

# Numerička analiza mehanizma sloma tla ispod temelja (pozvano predavanje)

---

**Hadžalić, Emina; Ibrahimbegović, Adnan; Dolarević, Samir**

*Source / Izvornik:* **Mini simpozij o numeričkim postupcima, 2019, 119 - 128**

**Conference paper / Rad u zborniku**

*Publication status / Verzija rada:* **Published version / Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

<https://doi.org/10.5592/CO/YODA.2019.3.1>

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:235640>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-14**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)



## Numerička analiza mehanizma sloma tla ispod temelja (pozvano predavanje)

**Emina Hadžalić, Adnan Ibrahimbegović, Samir Dolarević**

Univerzitet u Sarajevu, Građevinski fakultet

### Sažetak

Analiza ponašanja tla u raznim geomehaničkim problemima obično se vrši pomoću „multi-surface“ cap konstitucijskih modela kontinuuma koji su sastavljeni od tri plohe, a kojim se definiraju ponašanja tla za razna stanja naprezanja. Takvi „multi-surface“ modeli pokazuju numeričke probleme kada se stanje naprezanja nalazi blizu spoja tih ploha. U radu je ukratko prikazan način prevladavanja tih problema. Potom je prikazana analiza ponašanja tla pomoću diskretnoga rešetkastog modela, kojim se tlo modelira rešetkom koja je sastavljena od Timošenkovih greda. Na numeričkom primjeru izvršena je usporedba rezultata dobivenih opisanim metodama.

*Ključne riječi: riječi: kontinuum, cap model, rešetkasti model, Timošenkova greda, mehanizam loma*

## Numerical analysis of soil fracture mechanism underneath foundations

### Abstract

Usually, the analysis of soil behavior in various geomechanical problems is done using the „multi-surface“ cap models of the continuum consisting of three surfaces defining the soil behavior for various stress states. Such „multi-surface“ models have numerical problems when the stress state is near of the joint of these surfaces. The paper summarizes the way of avoiding such problems. Further, an analysis of the behavior of soil using a discrete beam lattice model is presented, by which the soil is meshed with one-dimensional Timoshenko beam finite elements. The numerical example compared the results obtained with the described methods.

*Key words: continuum, cap model, lattice model, Timoshenko beam, fracture mechanism*

## 1. Uvod

Ponašanje tla pod opterećenjem vrlo je kompleksno i ovisi o velikom broju čimbenika koje je teško kvantificirati. Da bi se obuhvatila sva moguća ponašanja tla trebalo bi se koristiti konstitucijskim modelima tla s vrlo velikim brojem parametara za čije bi utvrđivanje trebalo izvoditi posebne testove. Za analizu standardnih geomehaničkih problema pogodni su cap modeli homogenoga kontinuuma kojima se mogu opisati elastoplastična ponašanja tla pri različitim stanjima naprezanja. Stoga je za definiranje uvjeta tečenja potrebno zadati najmanje tri plohe: vlačna otpornost obično se definira takozvanom cut-off ravninom, smicanje Drucker-Pragerovim stošcem ili Mohr-Coulombovom prizmom, te se radi ograničavanja tlačnih naprezanja upotrebljava cap ploha, koja može biti ravnina ili elipsoid, ovisno od vrsti tla. Linije spoja ovih ploha linije su diskontinuiteta prvih derivacija, što dovodi do poteškoća pri proračunu prirasta deformacija i naprezanja kada dođe do tečenja u tom dijelu. Taj se problem može prevladati jednostavnim zaglađivanjem ploha u zoni presjeka, što uzrokuje malu korekciju funkcija tečenja.

