

# Predviđanje progiba ovješnog mosta metodom potpornih vektora

---

Čizmar, Dean; Rajčić, Vlatka; Vlašić, Anđelko

Source / Izvornik: **Građevinar, 2009, 61, 635 - 642**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:167477>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-25**

Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)



# Predviđanje progiba ovješnog mosta metodom potpornih vektora

Dean Čizmar, Vlatka Rajčić, Anđelko Vlašić

## Ključne riječi

zavješeni most,  
progib, umjetna  
inteligencija,  
metoda potpornih vektora,  
prometno opterećenje,  
neuralna mreža

## Key words

cable stay bridge,  
deflection,  
artificial intelligence,  
support vector method,  
traffic load,  
neural network

## Mots clés

pont haubané,  
déflexion,  
intelligence artificielle,  
méthode à vecteurs de  
support,  
charge de circulation,  
réseau neuronal

## Ключевые слова

подвесной мост,  
прогиб, искусственный  
интеллект,  
метод опорных  
векторов,  
транспортная нагрузка,  
нейральная сеть

## Schlüsselworte

Hängebrücke,  
Durchbiegung,  
künstliche Intelligenz,  
Stützvektormethode,  
Verkehrsbelastung,  
Neuralnetz

D. Čizmar, V. Rajčić, A. Vlašić

Prethodno priopćenje

## Predviđanje progiba ovješnog mosta metodom potpornih vektora

Prikazuje se nova metoda umjetne inteligencije: metoda potpornih vektora koja se rabi za klasifikaciju uzoraka i regresijsku analizu. Za primjer je odabran skup podataka koji definiraju parametre krutosti zavješnog mosta i pomoću kojih se primjenom ove metode može predvidjeti progib zavješnog mosta od prometnog opterećenja. Dobiveni rezultati su uspoređeni sa stvarnim progibima te progibima dobivenim neuralnom mrežom. Tvrdi se da metoda ima visoku točnost predviđanja progiba.

D. Čizmar, V. Rajčić, A. Vlašić

Preliminary note

## Estimating deflection of cable stay bridges by support vector method

Authors present a new artificial-intelligence method called the support vector method. The method is used in the classification of samples and for regression analysis. The set of data defining rigidity parameters for cable stay bridges has been selected as an example. When used in the scope of this method, the mentioned data enable estimation of cable stay bridge deflection due to traffic load. The results obtained are compared with real deflection values, and also with deflections obtained by neural network. It is claimed that the method is highly accurate for estimating deflection.

D. Čizmar, V. Rajčić, A. Vlašić

Note préliminaire

## Estimation de déflexion des ponts haubanés par méthode à vecteurs de support

Les auteurs présentent la nouvelle méthode basée sur intelligence artificielle et appelée la méthode à vecteurs de support. La méthode est utilisée dans la classification des échantillons et pour l'analyse de régression. Une série des données définissant les paramètres de rigidité pour ponts haubanés a été sélectionnée à titre d'exemple. Quand utilisées dans le cadre de cette méthode, les données susmentionnées permettent l'estimation de la déflexion des ponts haubanés causée par la charge de circulation. Les résultats obtenus sont comparés avec les valeurs de déflexion réelles, et aussi avec les déflexions obtenues par réseau neuronal. Il est indiqué que la méthode est très fiable dans l'évaluation de déflexion.

Д. Чизмар, В. Райчић, А. Влашић

Предварительное сообщение

## Предусмотрение прогиба подвесного моста методом опорных векторов

Приведен новый метод искусственного интеллекта: метод опорных векторов, используемый для классификации пробы и регрессивный анализ. В качестве примера выбрана база данных, определяющих параметры жесткости подвесного моста, с помощью которых можно, применяя указанный метод, предусмотреть прогиб подвесного моста при транспортной нагрузке. Проведено сравнение полученных результатов с фактическим прогибом и прогибами, полученными нейральной сетью. Утверждается, что метод дает высокую точность предвидения результатов.

D. Čizmar, V. Rajčić, A. Vlašić

Vorherige Mitteilung

## Vorhersehen der Durchbiegung der Hängebrücke mit der Stützvektormethode

Dargestellt ist eine neue Methode der künstlichen Intelligenz: die Stützvektormethode die für Klassifizierung von Prüfkörpern und Regressionsanalyse angewendet wird. Als Beispiel erwähnte man eine Gruppe von Angaben die die Steifigkeitsparameter der Hängebrücke definieren und mit denen man durch Anwendung dieser Methode die Durchbiegung der Hängebrücke unter Verkehrsbelastung vorhersehen kann. Die erhaltenen Ergebnisse verglich man mit wirklichen Durchbiegungen und Durchbiegungen erhalten mit dem Neuralnetz. Man behauptet dass die Methode eine hohe Genauigkeit des Vorhersehens der Durchbiegung besitzt.

