

# Identifikacija oštećenja mostova primjenom teorije nelinearne perturbacije

---

**Radić, Jure; Mekjavić, Ivana**

*Source / Izvornik:* **Građevinar, 2005, 57, 11 - 19**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:054335>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-08-26**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)



# Identifikacija oštećenja mostova primjenom teorije nelinearne perturbacije

Jure Radić, Ivana Mekjavić

## Ključne riječi

betonski mostovi,  
identifikacija oštećenja,  
vlastite frekvencije,  
teorija nelinearne  
perturbacije,  
realni mode,  
trajnost

## Key words

concrete bridges,  
identification of damage,  
eigenfrequencies,  
nonlinear perturbation  
theory,  
real model,  
durability

## Mots clés

ponts en béton,  
identification  
d'endommagement,  
fréquences propres,  
théorie de la perturbation  
non-linéaire,  
modèle réel,  
durabilité

## Ключевые слова

бетонные мосты,  
идентификация  
повреждения,  
собственные частоты,  
теория нелинейной  
пертурбации,  
реальная модель,  
долговечность

## Schlüsselworte

Betonbrücken, Beschädigungsidentifizierung,  
eigene Frequenzen,  
Theorie der unlinearen  
Perturbationen,  
reales Modell,  
Dauerhaftigkeit

J. Radić, I. Mekjavić

Izvorni znanstveni rad

## Identifikacija oštećenja mostova primjenom teorije nelinearne perturbacije

Opisan je predloženi numerički postupak zasnovan na teoriji nelinearne perturbacije. U postupku se rabe izmjerene vlastite frekvencije, a poznavanje vlastitih vektora oštećene konstrukcije nije potrebno. Učinkovitost numeričkog postupka utvrđivanja oštećenja pokazana je na primjeru izvedenoga betonskoga grednog mosta sa simuliranim oštećenjem i prvi put preko laboratorijskih ispitivanja na modelu slobodno oslonjene armiranobetonske grede pri različitim statičkim opterećenjima.

J. Radić, I. Mekjavić

Original scientific paper

## Bridge damage identification based on theory of nonlinear perturbation

A numerical procedure, based on the non-linear perturbation theory, is described. Eigenfrequencies are used in the procedure, and the damaged-structure eigenvectors do not need to be known. The efficiency of the numerical procedure in determining the level of damage is demonstrated through an example of the realized concrete girder bridge with simulated damage and, for the first time, through laboratory testing of a freely leaning model of a reinforced-concrete beam subjected to various levels of static load.

J. Radić, I. Mekjavić

Ouvrage scientifique original

## Identification de l'endommagement des ponts par la théorie de la perturbation non-linéaire

Une procédure numérique, basée sur la théorie de la perturbation non-linéaire, est décrite. Les fréquences propres sont utilisées dans la procédure, mais la connaissance des vecteurs propres des ouvrages endommagés n'est pas nécessaire. L'efficacité de la procédure numérique dans la détermination du niveau d'endommagement est démontrée par un exemple du pont à poutres en béton dont l'endommagement a été simulé et, pour la première fois, les essais de laboratoire ont été effectués sur le modèle d'une poutre en béton armé soumise aux niveaux différents de la charge statique.

Ї. Радич, И. Мекъявич

Оригинальная научная работа

## Идентификация повреждения мостов применением теории нелинейной пертурбации

В работе описан предложенный числовой способ, основанный на теории нелинейной пертурбации. В способе употребляются измеренные собственные частоты, а знание собственных векторов повреждённой конструкции не нужно. Эффективность числового способа установления повреждения показана на примере построенного балочного моста с симулированным повреждением и впервые при помощи лабораторных испытаний на модели свободно опирающейся железобетонной балки при различных статических нагрузках.

J. Radić, I. Mekjavić i

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

## Identifizierung von Brückenbeschädigungen durch Anwendung der Theorie der unlinearen Perturbation

Beschrieben ist ein vorgeschlagenes Verfahren begründet auf der Theorie der unlinearen Perturbation. Im Verfahren benützt man die gemessenen eigenen Frequenzen, dabei ist es nicht nötig die eigenen Vektoren der beschädigten Konstruktion zu kennen. Die Leistungsfähigkeit des numerischen Verfahrens für die Feststellung der Beschädigungen zeigt man am Beispiel einer erbauten Betonbalkenbrücke mit simulierter Beschädigung und zum ersten Mal durch Laboruntersuchungen am Modell eines frei gelagerten Stahlbetonbalkens bei verschiedenen statischen Belastungen.

Autori: Prof. dr. sc. **Jure Radić**, dipl. ing. građ.; dr. sc. **Ivana Mekjavić**, dipl. ing. građ., Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet, Zagreb, Kačićeva 26

## 1 Uvod

Za ocjenu trajnosti pa i pouzdanosti konstrukcija osim vizualnog pregleda dostupnih dijelova, često se rabe razne tradicionalne nerazorne metode ispitivanja, uglavnom lokalne, kao što su akustične, radiografske, elektromagnetske, magnetske i ultrazvučne. Za ocjenu stanja kompleksnih konstrukcija, kao što su mostovi, metode vibracijskog ispitivanja (uz primjenu spektralne i modalne analize) pružaju mogućnost globalnih ocjena, kojima se također mogu otkriti kritične lokalne greške ili oštećenja. Pritom je sveukupni dinamički odgovor, ako je on različit od izmjerena na neoštećenom objektu, pokazatelj promjene ponašanja konstrukcije zbog oštećenja.

Različiti su pristupi rješavanju problema otkrivanja oštećenja kao što su metode podešavanja modela [1], metode pronalazjenja oštećenja na osnovi dinamičkog odziva sustava [2, 3, 4] te metode identificiranja strukturalnog oštećenja na osnovi modalnih parametara [5, 6, 7]. U postupku otkrivanja oštećenja ili podešavanja modela također se primjenjuju metode redukcije i ekspanzije.

Metode pronalazjenja oštećenja na osnovi modalnih parametara najviše obećavaju, i potreban je samo ograničeni broj izmjerenih modalnih podataka, kao što su vlastite frekvencije i vlastiti vektori za određivanje mjesta i razmjera oštećenja. S obzirom da se vlastite frekvencije mogu prilično jednostavno izmjeriti s relativno visokom točnošću, metode zasnovane na izmjerenim vlastitim frekvencijama posebno su atraktivne [8, 9, 10, 11, 12, 13].

