rezultatima iznosi oko 8%.) Prekoračenje nižih vlastitih vrijednosti i praćenje labilne grane ostvareno je kinematičkim ograničenjem u obliku linearne kombinacije vlastitih vektora (bez potrebe za vodećim čvorom). Temeljna je zamisao vektor pomaka učiniti ortogonalnim na postojeće vlastite vektore, a time i na bilo koju linearnu kombinaciju tih vektora. Matricu ograničenja stalno proširujemo umetanjem novih vlastitih vektora (stupaca) čime sužavamo potprostor mogućih rješenja jer su pomaci spriječeni u smjeru sve većeg broja vektora. Na taj način „pridržavamo“ model po labilnoj grani. Bit je postupka, dakle, matricu krutosti (već proširenu ograničenjem oblika hiperravnine) dodatno proširiti kinematičkim ograničenjem. Algoritam i programsku realizaciju u FEAP-u trebalo bi obraditi u posebnom članku.

**Određivanje poslijekritične grane.** Nakon primarne grane i kritičnih točaka koje smo smatrali zanimljivima treba odrediti poslijekritične grane koje iz njih proizlaze. Svladavanje kritične točke i prijelaz na sekundarnu granu (engl. *branch switching*) temelji se na perturbaciji modela oblikom izbočenja (engl. *buckling mode injection*). Zamisao je poremetiti deformirani oblik modela u kritičnoj točki dodavanjem pripadnog oblika izbočenja. Takva je perturbacija logična jer vektoru pomaka (deformiranom modelu) i vlastitom vektoru (obliku izbočenja) pripada ista razina opterećenja u kritičnoj točki. Štoviše, vlastiti su vektori tangencijalni na poslijekritičnu granu u toj točki pa predstavljaju dobar izbor početnog pokušaja. U skladu s FEAP-om, takav pokušaj jest:  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{kr} + |\mathbf{u}_{kr}| / (\varepsilon |\phi_i|) \phi_i$ , gdje je  $\varepsilon = 100 \mathbf{u}_{kr} \phi_i / (|\mathbf{u}_{kr}| |\phi_i|) + 1$ , iznos predložene perturbacije, iako možemo usvojiti i puno manji iznos. Na-

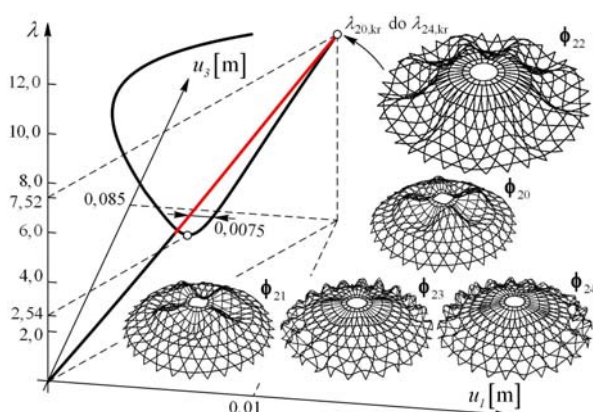


Slika 17. Analiza prve (dvostruke) točke razgranjenja: a) funkcije osjetljivosti, b) funkcije ravnoteže



Slika 18. Analiza bliske (dvostruke) točke razgranjenja: a) funkcija osjetljivosti, b) funkcije ravnoteže

ime, ako je kritična točka precizno određena, dovoljan je vrlo mali poremećaj ( $\varepsilon \approx 0$ ) koji „gurne“ model na poslijekritičnu granu. U slučaju višestruke kritične točke svi vlastiti vektori  $\phi_i$  i njihove kombinacije  $\sum \varepsilon_i \phi_i$  mogu odrediti mjerodavni početni smjer, pa ih treba pojedinačno ispitati umetanjem u izraz za  $\mathbf{u}_i$ . U dvostrukim kritičnim točkama treba ispitati tri smjera  $\varepsilon \phi_1$ ,  $\varepsilon \phi_2$  i  $\varepsilon(\phi_1 + \phi_2)$ , iako se moglo pokušati i  $\varepsilon_1 \phi_1 + \varepsilon_2 \phi_2$ . U slučaju pet bliskih oblika izbočenja treba ispitati 15 smjerova. Mjerodavan je smjer koji određuje tangentu na poslijekritičnu granu s globalnim minimumom. Za prvu i drugu kritičnu točku radi se o kombinaciji obaju vlastitih vektora, a u slučaju grozda svih pet. Pojedinačni smjerovi  $\varepsilon \phi_i$  ( $i = 1, 11$  i  $20$ ) daju malo više iznose minimuma pa su, jednostavnosti radi, zajedno s pripadnim funkcijama odabrani za daljnju analizu (slike 17.b) i 18.b) za  $\varepsilon \approx 0$  i slika 19.).