Autori: **Dean Čizmar**, dipl. ing. građ., asistent; prof. dr. sc. **Vlatka Rajčić**, dipl. ing. građ.; **Anđelko Vlašić**, dipl. ing. građ., znanstveni novak, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, Zagreb, Kačićeva 26

### 1 Uvod

U posljednjih nekoliko desetljeća razvijene su mnoge metode umjetne inteligencije. Njihova je upotreba u građevinarstvu vrlo važna jer se pojedini problemi mogu jednostavnije ali i efikasnije riješiti. Vrijednost metoda umjetne inteligencije očituje se u brzom rješavanju problema koji imaju veliki broj varijabli te su numerički vrlo zahtjevni. Metoda potpornih vektora (*support vector machine*) ili kraće MPV je tehnika za razredbu i regresijsku [1] analizu zasnovana na ideji vektorskih prostora. Prvi put je predložena 1995. godine [4]. MPV pripada u grupu jezgrenih metoda razredbe [3] i temelji se na principu minimalizacije pogreške na skupu za učenje. Osnovna ideja je naći razdvajajuću hiperravninu tako da su svi podaci iz određenog razreda s iste strane ravnine. Ovo obično nije moguće u ulaznom prostoru (*input space*) nego se skup uzoraka (podataka) preslikava u  $n$ -dimenzijski prostor poznatiji pod nazivom prostor značajki [3] (*feature space*) u kojem će se provesti razdvajanje uzoraka [5], [6]. Unatoč tome što se radi o novoj metodi vrlo je brzo prihvaćena u raznim znanstvenim područjima. Upotrebljava se u računarstvu (za raspoznavanje uzoraka), genetici (za simulaciju ponašanje novih generacija gena), ekonomiji (za predviđanje ponašanja tržišta). U građevinarstvu se ova metoda dosada uspješno upotrijebila u radovima [9] i [12] gdje su istraživači istraživali stabilnost kosina odnosno određivali slijeganje temelja. U ovom će se radu MPV prikazati za binarnu razredbu (linearna i nelinearna), a prikazat će se metode rješavanje višerazrednih problema.

### 2 Matematička formulacija

Razmatramo prostor  $D$ . Neka je svaki podatak predstavljen vektorom  $X$  s pridruženim razredom  $Y_i \in \{1, -1\}$  (binarni problem) kao u jednadžbi (1).

$$D = \left\{ (X_i, Y_i) \mid X_i \in R^p, Y_i \in \{-1, 1\} \right\}_{i=1}^n \quad (1)$$

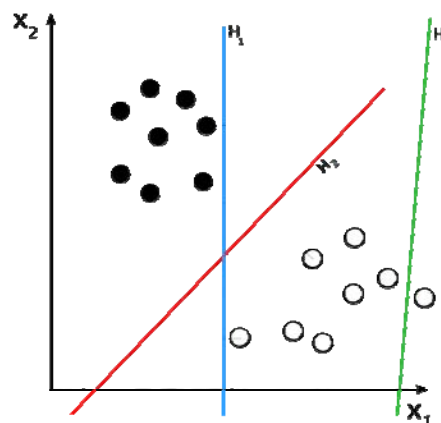
Svaki  $X_i$  je  $n$ -dimenzijski realni vektor. Bilo koja hiperravnina koja dijeli ova dva skupa podataka  $(-1, 1)$  jest rješenje problema, no ako želimo naći ravninu koja ih dijeli, uz zahtjev da je udaljenost od skupova maksimalna, rješenje je problema jedinstveno. Ovdje treba napomenuti da je pojam ravnina generaliziran, odnosno ako se radi o ravninskom odnosno prostornom problemu govorimo o pravcu odnosno ravnini. Za probleme s više dimenzija primjenjuje se izraz hiperravnina (*hyperplane*). Na slici 1. prikazana su tri pravca, od kojih dva ( $H_1$  i  $H_2$ ) razdvajaju podatke.

Bilo koja hiperravnina može se zapisati kao u jednadžbi (2). U jednadžbi (2) vektor  $w$  je vektor normale ravnine.

$$w^T \cdot X - b = 0 \quad (2)$$

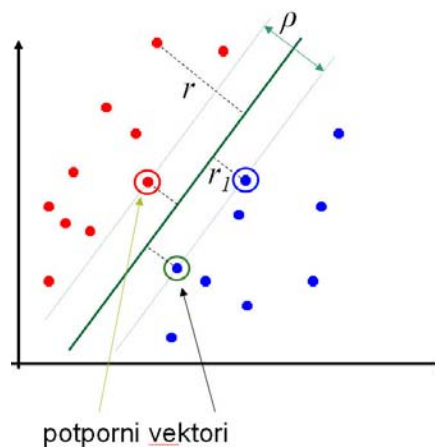
Udaljenost hiperravnine ( $r$ ) od podataka jest:

$$r = \frac{w^T \cdot X + b}{\|w\|} \quad (3)$$



Slika 1. Primjeri razdvajajućih pravaca

Zadatak je proračunati  $w$  i  $b$  tako da je udaljenost paralelnih hiperravnina koje odvajaju podatke maksimalna. Ako proračunamo  $w$  i  $b$  uz uvjet da je udaljenost najbližih točaka (potpornih vektora) jedinična, tada se paralelne ravnine koje razdvajaju podatke mogu zapisati jednadžbama (4) i (5). Ova pretpostavka vrijedi ako i samo ako su podaci linearno razdvajivi. Kasnije će se prikazati generalizacija za opći slučaj. Grafički to je prikazano na slici 2.