Nedavno su Bičanić i Chen [13] predložili novu teoriju nelinearne perturbacije koja omogućuje egzaktnu vezu između promjena konstrukcijskih parametara i modalnih parametara. Primjenom teorije nelinearne perturbacije želi se izbjeći nedostatnost analize osjetljivosti prvog reda, ako je potrebno otkriti velike promjene konstrukcijskih parametara zbog oštećenja.

U ovome je radu predstavljena metoda za identifikaciju oštećenja zasnovana na prije spomenutoj teoriji nelinearne perturbacije uz pretpostavku da su poznate samo izmjerene vlastite frekvencije dok poznavanje vlastitih vektora oštećene konstrukcije nije potrebno. Također su izvedene osnovne matematičke relacije koje se odnose na parametre oštećenja i na promjene modalnih oblika te je za njihovo rješavanje predložena i razrađena kompjutorska tehnika direktne iteracije. Učinkovitost predložene pristupa pokazana je numeričkim simulacijama i primjenom na realnom laboratorijskom modelu armiranobetonske grede uporabom eksperimentalno određenih vlastitih frekvencija.

Glavni cilj istraživanja prikazanih u radu bio je da se na osnovi utvrđenih parametara oštećenja konstrukcije i modifikacije konstrukcijskoga sustava, koji su dobiveni

primijenjenim postupkom utvrđivanja oštećenja, ocijeni stvarno stanje promatrane konstrukcije odnosno njezina preostala trajnost.

## 2 Utvrđivanje oštećenja na osnovi vlastitih frekvencija

### 2.1 Teorija nelinearne perturbacije

Osnovna jednadžba konstrukcijskog dinamičkog sustava u formulaciji konačnih elemenata može se napisati u obliku

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

gdje su matrice  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{K}$  diskretizirana masa, prigušenja i krutost;  $\ddot{\mathbf{x}}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  i  $\mathbf{x}$  vektori ubrzanja, brzine i pomaka višestupanjskoga dinamičkog sustava (engl. *Degrees of Freedom - DOFs*) i  $\mathbf{f}(t)$  vektor funkcije vanjskih sila.

Uz zanemarenje prigušenja i za homogena rješenja jednadžbe (1) dolazi se do problema vlastitih vrijednosti tj. karakteristične jednadžbe originalne (neoštećene) konstrukcije

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M})\Phi_i = 0 \quad (2)$$

gdje je  $\lambda_i$   $i$ -ta vlastita vrijednost definirana kao kvadrat vlastite frekvencije  $\omega_i$  dok  $\Phi_i$  predstavlja odgovarajući vlastiti vektor karakteristične jednadžbe.

Karakteristična jednadžba za modificiranu (oštećenu) konstrukciju

$$(\mathbf{K}^* - \lambda_i^* \mathbf{M}^*)\Phi_i^* = 0 \quad (3)$$

gdje se veličine sa oznakom \* odnose na modificiranu konstrukciju.

Matrice krutosti i mase za modificiranu konstrukciju mogu se napisati kao

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + \Delta\mathbf{K} \quad (4)$$

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M} + \Delta\mathbf{M} \quad (5)$$

odnosno vlastita vrijednost i odgovarajući vlastiti vektor mogu se izraziti kao

$$\lambda_i^* = \lambda_i + \Delta\lambda_i \quad (6)$$

$$\Phi_i^* = \Phi_i + \Delta\Phi_i \quad (7)$$

Nakon uvrštavanja izraza (4) – (7) u izraz (3), karakteristična jednadžba za modificiranu konstrukciju postaje

$$[\Delta\mathbf{K} - (\lambda_i + \Delta\lambda_i)\Delta\mathbf{M}]\{\Phi_i + \Delta\Phi_i\} + [\mathbf{K} - (\lambda_i + \Delta\lambda_i)\mathbf{M}]\{\Phi_i + \Delta\Phi_i\} = 0 \quad (8)$$

Množenjem jednadžbe (8) s  $\Phi_k^T$  s lijeve strane, a potom s  $\Phi_k$  s desne strane, odnosno množenjem iste s  $\Phi_i^T$  s lijeve strane i uz pretpostavku masom normaliziranih vlastitih vektora originalne i modificirane konstrukcije dobivaju se

$$\Phi_i^T [\Delta \mathbf{K} - (\lambda_i + \Delta \lambda_i) \Delta \mathbf{M}] \{\Phi_i + \Delta \Phi_i\} - \Delta \lambda_i = 0 \quad (9)$$

$$\Delta \Phi_i = \sum_{k=1, k \neq i}^N C_{ik} \Phi_k \quad (10)$$

gdje je  $C_{ik}$  faktor modalnog udjela definiran kao

$$C_{ik} = \frac{\Phi_k^T [\Delta \mathbf{K} - (\lambda_i + \Delta \lambda_i) \Delta \mathbf{M}] \{\Phi_i + \Delta \Phi_i\}}{(\lambda_i + \Delta \lambda_i) - \lambda_k} \quad (11)$$

Iz jednadžbe (10) vidljivo je da se promjena vlastitog vektora može izraziti kao linearna kombinacija vlastitih vektora originalnog sustava izuzev odgovarajućega originalnoga vlastitog vektora.

Budući da se utjecaj oštećenja u konstrukciji na njezinu krutost može u većini slučajeva predstaviti smanjenjem modula elastičnosti konstrukcije, promjena matrice krutosti sustava može se izraziti u obliku

$$\Delta \mathbf{K} = \sum_{j=1}^{NxE} \alpha_j \mathbf{K}_j \quad (12)$$

gdje je  $NxE$  ukupan broj elemenata konstrukcije,  $K_j$  je doprinos elementa  $j$  u globalnoj matrici krutosti,  $\alpha_j$  je parametar oštećenja  $j$ -tog elementa i kreće se u granicama  $-1 \leq \alpha_j \leq 0$ . Vrijednost parametra oštećenja nula jest neoštećeno stanje, a vrijednost  $-1$  je potpuni gubitak krutosti elementa konstrukcije.

Pretpostavit će se da raspodjela mase sustava ostaje nepromijenjena ili je promijenjena samo za poznati iznos. Ta je pretpostavka opravdana jer će većina oštećenja u inženjerskim konstrukcijama rezultirati gubitkom krutosti, umjesto potpunim odvajanjem ili slomom s gubitkom mase. Ovdje je pretpostavljeno da nema promjene matrice mase konstrukcije

$$\Delta \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (13)$$

Radi određivanja parametra oštećenja  $\alpha_j$  mogu se postaviti različite osnovne jednadžbe ovisno o različitim poznatim modalnim podacima. Pritom se razlikuju tri moguća slučaja, pri čemu mogu biti poznate kompletne izmjerene vlastite vrijednosti  $\lambda_i^*$  i vlastiti vektori  $\Phi_i^*$ , odnosno izmjerene samo vlastite vrijednosti  $\lambda_i^*$ , i kao treća mogućnost poznate  $\lambda_i^*$  i nekompletni izmjereni vlastiti vektori  $\Phi_i^*$ .

