

# Dijagram moment savijanja - zakrivljenost za armiranobetonske grede

---

**Kišiček, Tomislav; Sorić, Zorislav**

*Source / Izvornik:* **Građevinar, 2003, 55, 207 - 215**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:473268>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-01**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)



# Dijagram moment savijanja – zakrivljenost za armiranobetonске grede

Tomislav Kišiček, Zorislav Sorić

## Ključne riječi

armiranobetonска greda, dijagram moment savijanja – zakrivljenosti, prirast sile, prirast pomaka, progib

## Key words

reinforced-concrete girder, bending moment - curvature diagram, increase in force, increase in displacement, deflection

## Mots clés

poutre en béton armé, diagramme du moment fléchissant – courbure, augmentation de la contrainte, augmentation du déplacement, flèche

## Ключевые слова

железобетонная балка, диаграмма момент изгиба – кривизна, приращение силы, приращение сдвига, прогиб

## Schlüsselworte:

Stahlbetonbalken, Diagramm Biegemoment - Krümmung, Kraftzuwachs, Verformungszuwachs, Durchbiegung

T. Kišiček, Z. Sorić

Izvorni znanstveni rad

## Dijagram moment savijanja – zakrivljenost za armiranobetonске grede

U radu su opisani postupci proračunavanja dijagrama moment savijanja – zakrivljenost za armiranobetonске grede pravokutnog i T-presjeka gdje su razlike u polju i na ležaju. Prikazan je postupak određivanja dijagrama s pomoću tri karakteristične točke, postupnog povećanja momenta savijanja i postupnog povećanja zakrivljenosti. Navedene su razlike ova tri pristupa. U zaključku je istaknuto da je za praktičnu uporabu dovoljno točan dijagram određen preko tri karakteristične točke.

T. Kišiček, Z. Sorić

Original scientific paper

## Bending moment - curvature diagram for reinforced-concrete girders

Procedures for calculating bending moment - curvature diagram for rectangular and T-shaped reinforced-concrete girders, with differences in the field and bearing, are described in the paper. The procedure of forming diagram with three typical points, gradual increase in bending moment and gradual increase in curvature, is presented. Differences between these three approaches are indicated. It is emphasized in the final part of the paper that the diagram determined by three typical points is sufficiently accurate for practical use.

T. Kišiček, Z. Sorić

Ouvrage scientifique original

## Diagramme du moment fléchissant – courbure pour les poutres en béton armé

L'article décrit les méthodes de calcul des diagrammes du moment fléchissant – courbure pour les poutres en béton armé de section rectangulaire et en T, qui présentent des différences au niveau des travées et des points d'appui. On présente la méthode d'établissement du diagramme à l'aide de trois points caractéristiques, avec une augmentation progressive du moment fléchissant et une augmentation progressive de la courbure. On précise les différences entre ces trois approches. En conclusion, on souligne qu'un diagramme déterminé par trois points caractéristiques est suffisamment précis pour l'utilisation pratique.

T. Кишичек, З. Сориц

Оригинальная научная работа

## Диаграмма момент изгиба – кривизна для железобетонных балок

В работе описаны способы расчёта диаграммы момент изгиба – кривизна для железобетонных балок прямоугольного и T-профиля, где существуют различия в поле и на опоре. Показан способ определения диаграммы с помощью трёх характерных точек, постепенного увеличения момента изгиба и постепенного увеличения кривизны. Наведены различия этих трёх подходов. В заключении подчёркнуто, что для практического употребления достаточно точной является диаграмма, определённая с помощью трёх характерных точек.

T. Kišiček, Z. Sorić

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

## Diagramm Biegemoment - Krümmung für Stahlbetonbalkenelemente

Im Artikel beschreibt man Verfahren für die Berechnung von Diagrammen Biegemoment - Krümmung für Stahlbetonbalken mit Rechteck- und T-Querschnitt bei denen im Feld und über dem Auflager Unterschiede vorliegen. Dargestellt sind Verfahren der Bestimmung des Diagramms mit Hilfe von drei charakteristischen Punkten, stufenweiser Steigerung des Biegemoments und stufenweiser Steigerung der Krümmung. Angeführt sind Unterschiede bei diesen drei Zutritten. Im Schluss wird hervorgehoben dass für die praktische Anwendung das Diagramm bestimmt durch drei charakteristische Punkte genügend genau ist.

Autori: Mr. sc. **Tomislav Kišiček**, dipl. ing. građ.; prof. dr. sc. **Zorislav Sorić**, dipl. ing. građ., Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, Zagreb

## 1 Uvod

Prema postojećim propisima, progib armiranobetonskih nosača proračunava se s pomoću zakrivljenosti poprečnih presjeka nosača. Svaki poprečni presjek duž nosača ima određenu zakrivljenost, nastalu zbog naprezanja od momenata savijanja. Za određen oblik poprečnog presjeka nosača, uz poznate karakteristike materijala te iznos vlačne i tlačne armature, moguće je proračunati dijagram moment savijanja – zakrivljenost ( $M - 1/r$ ). Pritom se zanemaruju zakrivljenosti i progibi zbog poprečnih sila.

Dijagram moment savijanja – zakrivljenost može se opisati trima karakterističnim točkama, odnosno trima područjima u kojima se presjek može nalaziti tijekom povećavanja opterećenja (momenta savijanja).

U prvom se području poprečni presjek ponaša elastično, moment savijanja je manji od momenta savijanja pri kojem dolazi do pojave prve pukotine u presjeku, tj. presjek je neraspucan.

Nakon pojave prve pukotine, a prije pojave popuštanja vlačne armature, poprečni se presjek nalazi u drugom području. Smatra se da, od tog trenutka dalje, tlačna naprezanja u presjeku preuzimaju beton i tlačna armatura, a vlačna naprezanja samo vlačna armatura.

Nakon popuštanja vlačne armature, poprečni se presjek nalazi u trećem području, i to sve dok ne nastupi slom presjeka.

U tim se područjima veza između momenta savijanja i zakrivljenosti može uzeti kao linearna, što je dovoljno točno za praktični proračun progiba, no u ovom će se članku prikazati proračun točnijeg oblika tog dijagrama.

Točniji oblik dijagrama moment savijanja – zakrivljenost može se odrediti postupnim povećanjem momenta savijanja uz proračun pripadne zakrivljenosti ili postupnim povećanjem zakrivljenosti uz proračun pripadnog momenta savijanja.

Popis oznaka prema Eurokodu 2 nalazi se u sklopu članka.