Slika 2. Grafički prikaz paralelnih hiperravnina

$$w^T \cdot X - b = 1 \quad (4)$$

$$w^T \cdot X - b = -1 \quad (5)$$

Kako bi se spriječilo da podaci „upadnu“ u granicu, postavljamo sljedeće uvjete (za svaki par podataka  $(X_i, Y_i)$ ):

$$w^T \cdot X_i - b \geq 1 \quad \forall Y_i = 1 \quad (6)$$

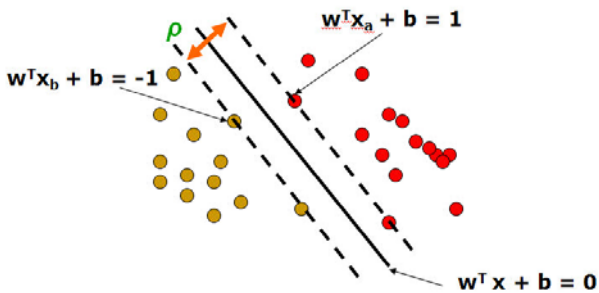
$$w^T \cdot X_i - b \leq -1 \quad \forall Y_i = -1 \quad (7)$$

Udaljenost potpornog vektora od rezultirajuće hiperravnine  $d$  (slika 3.) jest:

$$r = \frac{1}{\|w\|} \tag{8}$$

Iz slike se također vidi da vrijedi:

$$\rho = 2 \cdot r \tag{9}$$



Slika 3. Udaljenost potpornog vektora od hiperravnine

Matematičko rješenje problema se, dakle, svodi na pronalaženje maksimalne udaljenosti iz jednadžbe 8, što implicira da (10) mora biti minimalan uz uvjet iz (11):

$$\Phi(w) = \frac{1}{2} \cdot w^T \cdot w \tag{10}$$

$$Y_i \cdot (w^T \cdot X_i + b) \geq 1 \tag{11}$$

Problem u kojem tražimo da određena funkcija ima minimum (10) uz uvjete (11) naziva se problemom vezanog ekstrema. Postoji više metoda rješavanja, a jedno se od mogućih rješenja može dobiti s pomoću Lagrangeovih koeficijenata. Neka je funkcija  $f(x,y)$  funkcija čije je ekstreme potrebno naći, a neka je  $g(x,y)=c$  uvjet. Ovaj problem rješavamo uvođenjem Lagrangeove funkcije:

$$L(x, y, \alpha) = f(x, y) - \alpha \cdot [g(x, y) + c] \tag{12}$$

Točke ekstrema dobivamo s pomoću:

$$\nabla L(x, y, \alpha) = 0 \tag{13}$$

U slučaju  $n$  ekstrema imamo izraz:

$$L(x, y, \alpha) = f(x, y) - \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot [g(x, y) + c] \tag{14}$$

Uvrštavanjem izraza (10) i (11) dobivamo tzv. dualnu formu:

$$L(w, b, a) = \frac{1}{2} \cdot w^T \cdot w - \sum_{i=1}^n a_i \cdot [Y_i \cdot (w^T \cdot X_i + b) - 1] \tag{15}$$

Parcijalne derivacije funkcije  $L$  po osnovnim varijablama moraju zadovoljiti uvjete:

$$\frac{\partial L(w, b, a)}{\partial w} = w - \sum_{i=1}^n a_i \cdot Y_i \cdot X_i = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial L(w, b, a)}{\partial b} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot Y_i = 0 \tag{17}$$

Oдавde dobivamo:

$$w = \sum_{i=1}^n a_i \cdot Y_i \cdot X_i \tag{18}$$

gdje su  $(X_i, Y_i)$  podaci za treniranje.

Uvrštenjem u Lagrangeovu funkciju dobivamo jednadžbu (19). Problem se sada svodi na nalaženje koeficijenata  $a_1, a_2, \dots, a_n$  za koje funkcija  $L$  poprima maksimum i vrijedi:

$$L(a) = \sum_{i=1}^n a_i - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n a_i \cdot Y_i \cdot \sum_{j=1}^n a_j \cdot Y_j \cdot X_i^T \cdot X_j \tag{19}$$

uz uvjete:

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot Y_i = 0, \quad a_i \geq 0 \forall a_i \tag{20}$$

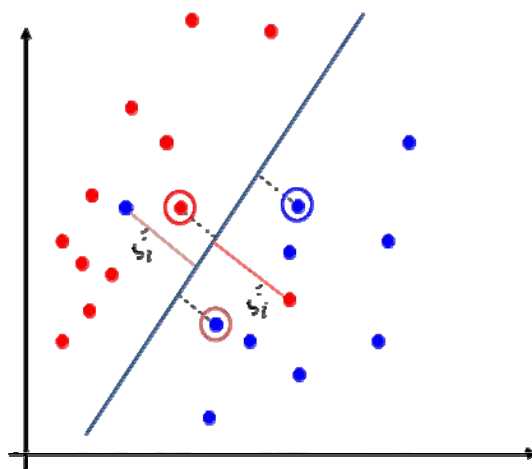
Rješenje je dano u izrazima 21 i 22. Potporni vektori su oni za koje je  $\alpha_k \neq 0$ .

$$w = \sum_{i=1}^n a_i \cdot Y_i \cdot X_i \tag{21}$$

$$b = Y_k - w^T \cdot X_k \tag{22}$$

### 2.1 Razredba s mekom granicom

Razredba s mekom granicom rabi se ako skup za treniranje nije linearno razdvojiv. Osnovna je ideja ove metode uvesti koeficijente  $\zeta_i$  i  $C$  koji će tolerirati male greške pri učenju. Na slici 4. prikazana je shema razredbe s mekom granicom.



