

# Dijagrami međudjelovanja za dimenzioniranje vitkih stupova

---

**Galić, Josip; Kučer, Anto; Sorić, Zorislav; Kišiček, Tomislav**

*Source / Izvornik:* **Građevinar, 2005, 57, 869 - 877**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:263011>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-18**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)



# Dijagrami međudjelovanja za dimenzioniranje vitkih stupova

Josip Galić, Anto Kučer, Zorislav Sorić, Tomislav Kišiček

## Ključne riječi

armiranobetonski stupovi,  
vitki stup,  
pravokutni presjek,  
ekscentričnost,  
vitkost, teorija II. reda,  
dijagrami međudjelovanja

## Key words

reinforced concrete  
slender piers,  
rectangular cross-section,  
eccentricity,  
slenderness,  
second order theory,  
interaction diagrams

## Mots clés

piliers minces en  
béton armé,  
coupe rectangulaire,  
excentricité,  
minceur,  
théorie de deuxième ordre,  
diagrammes d'interaction

## Ключевые слова

железобетонная гибкая  
колонна,  
прямоугольное сечение,  
эксцентриситет,  
гибкость,  
теория второго порядка,  
диаграммы  
взаимодействия

## Schlüsselworte

schlanke Stahlbetonsäule,  
rechteckiger Querschnitt,  
Exzentrizität,  
Schlankheit,  
Theorie des II. Grades,  
Interaktionsdiagramme

J. Galić, A. Kučer, Z. Sorić, T. Kišiček

Prethodno priopćavanje

## Dijagrami međudjelovanja za dimenzioniranje vitkih stupova

U članku su dani granični uvjeti za vitkost stupova prema hrvatskim, europskim i američkim propisima kada je potrebno proračunavati vitke stupove uzimajući u obzir povećanje unutarnjih sila zbog deformacije stupa. Opisani su mogući oblici sloma vitkih armiranobetonskih elemenata te približni proračun vitkih elemenata po teoriji II. reda – "model stupa". Opisan je i približni postupak proračuna vitkih stupova prema EC2 te su na temelju tog postupka izrađeni dijagrami međudjelovanja.

J. Galić, A. Kučer, Z. Sorić, T. Kišiček

Preliminary note

## Interaction diagrams for slender-column dimensioning

Boundary conditions for column slenderness are presented in accordance with Croatian, European and American regulations, for cases when slender columns must be designed taking into account an increase in internal forces due to column deformation. Possible forms of failure of slender reinforced-concrete elements are described, and an approximate design of slender elements is given as based on the second order theory "column model". An approximate design procedure for slender column design according to EC2 is also described, and interaction diagrams based on this procedure are presented.

J. Galić, A. Kučer, Z. Sorić, T. Kišiček

Note préliminaire

## Diagrammes d'interaction pour le dimensionnement des piliers minces

Les conditions limites pour la minceur des piliers sont présentées en conformité avec les règlements croates, européens et américains, pour les cas où les piliers minces doivent être dimensionnés en tenant compte de l'augmentation des forces internes dues à la déformation du pilier. Les aspects possibles de la rupture des éléments minces en béton armé sont décrits, et le calcul approximatif des éléments minces est donné sur la base de la théorie de deuxième ordre "modèle de pilier". Le procédé approximatif de calcul des piliers minces selon EC2 est également décrit, et les diagrammes d'interaction basés sur ce procédé sont présentés.

Џ. Галић, А. Кучер, З. Сорић, Т. Кишичек

Предварительное сообщение

## Диаграммы взаимодействия по установлению размеров гибких колонн

В статье описываются предельные условия согласно хорватским, европейским и американским правилам, когда необходимо провести расчёт гибких колонн, принимая во внимание повышение внутренних сил из-за деформации колонны. Описаны возможные формы разрушения гибких железобетонных элементов, а также приблизительный расчёт гибких элементов по теории второго порядка – „модель колонны“. Описан и приблизительный способ расчёта гибких колонн по EC2, а затем на основании этого способа созданы диаграммы взаимодействия.

J. Galić, A. Kučer, Z. Sorić, T. Kišiček

Vorherige Mitteilung

## Interaktionsdiagramme für die Bemessung schlanker Säulen

Im Artikel präsentiert man die Grenzbedingungen für die Säulenschlankheit nach kroatischen, europäischen und amerikanischen Vorschriften für den Fall dass man bei der Berechnung von schlanken Säulen die Steigerung der inneren Kräfte wegen der Säulenverformung in Betracht nehmen muss. Beschrieben sind die möglichen Bruchformen schlanker Stahlbetonelemente und eine annähernde Berechnung nach der Theorie II. Grades - "Säulenmodell". Beschrieben ist ein annäherndes Verfahren für die Berechnung schlanker Säulen nach EC2, und auf Grund dieses Verfahrens sind die Interaktionsdiagramme hergestellt.

Autori: Mr. sc. **Josip Galić**, dipl. ing. građ., Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu; **Anto Kučer**, dipl. ing. građ., Hrvatski institut za mostove i konstrukcije, Zagreb; prof. dr. sc. **Zorislav Sorić**, dipl. ing. građ., mr. sc. **Tomislav Kišiček**, dipl. ing. građ., Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu

## 1 Uvod

Danas se u Hrvatskoj sve više izvode armiranobetonske montažne hale u kojima su stupovi statičkog sustava konzole opterećeni vertikalnom uzdužnom silom i savijanjem zbog ekscentričnog oslanjanja glavnih nosača, djelovanja vjetra ili seizmičkih sila. Također se, osim nosivih konstrukcija od montažnih armiranobetonskih elemenata, izvode i monolitne armiranobetonske konstrukcije industrijskih i stambenih građevina s izrazito vitkim stupovima. Takvi sustavi nerijetko imaju koeficijent vitkosti  $\lambda_i > 100$ , što zahtijeva proračun po teoriji II. reda.

U praksi se često rabe približni postupci proračuna vitkih stupova, i to prema Kordini [10] (DIN 1045) ili prema postupku danom u ACI [3] (*Magnified moments*) kod nas poznatom kao *Metoda povećanja momenta*. Približan postupak prema Kordini moguć je za područje vitkosti  $20 < \lambda_i < 70$ , a „Metoda povećanja momenta“ pogodna je za vitkosti  $\lambda_i < 100$ . U ovom će se radu opisati približni postupak proračuna vitkih stupova prema EC2 [6], koji se može uporabiti za vitkosti  $\lambda_i \leq 140$ . Prikazat će se dijagrami sudjelovanja u kojima je sadržano povećanje momenata savijanja po teoriji II. reda. Ovim će se dijagramima upozoriti na pogrešku koja se čini dimenzioniranjem stupa na razini presjeka ne uzimajući u obzir vitkost elementa u odnosu prema dimenzioniranju stupa na razini elementa uzimajući u obzir vitkost.

