DOI: https://doi.org/ 10.5592/CO/YODA.2019.2.2

Procjena parametara i opterećenja iz mjerenja na konstrukcijama i modelima
(pozvano predavanje)

Ivica Kožar
Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet

Sažetak

Veza između opterećenja i pomaka tradicionalno predstavlja model ponašanja građevinskih konstrukcija i koristi se u fazi dimenzioniranja. Analiza sigurnosti (izvedenog stanja) pretpostavlja naknadna mjerenja na izvedenom objektu, no direktna mjerenja mnogih parametara nisu moguća pa se koriste tkz., "inverzni modeli". Rad prikazuje neke inverzne modele za određivanje parametara, tj., opterećenja, uz tretiranje greške mjerenja da bi se dobili rezultati prihvatljive pouzdanosti.

Ključne riječi: inverzni model, mjerenja, parametri, opterećenje, greške

Estimation of parameters and loads from measurements on structures and models

Abstract

Relation between load and displacement is traditionally used to model behaviour of structures and is mostly used in the design phase of a structure. Analysis of safety, on the other hand, requires measuring on the finished structure. However, direct measurement of many relevant parameters is not possible and the "inverse model" has to be applied. This work presents some inverse models for estimation of parameters and loads and explains how to deal with errors in measurement to obtain reliable results.

Key words: inverse model, measurements, parameters, loading, error

Uvod

Veza između opterećenja i pomaka tradicionalno predstavlja model ponašanja građevinskih konstrukcija. “Dimenzioniranje” konstrukcije podrazumijeva uporabu modela koji iz poznatoga opterećenja računa pomake i potom unutarnja naprezanja, na temelju čega se procjenjuje zadovoljavaju li dimenzije konstrukcije tražene parametre sigurnosti (koji god da oni jesu). To je takozvani “model prema naprijed” (forward model).
Kada je konstrukcija izvedena zanima nas njezina sigurnost, odnosno koliko ponašanje konstrukcije odstupa od predviđanja iz proračuna. U stvarnosti, geometrija i materijal konstrukcije više ili manje odstupaju od računskih vrijednosti, a upravo je to odstupanje bitno za procjenu sigurnosti konstrukcije. Isto tako, kao opterećenja na konstrukciju u fazi proračuna uzimaju se neka pretpostavljena opterećenja, za koja, zbog linearnosti konstrukcije, možemo reći da osiguravaju željeno ponašanje konstrukcije. U stvarnosti, kod mnogih konstrukcija nikada ne doznamo stvarno opterećenje, primjerice kod konstrukcija opterećenih vjetrom. Ako nas zanima analiza zamora konstrukcije, treba znati opterećenje na nju. No, takvo opterećenje ne možemo mjeriti, pa se moramo poslužiti indirektnim postupkom iz podataka koje možemo mjeriti. Navedene probleme rješavamo određivanjem traženih parametara iz mjerenja, putem takozvanoga “inverznog modela” (inverse model). Pri tome, parametri mogu označavati opterećenje na konstrukciju (jednostavniji problem) ili unutrašnja svojstva konstrukcije, primjerice moment tromosti, uvjete oslanjanja, geometriju (teži problem). Osnovni problem pri formulaciji inverznoga modela njegova je osjetljivost na greške, odnosno, takvi modeli često višestruko pojačavaju greške ulaznih veličina i daju neupotrebljive rezultate.
U radu su predstavljeni primjeri određivanja nepoznatoga opterećenja iz mjerenja parametara konstukcije (pomaka). Određivanje unutrašnjih parametara konstrukcije (primjerice, krutosti, temperature i sl.) zahtijeva složenije inverzne modele koji se ovdje neće opisati. Primjer inverznoga modela za određivanje statističkih parametara materijala prikazan je u Kožar, Torić Malić, Rukavina (2018). Primjer inverznoga modela za određivanje kompleksnoga toplinskog koeficijenta difuzije iz mjerenja temperature prikazan je u Lozzi–Kožar, Kožar (2017). Općeniti prikaz određivanja parametara kod modela difuzije temeljenih na diskretizaciji konačnim elementima dan je u Kožar, Lozzi–Kožar (2017).
Prethodni se primjeri temelje na mjerenjima na konstrukcijama; mjerenja na modelima podrazumijevaju uspostavljanje relacije između parametara modela i parametara stvarne konstrukcije. Detaljniji opis veze pomaka i opterećenja između modela i konstrukcije kod statičkog i dinamičkog opterećenja može se naći u Kožar (2016) i Kožar, Rukavina, Torić Malić (2017).