Slika 4. MPV s mekom granicom

Formulacija problema

Problem je proračunati takve  $w$  i  $b$  da se maksimizira jednadžba 23 uz uvjet iz izraza 24.

$$\Phi(w) = \frac{1}{2} \cdot w^T \cdot w + C \cdot \sum_{i=1}^n \zeta_i \quad (23)$$

$$Y_i \cdot (w^T \cdot X_i + b) \geq 1 - \zeta_i, \zeta_i \geq 0 \quad (24)$$

Uzimajući u obzir prijašnje izraze, problem se svodi na proračun koeficijenata  $a_1, a_2, \dots, a_n$  za koje funkcija  $Q$  postiže maksimum i vrijedi:

$$Q(\alpha) = \sum_{i=1}^n a_i - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n a_i \cdot Y_i \cdot \sum_{j=1}^n a_j \cdot Y_j \cdot X_i^T \cdot X_j \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot Y_i = 0, C \geq a_i \geq 0 \forall a_i \quad (26)$$

Rješenje je oblika:

$$w = \sum_{i=1}^n a_i \cdot Y_i \cdot X_i \quad (27)$$

$$b = Y_k \cdot (1 - \zeta_k) - w^T \cdot X_k \quad (28)$$

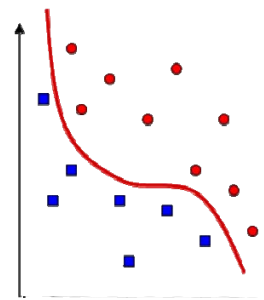
2.2 Nelinearna metoda potpornih vektora

Promotrimo slučaj dan na slici 5. U ovom slučaju potpuno je razvidno da podaci nisu linearno razdvojivi. Ako je ova nelinearnost vrlo izražena (kao na slici 5.) niti MPV s mekom granicom neće dati odgovarajuće rezultate jer je razdvajajuća hiperravnina uvijek linearna. Osnovna je ideja, primjenom određene funkcije ( $\Phi$ ), osnovni ili ulazni vektorski prostor (*vector space*) preslikati u prostor veće dimenzije u kojem su podaci linearno razdvojivi (slika 6.). Ako svaku točku iz osnovnog prostora preslikavamo rabeći transformaciju (29), tada skalarni umnožak postaje (30). Funkcija  $\Phi$  naziva se jezgrenom [3] (*kernel*) funkcijom. Iz gornjih je jednadžbi važno primijetiti da je za metodu potpornih vektora potreban samo skalarni produkt (da bismo trenirali i primijenili model). Dakle ne moramo znati novi prostor eksplicitno, ali znamo kako se računa njegov skalarni produkt. Mercerov teorem [8] definira uvjete koje dana funkcija treba zadovoljiti da bi predstavljala skalarni produkt u nekom vektorskom prostoru. Teorem opsegom nadilazi veličinu i potrebe ovog članka. Redovito se rabe postojeće jezgrene funkcije ili njihova linearna kombinacija. U jednadžbama (31) do (33) prikazane su tipične jezgrene funkcije: polinomska (31), RBF (32) i sigmoidalna funkcija (33). Kada se nalazimo u prostoru više dimenzije, sve jednadžbe za linearno odvojive probleme definirane ranije, vrijede.

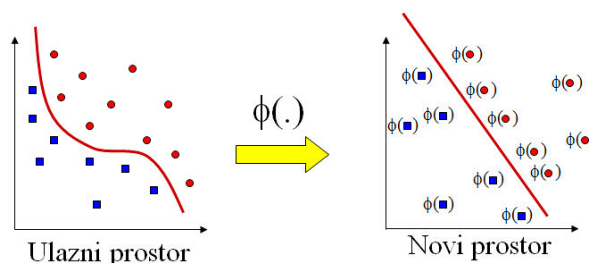
Kada se hiperravnina preslika natrag u početni prostor dobije se nelinearno razdvajanje. Ovaj postupak se naziva jezgrenim trikom [5] (*kernel trick*).

$$\Phi : x \rightarrow \varphi(x) \quad (29)$$

$$K(X_i \cdot Y_i) = \varphi(X_i)^T \cdot \varphi(Y_i) \quad (30)$$



Slika 5. Primjer nelinearne granice



Slika 6. Transformacija ulaznog prostora

$$K(X, Y) = ((X \cdot Y) + 1)^d, d = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (31)$$

$$K(X, Y) = e^{-\frac{|X-Y|^2}{\sigma^2}} \quad (32)$$

$$K(X, Y) = \tan h(\Phi(X \cdot Y) + \Theta) \quad (33)$$

Nakon uvrštavanja izraza (30), jednadžba (27) može se zapisati kao:

$$w = \sum_{i=1}^n a_i \cdot K(Y_i \cdot X_i) \quad (34)$$

Treba napomenuti da se u literaturi često umjesto izraza (34) i (28) upotrebljava izraz:

$$w = \sum_{i=1}^n a_i \cdot K(Y_i \cdot X_i) + b \quad (35)$$

Oznaka  $w$  obično se upotrebljava kada rješavamo klasi-fikacijske probleme dok se kod regresijskih rabi

$$\text{izraz: } f(X) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot K(Y_i \cdot X_i) + b \quad (36)$$

Gdje je  $f(X)$  linearna funkcija koju tražimo.

2.3 Višerazredni problemi

Metoda potpornih vektora zamišljena je kao binarna razredba. Daljnjim istraživanjima razvijene su mnoge metoda kojima se mogu rješavati višerazredni problemi. Ovdje ćemo ukratko objasniti dvije najčešće metode: „jedan protiv svih“ (*one against all*) i „svaki protiv svakoga“ (*pairwise support vector machines*).