## 2 Granične vitkosti

Prema svim propisima, za definiranje vitkoga armiranobetonskog elementa rabi se uvjet da vitkost armiranobetonskoga elementa mora biti manja od neke unaprijed zadane granične vitkosti.

$$\lambda_i = \frac{l_o}{i} < \lambda_{crit} \quad (1)$$

gdje su:

- $\lambda_i$  - koeficijent vitkosti elementa (skraćeno: vitkost)
- $l_o$  - duljina izvijanja elementa
- $i$  - polumjer tromosti u smjeru manjeg otpora izvijanja
- $\lambda_{crit}$  - granični koeficijent vitkosti (skraćeno: granična ili kritična vitkost).

Polumjer tromosti određuje se izrazom:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A_c}}, \quad (2)$$

gdje su:

$I$  = moment tromosti presjeka stupa u smjeru manjeg otpora izvijanju,

$A_c$  = površina poprečnog presjeka stupa.

Prema HRN ENV 1992-1-1 [6] stupovi se smatraju kratkim i nije potreban proračun po teoriji II. reda ako povećanje momenta savijanja određenog teorijom I. reda zbog deformiranja nije veće od 10%. To je ispunjeno kada je zadovoljen jedan od dva sljedeća uvjeta:

$$\lambda_i < 25 \quad \text{i} \quad (3)$$

$$\lambda_i < \frac{15}{\sqrt{v_{Sd}}} \quad (4)$$

gdje su:

$v_{Sd}$  - koeficijent uzdužne sile za element:

$$v_{Sd} = N_{Sd} / (A_c f_{cd})$$

$A_c$  - površina poprečnog presjeka stupa, okomito na smjer uzdužne sile

$f_{cd}$  - proračunska tlačna čvrstoća betona

$N_{Sd}$  - proračunska uzdužna sila, ( $N_{Sd} = \gamma_g \cdot N_g + \gamma_q \cdot N_q$ ).

Za nepomične okvire, uz uvjete (3) i (4), vrijedi i dodatni uvjet:  $\lambda_i \leq \lambda_{crit}$ . Ako je ovaj uvjet zadovoljen, takav stup ne treba provjeravati po teoriji II. reda.

$$\lambda_{crit} = 25 \cdot \left( 2 - \frac{e_{o1}}{e_{o2}} \right) \quad (5)$$

gdje su  $e_{o1}$  i  $e_{o2}$  ekscentričnosti uzdužnog opterećenja na krajevima elementa, pri čemu se pretpostavlja da je  $|e_{o1}| \leq |e_{o2}|$ , (slika 6.).

U slučaju kada se stup ne provjerava po teoriji II. reda i kada je ispunjen uvjet ( $\lambda_i \leq \lambda_{crit}$ ), krajeve stupova ipak treba proračunati tako da ispune najmanje sljedeća dva uvjeta:

$$N_{Rd} \geq N_{Sd} \quad \text{i} \quad (6)$$

$$M_{Rd} \geq N_{Sd} \frac{h}{20} \quad (7)$$

gdje su:

$N_{Rd}$  - proračunska nosivost stupa na tlak

$M_{Rd}$  - proračunska nosivost stupa na savijanje

$h$  - dimenzija (visina) presjeka stupa u ravnini savijanja.

Za vitke stupove dopuštena je uporaba približnog postupka izdvojenog stupa (postupak "model stupa") na području  $0 < \lambda_i < 140$ , ali uz zadovoljenu zahtijevanu razinu sigurnosti. Za pomične okvire dopuštaju se i približne metode povećanja horizontalnih sila zbog imperfekcija i teorije II. reda, ali srednja vitkost svakog kata ( $\lambda_m$ ) pravilnog okvira mora zadovoljavati sljedeće uvjete:

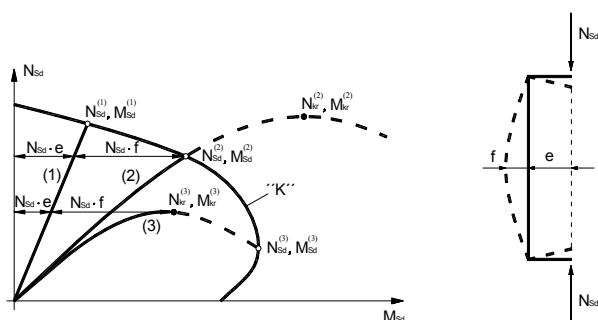
$$\lambda_m < 50 \quad (8)$$

$$\lambda_m < \frac{20}{\sqrt{v_{Sd}}} \quad (9)$$

Ako je srednja vitkost kata veća od zahtijevane, potrebno je koristiti se proračunom povećanja momenta koji uzima u obzir stvarni dijagram  $\sigma$ - $\epsilon$  za beton.

### 3 Mogući oblici otkazivanja nosivosti armiranobetonskih elemenata

Kada je armiranobetonski element (stup) opterećen uzdužnom tlačnom silom i momentom savijanja mogući su različiti oblici otkazivanja koji ovise o vitkosti i vrijednosti proračunske uzdužne sile  $N_{Sd}$  i proračunskog momenta savijanja  $M_{Sd}$ .



Slika 1. Dijagram međudjelovanja. Pravac (1) predstavlja povećanje sile za stup male vitkosti, dok krivulje predstavljaju povećanje sile za srednju (2) i veliku (3) vitkost [10]

Krivulja "K" na slici 1. predstavlja vrijednosti kombinacije  $M_{Sd}$  i  $N_{Sd}$ , kada dolazi do graničnih deformacija u čeličnoj armaturi ili betonu odnosno sloma presjeka zbog doseganja granične nosivosti građiva elementa, a naziva se dijagram međudjelovanja.

Pravac (1) predstavlja slučaj kad se radi o kratkom stupu, tj. kad se zanemare deformacije od savijanja i kad ne postoje pogreške izvedbe. Zbog velike krutosti elementa na izvijanje kritična se sila ne može dostići pa je problem nosivosti problem graničnih napreznja. Do sloma dolazi dostizanjem proračunskih sila  $M_{Sd}^{(1)}$  i  $N_{Sd}^{(1)}$ .