Nedostatak je tih modela to što oni ne mogu simulirati ponašanje tla nakon sloma. Prednost diskretnih modela u odnosu na modele kontinuuma u tome je što se odgovor konstrukcije izložene djelovanju opterećenja dobiva na numeričkom modelu u kojemu je domena diskretizirana jednodimenzionalnim konačnim elementima. Adekvatnim izborom tipa konačnoga elementa, diskretnim je modelima moguće dobiti odgovor konstrukcije prije i nakon dostizanja graničnoga opterećenja, kao i predvidjeti odgovarajuće mehanizme sloma. Konačnim elementima s ugrađenim diskontinuitetima moguće je opisati fenomen omekšanja, kao i fenomen lokaliziranoga loma, odnosno formiranja jedne makropukotine koja dovodi do potpunog sloma konstrukcije. Kao što je rečeno, osnovna je prednost diskretnih modela to što je domena diskretizirana jednodimenzionalnim konačnim elementima, pa je konvergenciju rezultata i brzinu proračuna znatno lakše kontrolirati i unaprijediti, nego u slučaju primjene dvodimenzionalnih ili trodimenzionalnih konačnih elemenata. Slom u kohezivnoj vezi znači formiranje pukotine u konstrukciji. Imajući to u vidu, moguće je formirati numerički model konstrukcije kod koje će domena biti diskretizirana mrežom jednodimenzionalnih konačnih elemenata koji simuliraju ponašanje kohezivnih veza. Kako jednodimenzionalni konačni element modelira ponašanje kohezivne veze, izbor tipa konačnoga elementa direktno utječe na kvalitetu makro-odgovora diskretnoga modela.

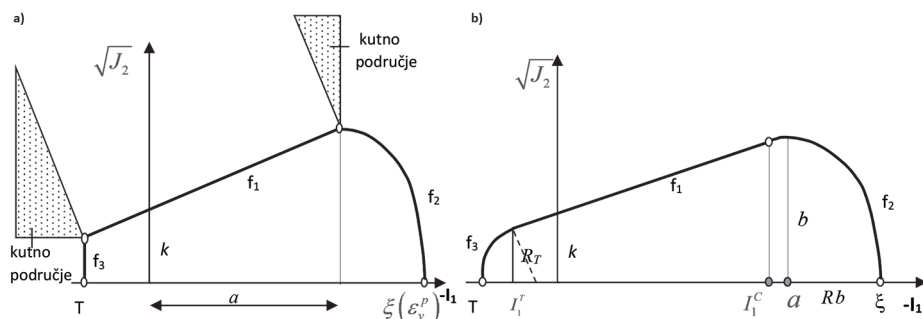
Benkemoun et. al (2010, 2012) za modeliranje kohezivne veze upotrebljavaju konačni element štapa rešetke s ugrađenim diskontinuitetom u uzdužnom smjeru. Taj konačni element može opisati formiranje i širenje pukotine u modu I (aksijalnom modu) koji predstavlja otvaranje pukotine. Taj tip konačnoga elementa upotrijebljen je kao osnova za oblikovanje dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih diskretnih šta-

pnih modela za opis ponašanja i sloma u betonu. Na tim diskretnim modelima autori nisu mogli dobiti odnos 7-10 između jednoosne čvrstoće na tlak i vlak. Da bi se točnije modeliralo ponašanje i slom u konstrukcijama od heterogenih materijala, konačni element osim moda I mora biti u mogućnosti opisati nastajanje i širenje pukotine i u modu II. Mod II (transverzalni mod) predstavlja mod širenja pukotine zbog klizanja.

Nikolić et. al (2015) za modeliranje kohezivne veze upotrebljavaju konačni element Timošenkov grede s ugrađenim diskontinuitetom u uzdužnom i poprečnom smjeru, koji može opisati širenje pukotine u oba moda. Dvodimenzionalni diskretni model utemeljen na tom tipu konačnoga elementa uspješno je primijenjen za opisivanje ponašanja i sloma u stijenama, pri čemu je dobiven odgovarajući odnos između jednoosne tlačne i vlačne čvrstoće.

## 2. Modificirani cap model

Na slici 1(a) prikazana je funkcija tečenja za tipičan “multi-surface” cap model u ravni  $I_1 - \sqrt{J_2}$ , koji je sastavljen od cut-off ravnina, kojom je definirana vlačna otpornost tla, Drucker-Pragerov pravac, kojim je definirana posmična otpornost, i elipsoid kojim se definira otpornost tla kada je dominantno tlačno naprezanje.