Slika 19. Oblici izbočenja i odabrana funkcija ravnoteže promatranog grozda; istaknut je oblik zaslužan za perturbaciju

Da bismo izbjegli vizualne zamke pri određivanju tipa kritične točke [18], treba provjeriti oblik funkcija ravnoteže u još nekim čvorovima i stupnjevima slobode, s

moćnim presijecanjem među poslijekritičnim granama. Statičkim je pristupom teško razlučiti višestruke i bliske vlastite vrijednosti, a posebno njihov utjecaj na poslijekritično ponašanje. Zbog toga je dobro rezultate provjeriti dinamičkim proračunom jer inercijalni učinci nakon dostizanja kritične točke „gurnu“ model u fizikalno ispravnom smjeru. Odabrana je stabilna metoda vremenske diskretizacije Hilber–Hughes–Taylor alfa (HHT $\alpha$ ), realizirana SAP–om. Zadan je blagi prirast statičkih opterećenja, kako bismo izbjegli značajnije ubrzanje na prijekritičnoj grani. Upotrijebljena je matrica koncentriranih translacijskih masa, Rayleighijevo prigušenje  $i$ , naravno, geometrijski nelinearna matrica krutosti. Najprije su primijenjeni veći vremenski koraci ( $\Delta t = 0,01$ ) i koeficijent (numeričkog prigušenja)  $\alpha = -1/3$ , a zatim su obje veličine postupno smanjene ( $\Delta t$  do  $0,001$ , a  $\alpha$  do nule), jer tada metoda daje najbolje rezultate.

Priekritične grane dobivene statičkim i dinamičkim pristupom praktički se podudaraju, a poslijekritične grane su, u slučaju statičkog proboda prema naprijed (engl. *snap-through*) horizontalne, dok su pri probodu prema natrag (engl. *snap-back*) vertikalne jer dinamičkim proračunom možemo slijediti samo stabilni dio sekundarne grane, često vrlo udaljen od primarnog dijela funkcije ravnoteže.

**Osjetljivost prema imperfekciji.** Uobičajeno je zadati imperfekciju u obliku linearne kombinacije vlastitih vektora  $\sum \varepsilon_i \phi_i$  ( $|\varepsilon_i| > 0$ ). U ovome je projektu imperfekcija proporcionalna jednom vlastitom vektoru ( $\varepsilon \phi_i$ ) jer takva perturbacija idealne geometrije daje poslijekritičnu granu blisku mjerodavnoj. Zadavanjem početne imperfekcije kritične točke postaju izolirane granične točke, a numerički problemi, ponajprije određivanje i prekoračenje tih točaka praktički iščezavaju (funkcije na slikama 17.b) i 18.b) za  $\varepsilon > 0$ ). Spajanjem kritičnih vrijednosti opterećenja i pripadnih imperfekcija dobivamo točke funkcije (elastične) osjetljivosti prema imperfekciji (engl. *im-*