Značaj mjerenja na konstrukcijama postajat će sve veći s porastom uporabe jeftinih mjernih senzora povezanih u mrežu koja neprestano dostavlja velike količine podataka mjerenja.
Svi primjeri načinjeni su pomoću programa Wolfram Mathematica (2017).

Rekonstrukcija statičkoga opterećenja

Određivanje podataka prema rezultatima mjerenja podrazumijeva vezu između podataka koji se mjere i rezultata mjerenja, Gibbs (2011). Tu vezu možemo zapisati u matričnoj notaciji

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{x}$$

gdje je **H** matrica mjerenja, **y** vektor mjerenih podataka i **x** vektor (vanjskih) parametara koje želimo odrediti. Navedena jednadžba opisuje linearni problem mjerenja, a matrica **H** nije kvadratna nego pravokutna (matrica **H** ima dimenziju $m \cdot n$ pri čemu broj parametara "*n*" i broj mjerenja "*m*" obično nisu jednaki). U pravilu, povoljno je imati (značajno) više mjerenja nego parametara koje treba odrediti, to jest $m >> n$.
Linearni problem mjerenja obično se može eksplicitno zapisati; tako formulirani problemi opisuju primjerice problem određivanja nepoznatoga opterećenja iz mjerenja pomaka i slično. Nelinearni problemi zapisuju se implicitnom formulacijom

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{p})$$

i opisuju problem određivanja vektora unutarnjih parametara **p** iz nekoga indirektnog mjerenja, primjerice određivanje modula elastičnosti iz mjerenja pomaka (uz poznate sile opterećenja).
Složeni problemi mogu se opisivati i kombinacijom implicitne i eksplicitne formulacije

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}_F \cdot \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{p})$$

U prikazanim jednadžbama dodali smo oznaku **p** za vektor unutarnjih parametara.
Navedene jednadžbe možemo rješavati nekom od metoda optimizacije, primjerice metodom najmanjih kvadrata (engl. *Least Squares*, *LS*), odnosno određivanjem poopćene inverzne matrice $\boldsymbol{H}^{-g}$ (Moore–Penroseov inverz). Za nelinearni problem možemo primijeniti neku varijantu metode najmanjih kvadrata, poput Levenberg–Marquardtove metodu. Jasno je da su svojstva matrice **H** važna za stabilnost i toč-

nost postupka računanja vektora parametara. Postupak mjerenja ima veliki utjecaj na oblikovanje matrice **H**, a samim time i na uspješnost postupka, pa su izbor mjerenih veličina (primjerice, pomaci ili deformacije, pomaci, brzine ili ubrzanja itd.) i način mjerenja važna stavka postupka određivanja parametara.
Kod analize opterećenja konstrukcije iz mjerenja pomaka, matrica **H** sastoji se od komponenata matrice fleksibilnosti konstrukcije. Kod mjerenja deformacija, matrica **H** uključuje konstante materijala i geometrijska svojstva konstrukcije (momente tromosti poprečnih presjeka).
Navedene jednadžbe predstavljaju idealizirani problem, jer se u stvarnosti pojavljuje i utjecaj pogreške mjerenja (zbog različitih razloga: nepreciznosti mjernoga uređaja, smetnji (šuma) prilikom mjerenja i sl.). Matematički opis obično ima aditivni oblik

