

# Proračun bočno pridržanih tankostijenih nosača otvorenog presjeka

---

Šimić, Diana

Source / Izvornik: **Građevinar, 2004, 56, 277 - 287**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:779648>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-09-16**

Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)



# Proračun bočno pridržanih tankostijenih nosača otvorenog presjeka

Diana Šimić

## Ključne riječi

tankostijeni nosač otvorenog presjeka, Z-profil, bočno pridržanje, rotaciona opruga, rotaciona krutost, bočna linijska opruga

## Key words

thin-walled open section beam, Z section, lateral restraint, rotational spring, rotational stiffness, lateral linear spring

## Mots clés

poutre à parois minces et à section ouverte, profil en Z, soutien latéral, ressort rotatif, rigidité rotative, ressort latéral linéaire

## Ключевые слова

тонкостенный стержень открытого сечения, Z-профиль, боковая поддержка, ротационная пружина, ротационная жёсткость, боковая линейная пружина

## Schlüsselworte

Dünnwandiger Träger mit offenem Querschnitt, Z-Profil, seitliche Stützung, Rotationsfeder, Rotationsstarrheit, seitliche Linienfeder

D. Šimić

Izvorni znanstveni rad

## Proračun bočno pridržanih tankostijenih nosača otvorenog presjeka

Opisana su teorijska i eksperimentalna istraživanja ponašanja tankostijenih nosača otvorenog poprečnog presjeka s bočnim pridržanjem. Posebno su razmatrani nosači Z-profila bočno pridržani uzduž pojasa trapezno profiliranim limom. Analiza ponašanja bočno pridržanog tankostijenog nosača provedena je tako što je njegov nepridržani pojas modeliran kao nosač na elastičnoj podlozi. U postupku je rotacijska opruga zamijenjena bočnom linijskom oprugom s krutošću elastične podloge.

D. Šimić

Original scientific paper

## Behavior of laterally restrained thin-walled open section beams

Theoretical and experimental study of laterally restrained thin-walled open section beams is presented. A special emphasis is placed on Z-section beams laterally restrained along the flange with trapezoidal steel sheeting. The behavior of the laterally restrained thin-walled beam was determined by modeling its unrestrained flange as a beam on an elastic base. In this procedure, the rotational spring was replaced with lateral linear spring with stiffness corresponding to that of the elastic base.

D. Šimić

Ouvrage scientifique original

## Comportement des poutres à soutien latéral, à parois minces et à section ouverte

L'auteur décrit l'étude théorique et expérimentale des poutres à parois minces et à section ouverte qui sont soutenues latéralement. Une attention toute particulière est portée sur les poutres à profil en Z soutenues latéralement le long de l'aile par tôle profilée trapézoïdale. Le comportement de la poutre à soutien latéral à parois minces et à section ouverte a été déterminé en représentant son aile non-soutenue comme une poutre reposant sur une base élastique. Dans cette procédure, le ressort rotatif est remplacé par le ressort latéral linéaire dont la rigidité correspond à celle de la base élastique.

Д. Шимич

Оригинальная научная работа

## Расчёт боково поддерживаемых тонкостенных стержней открытого сечения

В работе описаны теоретические и экспериментальные исследования поведения тонкостенных стержней открытого поперечного сечения с боковой поддержкой. Особо рассматривались стержней Z-профиля, поддерживаемые сбоку вдоль пояса, трапецидально-профилированного листовым металлом. Анализ поведения боково поддерживаемого тонкостенного стержня проведён так, что его неподдерживаемый пояс моделирован как балка на эластичном основании. В описываемом способе ротационная пружина заменена боковой линейной пружинной с жёсткостью эластичного основания.

D. Šimić

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

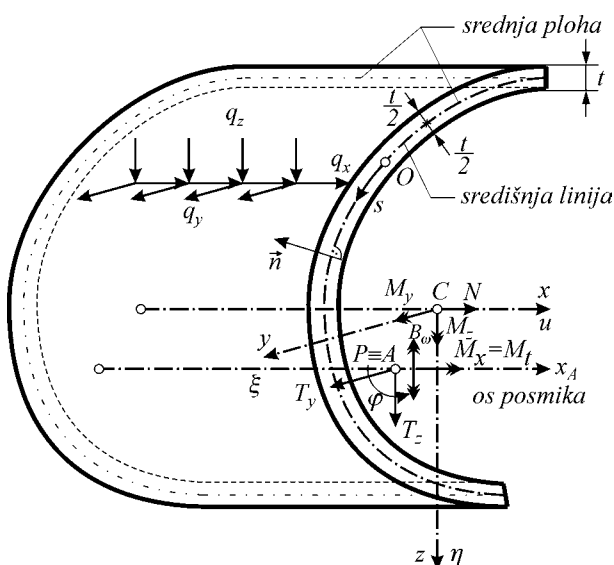
## Berechnung seitlich gestützter dünnwandiger Träger mit offenem Querschnitt

Beschrieben sind theoretische und experimentale Untersuchungen des Verhaltens von dünnwandigen Trägern mit offenem Querschnitt und seitlicher Stützung. Besonders betrachtet sind Träger mit Z-Querschnitt, gestützt längs des Gurtes mit trapezförmig profiliertem Blech. Die Analyse des Verhaltens des seitlich gestützten dünnwandigen Trägers wurde so durchgeführt dass sein ungestützter Gurt als Träger auf elastischer Unterlage modelliert war. Im Verfahren ersetzte man die Rotationsfeder durch eine seitliche Linienfeder mit der Starrheit der elastischen Unterlage.

Autor: Dr. sc. **Diana Šimić**, dipl. ing. građ., Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet, Kačićeva 26, Zagreb

1 Uvod

Na slici 1. prikazan je ravni nosač s tankim stijenjkama i otvorenim poprečnim presjekom. Osi  $y$  i  $z$  glavne su središnje osi tromosti presjeka, a os  $x$  je uzdužna os nosača. Točka  $A$  je središte posmika. Komponente pomaka središta posmika  $A$  u smjeru glavnih osi tromosti  $y$  i  $z$ , označene su sa  $\xi(x)$  i  $\eta(x)$ , a  $\varphi(x)$  je kut rotacije poprečnog presjeka oko osi središta posmika. Projekcije rezultirajućeg površinskog opterećenja po jedinici duljine nosača za koje se pretpostavlja da djeluje na srednju plohu nosača označene su sa  $q_x(x)$ ,  $q_y(x)$ , i  $q_z(x)$ .



Slika 1. Unutarnje sile u poprečnom presjeku tankostijenog nosača

Pri općem slučaju opterećenja tankostijenog nosača, u poprečnom presjeku se pojavljuje sedam komponenata unutarnjih sila.

Ukupni moment torzije  $M_t$  je jednak zbroju momenata čiste torzije (Saint- Venantove torzije)  $M_{ts}$  i torzijskog momenta iskrivljenja  $M_\omega$  ograničene torzije:

$$M_t = M_{ts} + M_\omega \tag{1}$$

Saint- Venantov moment čiste torzije određen je izrazom

$$M_{ts} = G \cdot I_t \cdot \varphi' \tag{2}$$

gdje je  $I_t$  torzijski moment tromosti poprečnog presjeka (St.Venantova torzijska konstanta) određena izrazom

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot \int_s t^3 \cdot ds \tag{3}$$

Posmična naprezanja  $\tau_s$  zbog čiste torzije (Saint-Venantove torzije) raspodijeljena su po debljini stijenke prema linearnom zakonu i određena su izrazom:

$$\tau_s = \frac{M_{ts}}{I_t} \cdot n, \tag{4}$$

gdje je  $n$  udaljenost promatrane točke poprečnog presjeka od srednje plohe u smjeru njene normale  $\vec{n}$ .

