

# Proračun statički neodređenih nosača

---

**Grcić, Anđela**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:820884>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-27**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Anđela Grcić

# PRORAČUN STATIČKI NEODREĐENIH NOSAČA

ZAVRŠNI ISPIT

Zagreb, 2024



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Anđela Grcić

# **PRORAČUN STATIČKI NEODREĐENIH NOSAČA**

ZAVRŠNI ISPIT

Doc. dr. sc. Marina Frančić Smrkić

Zagreb, 2024



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Anđela Grcić

**CALCULATION OF STATICALLY  
INDETERMINANTE GIRDES**

FINAL EXAM

Doc. dr. sc. Marina Frančić Smrkić

Zagreb, 2024



OBRAZAC 3

POTVRDA O POZITIVNOJ OCJENI PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Student/ica :

(Ime i prezime)

(JMBAG)

zadovoljio/la je na pisanom dijelu završnog ispita pod naslovom:

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

(Naslov teme završnog ispita na engleskom jeziku)

i predlaže se provođenje daljnjeg postupka u skladu s Pravilnikom o završnom ispitu i diplomskom radu Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta.

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu znanstvenog projekta: (upisati ako je primjenjivo)

(Naziv projekta, šifra projekta, voditelj projekta)

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu stručne prakse na Fakultetu: (upisati ako je primjenjivo)

(Ime poslodavca, datum početka i kraja stručne prakse)

Datum:

Mentor:

Potpis mentora:

Komentor:



OBRAZAC 5

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja :

(Ime i prezime, JMBAG)

student/ica Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta ovim putem izjavljujem da je moj pisani dio završnog ispita pod naslovom:

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

izvorni rezultat mojega rada te da se u izradi istoga nisam koristio/la drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

Datum:

Potpis:



OBRAZAC 6

IZJAVA O ODOBRENJU ZA POHRANU I OBJAVU PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Ja :

(Ime i prezime, OIB)

ovom izjavom potvrđujem da sam autor/ica predanog pisanog dijela završnog ispita i da sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti odgovara sadržaju dovršenog i obranjenog pisanog dijela završnog ispita pod naslovom:

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

koji je izrađen na sveučilišnom prijediplomskom studiju Građevinarstvo Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta pod mentorstvom:

(Ime i prezime mentora)

i obranjen dana:

(Datum obrane)

Suglasan/suglasna sam da pisani dio završnog ispita bude javno dostupan, te da se trajno pohrani u digitalnom repozitoriju Građevinskog fakulteta, repozitoriju Sveučilišta u Zagrebu te nacionalnom repozitoriju.

Datum:

Potpis:

## SAŽETAK

U ovom završnom radu opisan je postupak proračuna statički neodređenih nosača metodom sila. Opisan je postupak određivanja stupnja statičke neodređenosti, uklanjanja prekobrojnih veza, određivanje ekvivalentnog sustava opterećenog vanjskim opterećenjem i prekobrojnim nepoznatim silama, određivanje jednadžbi kompatibilnosti te određivanja nepoznatih veličina i prikaz dijagrama unutarnjih sila. Kao poseban primjer izdvojen je kontinuirani nosač koji se može jednostavno riješiti primjenom tromomentne jednadžbe. Riješena su dva numerička primjera statički neodređenih nosača. Primjeri su riješeni i numeričkim putem, izradom modela u programskom paketu SAP2000. Usporedbom rezultata utvrđena je točnost rješenja.

**Ključne riječi:** statički neodređen nosač; kontinuirani nosač; jednadžba ravnoteže; jednadžba kompatibilnosti; numerički model;



## SUMMARY

In this thesis, the calculation procedure of statically indeterminate system using the force method is described. The procedure for determining the degree of static indeterminacy, removing excessive connections, determining the equivalent system loaded with an external load and excessive unknown forces, determining compatibility equations and determining unknown quantities and displaying internal force diagrams is described. As a special example, a continuous girder is singled out, which can be easily solved by applying the three-moment equation. Two numerical examples of statically indeterminate girders were solved. The examples were also solved numerically by creating a model in the SAP2000 software package. By comparing the results, the accuracy of the solution was established.

**Key words:** statically indeterminate girder; continuous girder; equilibrium equation; compatibility equation; numerical model

---

## SADRŽAJ

<b>SAŽETAK</b> .....	<b>i</b>
<b>SUMMARY</b> .....	<b>ii</b>
<b>SADRŽAJ</b> .....	<b>iii</b>
<b>1. UVOD</b> .....	<b>1</b>
<b>2. METODE I TEHNIKE RADA</b> .....	<b>4</b>
<b>3. STATIČKI NEODREĐENI NOSAČI</b> .....	<b>5</b>
3.1 Statički neodređeni nosači.....	5
3.1.1 Metoda sila .....	9
3.1.2 Metoda pomaka.....	10
3.2 Kontinuirani nosač .....	11
3.3 Primjeri.....	13
3.3.1 Primjer statički neodređenog nosača .....	13
3.3.2 Kontinuirani nosač .....	20
<b>4. ZAKLJUČAK</b> .....	<b>26</b>
<b>POPIS LITERATURE</b> .....	<b>27</b>
<b>POPIS SLIKA</b> .....	<b>28</b>
<b>POPIS TABLICA</b> .....	<b>29</b>