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}$$

gdje je **w** vektor pogreške mjerenja. Pogreška mjerenja nepoznata je veličina, ali se mogu prihvatiti neke pretpostavke koje olakšavaju određivanje nepoznatih parametara: **w** je stohastička varijabla, najčešće normalne (Gaussove) distribucije gustoće vjerojatnosti.
Napomena: Ako se u jednadžbama eksplicitno ne pojavljuje pogreška mjerenja **w**, to ne znači da pogreške nema; ona je sadržana u vektoru **y** i utječe na rezultate. U takvom slučaju pretpostavljamo da ne znamo ništa u pogreški mjerenja i nemamo znanje kojim tu pogrešku možemo smanjiti.
Poznavanje statističke raspodjele (funkcije raspodjele vjerojatnosti) pogreške mjerenja **w** omogućava nam primjenu metode Monte Carlo u simulaciji postupaka mjerenja. Također, omogućava nam primjenu nekog od postupaka za smanjivanje utjecaja šuma mjerenja na rezultate. Često se primjenjuju težinska metoda najmanjih kvadrata (engl. *Weighted Least Squares, WLS*), metoda najveće vjerojatnosti ishoda (engl. *Maximum Likelihood, ML*) i Bayesova metoda.

Metoda najmanjih kvadrata (*LS*)

Problem je opisan eksplicitno jednadžbom

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{x}$$

Ako je $m > n$ postupak metode najmanjih kvadrata ekvivalentan je rješavanju sistema s pomoću poopćene inverzne matrice (Moore–Penroseov inverz)

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{H}^{-g} \cdot \boldsymbol{y}$$

gdje je

$$\boldsymbol{H}^{-g} = (\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^T$$

Ako je $m > n$, $\boldsymbol{H}^{-g} = (\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^T$ ima puni rang, pa se može invertirati.

Procjenu greške dobivenih rezultata možemo načiniti ako pretpostavimo da su međusobna mjerenja na modelu neovisna; tada je kovarijanca *Cov* ($\boldsymbol{y}$) jedinična matrica, a kovarijanca parametara postaje

$$Cov\,(\boldsymbol{x}) = \sigma^2(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1}$$

Na taj način možemo definirati područje 95% pouzdanosti dobivenih parametara kao

$$\boldsymbol{x}_{95} = \boldsymbol{x} \pm 1{,}96 \cdot diag\left(\sqrt{(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1}}\right)$$

Konstanta 1,96 rezultat je pretpostavke normalne distribucije za grešku mjerenja kod koje onda vrijedi $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-1{,}96\sigma}^{1{,}96\sigma}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right)d\xi \approx 0{,}95$.

Težinska metoda najmanjih kvadrata (*WLS*)

U našim primjerima linearnih problema određivanja opterećenja i pretpostavke normalne distribucije pogreške mjerenja, metoda najveće vjerojatnosti ishoda (*Maximum Likelihood, ML*) postaje težinska metoda najmanjih kvadrata (*Weighted Least Squares, WLS*). Formulacija težinske metode najmanjih kvadrata dobiva se iz razmatranja utjecaja između pojedinih mjerenja.
Neka je funkcija gustoće vjerojatnosti za svako mjerenje. Složena funkcija gustoće vjerojatnosti za sva mjerenje tada je umnožak vrijednosti za pojedinačna mjerenja:

$$f\left(\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}\right) = f_1\left(y_1\boldsymbol{x}\right)\cdot f_2\left(y_2\boldsymbol{x}\right)\cdots f_m\left(y_m\boldsymbol{x}\right)$$

Funkciju $f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})$ možemo odrediti samo kao vrijednost koja je proporcionalna vjerojatnosti da je vrijednost parametara unutar višedimenzionalnoga prostora dimenzije m unutar kojega se nalazi točna vrijednost parametara **x**. Tako kažemo da je funkcija najveće vjerojatnosti (engl. *likelihood function*) $L(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})$. Uz pretpostavku normalne distribucije pojedinačnih mjerenja, znamo da vrijedi

$$f_i\left(y_i\boldsymbol{x}\right) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{(y_i-(\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})_i)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Tada je

$$L(\boldsymbol{xy}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \prod_{i=1}^{m} \sigma_i}} \prod_{i=1}^{m} exp\left(-\frac{(y_i - (\boldsymbol{Hx})_i)^2}{2\sigma^2} \right).$$

Vidljivo je da vektor **x** dobivamo minimizacijom $min \sum_{i=1}^{m} \frac{(y_i - (\boldsymbol{Hx})_i)^2}{\sigma^2}$.