*perfection sensitivity curve*) [slike 17.a) i 18.a)]. U skladu s Koiterovim zakonom imperfekcije na jednu polovinu (engl. *half-power law*), druga je kritična točka osjetljiva prema imperfekciji (dominira član  $\varepsilon^{1/2}$ ). Uočavamo strmi pad funkcije u području malih imperfekcija, naglašen vertikalnom tangentom u kritičnoj točki na osi ordinata. Što se grozda tiče, treba naglasiti da nije teorijski mjerodavan, ali ga treba razmotriti jer su popratne analize pokazale da uključanje nosača i pokrova u numerički model uzrokuje porast kritičnog opterećenja i grupiranje simetričnih oblika izbočenja, baš onakvih kakve sadrži grozd (slika 19.). Iako grozdu pripada velika kritična sila, minimum mjerodavne poslijekritične grane leži vrlo nisko, a razlog je izrazita osjetljivost prema imperfekciji. Zaista, utvrđen je ekstremni oblik proboja prema nazad (slika 19.), s malim razmakom između prijekritične i poslijekritične grane (samo 7,5 mm). Prema tome, zbog iznimno male imperfekcije model može „preskočiti“ na poslijekritičnu granu i postići stabilnu ravnotežu tek pri  $\lambda = 2,54$ . To je tri put manje od idealne vrijednosti kritične sile koju, očito, niti vrlo preciznim pokusom ne bismo dosegli. Drugim riječima, dio primarne grane iznad minimuma (istaknuto na slici) vrlo je opasan jer ga praktički nije moguće slijediti. Funkciju osjetljivost nećemo crtati, ali naslućujemo da je vrlo strma. Razlozi su takvog ponašanja dvojaki. Prvo, nastaje fenomen složenog izvijanja (engl. *compound buckling*) u kojemu istovremeno sudjeluju globalni oblici izbočenja kupole i lokalno izvijanje mnogih štapova. I drugo, funkcija ravnoteže ne vrijedi samo asimptotski za male, nego zbog geometrijski točnog pristupa i za velike poslijekritične progibe. Drugim riječima, izraz za potencijalnu energiju ili funkciju ravnoteže konačnog elementa sadrži više članove Taylorova reda.

Prema tome, nedvojbena krutost pokrova pridonosi povećanju kritične sile, ali može prouzročiti veliku osjetljivost prema imperfekciji. Intuitivno jasne statičke rezerve nosivosti koje se kriju u pokrovu treba uvijek oprezno razmotriti sa gledišta stabilnosti.

Nakon detaljnih analiza, kratko opisanih u ovome odjeljku, usvojen je maksimalni iznos imperfekcije od  $\varepsilon = \pm 10$  cm. Taj iznos uzrokuje smanjenje kritičnog opterećenja sa 4,16 na 3,5 za prvu, odnosno sa 4,48 na 3,24 za drugu kritičnu točku [označeno na slikama 17.a) i 18.a)]. Može se pokazati da i minimum koji pripada grozdu pada s 2,54 na 2.

Ove analize vrijede za sumu osnosimetričnih opterećenja koja sadrži i jednoliki zamjenski snijeg. Nesimetrična djelovanja snijega ili vjetra, koja potiču nesimetrične oblike izbočenja, nisu razmatrana. Razlozi su malo opterećenje snijegom za područje Zadra i odižuće djelovanje vjetra na vrhu kupole. Jedino značajno nesimetrično opterećenje jest potres, ali se zbog male težine čeličnog dijela nije pokazalo mjerodavnim za izbočenje.

#### 4.4 Učinak plastičnog tečenja

Do sada smo razmatrali samo utjecaj geometrijske nelinearnosti. Ipak, na slikama deformiranog modela (primjerice 17. i 19.) možemo uočiti veliku zakrivljenost štapova u ekstremnim točkama valova koje sadrže oblici izbočenja. Očito je da takve deformacije nisu moguće bez plastičnog tečenja. U ovome su projektu najprije određene razine opterećenja koje uzrokuju početak plastičnog popuštanja na primarnoj grani. Potom je, uz pripadne iznose imperfekcija, određena funkcija osjetljivosti pri tečenju (slika 17.a). Plastično popuštanje na poslijekritičnoj grani nismo razmatrali. U skladu s pristupom, utjecaj plastičnog popuštanja uzrokuje smanjenje nosivosti prve kritične točke sa 3,5 na 3,07 (označeno na slici 17.a). Slično tomu, kritično opterećenje grozda pada sa 2 na 1. Druga kritična točka nije pod utjecajem tečenja na primarnoj grani, pa razina opterećenja određena funkcijom elastične osjetljivosti ostaje mjerodavnom.