Slika 1. a) “Multi-surface” cap model; b) modificirani cap model

Tijeme elipsoida ovisi o ukupnoj zapreminskoj plastičnoj deformaciji, što omogućava širenje elastičnoga područja zbog nabijanja tla. Taj model dosta dobro opisuje ponašanje tla pri analizi standardnih geomehaničkih problema, a parametri modela mogu se utvrditi iz standardnih geomehaničkih pokusa (Dolarević, Ibrahimbegović, 2007). Sasvim je jasno da se, ako se prihvati asocijativni zakon tečenja, javljaju problemi kada se pri proračunu probna naprezanja jave u kutnim područjima. Lako se može pokazati da je u koracima u kojima se stanje naprezanja poklapa s presječnim točkama pojedinih linija matrica krutosti singularna. Postoje mnogi postupci kojima se ovaj problem prevladava, ali nijedan od njih ne osigurava konzistentnost algori-

tma za proračun prirasta naprezanja i algoritma za oblikovanje konstitucijske matri-  
ce, što dovodi do spore konvergencije pri rješavanju globalnih jednadžbi ravnoteže  
Newton-Raphsonovim iteracijskim postupkom.

Taj se problem može prevladati jednostavnom modifikacijom funkcije tečenja. Nai-  
me, umjesto da presječna točka Drucker-Pragerova pravca i elipse bude u tjemenu  
elipse, pomičemo je u točku u kojoj se tangenta na elipsu poklapa s Drucker-Pra-  
gerovim pravcem. Sličan se manevar izvodi i na vlačnoj strani, pri čemu se okomiti  
pravac zamjenjuje kružnicom. To znači da je funkcija tečenja sada potpuno glatka i  
definirana na sljedeći način:

$$f_1(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad I_1^T \leq I_1 \leq I_1^C \quad (1)$$

$$f_2(I_1, J_2, \xi(\varepsilon_v^p)) = \frac{(I_1 - a)^2}{R^2} + J_2 - b^2 = 0 \quad I_1 \geq I_1^C \quad (2)$$

$$f_3(I_1, J_2) = (I_1 - T + R_T)^2 + J_2 = R_T^2 \quad I_1 \leq I_1^T \quad (3)$$

gdje su:

$$b(\xi) = \frac{k - \alpha \xi}{\alpha R + \sqrt{1 + \alpha^2 R^2}}; \quad a(\xi) = Rb + \xi \quad I_1^C(\xi) = \frac{k}{\alpha} - \frac{b(\xi)}{\alpha \sqrt{1 + \alpha^2 R^2}} \quad J_2^C(\xi) = \frac{b^2(\xi)}{1 + \alpha^2 R^2}$$

$$R_T = \frac{k - \alpha T}{\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}} \quad I_1^T = \frac{k}{\alpha} - \frac{R_T}{\alpha \sqrt{1 + \alpha^2}}$$

Primijenjene modifikacije minimalno mijenjaju funkcije tečenja, te je sasvim logič-  
no da su rezultati dobiveni modificiranim modelom praktično jednaki onima koji  
se dobivaju "multi-surface" modelom, pri čemu su izbjegnuti numerički problemi s  
kutnim područjima, koja su jednostavno uklonjena.

### 3. Diskretni gredni rešetkasti model

Diskretni gredni rešetkasti model nekog područja dobiva se Delaunayevom trian-  
gulacijom područja (Edelsbrunner 2001), koja za rezultat daje područje podijeljeno  
na trokute. Diskretni se model dobiva tako da se na svakoj stranici svakoga trokuta  
postavi Timošenkova greda. Vrh svakoga trokuta je osnova za podjelu područja na  
Voronoijeve ćelije. Po definiciji su Voronoijeve ćelije dijelovi nekog područja koji su

bliži nekoj odabranoj točki nego bilo kojoj drugoj odabranoj točki. U fizičkom smislu struktura materijala prikazana je kao skup Voronoijevih ćelija. Voronoijeve su ćelije zapravo konačni dijelovi materijala koji su međusobno povezani kohezivnim vezama – u ovom slučaju Timošenkovim gredama. U skladu s time, karakteristike svake od Timošenkovih greda koja je okomita na liniju koja spaja dvije ćelije određuju se na temelju karakteristika veze koja se ostvaruje preko te zajedničke linije. To znači da poprečni presjek jedne Timošenkovke grede ovisi o duljini linije koja spaja dvije ćelije. Već je pokazano da takav način određivanja geometrijskih karakteristika daje dobre rezultate (Ibrahimbegovic and Delaplace 2003). Bitno je naglasiti da Timošenkova greda predstavlja vezu između dvije ćelije koje pak predstavljaju dijelove tijela koji se analizira. Pukotine u modu I ili modu II javljaju se kada dođe do otkazivanja veze između pojedinih dijelova tijela, što na diskretnom modelu znači do otkazivanja Timošenkovih greda. U nastavku su dane osnovne jednadžbe za neelastičnu Timošenkovu gredu (Hadžalić et al. 2018).