Za nosač opterećen samo poprečnim opterećenjem koje djeluje okomito na os nosača, u tom je slučaju  $q_x = 0$ , pa se diferencijalne jednadžbe ravnoteže nosača svode na sljedeći oblik:

$$E \cdot A \cdot u_0'' = 0 \tag{5}$$

$$E \cdot I_y \cdot \eta^{IV} = q_z \tag{6}$$

$$E \cdot I_z \cdot \xi^{IV} = q_y \tag{7}$$

$$M'_{ts} + M'_\omega + m_A = 0 \tag{8}$$

Kontinuirani moment torzije  $m_A(x)$  je moment linijskog opterećenja  $q_y(x)$  i  $q_z(x)$  s obzirom na os posmika  $x_A$ . Komponenta pomaka sektorske nultočke u smjeru osi nosača označena je sa  $u_0$ .

Torzijski moment iskrivljenja je određen izrazom

$$M_\omega = -E \cdot I_\omega \cdot \varphi'' \tag{9}$$

Ako se izrazi (2) i (9) uvrste u izraz (8), dobiva se diferencijalna jednadžba ograničene torzije nosača:

$$E \cdot I_\omega \cdot \varphi^{IV} - G \cdot I_t \cdot \varphi'' = m_A \tag{10}$$

Bimoment je određen izrazom

$$B_\omega = -E \cdot I_\omega \cdot \varphi'' \tag{11}$$

$I_\omega$  je glavni sektorski moment tromosti poprečnog presjeka i određen je izrazom:

$$I_\omega = \int_A \omega^2 \cdot dA, \tag{12}$$

gdje je  $\omega$  glavna sektorska koordinata.

Pri ograničenoj torziji u smjeru osi nosača pojavljuju se dopunska sektorska normalna naprezanja prema pretpostavci jednoliko raspodijeljena po debljini stijenke presjeka, a određena su izrazom

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega}{I_\omega} \cdot \omega \tag{13}$$

Kod ograničene torzije dodatna posmična naprezanja  $\tau_\omega$  jednoliko su raspodijeljena po debljini stijenke nosača i određena su izrazom:

$$\tau_{\omega} = -\frac{M_{\omega} \cdot S_{\omega od}}{I_{\omega} \cdot t} \quad (14)$$

$S_{\omega od}$  je sektorski statički moment određenog dijela presjeka određen izrazom

$$S_{\omega od} = \int_{A_{od}} \omega \cdot dA \quad (15)$$

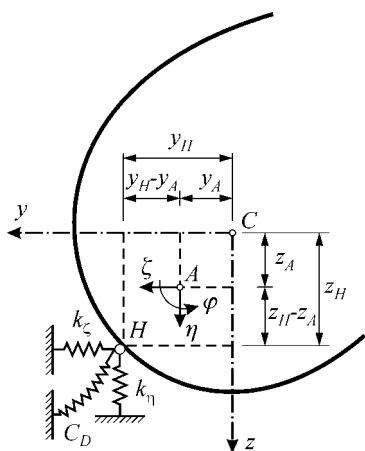
Ukupno normalno naprezanje od savijanja u glavnim ravninama  $x$ ,  $y$  i  $x,z$  i od ograničene torzije dobije se superpozicijom:

$$\sigma_x = \sigma = \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \cdot \omega \quad (16)$$

Posmična naprezanja  $\tau_0$  zbog poprečne sile i dodatna zbog promjenljivog iskrivljenja presjeka pri ograničenoj torziji, raspodijeljena su jednoliko po debljini stijenke i određena su superpozicijom:

$$\tau_0(x,s) = -\frac{T_z \cdot S_{y od}}{I_y \cdot t} - \frac{T_y \cdot S_{z od}}{I_z \cdot t} - \frac{M_{\omega} \cdot S_{\omega od}}{I_{\omega} \cdot t}, \quad (17)$$

gdje su  $S_{y od}$  i  $S_{z od}$  statički momenti određenog dijela poprečnog presjeka  $s$  obzirom na glavne središnje osi tromosti  $y$ ,  $z$ .



Slika 2. Shema poprečnog presjeka nosača bočno pridrzanog elastičnim rotacijskim i linijskim poprečnim vezama

Na slici 2. prikazan je poprečni presjek tankostijenog nosača koji je u točki  $H$  bočno pridržan elastičnim rotacijskim i linijskim poprečnim vezama, koje su kontinuirano raspodijeljene po čitavoj dužini nosača. Pri deformaciji nosača reaktivne sile i reaktivni moment u elastičnim poprečnim vezama, koje djeluju na jedinicu duljine nosača, mogu se prikazati u sljedećem obliku:

$$\bar{q}_y = -k_{\xi} \cdot \xi_H \quad (18)$$

$$\bar{q}_z = -k_{\eta} \cdot \eta_H \quad (19)$$

$$\bar{m} = -C_D \cdot \varphi + (y_H - y_A) \cdot \bar{q}_z - (z_H - z_A) \cdot \bar{q}_y \quad (20)$$

Ako pomake  $\xi_H$  i  $\eta_H$  točke  $H$  izrazimo s pomocima  $\xi$ ,  $\eta$  središta posmika, dobit ćemo:

$$\bar{q}_y = -k_{\xi} \cdot [\xi - (z_H - z_A) \cdot \varphi] \quad (21)$$

$$\bar{q}_z = -k_{\eta} \cdot [\eta + (y_H - y_A) \cdot \varphi] \quad (22)$$

$$\bar{m} = -C_D \cdot \varphi + k_{\xi} \cdot (z_H - z_A) \cdot \xi - k_{\eta} \cdot (y_H - y_A) \cdot \eta - [k_{\xi} \cdot (z_H - z_A)^2 + k_{\eta} \cdot (y_H - y_A)^2] \cdot \varphi \quad (23)$$

Koeficijenti proporcionalnosti  $k_{\xi}$ ,  $k_{\eta}$  i  $C_D$  karakteriziraju krutost elastičnih poprečnih veza.