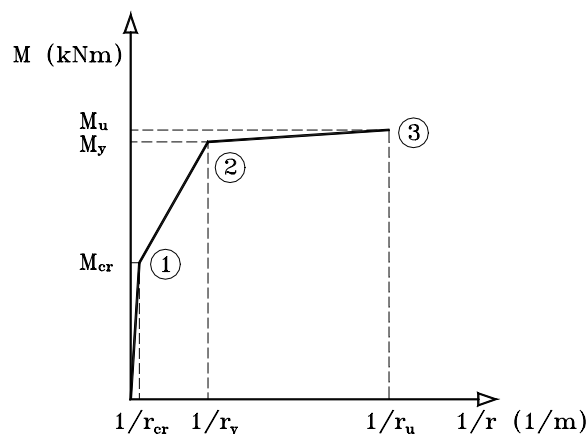
## 2. Karakteristične točke dijagrama moment savijanja – zakrivljenost

Dijagram moment savijanja-zakrivljenost ( $M - 1/r$ ) nekog armiranobetonskog presjeka sastoji se od tri karakteristične točke, tj. parova vrijednosti ( $1/r ; M$ ) (slika 1.).

TOČKA (1) dijagrama:  $1/r_{cr}$  je zakrivljenost poprečnog presjeka pri doseganju vlačne čvrstoće betona, odnosno pri pojavi prve pukotine.  $M_{cr}$  je moment savijanja pri doseganju vlačne čvrstoće betona, a dobiva se iz izraza:

$$M_{cr} = \frac{f_{ct,m} \cdot I_0}{y_{0d}}, \quad (1)$$

gdje je  $f_{ct,m} = 0.3\sqrt[3]{f_{ck}^2}$  (u  $\text{N/mm}^2$ ) vlačna čvrstoća betona,  $I_0$  moment tromosti punog betonskog presjeka, a  $y_{0d}$  udaljenost neutralne osi od donjeg (vlačnog) ruba poprečnog presjeka. Za ležajni presjek to je veličina  $y_{0g}$ , jer je, u tom slučaju, gornji rub poprečnog presjeka vlačni.



Slika 1.  $M - 1/r$  dijagram, po odsječcima linearan

Zakrivljenost  $1/r_{cr}$  iz dijagrama sa slike 1. izračunava se iz izraza:

$$\frac{1}{r_{cr}} = \frac{M_{cr}}{E_{cm} \cdot I_I}, \quad (2)$$

gdje je  $E_{cm} = 9500\sqrt[3]{f_{ck} + 8}$  (u  $\text{N/mm}^2$ ) sekantni modul elastičnosti betona, a  $I_I$  je moment tromosti poprečnog presjeka u naponskom stanju I (beton + armatura).

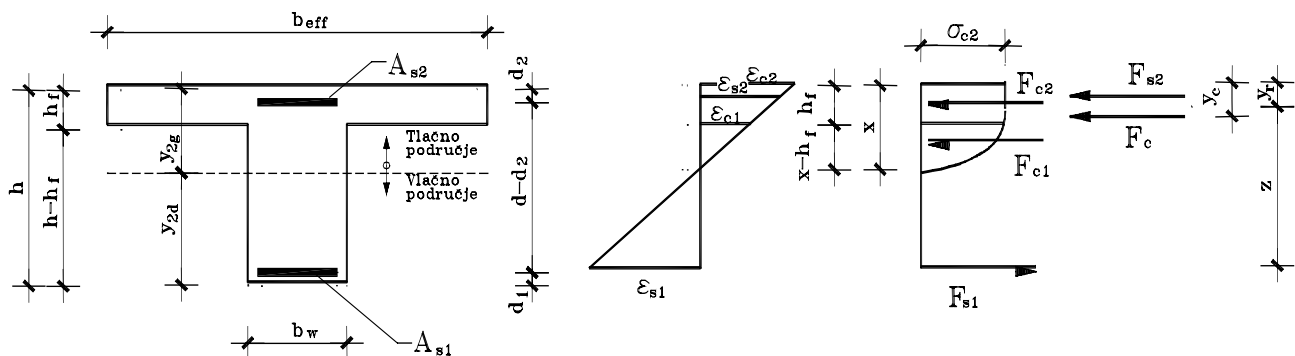
TOČKA (2) dijagrama:  $1/r_y$  je zakrivljenost poprečnog presjeka s pukotinom pri relativnoj deformaciji armature u vlačnoj zoni  $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{sy} = f_{yk} / E_s$  tj.  $\sigma_{s1} = f_{yk}$ . Veličine  $\varepsilon_{s1}$ ,  $\varepsilon_{c2}$ ,  $x$ ,  $z$ ,  $F_c$ ,  $F_{s1}$  itd. prikazane su na slici 2.

Moment savijanja iznosi:

$$M_y = (F_c + F_{s2}) \cdot z = F_{s1} \cdot z \quad (3)$$

Sila u vlačnoj armaturi određuje se iz:  $F_{s1} = A_{s1} \cdot f_{yk}$ , a rezultanta tlačnih naprezanja u betonu, sila u tlačnoj armaturi i krak unutarnjih sila dobivaju se iterativnim postupkom (metodom raspolavljanja) u kojem se mijenja relativna deformacija betona između vrijednosti  $0\% \leq \varepsilon_{c2} \leq 3.5\%$ . Postupak se prekida kada se izjednači zbroj (rezultanta) tlačnih naprezanja u betonu i sile u tlačnoj armaturi sa silom u vlačnoj armaturi, tj. kada je apsolutna vrijednost razlike između sila manja od neke unaprijed zadane vrlo male vrijednosti.

Zakrivljenost poprečnog presjeka  $1/r_y$  iz dijagrama sa slike 1. računa se s pomoću izraza:



Slika 2. T-presjek s raspodelom relativnih deformacija i napreznja – neutralna os u rebro presjeka

$$\frac{1}{r_y} = \frac{|\varepsilon_{c2}|}{x} = \frac{|\varepsilon_{c2}| + |\varepsilon_{s1}|}{d}, \quad (4)$$

gdje su veličine  $\varepsilon_{c2}$ ,  $\varepsilon_{s1}$ ,  $d$  i  $x$  dane na slici 2.

TOČKA (3) dijagrama:  $1/r_u$  je zakrivljenost poprečnog presjeka s pukotinom pri relativnoj deformaciji betona u tlačnoj zoni  $\varepsilon_{c2} = 3,5\text{‰}$  (slom preko betona) ili pri relativnoj deformaciji vlačne armature  $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{su}$  (slom preko armature).  $\varepsilon_{su}$  je relativna deformacija vlačne armature pri slomu, koja je prema dijagramu sa sl. 1.-12. iz [17]: za GA 240/360  $\varepsilon_{su} = 265\text{‰}$ , za RA 400/500  $\varepsilon_{su} = 140\text{‰}$ , za MA 500/560  $\varepsilon_{su} = 95\text{‰}$ , za BiA 680/800  $\varepsilon_{su} = 80\text{‰}$ . Moment savijanja pri slomu jest:

$$M_u = (F_c + F_{s2}) \cdot z_u = F_{s1} \cdot z_u \quad (5)$$

gdje je krak unutarnjih sila  $z_u$  malo veći nego  $z$  u izrazu (3).