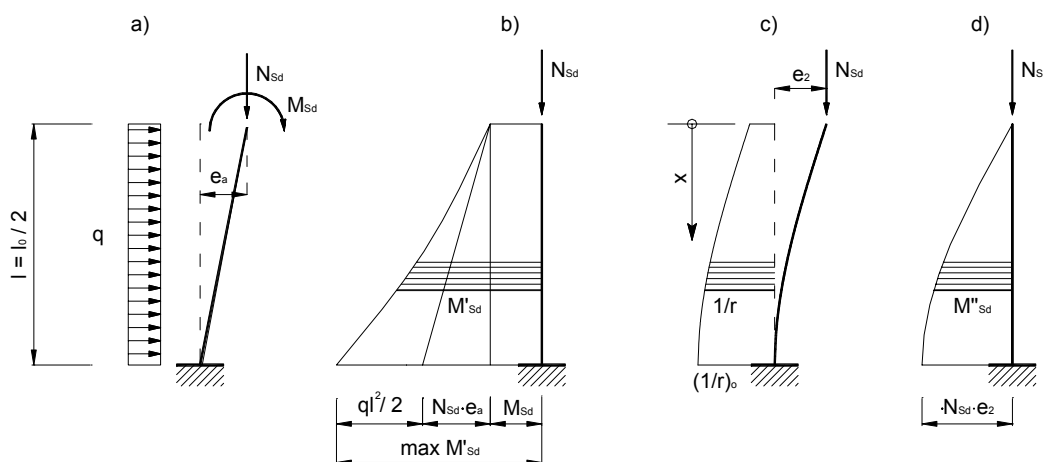
Krivulja (2) predstavlja slučaj srednje vitkosti kada postoji dodatni progib zbog momenta savijanja, tako da slom nastaje uz manju uzdužnu silu ( $N_{Sd}^{(2)} < N_{Sd}^{(1)}$ ) i veći moment ( $M_{Sd}^{(2)} > M_{Sd}^{(1)}$ ), ali se slom događa također zbog napreznja a ne izvijanja.

Krivulja (3) je slučaj vrlo vitkih elemenata kada zbog povećanja vitkosti progib  $f$  od momenta savijanja dostiže veću vrijednost, tako da do sloma dolazi kod kritične tlačne sile  $N_{Sd}^{(3)} < N_{Sd}^{(2)}$  i momenta savijanja  $M_{Sd}^{(3)} < M_{Sd}^{(2)}$ .

### 4 Približni proračun vitkih elemenata po teoriji II. reda – model stupa

Približni postupak proračuna vitkih stupova *model stupa* jedan je od najčešće upotrebljivanih i na njegovu se pojednostavnjenju temelji približni proračun vitkih stupova dan u ENV 1992-1-1 [6]. Postupak je primjenjiv za stupove nepomičnih okvira, iako je moguća primjena i na pojedine pomične okvire.

Postupak uvodi aproksimaciju konačnog oblika deformirane osi stupa kada dolazi do sloma. *Model stupa* zove se zato što se u analizi rabi konzolni stup koji ima istu duljinu izvijanja kao i stup okvira za koji se radi prora-



Slika 2. Model stupa: a) granično opterećenje i nesavršenost osi stupa; b) momenti savijanja I. reda; c) deformiranje osi stupa i zakrivljenost stupa zbog momenata savijanja I. i II. reda; d) momenti savijanja II. reda [8]

čun, a za koji se pretpostavlja da je poradi savijanja ukupnim graničnim utjecajima I. i II. reda deformiran u obliku sinusoidnog poluvala i da se najveći momenti savijanja I. i II. reda pojavljuju na mjestu upetosti.

Na slici 2. oznaka  $e_a$  dodatna je ekscentričnost zbog netočnosti izvedbe i nesavršenosti geometrije stupova.

Pomak vrha stupa proračunava se preko izraza (10), gdje je na vrhu stupa, tj. na mjestu djelovanja sile,  $x = 0$ , dok je na upetom kraju  $x = l$ .

$$e_2 = \int_0^l (1/r)_x \cdot m(x) \cdot dx \quad (10)$$

Pretpostavlja se sinusni oblik zakrivljenosti stupa kao funkcija od za sada nepoznate zakrivljenosti na mjestu upetosti  $(1/r)_o$ , tj.:  $(1/r)_x = (1/r)_o \cdot \sin(x \cdot \pi / (2 \cdot l))$ . Moment savijanja od jedinične horizontalne sile iznosi:  $m(x) = 1,0 \cdot x$ . Pomak vrha stupa  $e_2$ , uz  $\pi^2 \approx 10$ , može se izraziti formulom (11):

$$e_2 = \int_0^l (1/r)_o \cdot \sin \frac{x\pi}{2l} \cdot x \cdot 1,0 \cdot dx = \frac{4}{\pi^2} (1/r)_o \cdot l^2 = 0,4 \cdot (1/r)_o \cdot l^2 \quad (11)$$

Za konzolni je stup duljina izvijanja  $l_o = 2 \cdot l$ , pa je pomak vrha stupa

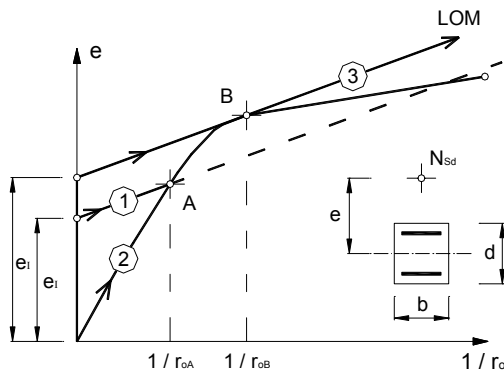
$$e_2 = 0,1 \cdot (1/r)_o \cdot l_o^2 \quad (12)$$

Ukupna ekscentričnost od svih djelovanja iznosi:

$$e_{uk} = e_1 + 0,1 \cdot (1/r)_o \cdot l_o^2 \quad (13)$$

gdje je  $e_1$  ukupna ekscentričnost I. reda, a može predstavljati zbroj ekscentriciteta zbog opterećenja, nesavršenosti i puzanja.

Promjena vrijednosti ekscentričnost stupa koji je opterećen vanjskom proračunskom tlačnom silom  $N_{Sd}$  u ovisnosti o zakrivljenosti  $(1/r)_o$  na mjestu upetosti može se prikazati pravcem 1 na slici 3.