Dobivene reaktivne sile poprečnih veza u odnosu na nosač predstavljaju samo vanjsko dodatno opterećenje. Za slučaj da je nosač opterećen samo poprečnim opterećenjem ( $q_x = 0$ ) tada diferencijalne jednačbe ravnoteže (6), (7) i (10) imaju oblik:

$$E \cdot I_y \cdot \eta^{IV} + k_{\eta} \cdot [\eta + (y_H - y_A) \cdot \varphi] = q_z \quad (24)$$

$$E \cdot I_z \cdot \xi^{IV} + k_{\xi} \cdot [\xi - (z_H - z_A) \cdot \varphi] = q_y \quad (25)$$

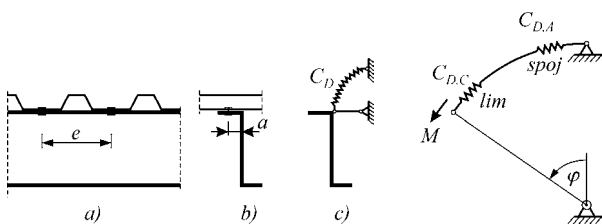
$$E \cdot I_{\omega} \cdot \varphi^{IV} - G \cdot I_t \cdot \varphi'' + [k_{\xi} \cdot (z_H - z_A)^2 + k_{\eta} \cdot (y_H - y_A)^2 + C_D] \cdot \varphi - k_{\xi} \cdot (z_H - z_A) \cdot \xi + k_{\eta} \cdot (y_H - y_A) \cdot \eta = m_A \quad (26)$$

Za različite inačice bočnog pridržanja mogu se diferencijalne jednačbe nosača dobiti iz sustava jednačbi (24), (25) i (26). Za slučaj da je nosač bočno pridržan samo linijskim elastičnim vezama, tada u jednačbu (26) uvrstimo da je  $C_D = 0$ . U slučaju da je nosač pridržan samo rotacijskim vezama, onda u sustav jednačbi (24), (25) i (26) uvrstimo  $k_{\xi} = k_{\eta} = 0$ . Ako je linijska veza apsolutno kruta, onda je pomak točke pričvršćenja u smjeru te veze jednak nuli.

## 2 Tankostijeni nosač Z- profila bočno pridržan trapezno profiliranim limom pod djelovanjem gravitacijskog i odižućeg opterećenja

Za puno kontinuirano bočno pridržanje spaja se trapezno profilirani lim kontinuirano preko gornjeg pojasa tankostijenog nosača i udubljenja lima. Oslonci tankostijenog nosača izvode se tako da je spriječena rotacija i bočno pomicanje na ležajevima, npr. pomoću stolice.

Na slici 3. prikazan je model tankostijenog nosača bočno pridržan trapezno profiliranim limom. Na slici 4. prikazan je model rotacijske opruge krutosti  $C_D$ .



Slika 3. Model tankostijena nosača Z- profila bočno pridrzan trapeznim limom

Slika 4. Model rotacijske opruge

Ukupna je rotacijska krutost opruge

$$C_D = \frac{1}{\frac{1}{C_{D,A}} + \frac{1}{C_{D,C}}} \quad (27)$$

Rotacijska krutost  $C_{D,A}$  koja obuhvaća rotacijsku krutost spoja lima i nosača određuje se ispitivanjem. Rotacijska krutost  $C_{D,C}$  koja odgovara krutosti lima na savijanje može se odrediti pomoću izraza

$$C_{D,C} = k \cdot \frac{E \cdot I_{eff}}{s} \quad (28)$$

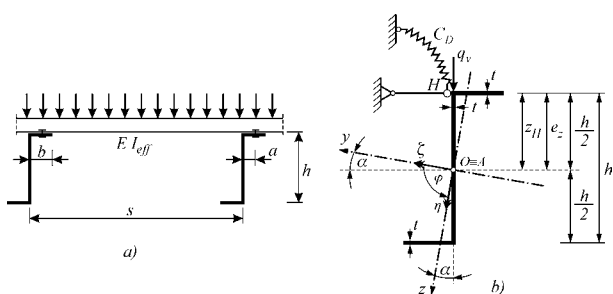
gdje je:

$I_{eff}$  – moment tromosti djelotvornog poprečnog presjeka za jediničnu širinu lima,

$s$  – razmak tankostijenih nosača (raspon lima)

$k = 2$  za limove preko jednog polja,

$k = 4$  za limove kontinuirane preko dva ili više polja.



Slika 5. Bočno pridrzan tankostijeni nosač Z- profila pod djelovanjem gravitacijskog opterećenja

Na slici 5. prikazan je model Z- profila bočno pridrzan linijskom krutom vezom i rotacijskom elastičnom vezom koje zamjenjuju bočno pridrzanje trapeznim limom. Nosač je opterećen linijskim gravitacijskim opterećenjem  $q_v$  prema slici 5.

Pomak točke  $H$  u smjeru krute linijske veze:

$$\delta_H = \xi \cdot \cos \alpha + \eta \cdot \sin \alpha + \frac{h}{2} \cdot \varphi = 0 \quad (29)$$

odakle je

$$\xi = -\eta \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{h}{2 \cdot \cos \alpha} \cdot \varphi \quad (30)$$

U krutoj linijskoj vezi pojavljuje se aksijalno reaktivno opterećenje  $\bar{q}_H$ . Projekcije tog opterećenja u smjeru glavnih osi tromosti  $y, z$  jesu:

$$\bar{q}_y = \bar{q}_H \cdot \cos \alpha \quad (31a)$$

$$\bar{q}_z = \bar{q}_H \cdot \sin \alpha \quad (31b)$$

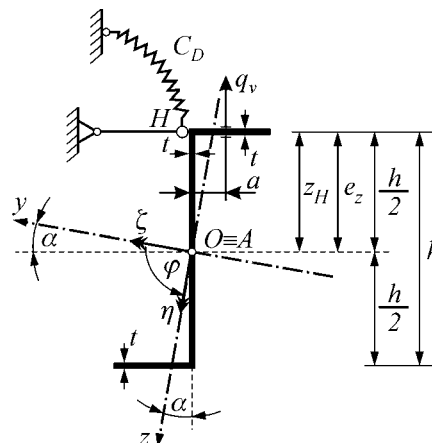
Reaktivni je torzijski moment:

$$\bar{m} = -C_D \cdot \varphi + \frac{h}{2} \cdot \bar{q}_H \quad (32)$$

U ovom slučaju diferencijalne jednadžbe ravnoteže nosača (6), i (10) primaju sljedeći oblik:

$$\eta^{IV} + \frac{I_z}{I_y + I_z \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{h \cdot \sin \alpha}{2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot \varphi^{IV} - \frac{q_v}{E \cdot (I_y + I_z \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot \cos \alpha} = 0 \quad (33)$$

$$E \cdot \left( I_y + I_z \cdot \frac{h^2}{4 \cdot \cos^2 \alpha} - \frac{I_z^2}{I_y + I_z \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{h^2 \cdot \sin^2 \alpha}{4 \cdot \cos^4 \alpha} \right) \cdot \varphi^{IV} - G \cdot I_t \cdot \varphi'' + C_D \cdot \varphi = q_v \cdot \frac{h}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \left[ 1 - \frac{I_z}{(I_y + I_z \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha} \right] \quad (34)$$



Slika 6. Bočno pridrzan tankostijeni nosač Z- profila pod djelovanjem odličućeg opterećenja

Na slici 6. prikazan je model Z- profila bočno pridrzan linijskom krutom vezom i rotacijskim elastičnom vezom koje zamjenjuju bočno pridrzanje trapeznim limom. Nosač je opterećen linijskim odličućim opterećenjem  $-q_v$  i jednoliko raspodijeljenim momentom torzije

$$m_A = q_v \cdot a$$

U ovom slučaju za nosač opterećen odličućim opterećenjem sustav diferencijalnih jednadžbi nosača prikazan je u sljedećem obliku:

$$\xi = -\eta \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{h}{2 \cdot \cos \alpha} \cdot \varphi \quad (35)$$