Metoda «jedan protiv svih»

U slučaju metode „jedan protiv svih“  $n$ -razredni se problem svodi na rješenje  $n$  binarnih problema gdje je  $i$ -ti razred odvojen ravninom od svih ostalih. Neka je zadan  $n$  razredni problem, tada je  $i$ -ta odvajajuća ravnina ( $D_i$ ) određena jednadžbom:

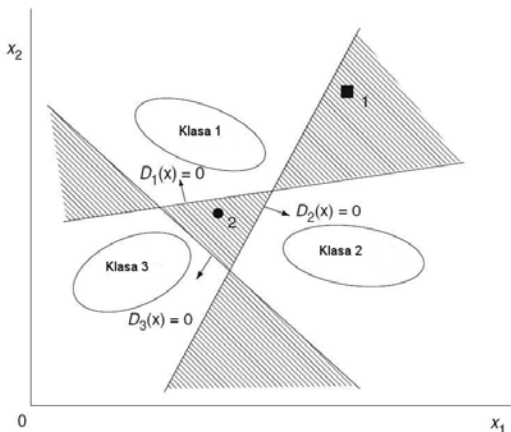
$$D_i(x) = w_i^T \cdot \varphi(x) - b_i \tag{37}$$

gdje je  $w_i$   $n$  dimenzijski vektor,  $\varphi(x)$  je jezgrena funkcija.

Kada je vrijednost prethodnog izraza jednaka nuli, tada imamo jednadžbu optimalne odvajajuće ravnine. Podaci koji pripadaju razredu  $i$  zadovoljavaju uvjet  $D_i(x) \geq 1$ , dok oni koji pripadaju ostalim razredima zadovoljavaju uvjet  $D_i(x) \leq -1$ .

Potporni vektori zadovoljavaju uvjet:  $y_i \cdot D_i(x) = 1$ .

Pri razredbi ako za samo jedan vektor (podatak)  $i$  vrijedi izraz (38), on se stavlja u razred  $i$ . Ako izraz (38) vrijedi za više vektora ili niti za jedan, tada se  $x$  ne može staviti u razred. Ovaj je problem prikazan na slici 7. Promotrimo primjer sa slike 7. (trorazredni dvodimenzijski problem). Ako vrijedi (39), tada se element 1 ne može staviti u razred. Slično se može zaključiti i za element 2 ako vrijedi (40). Da bi se izbjegli takvi problemi primjenjuju se kontinuirane funkcije odluke i element  $x$  se pridodaje razredu za koji vrijedi (41). U tom bi slučaju oba elementa sa slike 7. pripala skupu 1. Osim klasične metode „jedan protiv svih“, može se primijeniti i metoda neizrazitih skupova (*fuzzy logic*) koja je objašnjena u [6].



Slika 7. Primjer razredbe metodom „jedan protiv svih“

$$D_i(x) > 0 \tag{38}$$

$$D_1(x_1) > 0 \quad D_2(x_1) > 0 \quad D_3(x_1) < 0 \tag{39}$$

$$D_1(x_2) < 0 \quad D_2(x_2) < 0 \quad D_3(x_2) < 0 \tag{40}$$

$$\arg \max_{i=1, \dots, n} D_i(x) \tag{41}$$

Metoda „svaki protiv svakoga“

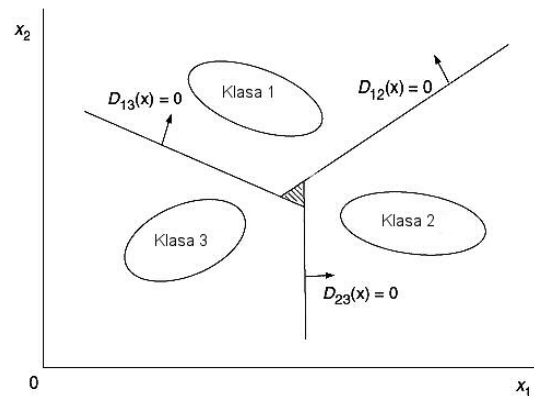
U metodi «svaki protiv svakoga» definiramo funkciju odluke za svaku kombinaciju parova. Pri određivanju funkcije odluke za parove rabimo podatke za pripadajuća dva razreda. U svakom idućem krugu treniranja, količina podataka za treniranje znatno je smanjena u usporedbi s metodom «jedan protiv svih», ali broj funkcija odluke iznosi  $n(n-1)/2$  u usporedbi s  $n$  kod metode «jedan protiv svih», gdje je  $n$  broj razreda.

Neka je zadana funkcija odluke za razred  $i$  protiv  $j$

$$D_{i,j}(x) = w_{i,j}^T \cdot \varphi(x) - b_{ij} \tag{42}$$

gdje je  $w_{ij}$   $l$  dimenzijski vektor,  $\varphi(x)$  je jezgrena funkcija.