Slika 3. Ekscentričnost sile na mjestu upetosti stupa u ovisnosti o zakrivljenosti  $(1/r)_o$  presjeka: pravci (1) i (3) su ekscentričnosti vanjskog djelovanja; krivulja (2) je ekcentričnost  $e_r$  unutarnjih sila [8]

Za svaki presjek koji je opterećen uzdužnom silom može se definirati krivulja ovisnosti ekscentričnosti unutarnjih sila  $e_r = M_r / N_r$  i zakrivljenosti  $(1/r)_o$  (krivulja (2) na slici 3. Pritom su  $M_r$  i  $N_r$  rezultante unutarnjeg naprezanja stupa.

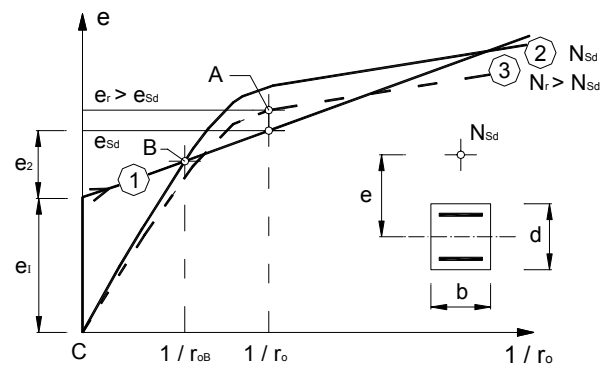
Pod opterećenjem zakrivljenost presjeka raste sve dok se u presjeku ne pojavi ravnotežno stanje naprezanja. Kako se krivulje i pravci na slici crtaju za istu uzdužnu silu  $N_{Sd}$ , razvoj deformacija se zaustavlja kada se dosegne vrijednost zakrivljenosti  $(1/r)_{oA}$ , tj. kada se izjednače ekscentričnosti pravca i krivulje (točka A na slici 3.). Moguća je pojava da je ekscentričnost prvog reda toliki da se dobije pravac (3) na slici 3, pri čemu može nastati ravnoteža u točki B. Takva ravnoteža nije baš pouzdana jer mali nepredviđeni porast ekscentričnosti dovodi do mimoilaženja pravca i krivulje što znači da se događa slom zbog gubitka stabilnosti.

Da bi se osigurala stabilnost stupa potrebno je da za zadani presjek i pretpostavljenu tlačnu silu  $N$  za koju vrijedi ( $N_{Sd} \leq N$ ) postoji zakrivljenost  $(1/r)_o$  kojoj odgovaraju vrijednosti  $M_r$  i  $N_r$  (kada je  $N_r = N$ ) i da su ispunjeni sljedeći uvjeti:

$$N_{Sd} \leq N_r \quad (14)$$

$$e \leq e_r \quad (15)$$

Na slici 4. pravac (1) jest pravac vanjske ekscentričnosti. Krivulja (2) je krivulja unutarnje ekscentričnosti za stvarnu osnu silu pri čemu vrijedi  $N_r \geq N_{Sd}$ , tj.  $N_{Sd} \leq N_r$ . Krivulja (3) jest krivulja unutarnje ekscentričnosti za veću pretpostavljenu uzdužnu silu. Uvjeti dani u izrazima (14) i (15) su dovoljni jer pravac (1), ako nema zajedničku točku s krivuljom (2), ne može istodobno sjeći ili tangirati krivulju (3).



Slika 4. Uvjeti ekscentričnosti pri vanjskoj tlačnoj sili manjoj od unutarnje sile ( $N_{Sd} < N_r$ ): pravac (1) = ekscentričnost uslijed vanjskog djelovanja; krivulja (2) = ekscentričnost unutarnjih sila za stvarnu vrijednost sile  $N_{Sd}$ ; krivulja (3) = ekscentričnost unutarnjih sila za pretpostavljenu vrijednost unutarnje sile  $N_r$  [9]

### 5 Proračun približnim postupkom prema EC2

U HRN ENV 1992-1-1 [6] definirani su izrazi preko kojih se uzima učinak nesavršenosti, a temelje se na veličini nagiba  $v_1$  cijele konstrukcije i ekvivalentnoj geometrijskoj nesavršenosti  $e_a$  u najnepovoljnijem pravcu za izdvojene elemente. Ti izrazi glase:

$$v_1 = \frac{1}{100 \cdot \sqrt{h_{tot}}} \text{ u radijanima} \quad (16)$$

$$e_a = v_1 \frac{l_o}{2}, \quad (17)$$

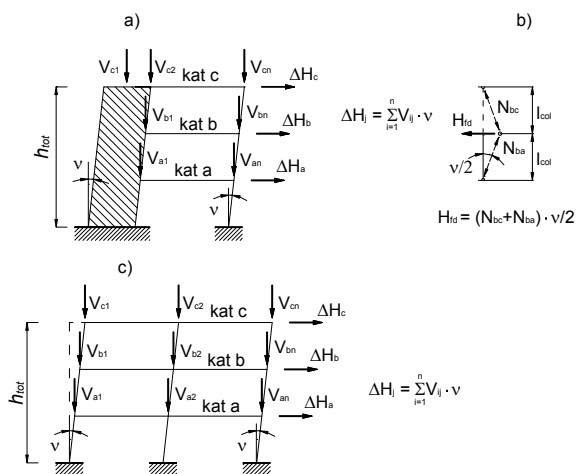
gdje je:

$v_1$  - nagib u odnosu na vertikalu

$l_o$  - duljina izvijanja

$h_{tot}$  - ukupna visina sustava u metrima.

U HRN ENV 1992-1-1 [6] još se zahtijeva da se za slučajeve kad se može zanemariti učinak II. reda uzima  $v_1 > 1/400$ , a za slučajeve kad se učinak II. reda trebaju uzeti u obzir uzima  $v_1 > 1/200$ . Dopušteno je da se nesavršenosti kod okvira može uzeti zamjenjujućim horizontalnim silama kao što je prikazano na slici 5.