S obzirom na to da je relativna deformacija armature u vlačnoj zoni  $\varepsilon_{s1} > f_{yk} / E_s$ , tj.  $\sigma_{s1} = f_{yk}$  uz uvjet horizontalne grane popuštanja armature na računskom dijagramu čelika, sila u vlačnoj armaturi dobiva se iz izraza:  $F_{s1} = A_{s1} \cdot f_{yk}$ , a rezultanta tlačnih napreznja u betonu, sila u tlačnoj armaturi i krak unutarnjih sila dobivaju se iterativnim postupkom ovisno o vrsti sloma:

- Slom preko betona - relativna deformacija betona u tlačnoj zoni jest  $\varepsilon_{c2} = 3,5\text{‰}$ , a mijenja se relativna deformacija armature između vrijednosti  $\varepsilon_{sy} = f_{yk} / E_s < \varepsilon_{s1} \leq \varepsilon_{su}$ .
- Slom preko armature - relativna je deformacija vlačne armature  $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{su}$ , a mijenja se relativna deformacija betona između vrijednosti  $0\text{‰} \leq \varepsilon_{c2} \leq 3,5\text{‰}$ .

Postupak se prekida kada se izjednači zbroj (rezultanta) tlačnih napreznja u betonu i sile u tlačnoj armaturi sa silom u vlačnoj armaturi, tj. kada je apsolutna vrijednost razlike između sila manja od neke unaprijed zadane vrlo male vrijednosti.

Zakrivljenost poprečnog presjeka  $1/r_u$  iz dijagrama sa slike 1. računa se s pomoću izraza:

$$\frac{1}{r_u} = \frac{|\varepsilon_{c2}|}{x} = \frac{|\varepsilon_{c2}| + |\varepsilon_{s1}|}{d}, \quad (6)$$

gdje su veličine  $\varepsilon_{c2}$ ,  $\varepsilon_{s1}$ ,  $d$  i  $x$  dane na slici 2.

U točkama 2.1 i 2.2 opisani su postupci proračuna unutarnjih sila u poprečnom presjeku koji se rabe pri proračunu karakterističnih točaka dijagrama  $M - 1/r$ , a i pri proračunu točnijeg oblika tog dijagrama.

### 2.1 Računanje rezultante tlačnih napreznja u betonu kod T-presjeka kada je donje područje naprezano vlačno

Za pretpostavljene relativne deformacije betona,  $\varepsilon_{c2}$ , i armature,  $\varepsilon_{s1}$ , izračunava se udaljenost neutralne osi od gornjeg ruba prema izrazu:

$$y_{2g} = x = \frac{|\varepsilon_{c2}| \cdot d}{|\varepsilon_{c2}| + |\varepsilon_{s1}|}. \quad (7)$$

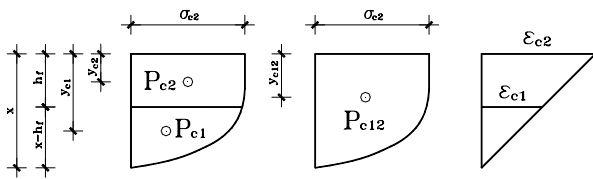
Najprije će se razmatrati slučaj kada je  $x > h_f$  to jest kada se neutralna os nalazi u rebro presjeka (slika 2.).

Dijagram tlačnih napreznja poprečnog presjeka rastavlja se na dva dijela, dio u rebro i dio u ploči. Da bi se mogla izračunati rezultanta tlačnih napreznja u betonu potrebno je izračunati površine tih dvaju dijelova te položaje težišta tih površina (slika 3.).

Najprije se računa relativna deformacija betona na

$$\text{donjem rubu ploče: } \varepsilon_{c1} = \frac{\varepsilon_{c2} \cdot (x - h_f)}{x}. \quad (8)$$

POPIS OZNAKA	
$l/r$	– zakrivljenost poprečnog presjeka – općenito
$l/r_{cr}$	– zakrivljenost poprečnog presjeka prilikom doseganja vlačne čvrstoće betona, odnosno pri pojavi prve pukotine
$l/r_M$	– zakrivljenost poprečnog presjeka prilikom doseganja vlačne čvrstoće betona – za presjek sa pukotinom (kontrola prirasta sile)
$l/r_u$	– zakrivljenost poprečnog presjeka s pukotinom pri slomu
$l/r_y$	– zakrivljenost poprečnog presjeka s pukotinom pri relativnoj deformaciji armature u vlačnoj zoni $\varepsilon_{s1} = f_{yk} / E_s$ tj. $\sigma_{s1} = f_{yk}$
$A_{s1}$	– površina vlačne armature
$A_{s2}$	– površina tlačne armature
$b$	– širina pravokutnoga poprečnog presjeka
$b_{eff}$	– efektivna (računska) širina ploče (pojasnice) T-presjeka
$b_w$	– širina hrpta (rebra) T-presjeka
$d$	– statička visina
$d_2$	– udaljenost težišta tlačne armature od tlačnog ruba betonskog presjeka
$E_{cm}$	– sekantni modul elastičnosti betona
$E_s$	– modul elastičnosti čelika
$F_c$	– rezultanta tlačnih naprezanja u betonu
$F_{c1}$	– rezultanta tlačnih naprezanja u betonu na području hrpta (rebra) presjeka
$F_{c2}$	– rezultanta tlačnih naprezanja u betonu na području ploče (pojasnice) presjeka
$f_{ck}$	– karakteristična tlačna čvrstoća betonskog valjka
$f_{ct,m}$	– vlačna čvrstoća betona
$F_{s1}$	– sila u vlačnoj armaturi
$F_{s2}$	– sila u tlačnoj armaturi
$f_{yk}$	– karakteristična granica popuštanja čelika
$h_f$	– debljina ploče (pojasnice) T-presjeka
$I_0$	– moment tromosti punoga betonskog presjeka
$I_1$	– moment tromosti poprečnog presjeka u naponskom stanju I (beton + armatura)
$k_a$	– koeficijent udaljenosti težišta površine $P_{c12}$ od tlačnog ruba betonskog presjeka
$k_{a1}$	– koeficijent udaljenosti težišta površine $P_{c1}$ od donjeg ruba pojasnice
$M$	– moment savijanja - općenito
$M_{cr}$	– moment savijanja pri doseganju vlačne čvrstoće betona
$M_r$	– moment savijanja za presjek s pukotinom pri kontroli prirasta pomaka
$M_{Rd}$	– moment nosivosti presjeka
$M_u$	– moment savijanja poprečnog presjeka pri slomu
$M_y$	– moment savijanja poprečnog presjeka pri početku popuštanja vlačne armature
$P_{c1}$	– površina dijagrama naprezanja betona na području hrpta (rebra) presjeka
$P_{c12}$	– ukupna površina dijagrama naprezanja betona ( $P_{c12} = P_{c1} + P_{c2}$ )
$P_{c2}$	– površina dijagrama naprezanja betona na području ploče (pojasnice) presjeka
$x$	– udaljenost neutralne osi od tlačnog ruba betonskog presjeka
$x_u$	– udaljenost neutralne osi od tlačnog ruba betonskog presjeka pri $M = M_u$
$y_{0d}$	– udaljenost neutralne osi od donjeg ruba poprečnog presjeka
$y_{0g}$	– udaljenost neutralne osi od gornjeg ruba poprečnog presjeka
$y_{2g}$	– udaljenost neutralne osi od tlačnog ruba betonskog presjeka
$y_c$	– udaljenost rezultante tlačnih naprezanja u betonu od tlačnog ruba presjeka
$y_{c1}$	– udaljenost težišta površine dijagrama naprezanja betona na području hrpta (rebra) presjeka od tlačnog ruba betonskog presjeka
$y_{c12}$	– udaljenost težišta ukupne površine dijagrama naprezanja betona presjeka od tlačnog ruba betonskog presjeka
$y_{c2}$	– udaljenost težišta površine dijagrama naprezanja betona na području ploče (pojasnice) presjeka od tlačnog ruba bet. presjeka
$y_r$	– udaljenost rezultante tlačne sile od tlačnog ruba poprečnog presjeka
$z$	– krak unutarnjih sila
$z_u$	– krak unutarnjih sila pri slomu
$\alpha_v$	– koeficijent punoće dijagrama $P_{c12}$
$\alpha_{v1}$	– koeficijent punoće dijagrama $P_{c1}$
$\varepsilon_{c1}$	– relativna deformacija betona na donjem rubu ploče
$\varepsilon_{c2}$	– relativna deformacija betona na tlačnom rubu presjeka
$\varepsilon_{s1}$	– relativna deformacija vlačne armature
$\varepsilon_{s2}$	– relativna deformacija tlačne armature
$\varepsilon_{sv}$	– relativna deformacija vlačne armature pri popuštanju $\varepsilon_{sv} = f_{yk} / E_s$
$\varepsilon_{su}$	– relativna deformacija vlačne armature pri slomu
$\sigma_{s1}$	– naprezanje vlačne armature
$\sigma_{s2}$	– naprezanje tlačne armature