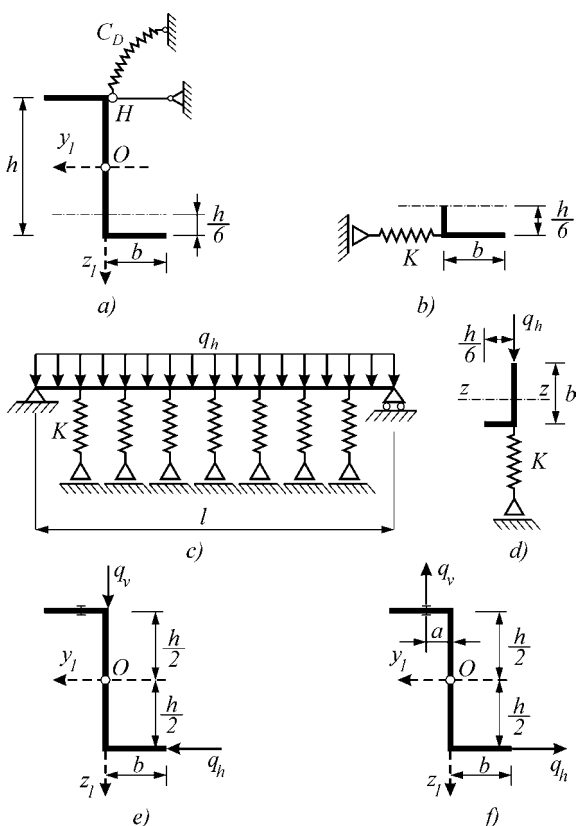
$$\eta^{IV} + \frac{I_z}{I_y + I_z \cdot \text{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{h \cdot \sin \alpha}{2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot \varphi^{IV} + \frac{q_v}{E \cdot (I_y + I_z \cdot \text{tg}^2 \alpha) \cdot \cos \alpha} = 0 \quad (36)$$

$$E \cdot \left( I_w + I_z \cdot \frac{h^2}{4 \cdot \cos^2 \alpha} - \frac{I_z^2}{I_y + I_z \cdot \text{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{h^2 \cdot \sin^2 \alpha}{4 \cdot \cos^4 \alpha} \right) \cdot \varphi^{IV} - G \cdot I_t \cdot \varphi'' + C_D \cdot \varphi =$$

$$= q_v \cdot \left\{ a - \frac{h}{2} \cdot \text{tg} \alpha \cdot \left[ 1 - \frac{I_z}{(I_y + I_z \cdot \text{tg}^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha} \right] \right\} \quad (37)$$

### 3 Pojednostavljena metoda proračuna bočno pridrzanog tankostijenog nosača Z- profila

Slobodni pojas nosača modelira se kao nosač na elastičnoj podlozi krutosti  $K$  i s poprečnim presjekom sastavljenim od slobodnog pojasa i dijela visine rebra (1/6 visine rebra prema Eurocodu 3). Utjecaj torzije i bočnog savijanja (uključujući i iskrivljenje poprečnog presjeka) zamjenjuje se s ekvivalentnim bočnim opterećenjem  $q_h$ , slika 7. Pri tome se pretpostavlja da između ekvivalentnog bočnog opterećenja  $q_h$  i osnovnog (gravitacijskog, odnosno odižućeg) opterećenja postoji konstantan odnos koji se izražava koeficijentom  $k_h$ :



Slika 7. Modeliranje slobodnog pojasa tankostijenog nosača bočno pridrzanog trapeznim limom

$$k_h = \frac{q_h}{q_v} \quad (38)$$

Budući da je kod standardnih Z- profila kut nagiba glavnih osi tromosti malen, pa se u ovom postupku zanemaruje nagib glavnih osi tromosti.

Za nosač Z- profila je koeficijent  $k_h$ :

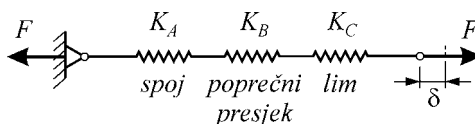
- za gravitacijsko opterećenje

$$k_h = \frac{b^2 \cdot h \cdot t}{4 \cdot I_{y1}} \quad (39)$$

- za odižuće opterećenje

$$k_h = \left| \frac{b^2 \cdot h \cdot t}{4 \cdot I_{y1}} - \frac{a}{h} \right| \quad (40)$$

U ovoj se metodi rotacijska opruga  $C_D$  zamjenjuje s ekvivalentnom bočnom linijskom oprugom krutosti  $K$ , slika 8.



Slika 8. Model bočne linijske opruge

Na modelu bočne linijske opruge, slika 8.,  $K_A, K_B, K_C$  jesu:

- $K_A$  - bočna krutost koja odgovara rotacijskoj krutosti spoja lima i nosača,
- $K_B$  - bočna krutost zbog vitoperenja (iskrivljenja) poprečnog presjeka nosača,
- $K_C$  - bočna krutost lima na savijanje.

Ukupna je krutost bočne opruge  $K$  po jedinici duljine nosača:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_A} + \frac{1}{K_B} + \frac{1}{K_C} = \frac{\delta}{F} \quad (41)$$

Budući da je u općem slučaju  $k_C$  veoma veliko u usporedbi sa  $K_A$  i  $K_B$ , pa se može pretpostaviti da je na strani sigurnosti ako se zanemari odnos  $1/k_C$  u izrazu (41).

Vrijednost  $\left( \frac{1}{K_A} + \frac{1}{K_B} \right)$  može se odrediti ispitivanjem, a

vrijednost  $C_{D,A}$  za gravitacijsko opterećenje i odižuće opterećenje odredi se sljedećim izrazom:

$$C_{D,A} = \frac{h^2}{\left( \frac{1}{K_A} + \frac{1}{K_B} \right) - \frac{4 \cdot (1 - \nu^2) \cdot h^2 \cdot (h + e)}{E \cdot t^3}} \quad (42)$$

gdje je:

$e = a$  za slučaj gravitacijskog opterećenja

$e = 2 \cdot a + b$  za slučaj odličuće opterećenja.

Diferencijalna jednačina elastične linije nosača na elastičnoj podlozi ima oblik:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4 \cdot \alpha^4 \cdot w = \frac{q_h}{E \cdot I_z} \quad (43)$$

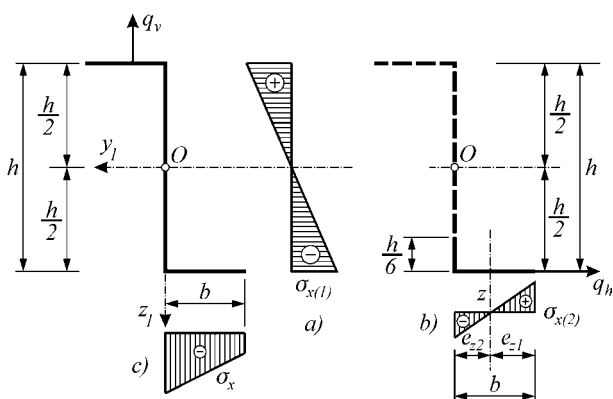
$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{K}{4 \cdot E \cdot I_z}} \quad (44)$$

gdje je  $I_z$  moment tromosti poprečnog presjeka što ga tvore slobodni pojas nosača i 1/6 visine rebra s obzirom na lokalnu težišnu os  $z$ .