Slika 5. Primjena geometrijskih nesavršenosti; nesavršenost za izračunavanje horizontalnih sila koje djeluju na element za ukrućenje ili u razinama pojedinih stropova [6] i [10]

Dopunska se ekscentričnost od savijanja (po teoriji II. reda), za nepomične i pravilne pomične okvire, određuje približnim postupkom koji se temelji na pojednostavljenju postupka „model stupa“. Iz okvira se izdvoje stupovi, proračuna njihova vitkost i odrede ekscentričnost u najkritičnijim presjecima. Bitno je u ovome postupku da su stupovi konstantnoga poprečnoga presjeka, a presjek koji je izložen najvećem naprezanju proračunava se na ukupnu ekscentričnost  $e_{tot}$ . Kad su

ekscentričnosti I. reda jednaki na oba kraja stupa ili se radi o stupu pomičnog okvira (slika 6.a), ukupna se ekscentričnost proračunava prema izrazu:

$$e_{tot} = e_o + e_a + e_2 \quad (18)$$

gdje su:

$e_o$  - ekscentričnost I. reda,  $e_o = M'_{Sd} / N_{Sd}$

$M'_{Sd}$  - proračunski moment savijanja I. reda

$N_{Sd}$  - proračunska tlačna sila u stupu

$e_a$  - dodatna ekscentričnost prema izrazu (17)

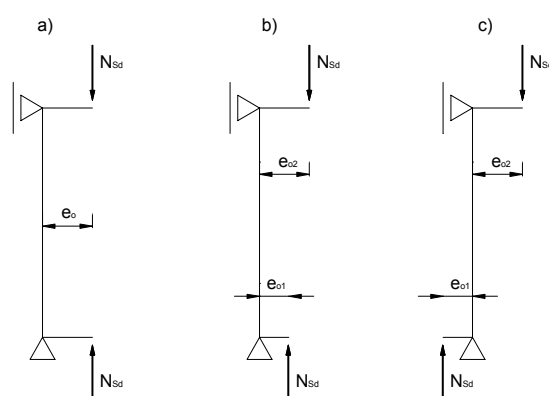
$e_2$  - ekscentričnost II. reda koji se odredi približnim postupkom.

Za nepomične okvire kod kojih su momenti I. reda promjenjivi duž stupova, za ekscentričnost I. reda uzima se veća od vrijednosti ekvivalentne ekscentričnosti proračunanih prema sljedećim izrazima:

$$e_o = 0,6 \cdot e_{o2} + 0,4 \cdot e_{o1} \quad (19)$$

$$e_o = 0,4 \cdot e_{o2} \quad (20)$$

gdje  $e_{o2}$  i  $e_{o1}$  označavaju ekscentričnosti I. reda na krajevima stupa, pri čemu je  $|e_{o2}| \geq |e_{o1}|$  (slika 6.b i 6.c).



Slika 6. Proračunski modeli za određivanje ukupne odnosno ekvivalentne ekscentričnosti [10]

U približnom je postupku utjecaj puzanja zanemaren, dok upute za točniji proračun stupova [6] nalažu da ga je potrebno uzeti u obzir ako dovodi do povećanja momenta savijanja za više od 10%. U tom se slučaju puzanje uzima analogno kao kod proračuna progiba grednih nosača, tj. reduciranjem modula elastičnosti ili primjenom Trostove jednadžbe.

Dopunska se ekscentričnost, odnosno učinak zakrivljenosti stupa, proračunava izrazom:

$$e_2 = K_1 \cdot (1/r) \frac{l_o^2}{10} \quad (21)$$

gdje su:

$l_o$  - duljina izvijanja stupa,

$l/r$  - zakrivljenost kritičnog presjeka.

Izraz (21) sadrži sa koeficijent redukcije za zakrivljenost  $K_l \leq 1$ , jer je učinak tlačne sile manji za manje vitkosti stupa.

$$K_1 = \frac{\lambda}{20} - 0,75 \quad \text{za: } 15 \leq \lambda \leq 35 \quad (22)$$

$$K_1 = 1,0 \quad \text{za: } \lambda > 35 \quad (23)$$

Pojednostavljenije metode *model stupa*, radi osiguravanja direktnog dimenzioniranja, postiže se izrazom za zakrivljenost u kojem je ona neovisna o količini armature:

$$1/r = 2 \cdot K_2 \frac{\varepsilon_{yd}}{0,9 \cdot d} \quad (24)$$

gdje su:

$\varepsilon_{yd} = f_{yd}/E_s$  - proračunska deformacija pri popuštanju armature

$d$  - statička visina presjeka

$K_2$  - koeficijent kojim se uzima u obzir smanjenje zakrivljenosti zbog povećanja tlačne sile.

Koeficijent  $K_2$  određuje se izrazom:

$$K_2 = \frac{N_{ud} - N_{Sd}}{N_{ud} - N_{bal}} \leq 1,0 \quad (25)$$

gdje su:

$N_{ud}$  - proračunska granična nosivost presjeka stupa na tlak:  $N_{ud} = 0,85 f_{cd} A_c + f_{yd} (A_{s1} + A_{s2})$

$N_{Sd}$  - proračunska tlačna sila

$N_{bal}$  - uzdužna sila za koju je otpornost presjeka na savijanje najveća. Za simetrično armirane pravokutne presjeke može se usvojiti:  $N_{bal} = 0,4 f_{cd} A_c$ , gdje je  $A_c$  ploština poprečnog presjeka stupa.

Za  $k_2 = 1,0$  proračun je na strani sigurnosti [6].

Ovaj postupak vrijedi za vitkosti stupova manje od 140 i ekscentričnost I. reda  $e_o > 0,1 \cdot h$ , gdje je  $h$  dimenzija stupa u smjeru izvijanja. Ako to nije ispunjeno, potrebno je koristiti se drugim metodama.

## 6 Dijagrami međudjelovanja za dimenzioniranje vitkih stupova

Za izradu dijagrama interakcije vitkih stupova uporabljen je približan postupak prema HRN ENV 1992-1-1 [6]. Od mogućih djelovanja ekscentrične tlačne sile izabran je slučaj kad su ekscentričnosti I. reda jednaki na oba kraja stupa ili se radi o stupu nepomičnog okvira (slika 6.a).

Od mogućih okvirnih sustava, izabran je horizontalno pridržani sustav za koji se može uzeti veličina nagiba  $v_l = 1/400$ . U tom slučaju izraz (17) postaje:

$$e_a = \frac{l_o}{800} \quad (26)$$

Ovisnost vitkosti i duljine izvijanja dana je izrazima (1) i (2), iz kojih se za pravokutni presjek dimenzije  $h$  u smjeru izvijanja dobije:

$$i = \frac{h}{\sqrt{12}} \quad (27)$$

$$l_o = \frac{\lambda \cdot h}{\sqrt{12}} \quad (28)$$

Tada se ekscentričnost  $e_a$  može izraziti ovisno o dimenziji presjeka  $h$  i vitkosti elementa:

$$e_a = \frac{\lambda \cdot h}{800 \sqrt{12}} \quad (29)$$

Pretpostavkom odnosa  $d = 0,9 \cdot h$  i uvrštavanjem izraza (28) i (24) u izraz (21), za dopunsku se ekscentričnost zbog deformiranja elementa dobije izraz ovisan o dimenziji presjeka  $h$  i vitkosti elementa uz  $k_2 = 1,0$

$$e_2 = 0,1 \cdot K_1 \frac{1}{0,9^2} \frac{\lambda^2 h}{6} \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (30)$$

Koeficijent zakrivljenost  $K_l$  dan je u izrazima (22) i (23).