Područja iz jednadžbe (40) se ne preklapaju. Ako je  $x$  u području  $R_i$ , stavljamo ga u razred  $i$ . Ako  $x$  nije u  $R_i$  rabimo izraz (41). Element  $x$  pridodaje se razredu za koji vrijedi izraz (35). Ako za više  $i$ -ova vrijedi jednadžba (41), tada se  $x$  ne može staviti u razred (na slici 8. vrijedi  $D_i(x) = 0, i = 1,2,3$ )



Slika 8. Primjer razredbe metodom „svaki protiv svakoga“

$$R_i = \{x \mid D_{ij}(x) > 0, j = 1, \dots, n, j \neq i\} \tag{43}$$

$$D_i(x) = \sum_{j \neq i, j=1}^n \text{sign}(D_{ij}(x)) \tag{44}$$

gdje je:

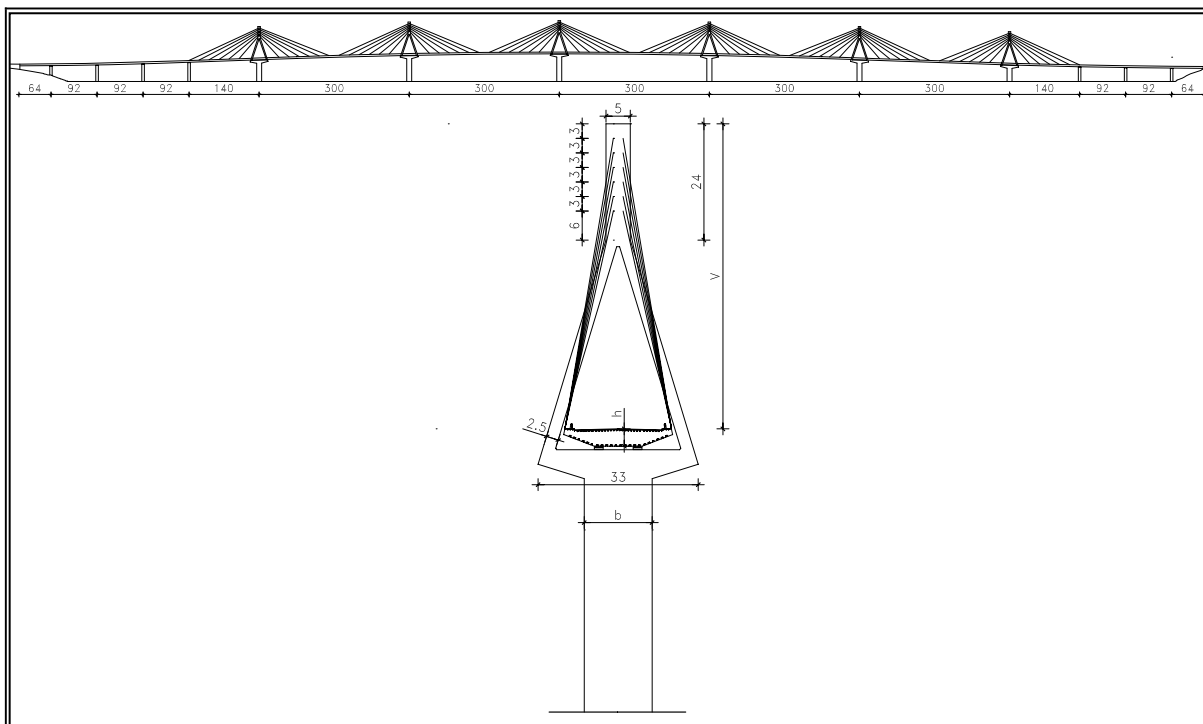
$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 \forall x \geq 0 \\ -1 \forall x < 0 \end{cases} \tag{45}$$

### 3 Primjer predviđanja progiba ovješnog mosta pomoću MPV-a

Skup podataka za obradu čine geometrijske i statičke veličine građevine. Građevina je most s 14 raspona od kojih će se promatrati 5 središnjih koji su ovješeni. Rasponi redom iznose  $64 + 3 \times 92 + 140 + 5 \times 300 + 140 + 2 \times 92 + 64$  m. Ovješeni rasponi su oni od 300 m. Stupovi i piloni temeljeni su na kesonima pa se pretpostavlja njihova upeta veza s tlom (rubni uvjet). Visine pilona ispod nivelete mosta iznose do 60 m, a visine stupova od 20 do 55 m, ovisno o položaju (oni bliže obali su niži). Dimenzije betonskih stupova u poprečnom presjeku su  $8 \times 5$  m sa stijenkom od 0,5 m. Piloni se u svrhu opisa mogu razdvojiti u dva dijela – dio ispod nivelete i dio iznad nivelete. Ispod nivelete pylon je stup s naglav-

štapnih konačnih elemenata, s rubnim uvjetima temelja stupova kao elastičnim osloncima i krutim oslanjanjem na upornjake. Proveden je linearni proračun, za svaki skup ulaznih podataka (varijabli) zasebno. Prikupljene su sljedeće varijable:

Visina pilona ( $V$ ) koja je definirana vertikalnom udaljenošću vrha pilona i nivelete mosta. Sidrišta zatega i duljina jednodijelnog vrha pilona od 24 m u svakoj je varijanti sačuvana. Na ovaj se način mijenjanjem visine  $V$  mijenja kut sidrišta zatega u kolničkoj konstrukciji. Što je veća visina  $V$  zatege su položene strmije i sposobne su prenijeti veću vertikalnu komponentu opterećenja rasponskog sklopa. Time se, naravno, povećava globalna krutost sustava. Smanjivanjem visine  $V$  krutost se smanjuje i most sve manje nalikuje ovješnom, a sve više izvana prednapetom sustavu.