Slika 3. Određivanje težišta površina dijagrama naprezanja – neutralna os u rebro

Površine dijagrama naprezanja odrede se iz sljedećih izraza:

$$\text{Površina } P_{c1}: P_{c1} = 0.85 \cdot f_{ck} \cdot \alpha_{v1} \cdot (x - h_f) \quad (9)$$

$$\text{Površina } P_{c12}: P_{c12} = 0.85 \cdot f_{ck} \cdot \alpha_v \cdot x \quad (10)$$

$$\text{Površina } P_{c2}: P_{c2} = P_{c12} - P_{c1} \quad (11)$$

Položaji težišta tih površina odrede se iz izraza:

$$\text{Za površinu } P_{c1}: y_{c1} = k_{a1} \cdot (x - h_f) + h_f \quad (12)$$

$$\text{Za površinu } P_{c12}: y_{c12} = k_a \cdot x \quad (13)$$

$$\text{Za površinu } P_{c2}: y_{c2} = \frac{P_{c12} \cdot y_{c12} - P_{c1} \cdot y_{c1}}{P_{c2}} \quad (14)$$

Koeficijenti  $\alpha_{v1}$  i  $k_{a1}$  određeni su za  $\varepsilon_{c1}$  sljedećim izrazima:

– ako je  $0\% \leq \varepsilon_{c1} \leq 2.0\%$ :

$$\alpha_{v1} = \frac{1000\varepsilon_{c1}}{12} (6 - 1000\varepsilon_{c1}); k_{a1} = \frac{8 - 1000\varepsilon_{c1}}{4(6 - 1000\varepsilon_{c1})} \quad (15)$$

– ako je  $2.0\% < \varepsilon_{c1} \leq 3.5\%$ :

$$\alpha_{v1} = \frac{3000\varepsilon_{c1} - 2}{3000\varepsilon_{c1}}; k_{a1} = \frac{1000\varepsilon_{c1}(3000\varepsilon_{c1} - 4) + 2}{2000\varepsilon_{c1}(3000\varepsilon_{c1} - 2)} \quad (16)$$

Koeficijenti  $\alpha_v$  i  $k_a$  određeni su za  $\varepsilon_{c2}$  s pomoću sljedećih izraza:

– ako je  $0\% \leq \varepsilon_{c2} \leq 2.0\%$ :

$$\alpha_v = \frac{1000\varepsilon_{c2}}{12} (6 - 1000\varepsilon_{c2}); k_a = \frac{8 - 1000\varepsilon_{c2}}{4(6 - 1000\varepsilon_{c2})} \quad (17)$$

– ako je  $2.0\% < \varepsilon_{c2} \leq 3.5\%$ :

$$\alpha_v = \frac{3000\varepsilon_{c2} - 2}{3000\varepsilon_{c2}}; k_a = \frac{1000\varepsilon_{c2}(3000\varepsilon_{c2} - 4) + 2}{2000\varepsilon_{c2}(3000\varepsilon_{c2} - 2)} \quad (18)$$

Sile u betonu su:

$$F_{c1} = P_{c1} \cdot b_w; F_{c2} = P_{c2} \cdot b_{eff}; F_c = F_{c1} + F_{c2} \quad (19)$$

Udaljenost rezultante tlačnih naprezanja u betonu od gornjeg ruba presjeka jest:

$$y_c = \frac{F_{c1} \cdot y_{c1} + F_{c2} \cdot y_{c2}}{F_c} \quad (20)$$

Tlačna relativna deformacija u tlačnoj armaturi jest:

$$\varepsilon_{s2} = \frac{\varepsilon_{c2} \cdot (x - d_2)}{x} \quad (21)$$

Sila u tlačnoj armaturi je:

$$F_{s2} = A_{s2} \cdot \sigma_{s2}; \sigma_{s2} = \varepsilon_{s2} \cdot E_s \leq f_{yk} \quad (22)$$