Ukupni ekscentricitet djelovanja tlačne sile,  $e_{tot} = e_o + e_a + e_2$ , uvršten je u izraze određene iz uvjeta ravnoteže:

$$N_{Sd} = N_{Rd} \quad (31)$$

$$M_{Sd}^l = N_{Sd} \cdot (e_o + e_a + e_2) = M_{Rd} \quad (32)$$

gdje su:

$M_{Sd}^l$  - proračunski moment savijanja II. reda

$M_{Sd}^l$  - proračunski moment savijanja I. reda,  
 $M_{Sd}^l = N_{Sd} \cdot e_o$

$M_{Rd}$  - proračunska nosivost stupa na savijanje

$N_{Sd}$  - proračunska tlačna sila u stupu

$N_{Rd}$  - proračunska nosivost stupa na tlak.

Uvrštavanjem jednadžbi za unutarnje sile u izraze (31) i (32) dobije se (vidi sliku 7.):

$$N_{Sd} = 0,85 f_{cd} \alpha_v \xi db + A_{s2} \sigma_{s2} - A_{s1} \sigma_{s1} \quad (33)$$

$$M^{\text{II}}_{Sd} = 0,85 f_{cd} \alpha_v \xi db \left( \frac{h}{2} - k_a x \right) + A_{s2} \sigma_{s2} \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) + A_{s1} \sigma_{s1} \left( \frac{h}{2} - d_1 \right) \quad (34)$$

Budući da za proračunski moment savijanja II. reda vrijedi:

$$M^{\text{II}}_{Sd} = M^{\text{I}}_{Sd} + N_{Sd} (e_a + e_2) \quad (35)$$

proračunski moment savijanja I. reda  $M^{\text{I}}_{Sd}$  može se dobiti uvrštavanjem izraza (33) i (34) u izraz (35):

$$M^{\text{I}}_{Sd} = M^{\text{II}}_{Sd} - N_{Sd} (e_a + e_2) = \left[ 0,85 f_{cd} \alpha_v \xi db \left( \frac{h}{2} - k_a x \right) + A_{s2} \sigma_{s2} \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) + A_{s1} \sigma_{s1} \left( \frac{h}{2} - d_1 \right) \right] - \left[ (0,85 f_{cd} \alpha_v \xi db + A_{s2} \sigma_{s2} - A_{s1} \sigma_{s1}) \cdot (e_a + e_2) \right] \quad (36)$$

Izraz (33) dijeli se faktorom  $(b \cdot h \cdot f_{cd})$ , a izraz (36) faktorom  $(b \cdot h^2 \cdot f_{cd})$  te se uvode mehanički koeficijenti armiranja

$$\omega_1 = \rho_1 \frac{f_{yd}}{f_{cd}} = \frac{A_{s1}}{bh} \frac{f_{yd}}{f_{cd}} \quad (37)$$

$$\omega_2 = \rho_2 \frac{f_{yd}}{f_{cd}} = \frac{A_{s2}}{bh} \frac{f_{yd}}{f_{cd}} \quad (38)$$

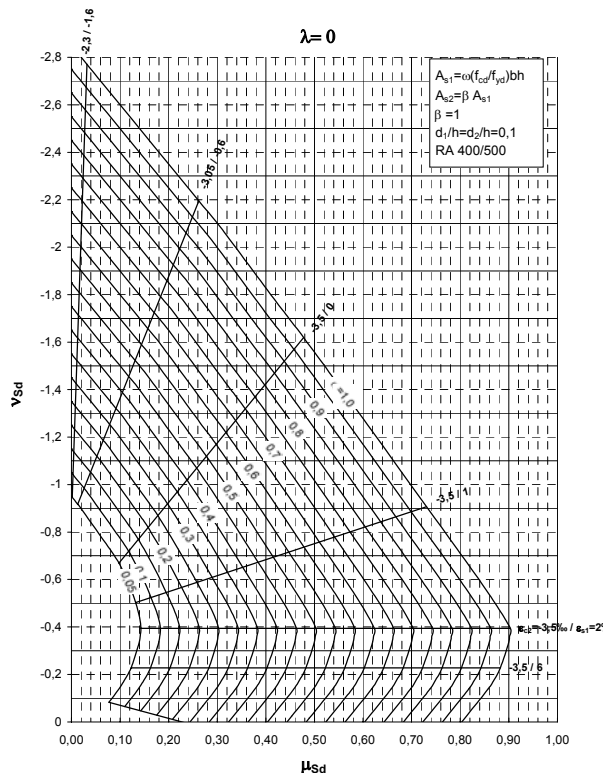
i omjer

$$\beta = \frac{A_{s2}}{A_{s1}} \quad (39)$$

Tada izrazi za konstruiranje dijagrama postaju neovisni o dimenzijama presjeka i armature te glase:

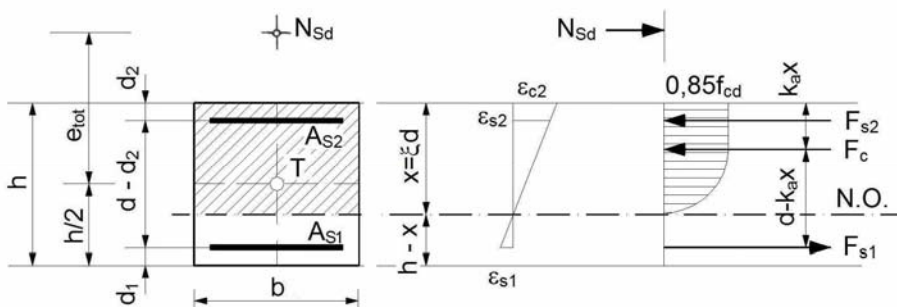
$$\nu_{Sd} = \frac{N_{Sd}}{bh f_{cd}} = 0,85 \alpha_v \xi \frac{d}{h} + \omega_2 \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} - \omega_1 \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}} \quad (40)$$

Izrazi (33), (34), (40) i (41) vrijede za slučaj kad je neutralna os unutar presjeka. Ako neutralna os pada izvan presjeka, u navedene izraze potrebno je uvrstiti promjenu predznaka.