Kao što je već rečeno, ovdje će se postupak pronalazjenja oštećenja zasnivati samo na poznatim (izmjenjenim) vlastitim vrijednostima  $\lambda_i^*$ .

Budući da nisu poznati vlastiti vektori oštećene konstrukcije potrebno je razviti sustav jednadžbi iz kojih će se odrediti parametar oštećenja  $\alpha_j$  i faktor modalnog udjela  $C_{ik}$ . Koristeći se jednadžbama (10), (12) i (13), jednadžbe (9) i (11) mogu se napisati kao

$$\sum_{j=1}^{NxE} \Phi_i^T \mathbf{K}_j \Phi_i \alpha_j + \sum_{j=1}^{NxE} \sum_{l=1, l \neq i}^N \Phi_i^T \mathbf{K}_j \Phi_l C_{il} \alpha_j - \Delta \lambda_i = 0 \quad (14)$$

$$C_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^{NxE} \Phi_k^T \mathbf{K}_j \Phi_i \alpha_j + \sum_{j=1}^{NxE} \sum_{l=1, l \neq i, k}^N \Phi_k^T \mathbf{K}_j \Phi_l \alpha_j C_{il}}{\lambda_i^* - \lambda_k - \sum_{j=1}^{NxE} \Phi_k^T \mathbf{K}_j \Phi_k \alpha_j} \quad (15)$$

Primjenom aproksimacije prvog reda, zanemarujući elemente višeg reda u jednadžbi (14), dobiva se linearna relacija u obliku

$$\sum_{j=1}^{NxE} \Phi_i^T \mathbf{K}_j \Phi_i \alpha_j - \Delta \lambda_i = 0 \quad (16)$$

Gornja linearna jednadžba često je upotrijebljena u postupku otkrivanja oštećenja, primjerice u radovima [8, 9, 10, 11].

Potrebno je naglasiti kako ova linearna jednadžba može biti nedovoljna u identifikaciji oštećenja, osobito pri određivanju mjesta i iznosa oštećenja u konstrukciji.

Kada su poznate samo vlastite frekvencije oštećene konstrukcije, osnovne jednadžbe koje se odnose na parametar oštećenja  $\alpha_j$  i faktor modalnog udjela  $C_{ik}$ , jednadžbe (14) i (15), mogu se napisati kao

$$\sum_{j=1}^{NxE} a_{iji} \alpha_j + \sum_{j=1}^{NxE} \sum_{l=1, l \neq i}^{NM} a_{ijl} C_{il} \alpha_j - \Delta \lambda_i = 0 \quad (17)$$

$$C_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^{NxE} a_{kji} \alpha_j + \sum_{j=1}^{NxE} \sum_{l=1, l \neq i, k}^{NM} a_{kjl} \alpha_j C_{il}}{\lambda_i^* - \lambda_k - \sum_{j=1}^{NxE} a_{kjk} \alpha_j} \quad (18)$$

gdje su  $a_{iji}$ ,  $a_{ijl}$ ,  $a_{kji}$  i  $a_{kjl}$  koeficijenti osjetljivosti mod-krutost, koji se mogu definirati općim izrazom

$$a_{kjl} = \Phi_k^T \mathbf{K}_j \Phi_l \quad (19)$$

Iz jednadžbe (10) može se uočiti da se za dovoljno veliki  $k$  elementi s indeksom većim od  $k$  mogu zanemariti. Stoga se  $N$  može prikladno zamijeniti sa  $NM$ , koji predstavlja broj razmatranih vlastitih vektora neoštećene konstrukcije.

U radu [13] razvijena je računalna tehnika direktne iteracije koja se bazira na gore navedenim osnovnim nelinearnim jednadžbama za proračun parametra oštećenja  $\alpha_j$  i faktora modalnog udjela  $C_{ik}$ .

Nakon što je faktor modalnog udjela  $C_{ik}$  pronađen, primjenom jednadžbi (7) i (10) mogu se izračunati vlastiti vektori oštećene konstrukcije prema izrazu

$$\Phi_i^* = \Phi_i + \sum_{k=1, k \neq i}^{NM} C_{ik} \Phi_k \quad (20)$$

Korelacija vlastitih vrijednosti neoštećene konstrukcije i oštećene konstrukcije može se provjeriti s pomoću  $MAC$

faktora (engl. *Modal Assurance Criterion*), definiranog kao

$$MAC(k,i) = \frac{|\Phi_k^T \Phi_i|^2}{|\Phi_k^T \Phi_k| |\Phi_i^T \Phi_i|} \quad (21)$$

gdje najveći  $MAC(k,i)$  faktor pokazuje najbolju korelaciju između moda neoštećene konstrukcije i moda oštećene konstrukcije.

2.2 Tehnika direktne iteracije

Radi zornog prikaza, numerički postupak tehnike direktne iteracije posebno ističemo:

1. korak:  
 pretpostavljaju se početni faktori modalnog udjela  $C_{ik}^0$  jednaki nuli, tj. nema promjena vlastitih vektora. Proračun početnih vrijednosti  $\alpha_j^1$  i  $C_{ik}^1$  iz

$$\sum_{j=1}^{NXE} S_{ij}^1 \alpha_j^1 = z_i, \text{ gdje je } S_{ij}^1 = a_{iji} \text{ te } z_i = \Delta \lambda_i$$

$$C_{ik}^1 = \frac{b_{ki}^1}{\lambda_i^* - \lambda_k - b_{kk}^1}, \text{ gdje je } b_{ki}^1 = \sum_{j=1}^{NXE} a_{kji} \alpha_j^1$$

2. korak:  
 proračun vrijednosti  $\alpha_j^n$  iz

$$\sum_{j=1}^{NXE} S_{ij}^n \alpha_j^n = z_i, \text{ gdje je } S_{ij}^n = a_{iji} + \sum_{l=1, l \neq i}^{NM} C_{il}^{n-1} a_{ijl}$$

3. korak:  
 proračun novih faktora modalnog udjela  $C_{ik}^n$  iz

$$C_{ik}^n = \frac{b_{ki}^n + \sum_{l=1, l \neq i, k}^{NM} C_{il}^{n-1} b_{kl}^n}{\lambda_i^* - \lambda_k - b_{kk}^n}, \text{ gdje je } b_{ki}^n = \sum_{j=1}^{NXE} a_{kji} \alpha_j^n$$

i povratak na 2. korak ako rješenje ne konvergira.