Udaljenost ukupne tlačne sile od gornjeg ruba poprečnog presjeka jest:

$$y_r = \frac{F_{s2} \cdot d_2 + F_c \cdot y_c}{F_{s2} + F_c} \quad (23)$$

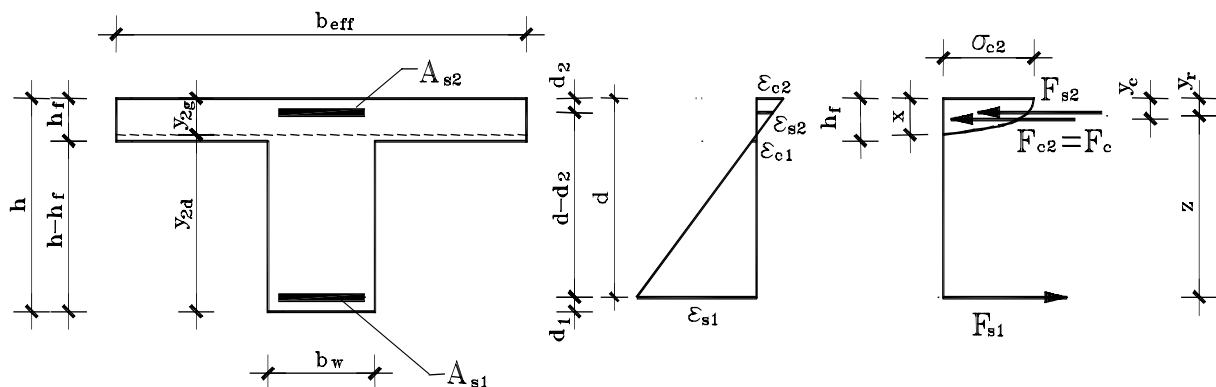
pa je iz toga krak unutarnjih sila:

$$z = d - y_r \quad (24)$$

Ako se neutralna os nalazi u ploči, tj.  $x \leq h_f$  (slika 4.), sila u tlačnom dijelu betona i sila u tlačnoj armaturi proračunavaju se na sljedeći način:

Sila u tlačnom dijelu betona izračunava se prema izrazu:

$$F_c = 0.85 \cdot f_{ck} \cdot \alpha_v \cdot x \cdot b_{eff} \quad (25)$$



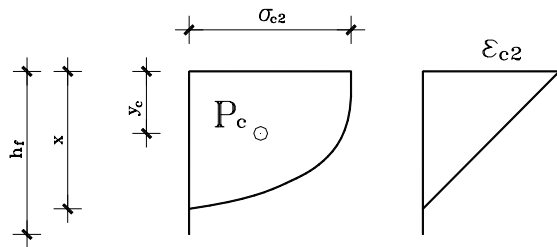
Slika 4. T-presjek s raspodjelom relativnih deformacija i naprezanja – neutralna os u ploči presjeka

gdje se udaljenost neutralne osi presjeka od gornjeg ruba,  $y_{2g} = x$ , računa prema izrazu (7). Koeficijenti  $\alpha_v$  i  $k_a$  određeni su za  $\epsilon_{c2}$  s pomoću izraza (17) i (18).

Udaljenost sile u tlačnom dijelu betona, odnosno udaljenost težišta dijagrama tlačnih naprezanja u betonu od gornjeg ruba poprečnog presjeka (slika 5.) računa se prema izrazu:

$$y_c = k_a \cdot x \quad (26)$$

Relativna deformacija i sila u tlačnoj armaturi određuju se prema izrazu (21) odnosno (22). Udaljenost rezultante sile u tlačnom dijelu betona i u vlačnoj armaturi od gornjeg ruba poprečnog presjeka određuje se prema izrazu (23), dok se krak unutarnjih sila određuje prema (24).



Slika 5. Određivanje težišta površina dijagrama naprezanja – neutralna os u ploči

Ako se radi o pravokutnom poprečnom presjeku, mogu se upotrijebiti izrazi kao i za T-presjek kada se neutralna os nalazi u ploči poprečnog presjeka, samo što se u izraz (25) mora uvesti pretpostavka da je širina tlačnog područja  $b_{eff} = b$ .

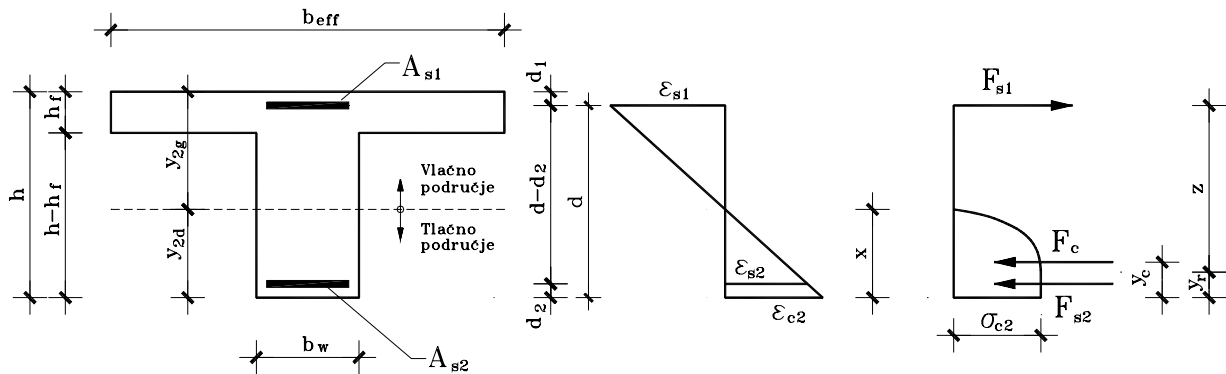
2.2 Računanje sile u betonu kod T-presjeka kada je gornje područje naprezano vlačno

Ako se radi o T-presjeku kada je gornje područje naprezano vlačno, neutralna se os u većini slučajeva nalazi u rebru poprečnog presjeka (slika 6.). Unutarnje sile i krak unutarnjih sila računaju se jednako kao i za T-presjek pri kojem je donje područje naprezano vlačno i kada je neutralna os u ploči presjeka (točka 2.1), samo što se u izraz (25) umjesto širine tlačnog područja  $b_{eff}$  stavlja  $b_w$ .

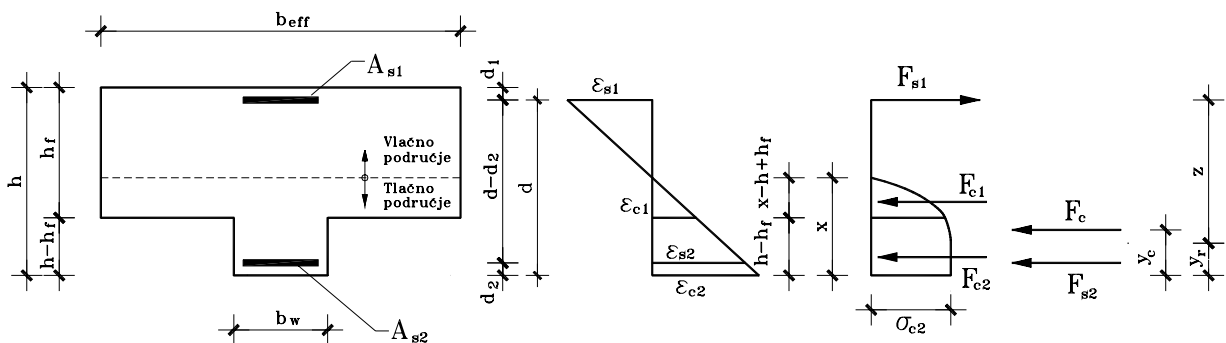
Ako se radi o T-presjeku s jako debelom pločom, može se dogoditi da neutralna os padne u ploču. Tlačno se područje betona nalazi u rebru i dijelom u ploči (slika 7).