### 3.1. Kinematske jednadžbe

Standardna Timošenkova greda u ravnini, duljine  $L^e$  i poprečnoga presjeka  $A^e$ , ima ukupno šest stupnjeva slobode gibanja – rotaciju i dvije translacije u krajnjim čvorovima. Aproksimacija pomaka na razini elementa zadana je tako da je uvedena mogućnost diskontinuiteta pomaka u uzdužnom i poprečnom pravcu. U matricnom obliku to izgleda ovako:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} + \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} \quad (4)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix}, \{N_1, N_2\} = \left\{1 - \frac{x}{L^e}, \frac{x}{L^e}\right\}, \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} \alpha_u \\ \alpha_v \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$M(x) = H_{\bar{x}} - N_2(x), \quad H_{\bar{x}} = \begin{cases} 0, & x \leq \bar{x} \\ 1, & x > \bar{x} \end{cases} \quad (6)$$

U skladu s tim deformacije se mogu napisati kao

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\boldsymbol{\alpha} \quad (7)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -N_1 & 0 & B_2 & -N_2 \\ 0 & 0 & B_1 & 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}, \quad \{B_1, B_2\} = \left\{ -\frac{1}{L^e}, \frac{1}{L^e} \right\} \quad (8)$$

$$G(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \begin{cases} -\frac{1}{L^e}, & x \in [0, \bar{x}) \cup (\bar{x}, L^e] \\ -\frac{1}{L^e} + \delta_{\bar{x}}, & x = \bar{x} \end{cases} \quad \delta_{\bar{x}} = \begin{cases} 0, & x \in [0, \bar{x}) \cup (\bar{x}, L^e] \\ \infty, & x = \bar{x} \end{cases} \quad (9)$$

### 3.2. Jednadžbe ravnoteže

Jednadžbe ravnoteže standardno se izvode iz integralne jednadžbe ravnoteže utemeljene na Lagrangeovu načelu virtualnoga rada. Međutim, s obzirom na prisutnost diskontinuiteta treba u jednadžbu ravnoteže uključiti i virtualni rad sila na diskontinuitetu:

$$\sum_{e=1}^n \left[ \mathbf{f}^{int,e} - \mathbf{f}^{ext,e} \right] = \mathbf{0} \quad (10)$$

$$\forall e: \mathbf{h}^e = \mathbf{0} \quad (11)$$

Jednadžbna (10) je standardna jednadžba ravnoteže u metodi konačnih elemenata i odnosi se na dio grede u kojemu nema diskontinuiteta. Jednadžba (11) predstavlja ravnotežu na diskontinuitetu, gdje su

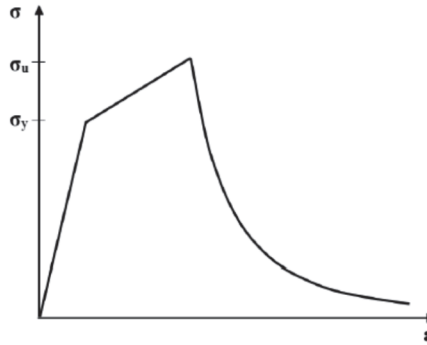
$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$\sigma$  – vektor unutarnjih sila uzduž grede,  $\mathbf{t}$  – vektor unutarnjih sila na diskontinuitetu.

### 3.3. Konstitucijske jednadžbe

Odnos između uzdužnih deformacija i normalnih sila, odnosno posmičnih deformacija i poprečnih sila dan je na slici 2. Prvi dio predstavlja linearnoelastično ponašanje definirano Hookeovim zakonom. Nakon dostizanja granice tečenja element se plastificira s izotropnim ojačanjem. Nakon dostizanja granice loma dolazi do omekša-

vanja koje je definirano eksponencijalnom funkcijom. Što se tiče savijanja, element se uvijek ponaša linearno elastično.