Slika 8. Interakcijski dijagram na razini presjeka,  $\lambda = 0$

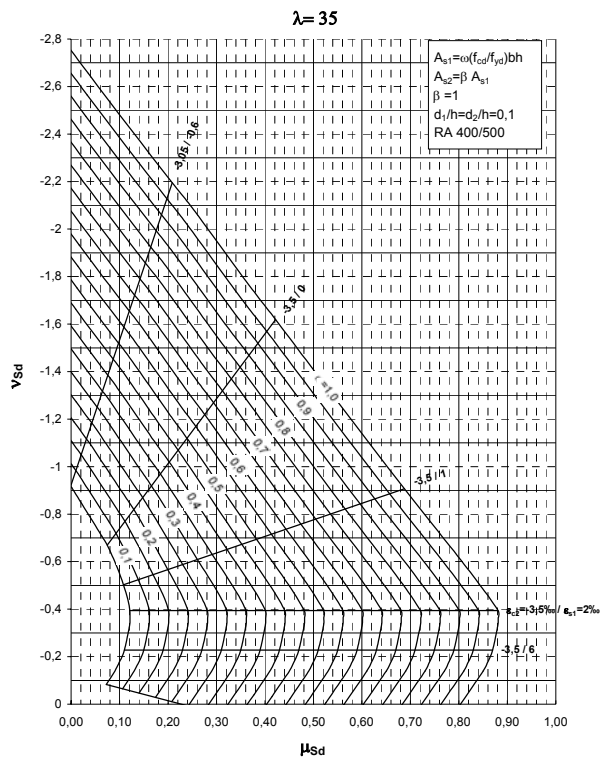
Pri izradi pojedinog dijagrama, predviđene su deformacije  $\epsilon_{c2}$  i  $\epsilon_{s1}$ , odnosno koeficijent položaja neutralne osi  $\xi$



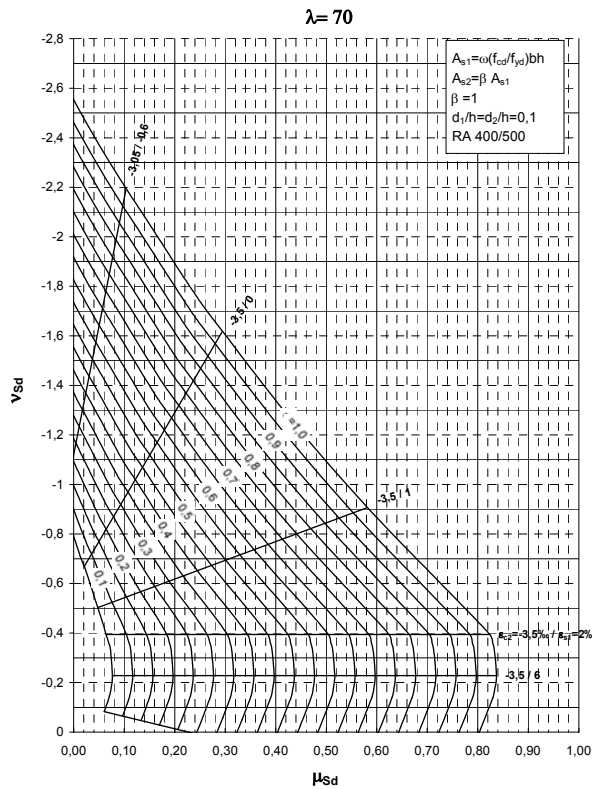
Slika 7. Poprečni presjek, dijagrami relativnih deformacija i naprezanja, unutarnje sile za najveću ekscentričnost ( $e_{tot}$ )

$$\mu_{Sd} = \frac{M^{\text{I}}_{Sd}}{bh^2 f_{cd}} = \left[ 0,85 \alpha_v \xi \frac{d}{h} \left( 0,5 - \frac{d}{h} k_a \xi \right) + \omega_2 \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} \left( 0,5 - \frac{d_2}{h} \right) + \omega_1 \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}} \left( 0,5 - \frac{d_1}{h} \right) \right] - \left[ \left( 0,85 \alpha_v \xi \frac{d}{h} + \omega_2 \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} - \omega_1 \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}} \right) \frac{e_a + e_2}{h} \right] \quad (41)$$





Slika 9. Dijagram međudjelovanja za koeficijent vitkosti  $\lambda = 35$

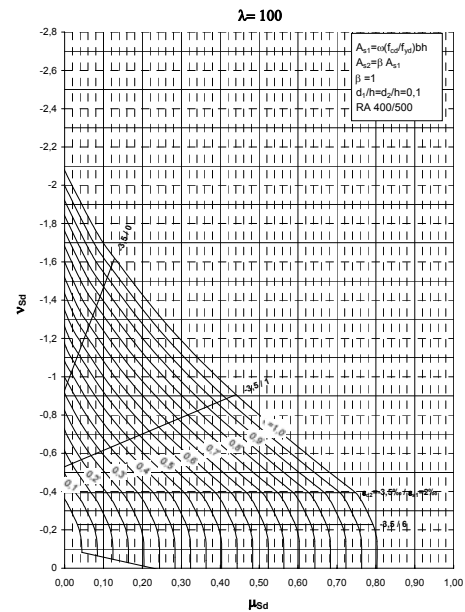


Slika 10. Dijagram međudjelovanja za koeficijent vitkosti  $\lambda = 70$

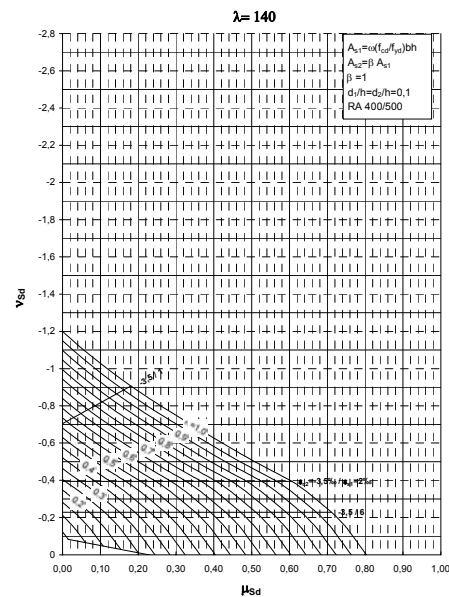
te su za svaku vrijednost mehaničkog koeficijenta armiranja  $\omega = 0,05$  do  $\omega = 1,00$ , s korakom  $0,05$ , nacrtane krivulje.