Slika 9. Uzdužni i poprečni presjek mosta

nicom. Stup ima poprečnu dimenziju od 14 m i stijenku od 0,5 m, a naglavnica je betonski stol dimenzija  $37 \times 33$  m. Iznad nivelete je čelični dio pilona koji se sastoji od 4 čelične "noge" (presjeka  $2,5 \times 2,5$  m) koje su upete u uglovima stupne naglavne grede i piramidalno se sastaju u jednoj točki iznad nivelete nakon koje se pylon nastavlja kao jednodijelni čelični sandučasti stup  $5 \times 5$  m u kojem se nalaze sidrišta zatega. Rasponska je konstrukcija čelični sandučasti presjek aerodinamičnog oblika s ortotropnom kolničkom pločom ukupne širine 21 m. Ulazni podaci definirani su u tablici 1., a prikupljeni su iz računalnog modela konačnih elemenata za statički proračun Sofistik 23. Proračunski model sastoji se od

Uzdužna dimenzija ( $b$ ) donjega, betonskog dijela stupa pilona ispod naglavne grede. Povećavanjem ove dimenzije povećava se krutost donjeg dijela pilona na savijanje što u konačnici smanjuje horizontalni pomak pilona na mjestima sidrišta zatega na vrhu pilona. Smanjivanjem ovog pomaka povećava se krutost rasponskog sklopa.

Visina čelične sandučaste grede rasponskog sklopa ( $h$ ) odnosno njegova statička visina izravno utječe na krutost rasponskog sklopa povećanjem njegova momenta tromosti.

Za stvaranje baze podataka kojima će biti trenirana mreža odabrana su četiri skupa ulaznih podataka. U prvom

skupu promjenjiva je bila samo ulazna varijabla visine pilota ( $V$ ), u drugom skupu promjenjiva je bila samo uzdužna dimenzija ( $b$ ), u trećem skupu promjenjiva je bila samo visina čeličnog sandučastog sklopa ( $h$ ), a u četvrtom skupu sve su varijable mijenjane nasumično u različitim kombinacijama.

Pošto su izabrane ove odlučujuće varijable koje definiraju krutost sustava, odabrana je i izlazna varijabla za kontrolu te krutosti, a to je u ovom slučaju najveći progib rasponskog sklopa uzrokovan prometnim opterećenjem gdje je opterećen svaki drugi ovješeni raspon. Iznos ovog progiba ( $u$ ) izražen je u milimetrima za prva dva ovješena raspona koji u ovoj shemi opterećenja daju najveću mjerodavnu vrijednost. Iako bi se moglo očekivati da će najveći progib biti u sredini mosta, ovdje to nije slučaj zbog prisutnosti uzdužno nepokretnih ležajeva rasponskog sklopa na naglavnica stupova dvaju srednjih pilona.

Kako bi se dobio traženi pomak za svaki skup varijabli, bilo je potrebno u određenom redosljedu proračunati krutost sustava, proračunati prethodno naprezanje zatega potrebno za ravnost nivelete pri stalnim opterećenjima, prednapeti rasponsku konstrukciju na proračunsko naprezanje prema predviđenom redosljedu izvedbe i konačno zadati prometno djelovanje prema proračunskoj shemi. Takav proces dobivanja traženog progiba zahtijeva prilično zamoran vremenski angažman, što ljudskog vremena za adaptaciju i kontrolu modela, što računalnog vremena potrebnog za proračun u zadanom redosljedu. Važno je napomenuti da se svi progibi dobivaju na zategnutom sustavu gdje su uvedene sile u zatege za stalno opterećenje (vlastita težina + dodatno stalno opterećenje) pri kojima je rasponski sklop bez progiba. Jedini je progib koji se ovdje javlja, dakle, posljedica prometnog opterećenja i u izravnoj je vezi s krutosti sustava.

Za proračun metodom neuralne mreže upotrijebljen je softver Neuroshell 2. Odabrana arhitektura uporabljene mreže bila je prema Ward mreži s višestrukim skrivenim slojevima koji imaju različite funkcije aktivacije [11]. Za učenje mreže primijenjen je nadzirani (*backpropagation*) algoritam učenja, gdje svaka veza ulaznih i izlaznih jedinica ima svoju "snagu" (*ponder*), a

izlaz se iskazuje kao suma pondera veza. Trajanje učenja je iznosilo 39 minuta i 45 sekundi.

Za potrebe proračuna metodom potpornih vektora uporabljena je probna inačica softvera DTREG [10]. Izabrana je regresijska analiza, a za jezgrenu je funkciju odabrana RBF funkcija (32). U ovom slučaju radi se o višerazrednom problemu kod kojeg ne postoji meka granica, tako da se rabi izraz (18). Kako je konstanta  $C$  nepoznata, ona se mora pretpostaviti te optimalnu vrijednost iterativno proračunati. Softver ima ugrađen matematički algoritam (*pattern search*) koji pronalazi opti-

Tablica 1. Vrijednosti za provjeru modela

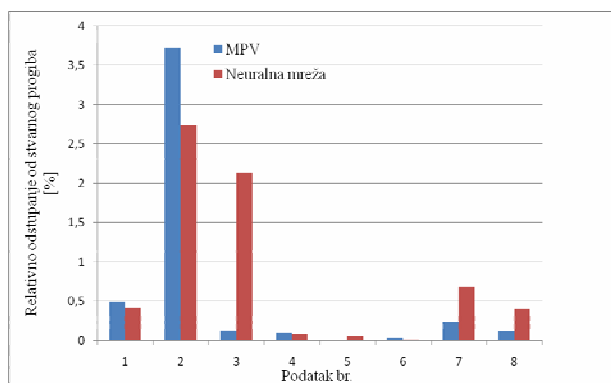
Podatak br.	Visina pilona	Uzdužna dimenzija stupa pilona	Visina rasponske konstrukcije	Progib u sredini srednjeg ovješnog raspona
1	45	11	4,6	630
2	39	13	5	619
3	50	7	3,8	816
4	70	10	2,8	630
5	60	9	4	605
6	65	9	4,3	539
7	61	14	3,3	532
8	48	12	4,1	632

malnu vrijednost parametra  $C$ . Nakon unosa ulaznih podataka i proračuna potpornih vektora izabrano je 8 vrijednosti kojima će se procijeniti kvaliteta modela (tablica 1.). U tablici 2. prikazane su vrijednosti stvarnih progiba i onih dobivenih neuralnom mrežom te metodom potpornih vektora. Stvarne vrijednosti progiba za ove ulazne podatke također su dobivene iz računalnog modela konačnih elemenata, i to za potpuno nove kombinacije ulaznih podataka. Navedene kombinacije ulaznih podataka (tablica 1.) su i unutar područja treninga. Treba