Slika. 2. Konstitucijski model za Timošenkovu gredu za uzdužni i poprečni smjer

#### Jednadžbe plastičnosti s linearno izotropnim očvršćivanjem:

- Ukupna deformacija:  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$
- Funkcija energije deformacija u ovisnosti o deformaciji  $\varepsilon$  i unutarnjim varijablama, plastičnoj deformaciji  $\varepsilon^p$  i varijabli očvršćivanja  $\xi$ :

$$\psi(\varepsilon, \varepsilon^p, \xi) = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon^p)C(\varepsilon - \varepsilon^p) + \frac{1}{2}\xi K \xi$$

gdje su  $C$  elastoplastični tangentni modul i  $K$  modul očvršćavanja

- Funkcija tečenja:

$$\phi(\sigma, q) = |\sigma| - (\sigma_y - q) \leq 0$$

gdje su  $\sigma_y$  granica tečenja i  $q = K\xi$  naponska varijabla.

#### Jednadžbe omekšavanja:

- Funkcija tečenja:

$$\bar{\phi}(t, \bar{q}) = |\sigma| - (\sigma_u - \bar{q}) \leq 0$$

gdje je  $t$  unutarnja sila na diskontinuitetu.

- Naponska varijabla omekšavanja  $\bar{q}$ :

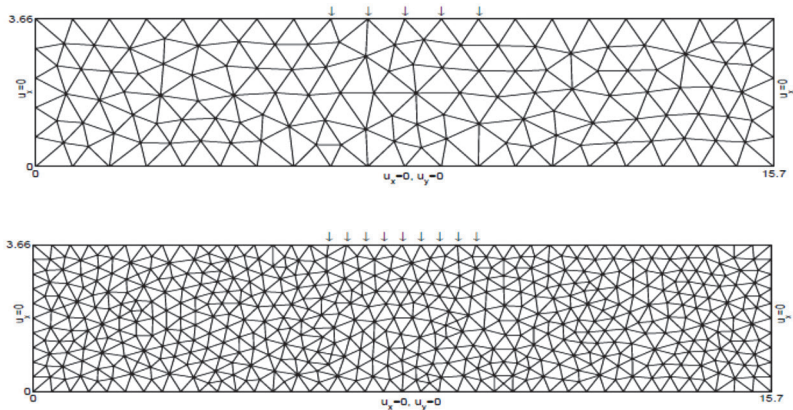
$$\bar{q} = \sigma_u \left( 1 - \exp \left( -\xi \frac{\sigma_u}{G_f} \right) \right)$$

gdje su  $\sigma_u$  vršno naprezanje i  $G_f$  energija loma.



4. Numerički primjer

Analizirano je ponašanje tla ispod fleksibilnoga temelja. Na slici 3. prikazane su mreže Timošenkovih greda različite gustoće. Isti je primjer analiziran i pomoću opisano-ga cap modela. Ulazni podaci za cap model su dani u tablici 1. Odgovarajući parametri za Timošenkove grede, koji su odabrani tako da se elastični odgovor poklapa sa cap modelom, dani su u tablici 2.



Slika 3. Mreža konačnih elemenata za rešetkasti diskretni model (Hadžalić & al. 2018.)

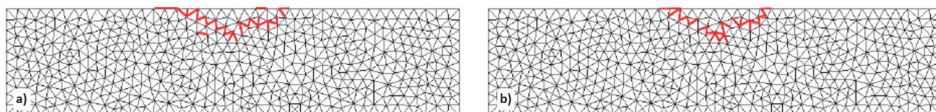
Tablica 1. Ulazni podaci za cap model

|                             |                                                                               |
|-----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| Elastic parameters          | $K=172\text{ MPa}$ , $G=80\text{ MPa}$                                        |
| Plastic parameters          | $c=69\text{ kPa}$ , $\varphi=20^{\circ}$ $k=63.6\text{ kPa}$ , $\alpha=0.112$ |
| Hardening parameters        | $W=0.003$ $D=1.26\text{ mm}^2/\text{N}$ $R=4$                                 |
| Initial location of the cap | $\xi_0 = 300\text{ kN/m}^2$                                                   |