Dijagrami, slike 8. do 12. su konstruirani za elemente pravokutnog presjeka i vitkosti  $\lambda = 0$ ;  $\lambda = 35$ ;  $\lambda = 70$ ;  $\lambda = 100$ ;  $\lambda = 140$ , za omjer tlačne i vlačne armature  $\beta = 1$ , za  $d_1/h = d_2/h = 0,1$  i za čelik S-400 (tj. RA 400/500).

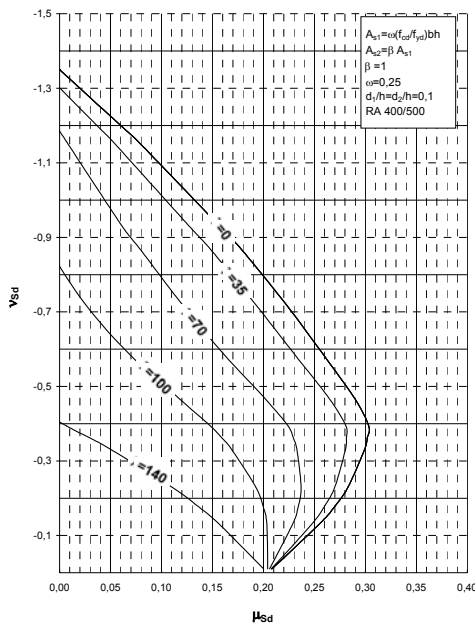
Na kraju su, radi ukazivanja na pogrešku koja se čini dimenzioniranjem stupa na razini presjeka (mala vitkost stupa) u odnosu na dimenzioniranje stupa na razini elementa (vitki stupovi), konstruirani dijagrami međudjelovanja za stupove različitih vitkosti (slika 13.).



Slika 11. Dijagram međudjelovanja za koeficijent vitkosti  $\lambda = 100$



Slika 12. Dijagram međudjelovanja za koeficijent vitkosti  $\lambda = 140$

Slika 13. Dijagram međudjelovanja za različite vitkosti, za  $\omega = 0,25$ 

## 7 Zaključak

U ovom članku prikazani su dijagrami interakcije za proračun vitkih armiranobetonskih stupova prema približnom postupku danom u EC2. Približni je postupak pojednostavnjenje proračuna po teoriji II. reda i u literaturi se može naći pod nazivom *približni postupak - model*

## LITERATURA

- [1] Ivković, M.; Radosavljević, Ž., Perišić, Ž., Pakvor, A., Ačić, M.: *Aktuelni problemi teorije betonskih konstrukcija*, Građevinski kalendar 1984., Savez građevinskih inženjera i tehničara Jugoslavije, Beograd 1984.
- [2] *Pravilnik o tehničkim normativima za beton i armirani beton*, Službeni list broj 11/87.
- [3] *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-95) and Commentary (ACI 318R-95)*, Reported by ACI Committee 318, Chairman, W.,G., ACI 1996.
- [4] Nawy, E.,G.: *Reinforced Concrete, A Fundamental Approach, Combined compression and bending columns*, pp. 327-412, Prentice – Hall, New Jersey, 1996.
- [5] Winter, G.; Nilson, A., H.: *Design of Concrete Structures, Compression Members: Axial Compression Plus Bending, Slender Columns*, pp. 323-343. McGraw-Hill Book Company, 1979.
- [6] ENV 1992-1-1: *Design of concrete structures – Part 1, General Rules and Rules for Buildings. EC2, Eurocode 2*. European Committee for Standardization, Bruxelles, 1991.
- [7] Schneider, Klaus-Juergen.: *Bautabellen für Ingenieure*, Werner Verlag, 15. Auflage, 2002.
- [8] Ivković, M.; Pakvor, A.: *Beton i armirani beton – priručnik*, Građevinska knjiga, Beograd 1991.
- [9] Ivković, M.; Pakvor, A.: *Beton i armirani beton – prilozi*, Građevinska knjiga, Beograd 1991.
- [10] Tomičić, I.: *Betonske konstrukcije*, DHGK, Zagreb 1996.
- [11] Sorić, Z.; Mandić, A.: *Dijagrami interakcije za proračun armature stupova*, Građevinar 53 (2001) 7, 453-464.
- [12] Dvornik, J.: *Pravokutni ekscentrično pritisnuti armiranobetonski presjek*, Priručnik za dimenzioniranje, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Institut građevinarstva Hrvatske, Zagreb, 1975.
- [13] Ferguson, P., M.: *Reinforced Concrete Fundamentals, Long Columns*, pp.542-577, John Wiley & Sons, New York 1979.
- [14] Rüschi, H.: *Stahlbeton – Spannbeton. Teil III, Bemessung im Stahlbetonbau, 16. Nachweis der Knicksicherheit*. Werner-Verlag, Düsseldorf, 1972., s. 175-199.

stupa. Približni se postupak može primjenjivati za proračun vitkih stupova do vitkosti  $\lambda_i < 140$  što znači da se može rabiti za sve vitkosti stupova u visokogradnji.

Ovim se dijagramima olakšava proračun i dimenzioniranje vitkih stupova jer se izbjegava mukotrpan proračun dopunskih ekscentričnosti i povećanja momenata savijanja po teoriji II. reda. Na osnovi geometrije, vitkosti stupa te proračunskih vrijednosti momenta savijanja i uzdužne sile, u dijagramima interakcije očita se potreban koeficijent armiranja koji zadovoljava zahtjeve povećanja unutarnjih sila zbog deformiranja stupa.

Danas postoje betoni visokih svojstava koji dopuštaju manje dimenzije poprečnih presjeka stupova. Zbog toga i zbog sve većih zahtjeva arhitekata za vitkim konstrukcijama danas su sve više prisutni i vitki stupovi u stambenim i poslovnim zgradama u monolitnoj izvedbi, a ne samo u montažnoj izvedbi industrijskih građevina. Uporabom dijagrama međudjelovanja danih u ovome članku, proračun neće biti ništa teži ni kompliciraniji.

Na kraju ovog članka dan je i usporedni dijagram nosivosti stupa istog postotka armiranja, ali različite vitkosti. Na njemu se može vidjeti da je jako bitno vitke stupove proračunavati uzimajući u obzir povećanje momenta zbog deformiranja stupa. Nosivost stupa velike vitkosti može biti nekoliko puta manja od stupa male vitkosti, ali istih dimenzija poprečnog presjeka, iste vrsti betona i iste armature.