Tablica 2. Usporedba rezultata

Podatak br.	Stvarni progib [mm]	Neuralna mreža [mm]	MPV [mm]	Razlika stvarnog progiba i NM [mm]	Razlika stvarnog progiba i MPV [mm]
1	630	627,34	633,15	2,66	-3,15
2	619	635,96	642,05	-16,96	-23,05
3	816	833,47	817,06	-17,47	-1,06
4	630	630,49	629,34	-0,49	0,66
5	605	604,66	605,05	0,34	-0,05
6	539	538,90	539,22	0,1	-0,22
7	532	535,65	530,74	-3,65	1,26
8	632	634,58	632,78	-2,58	-0,78





Slika 10. Usporedba odstupanja dobivenih neuralnom mrežom i metodom potpornih vektora

napomenuti da je neuralna mreža trenirana na velikom broju podataka koji omogućuju vrlo precizno određivanje traženog parametra (progiba). Dobiveni rezultati pokazuju vrlo dobru korelaciju sa stvarnim vrijednostima. Na slici 10. prikazana su odstupanja (u %) pojedinih rezultata dobivenih metodom potpornih vektora (MPV) te neuralnom mrežom. Iz slike 10. može se primijetiti da su odstupanja od stvarnih vrlo mala. Za podatak br. 2 pogreška MPV od 23,05 % (16,96 % pogreška neuralne mreže) se može objasniti time što jedna od varijabli (visina pilona) na samom „rubu“ područja treninga. U

četiri je uzorka neuralna mreža ostvarila bolje rezultate, dok je u ostalima MPV uspješnija. Ovi su rezultati konzistentni s radom [7], gdje je dokazano da MPV nema prednosti pred neuralnim mrežama kada se uspoređuje krajnji rezultat. Prednosti MPV-a su velika brzina izvođenja, matematički model koji je nepromjenjiv te ovisi samo o tipu jezgrene funkcije (za razliku od neuralnih mreža gdje arhitektura mreža uvelike utječe na proces treniranja i dobivene rezultate).

#### 4 Zaključak

U radu je prikazan matematički model metode potpornih vektora te je dan primjer usporedbe predviđanja progiba zavješnog mosta pri prometnom opterećenju metodom potpornih vektora i pomoću neuralne mreže. Prednosti metode potpornih vektora za razredbu pred neuralnim mrežama su veća točnost, mogućnost bolje generalizacije problema te veća brzina treniranja podataka. U slučaju regresijske analize nema bitnih razlika u točnosti između generalizacije metodom potpornih vektora i neuralnih mreža [7], no prednost metode potpornih vektora je veća jednostavnost uporabe. Rezultati dobiveni u ovom radu pokazuju vrlo dobro predviđanje progiba te male razlike prema neuralnim mrežama.

#### LITERATURA

- [1] Abe, S.: *Support vector machines for pattern classification*, Springer - Verlag, London, 2005.
- [2] Burges, C.: *A Tutorial on Support Vector Machines for Pattern Recognition*, Data Mining and Knowledge Discovery, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1998.
- [3] Buršić, D.: *Primjena jezgrenih koncepata u dubinskoj analizi teksta*, diplomski rad, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb, 2005.
- [4] Cortes, C.; Vapnik, V.: *Support Vector Networks*, Machine Learning, vol.20, pp. 273-297, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1995.
- [5] Jordan, M.: *The Kernel Trick*, Advanced Topics in Learning & Decision Making, Berkeley, 2004.
- [6] Kecman, V.: *Learning and Soft Computing: Support Vector Machines, Neural Networks and Fuzzy Logic Models*, MIT press, London, 2001.
- [7] Meyer, D.; Leisch, F.; Hornik, K.: *The support vector machine under test*, Neurocomputing 55(1-2), pp. 169-186, 2003.
- [8] Minh, H.; Q.; Niyogi, P.; Yao, Y.: *Mercer Theorem, Feature Maps, and Smoothing*, [Lecture Notes in Computer Science](#), Springer Berlin, 2006
- [9] Samui, P.: *Support vector machine applied to settlement of shallow foundations on cohesionless soils*, Computers and Geotechnics 35 (2008) , pp. 419-427, 2008.
- [10] Sherrod, P. H.: *DTREG 4.5 – Predictive modeling software*, 2005.
- [11] Vlašić, A.; Rajčić, V.: *Use of neuroshell network for the prediction of cable stayed bridge behaviour*, 5<sup>th</sup> International conference on Computer Aided Design and Manufacturing, CADAM 2007, pp. 89-90, Pula, 2007.
- [12] Zao, H.: *Slope reliability analysis using a support vector machine*, Computers and Geotechnics, pp. 459-467, 2008.