Unutarnje sile u poprečnom presjeku računaju se na sljedeći način:

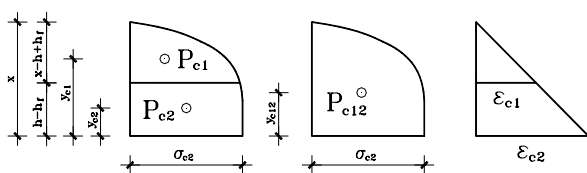
Dijagram naprezanja poprečnog presjeka se rastavlja na dva dijela (kao i u točki 2.1), dio u rebru i dio u ploči. Da bi se mogla izračunati rezultanta tlačnih naprezanja u betonu potrebno je izračunati površine tih dvaju dijelova, te položaje težišta tih površina (slika 8.).



Slika 6. T-presjek s raspodjelom relativnih deformacija i naprezanja kada je gornje područje naprezano vlačno – neutralna os u rebru presjeka



Slika 7. T-presjek s jako debelom pojasnicom kada je gornje područje naprezano vlačno – neutralna os u ploči presjeka



Slika 8. Određivanje težišta površina dijagrama naprezanja – neutralna os u ploči

Najprije se računa relativna deformacija betona na donjem rubu ploče:

$$\varepsilon_{c1} = \frac{\varepsilon_{c2} \cdot (x - h + h_f)}{x} \quad (27)$$

Površine dijagrama naprezanja odrede se iz sljedećih izraza:

$$\text{Površina } P_{c1}: P_{c1} = 0,85 \cdot f_{ck} \cdot \alpha_{v1} \cdot (x - h + h_f) \quad (28)$$

$$\text{Površina } P_{c12}: P_{c12} = 0,85 \cdot f_{ck} \cdot \alpha_v \cdot x \quad (29)$$

Površina  $P_{c2}$  dobije se iz izraza (11)

Položaji težišta tih površina odrede se iz sljedećih izraza:

Za površinu  $P_{c1}$ :

$$y_{c1} = k_{a1} \cdot (x - h + h_f) + h_f \quad (30)$$

Položaji težišta površina  $P_{c12}$  i  $P_{c2}$  odrede se prema izrazima (13) i (14)

Koeficijenti  $\alpha_{v1}$  i  $k_{a1}$  određeni su za  $\varepsilon_{c1}$  s pomoću izraza (15) i (16), dok su koeficijenti  $\alpha_v$  i  $k_a$  određeni za  $\varepsilon_{c2}$  izrazima (17) i (18).

Sile u betonu su:

$$F_{c1} = P_{c1} \cdot b_{eff}, F_{c2} = P_{c2} \cdot b_w; F_c = F_{c1} + F_{c2} \quad (31)$$

Udaljenost rezultante tlačnih naprezanja u betonu od donjeg ruba računa se prema izrazu (20).

Relativna deformacija u tlačnoj armaturi računa se s pomoću izraza (21), a sila u tlačnoj armaturi s pomoću izraza (22).

Udaljenost ukupne tlačne sile od donjeg ruba poprečnog presjeka računa se s pomoću izraza (23), a krak unutarnjih sila prema izrazu (24)

### 3. Određivanje točnijeg oblika dijagrama $M-1/r$

Dijagram  $M-1/r$ , opisan u točki 2, jest približan zbog pretpostavljene linearne ovisnosti zakrivljenosti o momentu savijanja između karakterističnih točaka dijagrama. Točniji oblik dijagrama  $M-1/r$  može se odrediti na dva načina:

- određivanjem zakrivljenosti postupnim povećavanjem momenta savijanja ili
- određivanjem pripadnog momenta savijanja postupnim povećavanjem zakrivljenosti.

#### 3.1 Određivanje zakrivljenosti postupnim povećanjem momenta savijanja

Unaprijed se izračunaju karakteristične točke dijagrama  $M-1/r$ . To su točke (1), (2) i (3) sa slike 1. Proračunavaju se izrazima (1) do (6). Zatim se moment savijanja  $M$  u koracima povećava od nule do vrijednosti momenta  $M_u$  i za svaku se vrijednost računa zakrivljenost poprečnog presjeka.

Za  $M \leq M_{cr}$  vrijedi linearni odnos između momenta savijanja i zakrivljenosti:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{M_{cr}} \cdot \frac{1}{r_{cr}} \quad (32)$$

Za  $M_{cr} < M \leq M_u$  zakrivljenost se određuje iterativnim postupkom, na sljedeći način:

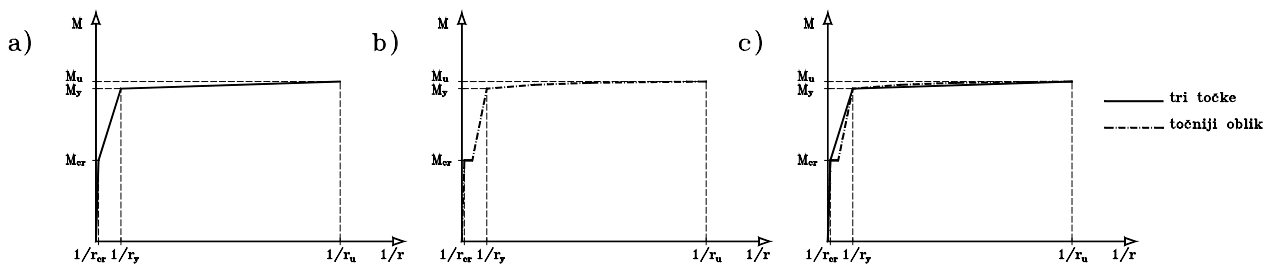
- Pretpostavi se vlačna relativna deformacija armature,  $\varepsilon_{s1}$ , i izračunava se sila u armaturi  $F_{s1}$
- Traži se takva relativna deformacija tlačnog ruba betona,  $\varepsilon_{c2}$ , da se postigne ravnoteža unutarnjih sila  $(F_c + F_{s2}) = F_{s1}$
- Izračunava se moment savijanja za dobivene unutarnje sile, prema izrazu:
 
$$M_{Rd} = (F_c + F_{s2}) \cdot z = F_{s1} \cdot z \quad (33)$$
- Uspoređuju se momenti savijanja  $M$  i  $M_{Rd}$
- Ako je  $M > M_{Rd}$  povećava se pretpostavljena relativna deformacija armature, a u obratnom se slučaju smanjuje i postupak se ponavlja od točke 2.