Ovisno o broju poznatih vlastitih frekvencija oštećene konstrukcije  $NF$  (broj jednažbi) i broju parametara oštećenja konstrukcije označenog s  $NXE$  (broj nepoznani-

ca), matrica osjetljivosti mod-krutost  $[S_{ij}]$  ne mora biti kvadratna. Broj izmjerenih vlastitih frekvencija oštećene konstrukcije  $NF$  uglavnom je manji od broja parametara oštećenja konstrukcije (broj elemenata). Za pronalaženje rješenja, redovito loše uvjetovanog (engl. *ill-conditioned*), pododređenog sustava, primjenjuje se metoda dekompozicije s pomoću singularne vrijednosti (engl. *Singular Value Decomposition - SVD*).

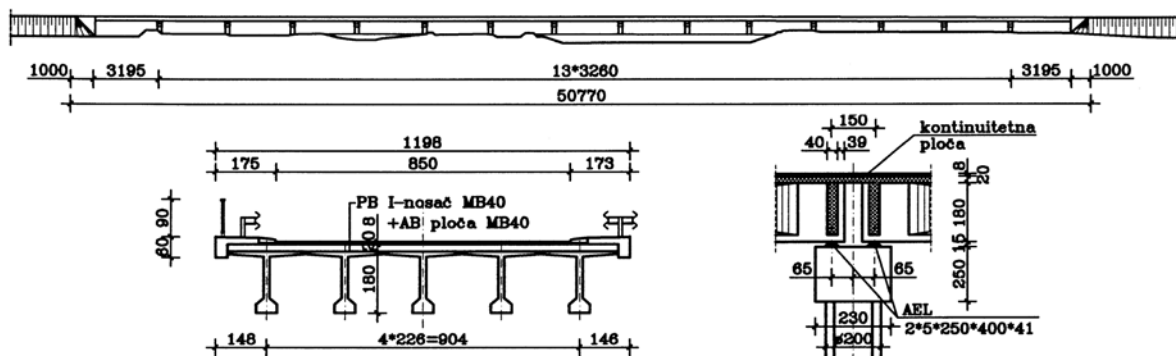
Na osnovi prije predočenoga numeričkoga postupka u radu [14] načinjen je FORTRAN-ski računalni program za pronalaženje oštećenja.

3 Numerički primjer

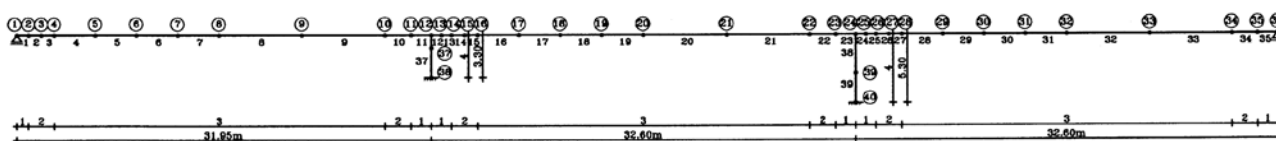
Na numeričkom primjeru izvedenog mosta *Drava I*, opisanog u radu [15], pokazani su točnost i učinkovitost tehnike direktne iteracije. Također je ispitan utjecaj različitih faktora na problem inverznog pronalaženja oštećenja, kao što je broj poznatih vlastitih frekvencija oštećene konstrukcije odnosno broj raspoloživih vlastitih vektora neoštećene konstrukcije. Problem utvrđivanja oštećenja tretira se kao inverzni problem, pri čemu su za određivanje promjena krutosti zbog promjena vlastitih frekvencija izvedene osnovne matematičke relacije dane u prethodnom poglavlju.

Prednapeta betonska gredna rasponska konstrukcija mosta *Drava I* sastoji se od pet segmenata podjednake duljine,  $L = 97,15 + 3 \cdot 97,80 + 97,15$  m, odijeljenih dilatacijama (slika 1.). Izvršena je analiza za prvi segment duljine  $L_1 = 31,95 + 2 \cdot 32,60 = 97,15$  m.

Budući da je analizirana konstrukcija gotovo simetrična, mogu se pojaviti problemi u svezi s konvergencijom iteracijskog postupka. Iz jednažbe (19) vidi se da ako je konstrukcija simetrična, sustav osnovnih jednažbi (17) postaje singularan, i identifikacijski se postupak ne može nastaviti. Ako je konstrukcija gotovo simetrična, osnovne jednažbe (17) su loše uvjetovane i kod takvih primjera potrebno je poznavati veći broj vlastitih frekvencija oštećene konstrukcije (veći od  $NXE$ ) za točno određivanje mjesta i veličine strukturalnog oštećenja. Ipak, zbog loše



Slika 1. Uzdužni presjek, poprečni presjek i detalj srednjeg oslonca mosta *Drava I* (1997.) na autocesti Zagreb-Goričan

Slika 2. Ravninski štapni model prve dilatacije konstrukcije mosta *Drava I*

uvjetovanih osnovnih jednadžbi (17), parametri oštećenja  $\alpha_j$  konvergiraju vrlo sporo te u nekim primjerima dovede do problema konvergencije [13].

Da bi se izbjegli problemi koji se pojavljuju zbog simetrije konstrukcije, načinjen je model mosta s nesimetričnom mrežom štapnih konačnih elemenata, prikazan na slici 2.

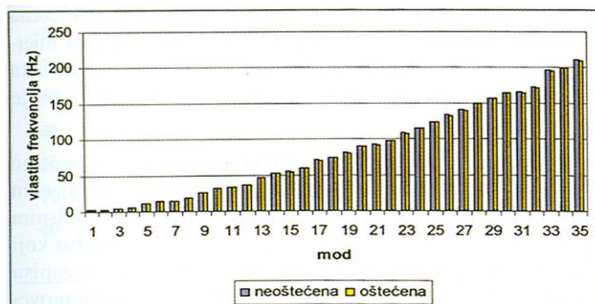
U ravninskom štapnom modelu mosta rasponska konstrukcija zglobno je povezana sa stupovima budući da je statički sustav niz slobodno oslonjenih greda. Model ima 39 elemenata, 40 čvorova s ukupno 116 stupnjeva slobode (DOFs). Geometrijske karakteristike analiziranog mosta prikazane su na slici 1. Karakteristike poprečnih presjeka elemenata modela navedene su u tablici 1. Svi elementi imaju iste karakteristike materijala s modulom elastičnosti  $E = 3,4 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$  i gustoćom  $\rho = 2,5 \text{ t/m}^3$ .