To je ekvivaletno metodi najmanjih kvadrata za modificiranu matricu ***HW***=***H***·***W***. Matrica je težinskih koeficijenata

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_m} \end{bmatrix}$$

Varijance mjerenja možemo odrediti na razne načine; najjednostavnije je (iako ne i najispravnije) odrediti ih iz mjerenih podataka

$$\mu = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} y_i, \rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (y_i - \mu)^2$$

pri čemu je srednja vrijednost, a σ je varijanca. Matrica težinskih koeficijenata **W** modificira problem i rješenje se dobiva kao i za metodu najmanjih kvadrata samo se umjesto matrice **H** upotrijebi matrica **HW**.

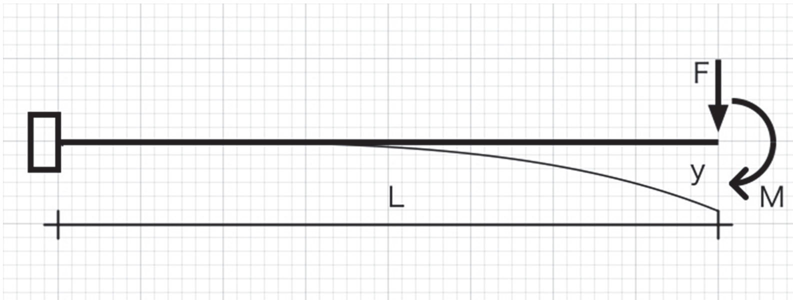
Napomena: Ako se težinska matrica malo drugačije definira, **W** = diag[1/σ2] i **P** = $(\mathbf{H}^T\mathbf{WH})^{-1}$, tada se štedi na operacijama množenja.

Primjeri

Određujemo nepoznatu silu *F* i moment *M* na konzoli preko mjerenja pomaka na kraju konzole, slika 1.

Vektori mjerenja (pomaci) i parametara (sile opterećenja) su

$$\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{Bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix}.$$



Slika 1. Konzola s opterećenjem i pomakom

Da bismo jasnije prikazali metodu, načinit ćemo simulaciju s poznatim opterećenjem F i M. Mjerene progibe zamijenit ćemo izračunatim progibima na koje ćemo nadodati "pogrešku" generiranjem slučajnih vrijednosti prema normalnoj distribuciji. Na taj ćemo način imati jasan uvid u grešku pojedine metode.
Pretpostavljamo opterećenje (neka su sve mjerne jedinice kompatibilne, pa ih možemo izostaviti pri pisanju)

$$\boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} F = 10,0 \\ M = 5,0 \end{Bmatrix}$$

Pretpostavljamo parametre konzole L = 10,0, E = 10000. Pretpostavljamo mjerenje u 3 točke na konzoli x_m = {0,0; 1,0; 2,0}. Izračun pomaka od sile i momenta na kraju konzole daje pomake δ_{izr} = {0,358333; 0,303750; 0,250667}. Za mjerene vrijednosti usvojit ćemo 3, odnosno 4 znamenke (pretpostavljamo da je to točnost našeg idealnoga mjernog instrumenta). Tako imamo δ_{m3} = {0,358; 0,304; 0,251} i δ_{m4} = {0,3583; 0,3037; 0,2507}.

Matrica mjerenja jest

$$\boldsymbol{H} = \left[\frac{L^3}{3EI} f(x)_i \; \frac{L^2}{2EI} m(x)_i \right], \text{i = 1, ..., m.}$$

Indeks "i" ide po svim točkama mjerenja a funkcije su

$$f(x) = 1 - \frac{3x}{2L} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2, \qquad m(x) = 1 - \frac{2x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2.$$

Napomena: Matrica mjerenja **H** ovisi o položaju mjernih točaka na konstrukciji.

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0,0333333 & 0,005 \\ 0,02835 & 0,00405 \\ 0,0234667 & 0,0032 \end{bmatrix}.$$

Rekonstrukcija metodom najmanjih kvadrata

Rekonstruirano je opterećenje iz podataka mjerenja s 3 točne znamenke

$$\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix} 10,276 \\ 3,1041 \end{Bmatrix}.$$

Rekonstruirano je opterećenje iz podataka mjerenja s 4 točne znamenke

$$\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix} 10,019 \\ 4,862 \end{Bmatrix}$$

Područje 95% pouzdanosti dobivenih parametara jest

$$\pm 1,96 \begin{Bmatrix} 538,6 \\ 3722 \end{Bmatrix}.$$

Napomena: Varijanca nije ovisna o točnost mjerenja nego samo o matrici mjerenja **H**.