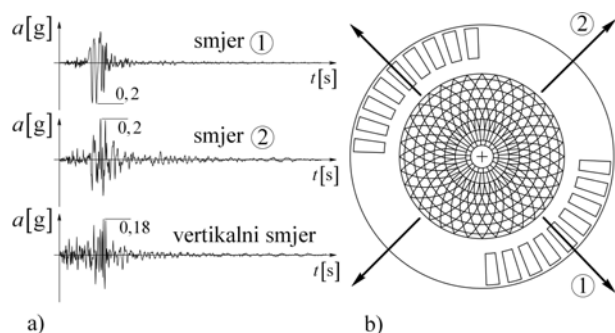
Učinak plastičnog popuštanja (koeficijent sigurnosti) može se odrediti i Gerardovom formulom  $\eta = (E_S E_T)^{1/2}$ , gdje su  $E_S$  i  $E_T$  sekantni i tangentni moduli elastičnosti [19]. U okolišu granice tečenja možemo uzeti  $E_S = 0,7E$  i  $E_T = 0,35E$ , gdje je  $E$  modul elastičnosti čelika, pa dobivamo  $\eta = 0,5$ . Konačnu funkciju nosivosti određujemo množenjem elastične funkcije osjetljivosti sa  $\eta$  (slika 17.a). Time prvo kritično opterećenje pada s 3,5 na 1,75. (Drugo ostaje na utvrđenih 3,24) I pripadni minimum grozda možemo pomnožiti sa  $\eta$  čime dobivamo  $2 \cdot 0,5 = 1$ , što potvrđuje rezultat preciznijeg pristupa tečenju. To je ujedno i najniža vrijednost nosivosti koju možemo smatrati dostatnom i mjerodavnom.

Možemo zaključiti: nosivost perturbiranog modela, modela s imperfekcijom i modela s učincima plastičnog tečenja određena je osjetljivošću poslijekritične grane grozda prema imperfekciji.

#### 5 Dinamički proračun

Dinamički je proračun proveden SAP-om, spomenutom HHT $\alpha$  metodom ( $\Delta t$  od 0,02 do 0,005), uz dodatnu provjeru (brzom) metodom modalne superpozicije ( $\Delta t = 0,02$ ), temeljenom na potprostoru Ritzovih vektora. Modalne su jednadžbe riješene egzaktno jer vrijedi poligonalna aproksimacija potresnih zapisa. Time su (uz dobru diskretizaciju pobude) uklonjeni problemi stabilnosti i numeričkog prigušenja koji često prate metode vremenske diskretizacije. Superpozicija modalnih doprinosa za jedan smjer pobude određena je prema pravilu CQC3, a za sva tri smjera pravilom SRSS, uz dodatnu provjeru poznatim pravilom 30%. Odabran je koeficijent važnosti građevine  $\gamma_I = 1,2$ . U skladu s propisima, učinci plastičnog popuštanja i raspucavanja mogu se uzeti posredno: smanjenjem fleksijske i posmične krutosti elemenata na polovinu punih vrijednosti.

Potresni su zapisi prilagođeni spektralnoj krivulji, horizontalnom vršnom ubrzanju tla ( $a_{hg} = 0,2g$ ), udaljenošću od rasjeda, geološkim uvjetima šireg područja i lokalnim uvjetima temeljenja. U nedostatku zapisa s lokacije odabrali smo nekoliko domaćih i stranih zapisa koji se približno podudaraju s ovim zahtjevima (jedan je prikazan na slici 20.a).



Slika 20. Model opterećenja potresom: a) jedan od zapisa, b) glavni smjerovi pobude

Analizom spektralnih krivulja svakog zapisa odabrano je onih sedam koji pobuđuju važne periode titranja kupole. Dimenzioniranje je provedeno na temelju srednjih vrijednosti odziva. Glavni smjer djelovanja potresa određen je položajem poprečne sile koja pripada prvom translacijskom obliku titranja. Okomito na njega postavljen je

## ZAHVALA

Autori se zahvaljuju prof. emer. dr. sc. Josipu Dvorniku na prijedlozima, savjetima i poticanju korisnih rasprava pri projektiranju građevine, a posebno na zamislima realiziranim algoritmom za proračun stabilnosti.