Tablica 1. Karakteristike elemenata mosta *Drava I*

Element	Br. poprečnog presjeka elementa	Površina A [m <sup>2</sup> ]	Moment inercije I [m <sup>4</sup> ]
grede uz oslonce	1	8.605	3.312
grede uz oslonce	2	7.477	3.025
grede u poljima	3	6.245	2.750
stupovi	4	3.140	0.785

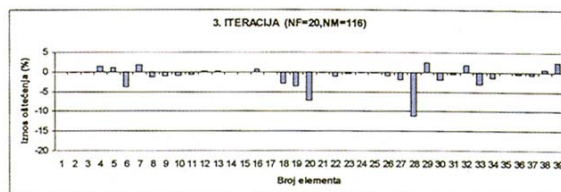
Pretpostavljeni scenarij oštećenja ostvaren je redukcijom Youngova modula elastičnosti elementa 6 za 5%, elementa 20 za 10% i elementa 28 za 15%.

Primjenom metode konačnih elemenata izračunane su vlastite frekvencije i odgovarajući modalni oblici za neoštećeni i oštećeni most. Prvih 35 vlastitih frekvencija za neoštećenu i oštećenu konstrukciju mosta *Drava I* prikazane su na slici 3.

Slika 3. Prvih 35 vlastitih frekvencija neoštećene i oštećene konstrukcije mosta *Drava I*

### 3.1 Utjecaj broja usvojenih frekvencija oštećene konstrukcije

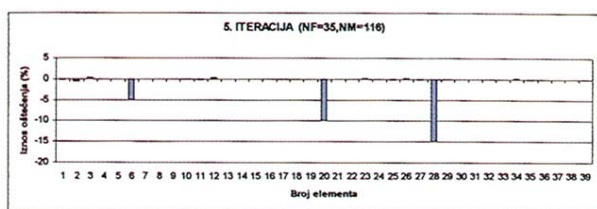
Rezultati prikazani na slici 4. pokazuju utjecaj broja uporabljenih frekvencija oštećene konstrukcije na postupak inverznog predviđanja oštećenja konstrukcije. Ovdje su pri utvrđivanju oštećenja primjenom tehnike direktne iteracije upotrijebljeni svi vlastiti vektori neoštećene konstrukcije. Uočeno je da se oštećenje konstrukcije može grubo predvidjeti uporabom samo 20 frekvencija oštećene konstrukcije. Kao što se očekuje, predviđene vrijednosti oštećenja konstrukcije poboljšavaju se s porastom broja uporabljenih frekvencija oštećene konstrukcije i dostižu vrijednosti vrlo bliske točnom rješenju kada je uporabljeno 35 frekvencija oštećene konstrukcije.



Slika 4. Inverzno predviđanje oštećenja u ovisnosti o broju frekvencija oštećene konstrukcije, uporabljeni svi vlastiti vektori neoštećene konstrukcije, gore: uporabljeno 20 frekvencija oštećene konstrukcije, dolje: uporabljeno 35 frekvencija oštećene konstrukcije

### 3.2 Utjecaj broja usvojenih vlastitih vektora neoštećene konstrukcije

Učinkovitost predložene tehnike istražena je s obzirom na broj vlastitih vektora neoštećene konstrukcije kao što je pokazano na slici 5., pri čemu je uporabljeno 35 izmjenjenih frekvencija oštećene konstrukcije. Može se uočiti da je potrebno poznavati samo ograničen broj vlastitih vektora neoštećene konstrukcije, i svega je 60 vlastitih vektora neoštećene konstrukcije (pola od ukupnog broja vlastitih vektora neoštećene konstrukcije) dovoljno za točno predviđanje oštećenja konstrukcije. Time je predložena tehnika primjenljiva na konstrukcije velikih razmjera.



Slika 5. Inverzno predviđanje oštećenja u ovisnosti o broju vlastitih vektora neoštećene konstrukcije, uporabljeno 35 frekvencija oštećene konstrukcije i 60 vlastitih vektora neoštećene konstrukcije

#### 4 Identifikacija oštećenja na modelu – eksperiment

U okviru eksperimentalnog dijela rada [14] izvršeno je ispitivanje slobodno oslonjene armiranobetonske grede na statičko opterećenje do sloma. Ispitivanjem je obuhvaćeno statičko nanošenje koncentriranog opterećenja u sredini raspona slobodno oslonjene grede.

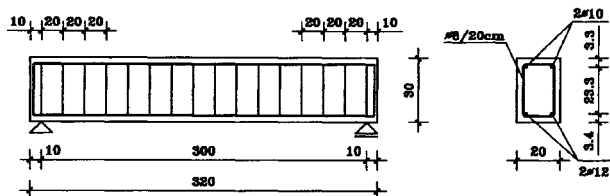
Izmjerene vlastite frekvencije prije i nakon pojedine razine statičkog opterećenja upotrijebljene su u ovdje predstavljenoj metodi analize oštećenja na konstrukcijama.

##### 4.1 Opis modela

Geometrija armiranobetonske grede i podatci o armaturi prikazani su na slici 6. Uporabljena je rebrasta armatura RA 400/500, u donjoj zoni grede kao glavna uzdužna armatura  $2\phi 12$  mm, a u gornjoj zoni kao konstruktivna armatura  $2\phi 10$  mm, te glatka armatura GA 240/360 za vilice  $\phi 8$  mm na međusobnom razmaku od 20 cm. Kakvoća betona je klase C25/30.

Armiranobetonska greda izrađena je u pogonu za proizvodnju betonskih elemenata građevinske tvrtke *Viadukt* u Pojatomu.

Ispitivanje mehaničkih karakteristika betona, tj. mjerenje tlačne čvrstoće, gustoće te modula elastičnosti provedeno je u Odjelu za tehničku mehaniku Građevinskog fakulteta u Zagrebu na uzorcima uzetim za betoniranja grede.