Za nosač slobodno oslonjen na ležajevima, opće rješenje jednačine (43) glasi:

$$w(x) = \frac{q_h}{K} \cdot \left\{ \frac{\cos \alpha l - ch \alpha l}{\sin^2 \alpha l + sh^2 \alpha l} \right. \quad (45)$$

$$\left. [\sin \alpha l \cdot \sin \alpha x \cdot ch \alpha x - ch \alpha l \cdot \cos \alpha x \cdot sh \alpha x] - \cos \alpha x \cdot ch \alpha x + 1 \right\}$$



Slika 9. Superpozicija naprezanja u tankostijenom nosaču

Maksimalno naprezanje u pridržanom pojasu nosača određeno je izrazom

$$\sigma_{x(1)} = \frac{M_{y_1}}{W_{eff,y_1}} \quad (46)$$

a u slobodnom (nepridržanom) pojasu nosača

$$\sigma_{x max} = \frac{M_{y_1}}{W_{eff,y_1}} + \frac{M_z}{W_z}, \quad (47)$$

gdje je  $M_{y_1}$  moment savijanja u ravnini  $x, z_1$  uslijed opterećenja  $q_v$ ;  $M_z$  je moment savijanja u slobodnom (nepridržanom) pojasu uslijed bočnog opterećenja  $q_h$ ;  $W_{eff,y_1}$  je moment otpora djelotvornog poprečnog presjeka nosača za savijanje oko osi  $y_1$ ;  $W_z$  je moment otpora poprečnog presjeka što ga čine slobodni pojas i 1/6 visine rebra za savijanje oko lokalne težišne osi  $z$ .

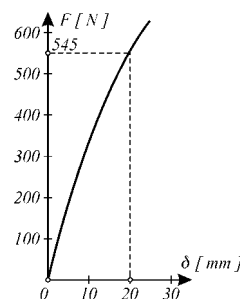
#### 4 Određivanje stupnja torzionog pridržanja (krutosti) tankostijenog nosača Z profila pridržanog trapezno profiliranim limom

Za određivanje stupnja torzionog pridržanja koji osigurava trapezni lim T 53/162,5/1 spojen sa širim pojasom preko udubljenja s tankostijenim nosačem profila Z 200/60/15/2 izrađeni su prema Eurocodu 3 modeli prikazani na slici 10.



Slika 10. Eksperimentalno određivanje stupnja bočne (torzijske) krutosti

Za svaku fazu opterećenja i rasterećenja mjereni su bočni pomaci Z- profila. Rezultati ispitivanja prikazani su na slici 11.



Slika 11. Dijagram bočnih pomaka Z- profila

Za srednju veličinu sile  $F$  kojoj odgovara bočni pomak od  $\frac{h}{10} = 20,0mm$ , određena je kombinirana bočna krutost po jedinici dužine nosača:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_A} + \frac{1}{K_B} = 33,01 \cdot 10^{-6} m^2/N$$

Pripadna rotacijska krutost spoja nosača i lima za gravitacijsko opterećenje je  $C_{D,A} = 2,64 kNm/m$ , a za odličuće opterećenje je  $C_{D,A} = 4,89 kNm/m$ . Rotacijska krutost  $C_{D,C}$  koja odgovara krutosti lima na savijanje (fleksijskoj krutosti) za lim preko jednog polja s rasponom (razmakom tankostijenih nosača)  $s=2 m$  je:

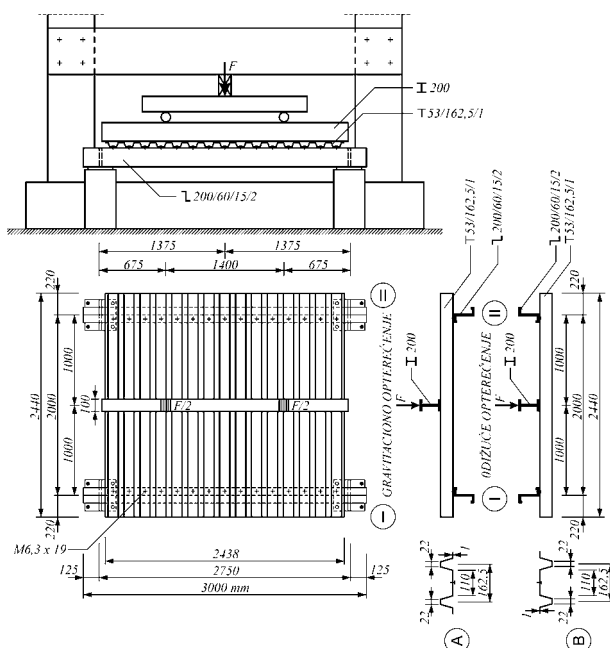
- za položaj lima s užim pojasom u tlaku:  
 $C_{D,C} = 122,71 \text{ kNm/m}$
- za položaj lima sa širim pojasom u tlaku:  
 $C_{D,C} = 117,74 \text{ kNm/m}$ .

Za model sastavljen od dva tankostijena nosača profila Z 200/60/15/2 na međusobnom razmaku  $s = 2\text{m}$  i pridržana trapeznim limom T 53/162,5/1 ukupna je rotacijska krutost opruge  $C_D$ :

- za model izložen gravitacijskom opterećenju (uži pojas lima u tlaku)  $C_D = 2,58 \text{ kNm/m}$ ,
- za model izložen odličućem opterećenju (širi pojas lima u tlaku)  $C_D = 4,69 \text{ kNm/m}$ .

### 5 Ispitivanje tankostijenih nosača Z- profila pridržani trapeznim limom

Za laboratorijska ispitivanja izrađena su dva modela A i B, sastavljena od čeličnih pocinčanih tankostijenih nosača profila Z 200/60/15/2. Nosači su u jednom pojasu pridržani čeličnim pocinčanim limom T 53/162,5/1; Č.0147. od proizvođača "Jedinstvo" Krapina.



Slika 12. Shema gravitacijskog opterećenja i odličućeg opterećenja na modelu "A" i "B"

Model "A" je ispitan pod djelovanjem gravitacijskog opterećenja, a model "B" je ispitan pod djelovanjem odličućeg opterećenja. Shema gravitacijskog i odličućeg opterećenja na modelima prikazana je na slici 12. Model "A" u tijeku ispitivanja prikazan je na slici 13.

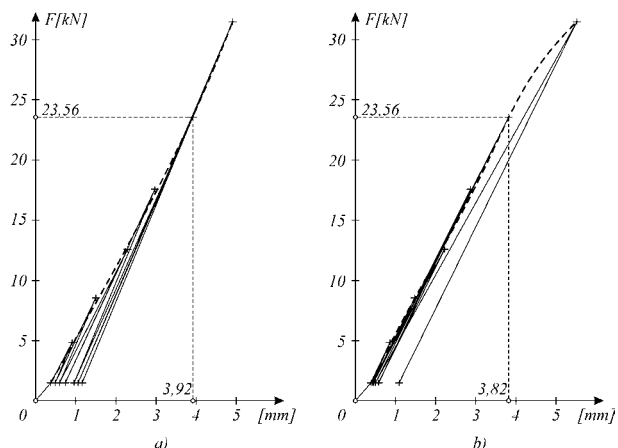
U poprečnim presjecima u sredini raspona i neposredno uz ležajeve nosača mjerene su deformacije, te vertikalni

i horizontalni pomaci na slobodnom (nepridržanom) pojasu nosača.