Tablica 2. Ulazni podaci za Timošenkove grede

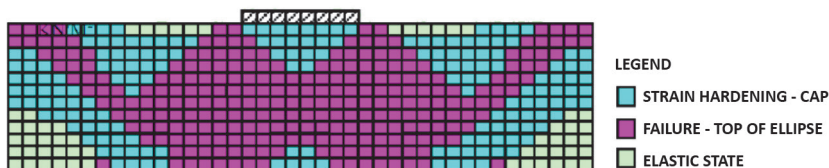
| Young’s modulus [MPa] | Poisson’s ratio | Yield limit [MPa]     | Hardening modulus [MPa] | Fracture limit [MPa]                  | Fracture energy [N/mm] |
|-----------------------|-----------------|-----------------------|-------------------------|---------------------------------------|------------------------|
| $E = 205$             | $\nu = 0.3$     | $\sigma_{y,t} = 0.04$ | $K_t = 60$              | $\mu_t = 0.113$<br>$\sigma_t = 0.005$ | $G_{f,t} = 0.0006$     |
|                       |                 | $\sigma_{y,c} = 0.40$ | $K_c = 60$              | $\mu_c = 1.130$<br>$\sigma_c = 0.05$  | $G_{f,c} = 0.05$       |
|                       |                 | $\sigma_{y,s} = 0.07$ | $K_s = 60$              | $\mu_s = 0.133$<br>$\sigma_s = 0.005$ | $G_{f,s} = 0.02$       |

Dobivena ovisnost između pomaka i zadanoga opterećenja prikazana je na slici 4. Rešetkasti diskretni model daje gotovo iste rezultate za obje gustoće mreže. Do dostizanja vršnoga opterećenja odgovor je oba modela gotovo isti. Nakon toga, na rešetkastom modelu dolazi do pojave pukotina koje smanjuju nosivost tla. Naravno, cap model zadržava približno istu razinu naprezanja, jer ne postoji mogućnost omekšavanja.



Slika 4. Usporedba dobivenih rezultata dobivenih rešetkastim i cap modelom

Na slikama 5. i 6. prikazani su mehanizmi sloma dobiveni cap modelom i rešetkastim modelom. Vidljivo je da je oblik loma približno isti, s tim da se plastificirani elementi kod cap modela prostiru na većoj površini.



Slika 5. Mehanizam sloma dobiven rešetkastim modelom: a) Mod I; b) Mod II

## Zaključak

Prikazani rezultati pokazuju da rešetkasti model sastavljen od Timošenkovih greda može ispravno simulirati slom koherentnoga tla. Prednost je rešetkastoga modela to što može prikazati i ponašanje nakon dostizanja vršnoga opterećenja i nastajanja pukotina. Nedostatak je tog modela to što nije moguće odrediti njegove parametre standardnim laboratorijskim ispitivanjima. Stoga treba upotrijebiti mnogo složenije metode identifikacije parametara u kojima se, međutim, mogu obuhvatiti i materijalne heterogenosti.

## Literatura

Benkemoun, N., Hautefeuille M., Colliat J.B., Ibrahimbegovic A. (2010), "Failure of heterogeneous materials: 3D meso-scale FE models with embedded discontinuities", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **2010**(82), 1671–1688.

Benkemoun, N., Ibrahimbegovic A., Colliat J.B. (2010), "Anisotropic constitutive model of plasticity capable of accounting for details of meso-structure of two-phase composite material", *Computers & Structures*, **2012**(90), 153–162.

Do, X.N., Ibrahimbegovic, A., Brancherie, D. (2015), "Combined hardening and localized failure with softening plasticity in dynamics", *Coupled Systems Mechanics*, **2015**(4), 115–136.

Dolarevic, S., Ibrahimbegovic, A. (2007), "A modified three-surface elasto-plastic cap model and its numerical implementation", *Computers & Structures*, **2007**(85), 419–430.

Hadžalić, E., Ibrahimbegović, A., Dolarević, S. (2015), "Failure mechanisms in coupled soil-foundation systems", *Coupled Systems Mechanics*, **2018**.

Hofstetter, G., Simo, J.C., Taylor, R.L. (1993), "A modified cap model: closest point solution algorithms", *Computers & Structures*, **1993**(48), 203–214.

Ibrahimbegovic, A., Delaplace, A. (2003), "Microscale and mesoscale discrete models for dynamic fracture of structures built of brittle material", *Computers & Structures*, **2003**(81), 1255–1265.

Nikolic, M., Ibrahimbegovic A., Miscevic P. (2015), "Brittle and ductile failure of rocks: Embedded discontinuity approach for representing mode I and mode II failure mechanisms", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **2015**(102), 1507–1526.

Saksala, T., Ibrahimbegovic, A. (2014), "Anisotropic viscodamage-viscoplastic consistency constitutive model with a parabolic cap for rocks with brittle and ductile behavior", *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **2014**(70), 460–473.

Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (2005), *The Finite Element Method, vols. I, II, III*, Elsevier.