Slika 6. Geometrija i armatura armiranobetonske grede

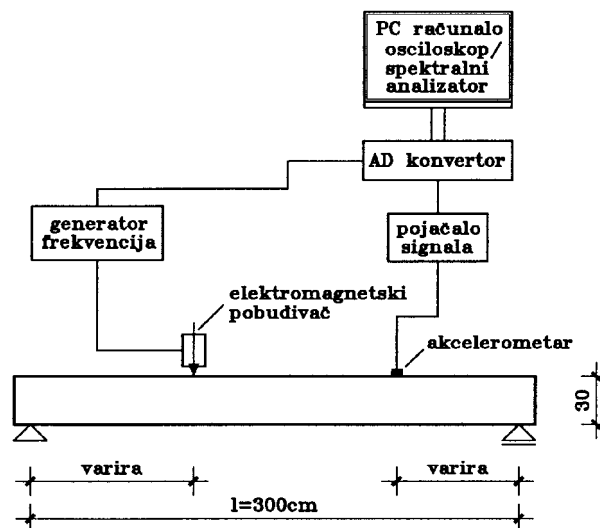
##### 4.2 Eksperimentalno određivanje vlastitih frekvencija

Eksperimentalno određivanje vlastitih frekvencija armiranobetonske grede provedeno je prije i nakon svakog nivoa statičkoga koncentriranog opterećenja nanošenog

u sredini raspona slobodno oslonjene armiranobetonske grede.

Preliminarna analiza oštećenja pokazala je dostatnost uporabe prvih osam vlastitih frekvencija za pronalaženje oštećenja na ovom modelu. Stoga se eksperimentalno ispitivanje ograničilo na pronalaženje rezonantnih frekvencija prvih osam poprečnih modova vibriranja armiranobetonske grede.

Mjerenje vlastitih frekvencija izvršeno je metodom prisilnih oscilacija grede, uporabom sinusnog pobuđivača te akcelerometra. Optimalan položaj senzora za promatrani mod vibriranja određen je na osnovi modalnog oblika uzorka. Elektromagnetski pobuđivač i akcelerometar bili su postavljeni u polovini, četvrtini, osmini i šesnaestini raspona grede, kao što je prikazano na slici 7. Odziv konstrukcije na pobudu mjereno je minijaturnim akcelerometrom koji se lijepljenjem kitom pričvrstio na površinu grede.

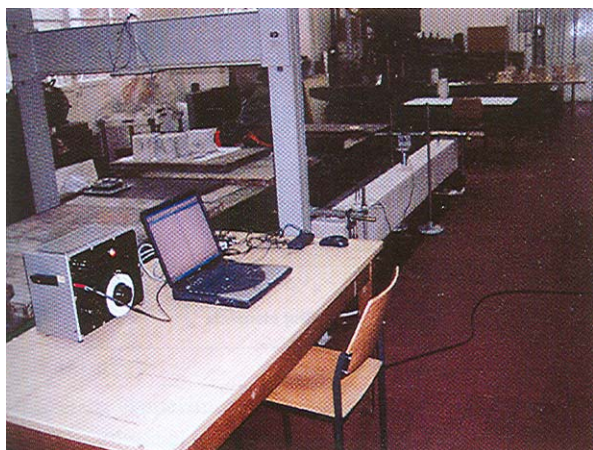


Slika 7. Shematski prikaz mjerenja vlastitih frekvencija grede

Prisilnom sinusnom pobudom grede se dovodila u rezonantno titranje po vlastitim frekvencijama. Za utvrđivanje vlastitih frekvencija rabila su se pojačana izmjerena ubrzanja i osciloskop/spektralni analizator u sklopu mjernog sustava za prikupljanje, analizu i prikaz podataka baziranog na PC računalima (slika 8.). Prigušenje nije analizirano.

U provedenom modelskom istraživanju također je umjetno izazvana tranzijentna ili kratkotrajna pobuda, primjenom impulsnog udara čekićem. Budući da je test impulsnim udarom popraćen problemima u signalnom procesu koji se manifestiraju šumom prisutnim u vremenskom zapisu pobude i odgovora, određivanje vlastitih frekvencija provedeno je točnijom metodom prisilnih oscilacija primjenom periodične pobude elektromagnetskim pobuđivačem.



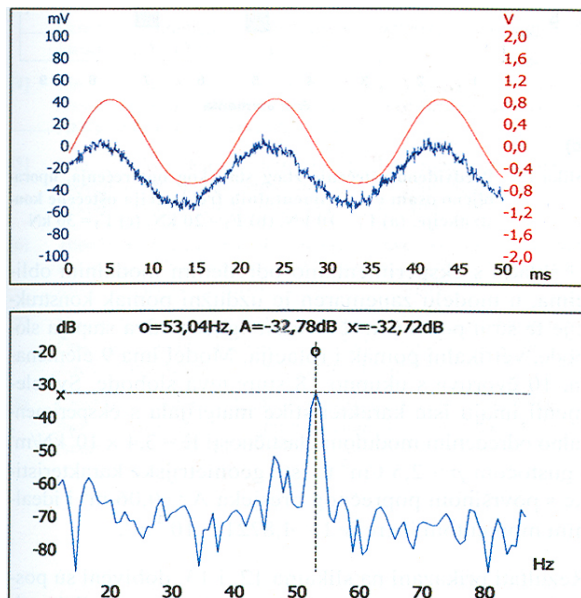


Slika 8. Mjerenje vlastitih frekvencija grede

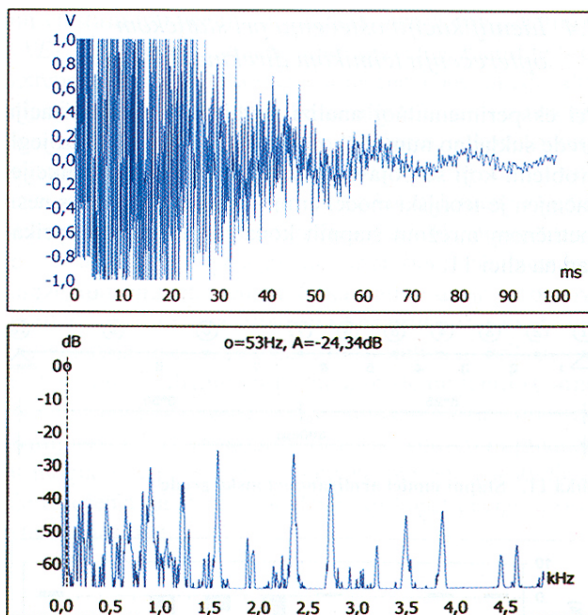
### 4.3 Eksperimentalni rezultati vlastitih frekvencija pri statičkom opterećenju

Programom eksperimentalnog ispitivanja obuhvaćeno je nanošenje različitih razina statičkog koncentriranog opterećenja u sredini raspona analizirane armiranobetonske grede. Stoga je načinjena preliminarna statička analiza nosivosti grede prema kojoj je nosivost grede iznosila  $F = 23,31 \text{ kN}$ . Statičko koncentrirano opterećenje nanošeno je u tri razine, za vrijednosti sile  $F_1 = 10 \text{ kN}$ ,  $F_2 = 20 \text{ kN}$  i  $F_3 = 30 \text{ kN}$ .