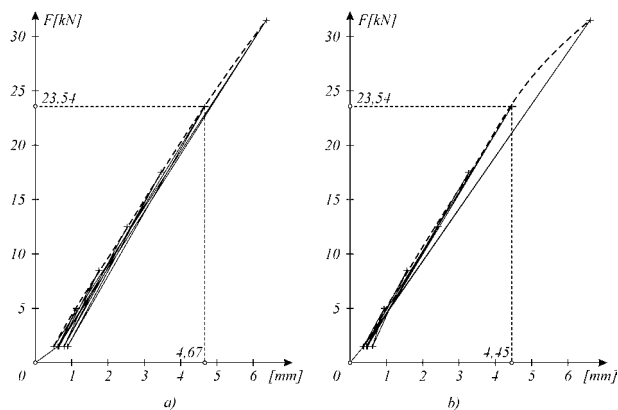
Otkazivanje nosivosti modela "A" nastupilo je pri opterećenju  $F = 33,49 \text{ kN}$ , a modela "B" pri opterećenju  $F = 34,58 \text{ kN}$  zbog otkazivanja nosivosti trapeznog lima. Dijagrami ukupnih progiba u sredini raspona slobodnog pojasa nosača I i nosača II za model "A" prikazani su na slici 14, a za model "B" na slici 15.



Slika 13. Ispitivanje modela "A"



Slika 14. Model "A". Dijagrami ukupnog progiba u sredini raspona slobodnog pojasa: a) nosač I, b) nosač II



Slika 15. Model "B". Dijagrami ukupnog progiba u sredini raspona slobodnog pojasa: a) nosač I, b) nosač II



**6 Rezultati teorijskih i eksperimentalnih istraživanja**

Mehaničke karakteristike materijala nosača Z 200/60/15 /2 određene su u pokusu: modul elastičnosti  $E = 2,33 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ , Poissonov koeficijent  $\nu = 0,31$  granica tečenja  $\sigma_T = 346,3 \text{ MPa}$  i čvrstoća materijala  $\sigma_M = 403,2 \text{ MPa}$ .

**6.1 Bočno pridržan tankostijeni nosač profila Z 200/60/15/2 pod djelovanjem gravitacijskog opterećenja**

Promatramo bočno pridržan tankostijeni nosač pod djelovanjem gravitacijskog opterećenja, slika 5., a koji odgovara modelu "A" u laboratorijskom ispitivanju.

Za pripadne vrijednosti diferencijalna jednadžba problema torzije (34) svodi se na oblik:

$$\varphi^{IV} - 0,05859 \cdot \varphi'' + 1,82178 \cdot \varphi = 1,75708 \cdot 10^{-5} \cdot q_v \quad (48)$$

Kraj nosača je slobodno oslonjen, a rotacija oko uzdužne osi nije moguća. Rubni uvjeti glase:

$$\begin{aligned} \text{za } x = 0: & \quad \varphi(0) = 0; \quad \varphi''(0) = 0 \\ \text{za } x = l: & \quad \varphi(l) = 0; \quad \varphi''(l) = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

Za zadane rubne uvjete (49) opće rješenje jednadžbe (48) glasi:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & (0,20937 \cdot \sin px \cdot \text{sh}mx - 1,98452 \cdot \sin px \cdot \text{ch}mx + \\ & + 10,74921 \cdot \cos px \cdot \text{sh}mx - 9,64485 \cdot \cos px \cdot \text{ch}mx + \\ & + 9,64485) \cdot 10^{-6} \cdot q_v, \end{aligned} \quad (50)$$

gdje je:

$$m = 0,83037 \left[ \frac{1}{m} \right]; \quad p = 0,81254 \left[ \frac{1}{m} \right] \quad (51)$$

Kraj nosača je slobodno oslonjen. Rubni uvjeti za funkciju  $\eta(x)$  u jednadžbi (33) glase:

$$\begin{aligned} \text{za } x = 0; & \quad \eta(0) = 0; \quad \eta''(0) = 0, \\ \text{za } x = l; & \quad \eta(l) = 0; \quad \eta''(l) = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Za zadane rubne uvjete (49) i (52) opće rješenje jednadžbe (33) glasi:

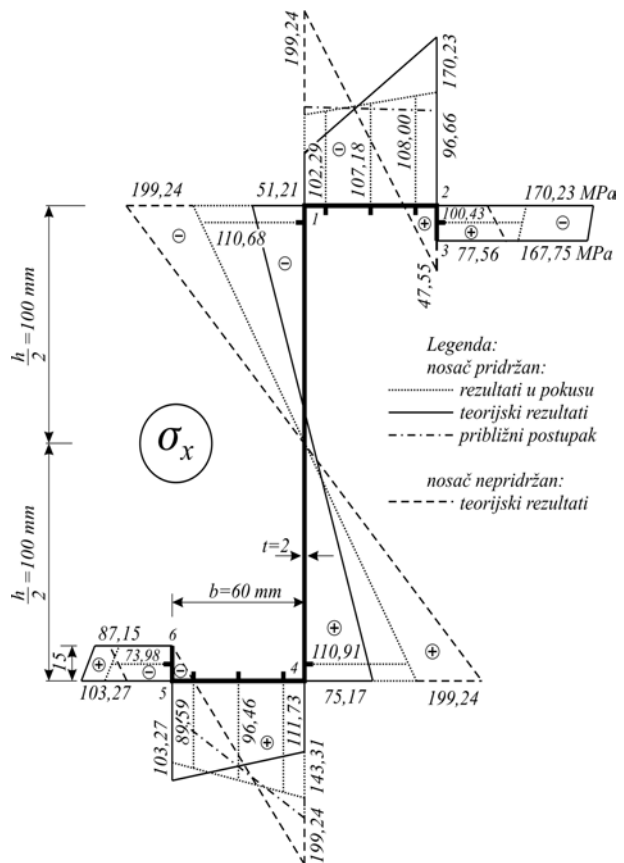
$$\begin{aligned} E \cdot (I_y + I_z \cdot \text{tg}^2 \alpha) \cdot \eta = & -E \cdot I_z \cdot \frac{h \cdot \sin \alpha}{2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot \varphi + \\ & + \frac{q_v}{\cos \alpha} \cdot \frac{x^4}{24} - \frac{q_v}{\cos \alpha} \cdot \frac{l}{12} \cdot x^3 + \frac{q_v}{\cos \alpha} \cdot \frac{l^3}{24} \cdot x \end{aligned} \quad (53)$$

Funkcija  $\xi(x)$  je određena izrazima (30), (50) i (53).