Rekonstrukcija težinskom metodom najmanjih kvadrata

Rekonstruirano je opterećenje iz podataka mjerenja s 3 točne znamenke

$$\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix} 10,231 \\ 3,4364 \end{Bmatrix}, \qquad \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 2500,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 40000,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 10000,0 \end{bmatrix}.$$

Područje 95% pouzdanosti dobivenih parametara jest

$$\pm 1,96 \begin{Bmatrix} 7,43 \\ 52,1 \end{Bmatrix}.$$

Rekonstruirano je opterećenje iz podataka mjerenja s 4 točne znamenke

$$\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix} 10,031 \\ 4,778 \end{Bmatrix}, \qquad \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 2500,0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 10000,0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 10000,0 \end{bmatrix}.$$

Područje 95% pouzdanosti dobivenih parametara jest

$$\pm 1,96 \begin{Bmatrix} 7,50 \\ 52,8 \end{Bmatrix}.$$

Vidljivo je da metoda težinskih koeficijenata donosi marginalno povećane točnosti, ali iznimno povećanje pouzdanosti rezultata. Isto tako, povećanje točnosti lagano smanjuje interval puzdanosti.

Napomena: Matrica **H** nije ovisna o točnosti mjerenja, ali matrica mjerenja **HW** jest, jer se težinska matrica mijenja ovisno o podacima mjerenja.

Zaključak

Prikazan je postupak određivanja statičkoga opterećenja na konstrukcije iz mjerenja pomaka ako je matrica mjerenja linearna. Najjednostavniji postupak temelji se na metodi najmanjih kvadrata, a rezultira značajnom varijancom određenih parametara (opterećenja). Uvođenje matrice težinskih koeficijenata utemeljene na rezultatima mjerenja poboljšava varijancu (interval pouzdanosti) određivanih parametara. Moguće su i druge intervencije u postupak određivanja parametara. Utemeljene na metodi težinskih koeficijenata, razvijene su Bayesova metoda i Kalmanov postupak (filter). Bayesova metoda omogućava uzimanje u obzir deklarirane točnosti instrumenta, pa težinsku matricu ne određujemo iz rezultata mjerenja nego iz poznate (tvornički deklarirane) točnosti instrumenta. Kalmanov postupak iteracijski poboljšava točnost i pouzdanost mjerenih podataka uzimajući u obzir informaciju o točnosti koja se poboljšava sa svakim novim mjerenjem.
Dodatni uvid u kvalitetu modela i mjerenih parametara može se dobiti uvođenjem "rezolucijske matrice podataka" koja pokazuje može li se iz parametara modela rekonstruirati sve podatke mjerenja i "rezolucijske matrice modela" koja pokazuje može li se uz zadanu matricu mjerenja u potpunosti odrediti sve parametre modela.

Literatura

Aster, R.C., Borchers, B., Thurber, C.H.: Parameter Estimation and Inverse Problems, Academic Press, 2013.

Gibbs, B.P.: Advanced Kalman Filtering, Least–Squares and Modeling, John Wiley & Sons, 2011.

Kožar, I.: Relating Structure and Model, in: Computational Methods for Solids and Fluids, Multiscale Analysis, Probability Aspects and Model Reduction (Ed.: A. Ibrahimbegovic), p.161–184, Springer 2016.

Kožar, I., Lozzi–Kožar, D.: Flux determination using finite elements: global vs. local calculation, Tehnički vjesnik 24, (1), 247–252, 2017.

Kožar, I., Rukavina, T., Torić Malić, N.: Similarity of structures based on matrix similarity, Tehnički vjesnik 24, (1), 239–246, 2017.

Kožar, I., Torić Malić, N., Rukavina, T.: Inverse model for pullout determination of steel fibers, Coupled Systems Mechanics, Vol. 7, (2), 197–209, 2018.

Lozzi–Kožar, D., Kožar, I.: Estimation of the eddy thermal conductivity for lake Botonega, Engineering Review, Vol. 37, (3), 322–334, 2017.

Wolfram Mathematica, Wolfram research, Inc., Champaign, Illinois (2017).