Eksperimentalno određivanje vlastitih frekvencija grede provedeno je prije i nakon svakog nivoa statičkog opterećenja koje su potom uporabljene u analizi oštećenja.



Slika 9. Karakterističan odgovor grede na periodičnu pobudu pobudivačem, gore: u vremenskom području, dolje: u frekventnom području (spektar frekvencija) sa "zumiranjem" zapisa



Slika 10. Karakterističan odgovor grede na pobudu impulsnim udarom, gore: u vremenskom području, dolje: u frekventnom području (spektar frekvencija)

Na slikama 9. i 10. prikazani su karakteristični odgovori armiranobetonske grede u vremenskom području s odgovarajućim spektrom frekvencija koji se odnose na periodičnu pobudu i na pobudu impulsnim udarom. U spektru frekvencija naglašeni su oštri vrhovi (engl. *peaks*) koji predstavljaju vlastite frekvencije pojedinih rezonantnih modova vibriranja.

Izmjerene vrijednosti vlastitih frekvencija grede pri postupnom povećanju statičkog opterećenja dane su u tablici 2.

Tablica 2. Izmjerene vlastite frekvencije pri statičkom opterećenju grede (Hz)

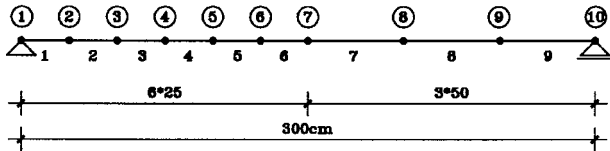
Mod	Neoštećena greda	Koncentrirana sila u sredini raspona F (kN)		
		10	20	30
1	58.00	55.91	53.04	49.70
2	233.70	231.00	226.00	215.20
3	487.00	478.00	465.00	446.00
4	927.00	905.00	874.00	837.00
5	1362.00	1339.00	1302.00	1245.00
6	2034.00	1994.00	1938.00	1855.00
7	2798.00	2739.00	2646.00	2539.00
8	3564.00	3501.00	3403.00	3249.00

Kao što se očekuje, formiranje pukotina uzrokuje pad krutosti armiranobetonske grede, što ima za posljedicu pad njezinih vlastitih frekvencija.

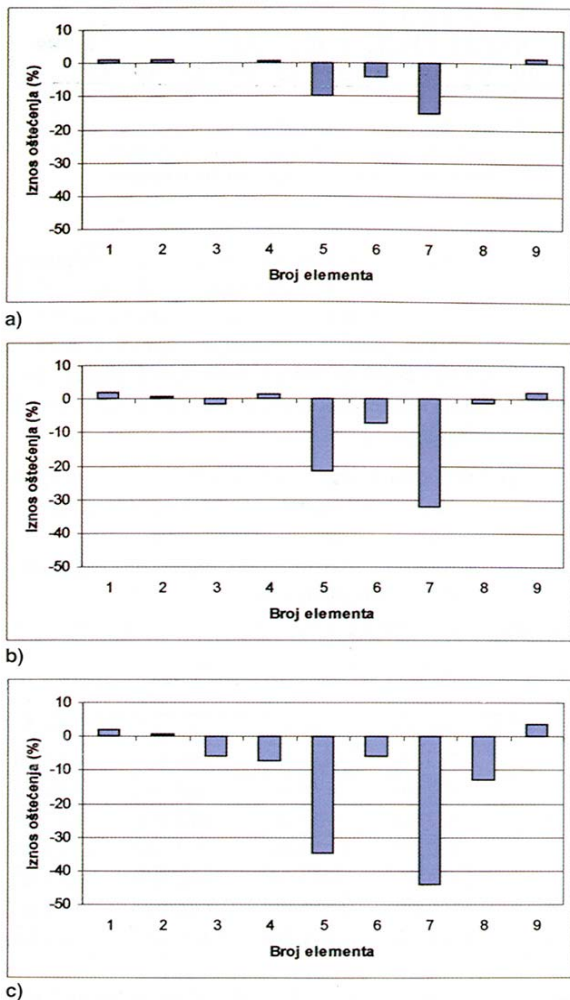


4.4 Identifikacija oštećenja pri statičkom opterećenju tehnikom direktne iteracije

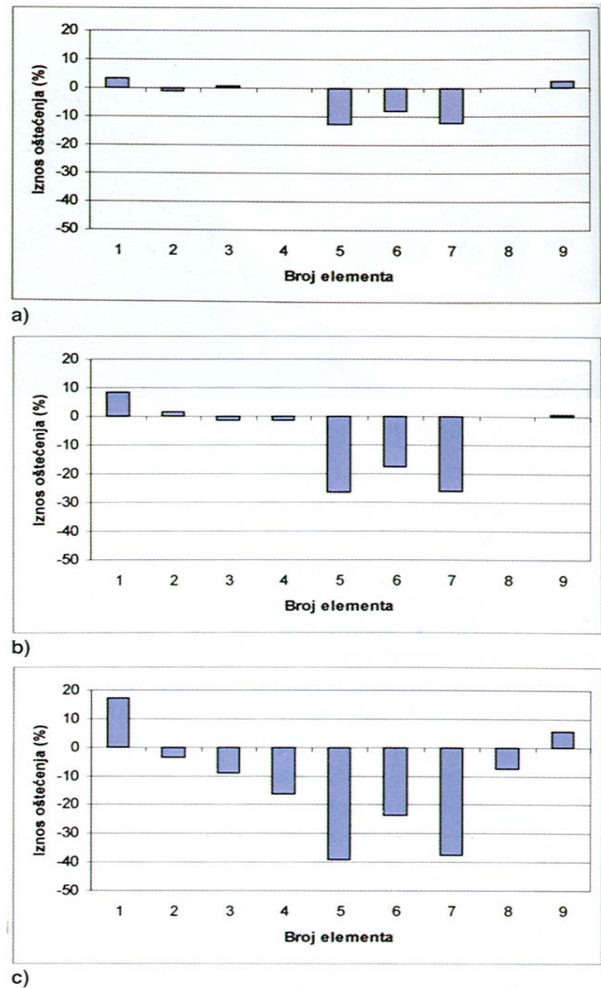
Pri eksperimentalnoj analizi usvojena je diskretizacija grede sukladno numeričkom modelu. Kako bi se izbjegli problemi koji se pojavljuju zbog simetrije konstrukcije, načinjen je teorijski model armiranobetonske grede s nesimetričnom mrežom štapnih konačnih elemenata, prikazan na slici 11.