Razmatra se ponašanje modela "A" pod djelovanjem gravitacijskog opterećenja  $F = 23,56 \text{ kN}$ , čemu odgovara opterećenje po jedinici dužine pojedinog nosača modela

$$q_v = \frac{F}{2 \cdot l} = 4,28364 \cdot 10^3 \text{ N/m}$$

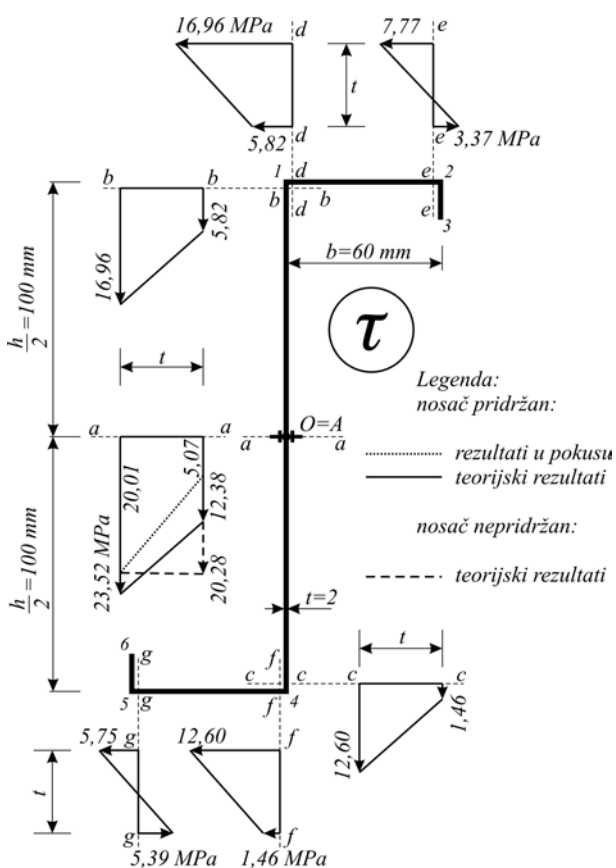
Za gravitacijsko opterećenje  $q_v = 4,28364 \cdot 10^3 \text{ N/m}$ , dijagrami normalnih napreznja u poprečnom presjeku u sredini raspona bočno pridržanog nosača dobiveni teorijskim razmatranjima, pojednostavljenom metodom proračuna i laboratorijskim ispitivanjem prikazani su na slici 16. Na istoj slici je prikazan i dijagram normalnih napreznja za nosač bez bočnog pridržanja.



Slika 16. Model "A". Dijagrami normalnih napreznja u poprečnom presjeku u sredini raspona nosača

Dijagrami posmičnih napreznja u poprečnom presjeku uz ležaj ( $x = 0$ ) prikazani su na slici 17.

Teorijski je ukupni progib u sredini raspona pridržanog nosača  $f_u(l/2) = 4,7 \text{ mm}$ , a za nosač bez bočnog pridržanja  $f_u(l/2) = 15,4 \text{ mm}$ .



Slika 17. Model "A". Dijagrami punog posmičnog naprezanja u poprečnom presjeku uz ležaj (X = 0)

### 6.2 Bočno pridržani tankostijeni nosač profila Z 200/60/15/2 pod djelovanjem odižućeg opterećenja

Promatramo bočno pridržani tankostijeni nosač pod djelovanjem odižućeg opterećenja, slika 6., a koji odgovara modelu "B" u laboratorijskom ispitivanju.

Rubni uvjeti za funkcije  $\varphi(x)$  i  $\eta(x)$  za model "B" isti su kao i za model "A" i dani su izrazom (49) i (52). Za zadane vrijednosti opće rješenje jednačbe (37) i (36) glasi:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & (0,01757 \sin px \cdot \operatorname{sh} mx - 0,10999 \cdot \sin px \cdot \operatorname{ch} mx + \\ & + 1,22755 \cdot \cos px \cdot \operatorname{sh} mx - 1,0908 \cdot \cos px \cdot \operatorname{ch} mx + \\ & + 1,09087) \cdot 10^{-6} \cdot q_v \end{aligned} \quad (54)$$

gdje je:

$$m = 0,96154 \left[ \frac{1}{m} \right]; \quad p = 0,94618 \left[ \frac{1}{m} \right] \quad (55)$$

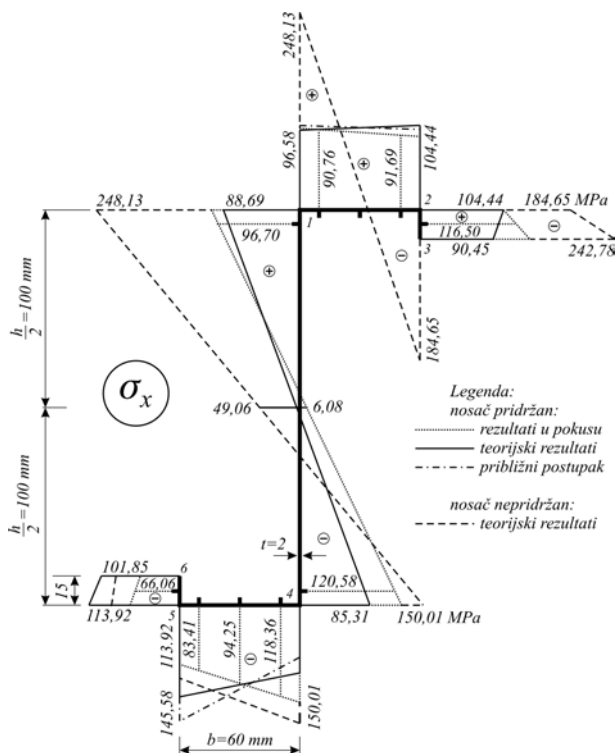
$$\begin{aligned} E \cdot (I_y + I_z \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot \eta = & -E \cdot I_z \cdot \frac{h \cdot \sin \alpha}{2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot \varphi - \frac{q_v}{\cos \alpha} \cdot \frac{x^4}{24} + \\ & + \frac{q_v}{\cos \alpha} \cdot \frac{l}{12} \cdot x^3 - \frac{q_v}{\cos \alpha} \cdot \frac{l^3}{24} \cdot x \end{aligned} \quad (56)$$

Funkcija  $\xi(x)$  je određena izrazima (30), (54) i (56).

Razmatra se ponašanje modela "B" pod djelovanjem odižućeg opterećenja  $F = 23,54 \text{ kN}$ , čemu odgovara opterećenje po jedinici dužine pojedinog nosača modela:

$$q_v = \frac{F}{2 \cdot l} = 4,28 \cdot 10^3 \text{ N/m}$$

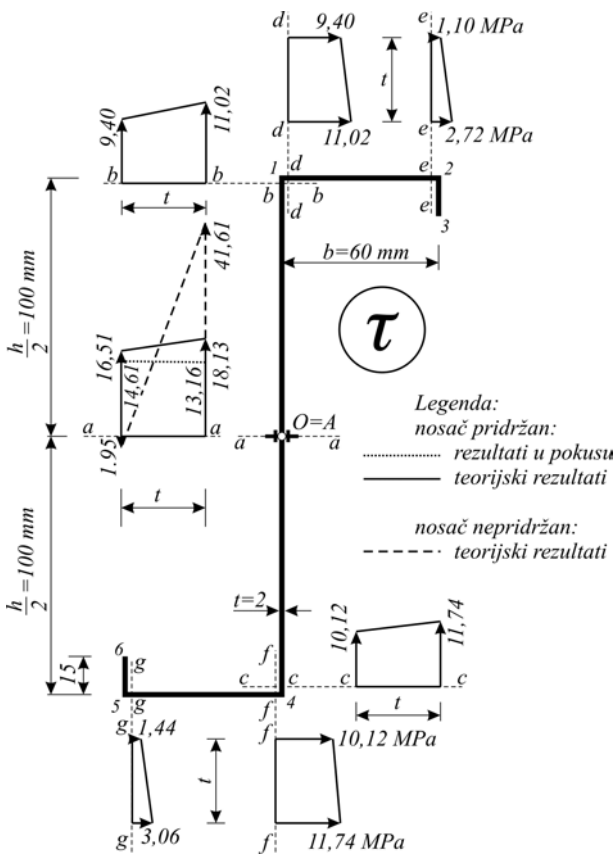
Za odižuće opterećenje  $q_v = 4,28 \cdot 10^3 \text{ N/m}$ , dijagrami normalnih naprezanja u poprečnom presjeku u sredini raspona bočno pridržanog nosača, određeni teorijskim razmatranjima, pojednostavljenom metodom proračuna i laboratorijskim ispitivanjem prikazani su na slici 18. Na istoj slici je prikazan i dijagram normalnih naprezanja za nosač bez bočnog pridržanja.



Slika 18. Model "B". Dijagrami normalnih naprezanja u poprečnom presjeku u sredini raspona nosača

Dijagrami posmičnih naprezanja u poprečnom presjeku uz ležaj ( $x = 0$ ) prikazani su na slici 18. Teorijski je ukupni progib u sredini raspona pridržanog nosača

$f_u(l/2) = 3,2\text{mm}$ , a za nosač bez bočnog pridržanja  
 $f_u(l/2) = 15,4\text{mm}$ .



Slika 19. Model "B". Dijagrami punog posmičnog naprezanja u poprečnom presjeku uz ležaj ( $x = 0$ )

### 7 Rasprava

Pri teorijskim istraživanjima, osim rješenja dobivenih iz sustava diferencijalnih jednadžbi nosača, primijenjena je i metoda modeliranja nepridržanog pojasa nosača kao nosača na elastičnoj podlozi. Da bi se dobio uvid u doprinos nosivosti bočnog pridržanja tankostijenog nosača trapeznim limom, promatrani su i nosači pod jednakim opterećenjem, ali bez bočnog pridržanja.

Iz usporedbe rezultata eksperimentalnih i teorijskih istraživanja može se zaključiti da se dobiveni rezultati istraživanja bolje podudaraju kod modela s odličnim opterećenjem nego kod modela s gravitacijskim opterećenjem. Razlog boljemu podudaranju rezultata eksperimentalnih i teorijskih istraživanja kod modela s odličnim opterećenjem jest u tome što položaj spojnih vijaka u pojasu nosača

u potpunosti određuje prijenos odličnog opterećenja s lima na nosač.

Pri djelovanju gravitacijskog opterećenja, opterećenje s lima na nosač prenosi se preko dodirnih površina lima i pojasa nosača, te ovisi o deformaciji pojasa nosača i unaprijed nije u potpunosti određen kao kod odličnog opterećenja. Budući da je utjecaj nagiba glavnih osi tromosti suprotan utjecaju torzije, na strani je sigurnosti ako se pretpostavi da se gravitacijsko opterećenje s lima na nosač prenosi preko hrpta nosača.

Iz razmatranja dobivenih rezultata za jednako opterećenje nosača s bočno pridržanim limom i nosača bez bočnog pridržanja uočavamo da je kod nosača bez bočnog pridržanja najveće po apsolutnoj vrijednosti normalno naprezanje u poprečnom presjeku u sredini raspona nosača i do 100% veće nego kod nosača bočno pridržanog trapeznim limom. Iz usporedbe rezultata dobivenih u pokusu s rezultatima dobivenima u postupku u kojem je nepridržani pojas nosača modeliran kao nosač na elastičnoj podlozi, proizlazi da ta metoda proračuna tankostijenog nosača bočno pridržanog trapeznim limom daje zadovoljavajuće rezultate za potrebe inženjerske prakse.

Utjecaji nagiba glavnih osi tromosti i torzije su suprotni. Kod odličnog opterećenja nosača, izborom položaja spojnih vijaka u pojasu nosača, može se postići da se utjecaj nagiba glavnih osi tromosti i utjecaj torzije međusobno poništavaju (slobodni član u jednadžbi problema torzije nosača jednak je nuli) i time postići za dane uvjete najpovoljnije stanje naprezanja u nosaču.

### 8 Zaključak

Iz provedene analize ponašanja tankostijenih nosača s bočnim pridržanjem i bez bočnog pridržanja proizlazi, ako postoji bočno pridržanje tankostijenih nosača primjerice u krovnim konstrukcijama, pri proračunu takvih nosača utjecaj bočnog pridržanja treba uzeti u obzir zbog nosivosti i ekonomičnosti sustava (uštede u materijalu). Rezultati provedenih istraživanja su doprinos optimalnom oblikovanju i proračunu konstrukcija sastavljenih od bočno pridržanih tankostijenih nosača. Analizom analitičkih rješenja dobiva se uvid kako se za dane uvjete može postići optimalno stanje naprezanja u nosaču. Dobiveni rezultati provedenih istraživanja mogu korisno poslužiti u praksi i kao podloga za daljnja istraživanja u ovom području, te u pripremi podloge za donošenje hrvatskih nacionalnih propisa za provedbu dokaza sigurnosti i konstrukcijsko oblikovanje bočno pridržanih tankostijenih nosača, usklađenih sa suvremenom regulativom.

### LITERATURA

[1] Vlasov, A. S.: *Tankostienne uprugie steržni*, Gosudarstvenoe izdatelstvo fiziko-matematičko literaturi, Moskva, 1959.

[2] Gjelsvik, A.: *The theory of thin walled bars*, John Wiley & Sons, New York, 1981.

- [3] Murray, N.W.: *Introduction to the theory of thin-walled structures*, Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [4] Meek, J. L.; Lin, W. J.: *Geometric and material nonlinear analysis of thin-walled beam-columns*. Journal of Structural Engineering, 116 (1990), 1473-1490.
- [5] Ojalvo, M.: *Thin-walled bars with open profiles*, The Olive Press, 1024 Fairway Ln., Estes Park, Colorado 80517, 1991.
- [6] Eurocode 3: *Design of Steel Structures-Part 1-3: General Rules-Supplementary rules for cold formed thin gage members and sheeting*. European Committee for Standardization, October, 1997.
- [7] Šimić, D.: *Sigurnost tankostijenih profila trapeznog poprečnog presjeka*, magistarski rad, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1999.
- [8] Doyle, J. F.: *Nonlinear Analysis of Thin-Walled structures, Statics, Dynamics and Stability*, Springer-Verlag, New York, Inc. 2001.
- [9] Šimić, D.: *Analiza ponašanja bočno pridržanih tankostijenih nosača otvorenog poprečnog presjeka*, doktorska disertacija, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2003.

## ZAHVALA

Zahvaljujem tvornici "Jedinstvo" iz Krapine na pruženoj pomoći pri nabavi i izradi modela za laboratorijska ispitivanja.