Unaprijed se mogu iskoristiti već poznate karakteristične točke dijagrama  $M-1/r$  pa tako vrijedi:

Ako je  $M_{cr} < M \leq M_y$ , tada je  $\varepsilon_{s1} \leq f_{yk} / E_s$ , a ako je  $M_y < M \leq M_u$ , tada je  $f_{yk} / E_s < \varepsilon_{s1} \leq \varepsilon_{su}$  ( $\varepsilon_{su}$  je relativna deformacija vlačne armature pri slomu – točka 2). Time se smanjuje broj računskih operacija kod gore spomenutog iterativnog postupka.

Na slici 9. prikazani su dijagrami  $M-1/r$  određeni preko tri točke i računanjem zakrivljenosti uz povećanje momenta savijanja. Na slici se vidi da se dijagrami gotovo poklapaju, osim u području momenta nastanka prve pukotine, i to zbog toga jer se pri pojavi prve pukotine naglo povećava zakrivljenost poprečnog presjeka na  $1/r_M$  uz isti moment savijanja (slika 11.a), što nije uzeto u obzir pri određivanju dijagrama dobivenog preko tri točke, opisanog





Slika 9. a) Dijagram  $M - 1/r$  određen preko tri točke, b) Točniji oblik dijagrama  $M - 1/r$  određen postupnim povećanjem momenta savijanja, c) Usporedni prikaz dijagrama  $M - 1/r$

u točki 2. Ta je razlika vrlo mala ako se uspoređi s najvećom zakrivljenosti ( $1/r_u$ ), pa se ne radi velika pogreška ako se uzima dijagram  $M - 1/r$  određen preko tri točke.

### 3.2 Određivanje momenta savijanja postupnim povećanjem zakrivljenosti

Zakrivljenosti se povećavaju od nule do ( $1/r_u$ ) i za svaku se vrijednost računa pripadni moment savijanja. Prva točka dijagrama  $M - 1/r$  je  $(0,0)$ , a kao druga točka dijagrama uzima se  $(1/r_{cr}, M_{cr})$ . Između tih dviju točaka vrijedi linearni odnos zakrivljenosti i momenta. Za vrijednosti zakrivljenosti između  $(1/r_{cr})$  i  $(1/r_u)$  računaju se pripadni momenti na sljedeći način:

Za određenu zakrivljenost ( $1/r$ ) potrebno je naći par vrijednosti relativnih deformacija čelika  $\varepsilon_{s1}$  i betona  $\varepsilon_{c2}$ , takvih da je zadovoljena ravnoteža unutarnjih sila.

- Pretpostavi se relativna deformacija armature,  $\varepsilon_{s1}$ , i računa se sila u armaturi,  $F_{s1}$
- Izračuna se relativna deformacija tlačnog ruba betona,  $\varepsilon_{c2}$ , prema izrazu:

$$|\varepsilon_{c2}| = \frac{1}{r} \cdot d - |\varepsilon_{s1}| \quad (34)$$

- Ako je relativna deformacija tlačnog ruba betona  $\varepsilon_{c2} < 0$ , tj. cijeli je betonski presjek naprežan vlačno, postupak postaje nestabilan, pa treba pretpostaviti manju relativnu deformaciju armature kako bi relativna deformacija betona za istu zakrivljenost postala veća od nule, tj. dio betonskog presjeka bio tlačno naprežan. Postupak se ponavlja od točke a).

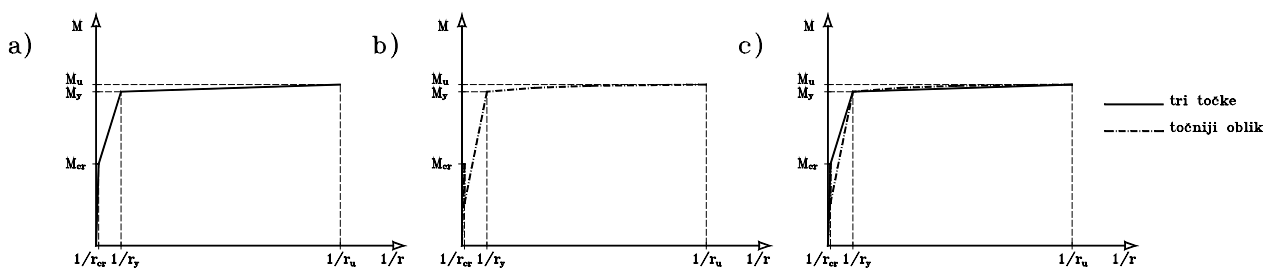
- Računaju se sile u betonu i tlačnoj armaturi  $F_c$  i  $F_{s2}$  prema postupku opisanom u točki 2.1 ili 2.2
- Ako nije postignuta ravnoteža unutarnjih sila, tj.  $(F_c + F_{s2}) \neq F_{s1}$ , postupak se ponavlja od točke a) (pretpostavi se nova relativna deformacija armature,  $\varepsilon_{s1}$ ).
- Kada se postigne ravnoteža računa se moment savijanja

$$M = (F_c + F_{s2}) \cdot z = F_{s1} \cdot z \quad (35)$$

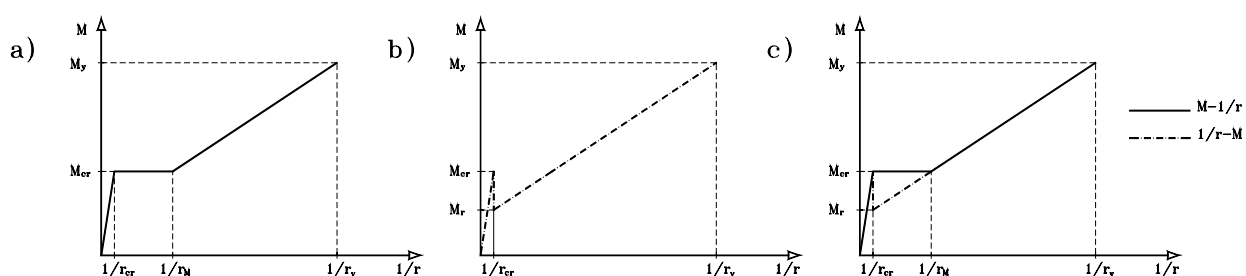
Na slici 10 prikazani su dijagrami  $M - 1/r$  određeni preko tri točke i određivanjem pripadnog momenta savijanja uz postupno povećanje zakrivljenosti. Na slici se vidi da se dijagrami gotovo poklapaju, osim u području momenta nastanka prve pukotine i to zbog toga jer se pri pojavi prve pukotine naglo smanjuje moment savijanja na  $M_r$  uz istu zakrivljenost poprečnog presjeka (slika 11.b), što nije uzeto u obzir pri određivanju dijagrama dobivenog preko tri točke, opisanog u točki 2. Ta je razlika vrlo mala ako se uspoređi s najvećom zakrivljenosti ( $1/r_u$ ), pa se ne radi velika pogreška ako se uzima dijagram  $M - 1/r$  određen preko tri točke.