## LITERATURA

- [1] Hrčić, M.; Uglešić, D.; Pešušić, O.: *Višenamjenska gradska dvorana u sklopu „ŠRC Višnjik“ Zadar*, glavni projekt, izmjene i dopune, Zadar, 2004.
- [2] Hemerich, E.; Lazarević, D.; Anđelić, M.; Šošić, I.: *Welded tubular structure for the Zadar dome*, 12th International Symposium on Tubular Structures, (ISTS12), Shanghai, China, 2008.
- [3] *SAP2000 Analysis Reference Manual*, Computers and Structures, Inc., Berkeley, California, 2002.
- [4] Taylor, R. L.: *FEAP – A Finite Element Analysis Program*, Version 7.5, Programmer Manual, Berkeley, California, 2005.
- [5] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.: *The Finite Element Method*, Volume 2, Solid Mechanics, Fifth edition, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.
- [6] Taylor, R. L.: *FEAP – A Finite Element Analysis Program*, Version 7.5, Theory Manual, Berkeley, California, 2005.
- [7] Hjelmstad, K. D.: *Fundamentals of Structural Mechanics*, Second Edition, Springer Science+Business Media, Inc., 2005.
- [8] Holzapfel, G. A.: *Nonlinear Solid Mechanics, A Continuum Approach for Engineering*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2008.
- [9] Higham, N. J.: *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*, 2nd edition, Society for Industrial and Applied Mathematics, (SIAM), Philadelphia, 2002.
- [10] Galambos, T. V.: *Guide to stability design criteria for metal structures*, Fifth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [11] Bushnell, D.: *Computerized buckling analysis of shells*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1985.
- [12] Lazarević, D.; Uroš, M.; Gidak, P.: *Postbuckling Behaviour of Shallow Lattice Dome*, Spatial Structures – Permanent and Temporary, Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures, (IASS) Symposium, Shanghai, 2010.
- [13] Fellipa, C. A.: *Nonlinear Finite Element Method*, University of Colorado, Boulder, Colorado, 2001.
- [14] Riks, E.: *The application of Newton's method to the problem of elastic stability*, Journal of Applied Mechanics, **39** (1972) 4, 1060–1066.
- [15] Schweizerhof, K.; Wriggers, P.: *Consistent linearization for path following methods in nonlinear fe-analysis*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **59** (1986) 3, 261–279.
- [16] Wriggers, P.: *Nonlinear Finite Element Methods*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [17] Bathe, K. J.: *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [18] Thompson, J. M. T.; Hunt, G. W.: *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley & Sons, Ltd., London, 1973.
- [19] Allen, H. G.; Bulson, P. S.: *Background to Buckling*, McGraw-Hill, London, 1980.
- [20] Kollar, L.; Dulacska, E.: *Buckling of Shells for Engineers*, John Wiley & Sons, Chichester, 1984.

drugi smjer djelovanja (slika 20.b). Smjerovi se podudaraju s osima simetrije građevine. U obzir je uzeta i vertikalna pobuda, maksimalnog ubrzanja  $a_{vg} = 0,9a_{hg}$ .

## 6 Zaključak

Iako je većina postupaka obrađenih u ovome članku dobro utemeljena i istražena, postoje otvoreni problemi koji, ponajprije zbog nedostatka pokusa, još nisu riješeni. To se posebno odnosi na izbor mjerodavnog oblika imperfekcije, istaknutog pojavom složenog izvijanja koje može dodatno smanjiti ionako veliku osjetljivost kupole prema različitim poremećajima. Zbog toga je poželjno osim prve (i često mjerodavne) kritične točke istražiti postojanje bliskih, višestrukih kritičnih točaka i grozdova jer iz različitih razloga (nepouzdanosti ili nepotpunosti modela) poslijekritične grane i pripadne funkcije osjetljivosti tih točaka mogu postati mjerodavne.

U slučaju rešetkaste kupole s pravilnim oblikom mreže (primjerice s trokutnim ili trapeznim poljima) moguće je uspostaviti analogiju s izotropnom (ili još bolje anizotropnom) kontinuiranom kupolom i zatim primijeniti velik broj rezultata pokusa za procjenu nosivosti [20]. Međutim, za složeni oblik mreže, poput ovoga, primjena takvog postupka nije uvijek jasna, a ponekad može biti i opasna.