Slika 11. Štapni model armiranobetonske grede



Slika 12. Predviđeno oštećenje zbog statičkog opterećenja, uporabljeno pet eksperimentalnih frekvencija oštećene konstrukcije, (a) F<sub>1</sub> = 10 kN, (b) F<sub>2</sub> = 20 kN, (c) F<sub>3</sub> = 30 kN



Slika 13. Predviđeno oštećenje zbog statičkog opterećenja, uporabljeno osam eksperimentalnih frekvencija oštećene konstrukcije, (a) F<sub>1</sub> = 10 kN, (b) F<sub>2</sub> = 20 kN, (c) F<sub>3</sub> = 30 kN

U skladu s eksperimentalno određenim modalnim oblicima, u modelu zanemaren je uzdužni pomak konstrukcije te su u pojedinom čvoru omogućena dva stupnja slobode, vertikalni pomak i rotacija. Model ima 9 elemenata, 10 čvorova s ukupno 18 stupnjeva slobode. Svi elementi imaju iste karakteristike materijala s eksperimentalno određenim modulom elastičnosti  $E = 3,4 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$  i gustoćom  $\rho = 2,5 \text{ t/m}^3$  te iste geometrijske karakteristike s površinom poprečnog presjeka  $A = 0,06 \text{ m}^2$  i idealnim momentom inercije  $I = 4,8721 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ .

Rezultati prikazani na slikama 12. i 13. dobiveni su postupkom inverznog predviđanja oštećenja za različite nivoe statičkog opterećenja grede. Ovdje su pri utvrđivanju oštećenja primjenom tehnike direktne iteracije primjenjeni svi vlastiti vektori neoštećene konstrukcije.

Uočeno je da se manje oštećenje grede zbog opterećenja od 10 kN može dovoljno točno predvidjeti uporabom samo 5 eksperimentalnih frekvencija oštećene konstrukcije (slika 12.a). Kod većih oštećenja pri razini opterećenja od 20 i 30 kN, oštećenje se može grubo predvidjeti uporabom samo 5 eksperimentalnih frekvencija oštećene konstrukcije (slika 12.b i 12.c). Međutim, ako se upotrijebi 8 eksperimentalnih frekvencija oštećene konstrukcije, i lokacija i iznos oštećenja mogu se dovoljno točno odrediti za sve razine opterećenja.

## 5 Zaključak

Uporabom eksperimentalno određenih dinamičkih parametara u numeričkim algoritmima poznatih pod nazivom metode identificiranja sustava, u ovom je radu predstavljena metoda utvrđivanja oštećenja kojom se mogu uspješno odrediti mjesto i razmjor strukturalnog oštećenja na osnovi poznavanja samo ograničenog broja izmjere-

nih vlastitih frekvencija oštećene konstrukcije (manji od  $NXE$ ). Što je manje strukturalno oštećenje, manji je broj potrebnih vlastitih frekvencija oštećene konstrukcije. Primijenjena je iterativna tehnika za identifikaciju oštećenja koja se neovisno o intenzitetu oštećenja u konstrukciji (neznatno ili ozbiljno oštećenje) može primijeniti za različite vrste konstrukcija (npr. slobodno oslonjene i kontinuirane). Osim toga, predstavljena metoda primjenljiva je za simetrične konstrukcije uporabom nesimetrične mreže konačnih elemenata. Pokazano je da se na osnovi utvrđenih parametara oštećenja konstrukcije i modifikacije konstrukcijskog sustava, koji su dobiveni prikazanim postupkom utvrđivanja oštećenja, može ocijeniti stvarno stanje promatrane konstrukcije odnosno njezina preostala trajnost. Istraživanja provedena u ovom radu pokazuju mogućnost primjene predložene metode za utvrđivanje oštećenja na stvarne građevinske konstrukcije, a osobito na mostove.

## LITERATURA

- [1] Mottershead, J. E.; Friswell, M. I.: *Model Updating in Structural Dynamics: A Survey*, Journal of Sound and Vibration, 167 (1993) 2, 347-375.
- [2] Samman, M. M.; Biswas, M.; Pandey, A. K.: *Employing Pattern Recognition for Detecting Cracks in a Bridge Model*, Modal Analysis IJAEMA, 6 (1991) 1, 35-44.
- [3] Lee, U.; Shin, J.: *A frequency response function-based structural damage identification method*, Computers & Structures, 80 (2002) 2, 117-132.
- [4] Lin, Y.; Lin, K. L.: *Transient Impact Response of Bridge I-Girders with and without Flaws*, Journal of Bridge Engineering, ASCE, 2 (1997) 4, 131-138.
- [5] Lim, T. W.; Kashangaki, T. A. L.: *Structural Damage Detection of Space Truss Structures Using Best Achievable Eigenvectors*, AIAA Journal, 32 (1994) 5, 1049-1057.
- [6] Topole, K. G.; Stubbs, N.: *Nondestructive Damage Evaluation in Complex Structures from a Minimum of Modal Parameters*, Modal Analysis IJAEMA, 10 (1995) 2, 95-103.
- [7] Shi, Z. Y.; Law, S. S.; Zhang, L. M.: *Damage Localization by Directly Using Incomplete Mode Shapes*, Journal of Engineering Mechanics, 126 (2000) 12, 656-660.
- [8] Cawley, P.; Adams, R. D.: *The location of defects in structures from measurements of natural frequencies*, Journal of Strain Analysis, 14 (1979) 2, 49-57.
- [9] Hearn, G.; Testa R. B.: *Modal Analysis for Damage Detection in Structures*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 117 (1991) 10, 3042-3063.
- [10] Hassiotis, S.; Jeong, G. D.: *Assessment of structural damage from natural frequency measurements*, Computers & Structures, 49 (1993) 4, 679-691.
- [11] Rak, M.: *Utjecaj intenziteta udarnog opterećenja na promjenu dinamičkih parametara armiranobetonskih konstrukcija*, disertacija, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1996.
- [12] Mikluš Moran, M.: *Procjena oštećenja konstrukcije na bazi promijenjenih dinamičkih svojstava*, Disertacija, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1998.
- [13] Bicanic, N.; Chen, H. P.: *Damage identification in framed structures using natural frequencies*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40 (1997) 23, 4451-4468.
- [14] Mekjavić, I.: *Ocjena trajnosti betonskih mostova na osnovi dinamičkih parametara*, disertacija, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2004.
- [15] Šimunić, Ž.; Radić, J.; Mekjavić, I.; Pavlović, B.: *Analiza trajnosti grednih mostova na temelju dinamičkih i statičkih pokazatelja*, Građevinar, 53 (2001) 2, 61-74.