Razlika između  $M - 1/r$  dijagrama određenih na dva načina a) postupnim povećanjem momenta savijanja i b) postupnim povećanjem zakrivljenosti, prikazana je na slici 11. Neposredno prije pojave prve pukotine u poprečnom presjeku s pomoću oba načina proračuna dijagrama dostignuta je zakrivljenost,  $1/r_{cr}$ , uz pripadni moment savijanja  $M_{cr}$ .

Računa li se dijagram  $M - 1/r$  postupnim povećanjem



Slika 10. a) Dijagram  $M - 1/r$  određen preko tri točke, b) Točniji oblik dijagrama  $M - 1/r$  određen postupnim povećanjem zakrivljenosti, c) Usporedni prikaz dijagrama  $M - 1/r$



Slika 11. a) Dijagram  $M - 1/r$  određen postupnim povećanjem momenta savijanja, b) Dijagram  $M - 1/r$  određen postupnim povećanjem zakrivljenosti, c) Usporedan prikaz dijagrama  $M - 1/r$ . Dijagrami  $M - 1/r$  su prikazani do druge karakteristične točke ( $1/r_y ; M_y$ )

momenta savijanja, pri pojavi prve pukotine, za moment savijanja  $M_{cr}$  doći će do naglog prirasta zakrivljenosti od vrijednosti  $1/r_{cr}$  do vrijednosti  $1/r_M$  (slika 11 a)). Ta je pojava analogna pojavi koja se javlja pri ispitivanju nosača na savijanje uz kontrolu prirasta sile. Pri pojavi prve pukotine, dolazi do naglog prirasta pomaka.

Ako se, pak, računa dijagram  $M - 1/r$  postupnim povećanjem zakrivljenosti poprečnog presjeka, pri pojavi prve pukotine, za zakrivljenost  $1/r_{cr}$  doći će do naglog pada vrijednosti momenta savijanja od vrijednosti  $M_{cr}$  do vrijednosti  $M_r$  (slika 11.b). Ta je pojava analogna pojavi koja se javlja pri ispitivanju nosača na savijanje uz kontrolu prirasta pomaka. Pri pojavi prve pukotine dolazi do naglog pada sile na preši.

#### 4. Zaključak

Opisanim postupcima u ovom članku prikazuje se problematika proračuna zakrivljenosti poprečnih presjeka opterećenih momentom savijanja. Detaljno su opisani postupci određivanja karakterističnih točaka dijagrama  $M - 1/r$  za T - presjek s vlačnom zonom u donjem ili gornjem području i za pravokutni poprečni presjek. Za praktičnu uporabu dovoljno je točan dijagram  $M - 1/r$  određen preko tri točke, dok se za točnije proračune, u svrhu daljnjeg znanstvenog izučavanja, mogu uporabiti dijagrami određeni postupnim povećavanjem momenta savijanja ili postupnim povećavanjem zakrivljenosti. Progibi armiranobetonskih nosača se proračunavaju s pomoću dijagrama  $M - 1/r$ .

#### Zahvala

Ovaj rad napravljen je u okviru znanstvenog projekta br. 082001, Granična stanja uporabljivosti armiranobetonskih konstrukcija koji podupire Ministarstvo znanosti i tehnologije Republike Hrvatske. Autori se zahvaljuju Ministarstvu na potpori.

#### LITERATURA

- [1] Tomičić, I.: *Betonske konstrukcije*, DHGK, Zagreb 1996., str. 32, 55, 476.-498.
- [2] Tomičić, I., *Priručnik za proračun AB konstrukcija*, DHGK, Zagreb 1993., str. 139.-144.
- [3] Beton-kalender 1994., Teil I, *Grenzzustände der Tragwerksverformung*, str. 798.-805.
- [4] CEB Design manual on CRACKING AND DEFORMATIONS, Ecole polytechnique federale de Lausanne, 1985., str. 1.1-1.9, 3.1-3.16
- [5] ENV 1992-1-1, Eurocode 2 - Design of Concrete Structures; Part 1: General Rules and Rules for Buildings, Revised final draft, Brussel, October 1990.
- [6] Kišiček, T.: *Progibi armiranobetonskih nosača pri povećanju opterećenja*, Magistarski rad, Zagreb, 2001.
- [7] Sorić, Z.; Kišiček, T.; Gukov, I.; Bjelajac, N.: *Program za proračun progiba AB nosača*, Četvrti opći sabor HDGK, Brijunski otoci, 11. 6. - 13. 6. 1998., str. 539.-546.
- [8] Kišiček, T.; Sorić, Z.: *Proračun progiba kontinuiranih AB nosača*, Peti opći sabor HDGK, Brijunski otoci, 26.4.-28.4.2001., str. 681.-686.
- [9] Branson, D. E.: *Design Procedures for Computing Deflections*, ACI Journal, September 1968, str. 730.-742.
- [10] *Priručnik za primjenu Pravilnika BAB 87 o tehničkim normativima za beton i armirani beton*, Simpozij SDGKJ, Dubrovnik 25.-27. 04.1989., Beograd, 1989., str. 235.-353.
- [11] *Pravilnik BAB 87 o tehničkim normativima za beton i armirani beton*, Simpozij SDGKJ, Dubrovnik 25.-27. 04.1989., Beograd, 1989., str. 34.-35.
- [12] *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-95) and Commentary (ACI 318R-95)*, ACI, Farmington Hills, MI, 1996., str. 93.-100.
- [13] Pakvor, A., Bajić, D.: *Kriterijumi za analizu G.S. deformacija i prslina AB linijskih elemenata*, Jugoslovensko društvo za ispitivanje i istraživanje materijala i konstrukcija, XVII Kongres, Sarajevo, 1982., str. 379.-393.
- [14] Nawy, E. G.: *Reinforced concrete: a fundamental approach*, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [15] Ferguson, P., M.: *Reinforced concrete fundamentals*, John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [16] Winter, G.; Nilson, A., H.: *Design of concrete structures*, McGraw-Hill, New York, 1979.
- [17] Radosavljević, Ž.: *Granična nosivost linijskih betonskih elemenata*, Građevinski kalendar, Beograd, 1981., str. 411.-491.