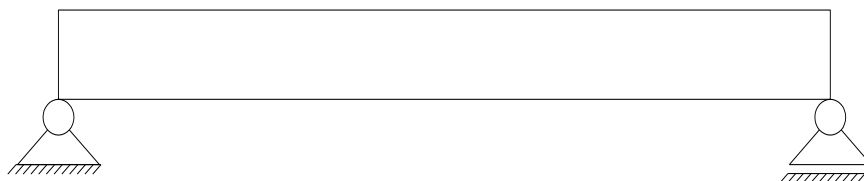
## 1. UVOD

Nosači su, prema definiciji, nosivi sklop koji prenosi opterećenje preko jednog ili više raspona na ležajeve. Prilikom opterećenja nosača, koje može biti sila i/ili moment savijanja, cilj je prenijeti opterećenje na ležajeve te dalje na tlo. U praksi se primjenjuju razni oblici nosača, kao što su linijski (grede), linijski sa prepustom (konzola) i plošni (ploče). S obzirom na građevni materijal može biti od betona, armiranog ili prednapregnutog betona, čelika ili drugih kovina, drva i raznih drugih materijala [1].



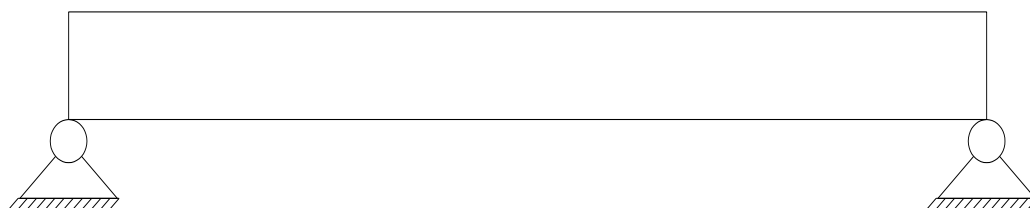
Slika 1.1 Prikaz linijskog nosača (Izvor: [ <http://unalam.blogspot.com/2015/10/joist-wednesdays-word-of-week.html?q=girders> ])

Nosače prema statičkom sustavu dijelimo na statički određene i statički neodređene. Statički određeni nosač nazivamo nosač koji može ostati u stanju ravnoteže za opterećenje po volji i ako postoji jedinstveni skup reakcija i unutarnjih sila koji zadovoljava uvjete ravnoteže sistema i njegovih dijelova. U nastavku ovoga rada opširnije je opisan statički neodređeni nosač te vrsta istog kojeg nazivamo kontinuirani nosač.



Slika 1.2. Prikaz statički određenog nosača – greda

Kroz prošlost različiti istraživači su se bavili analizom strukturnih sustava. Galileo Galilei je među prvim znanstvenicima koji je proučavao naprezanja i deformacije o materijalima. Njegov rad se smatra temeljom teorije o mehanici. Linearni odnos između naprezanja i deformacije u elastičnim materijalima poznat kao Hookeov zakon, opisao je Robert Hooke. Kroz 18. i 19. st. poznati matematičari Euler, Navier i Cauchy su dopremili razvoju strukturnog sustava. James Clerk Maxwell (1830. – 1879.), škotski fizički i matematičar, objavio je prvi sustav metode analize statički neodređenih nosača, koja se temelji na jednakosti unutarnje energije deformacije opterećene konstrukcije i vanjski rad koji vrše primijenjena opterećenja. Maxwell je predstavio svoj dijagram unutarnjih sila. Dijagram unutarnjih sila proširio je Cremon, talijanski inženjer i matematičar, razvijanjem metode za grafičku analizu sila u ravninskim rešetkastim strukturama. Kombinacije Maxwellovih i Cremonovih dijagrama koristi se za analizu sila u ravninskim rešetkama i okvirima, te omogućavaju inženjerima vizualnu raspodjelu unutarnjih sila pomoću grafičke metode što olakšava razumijevanje i rješavanje problema u strukturnoj analizi. Otto Mohr je grafičkom metodom analizira naprezanje i deformacije. Mohrova kružnica služi za jednostavno određivanje glavnih i posmičnih naprezanja, te orijentaciju istih. Godine 1857. Benoit Paul Emile Clapeyron, francuski inženjer i fizičar, predstavio je svoj teorem za analizu kontinuiranih nosača i od tada počinje razvoj teorije strukture [2] [3] .



Slika 1.3. Prikaz statički neodređenog nosača

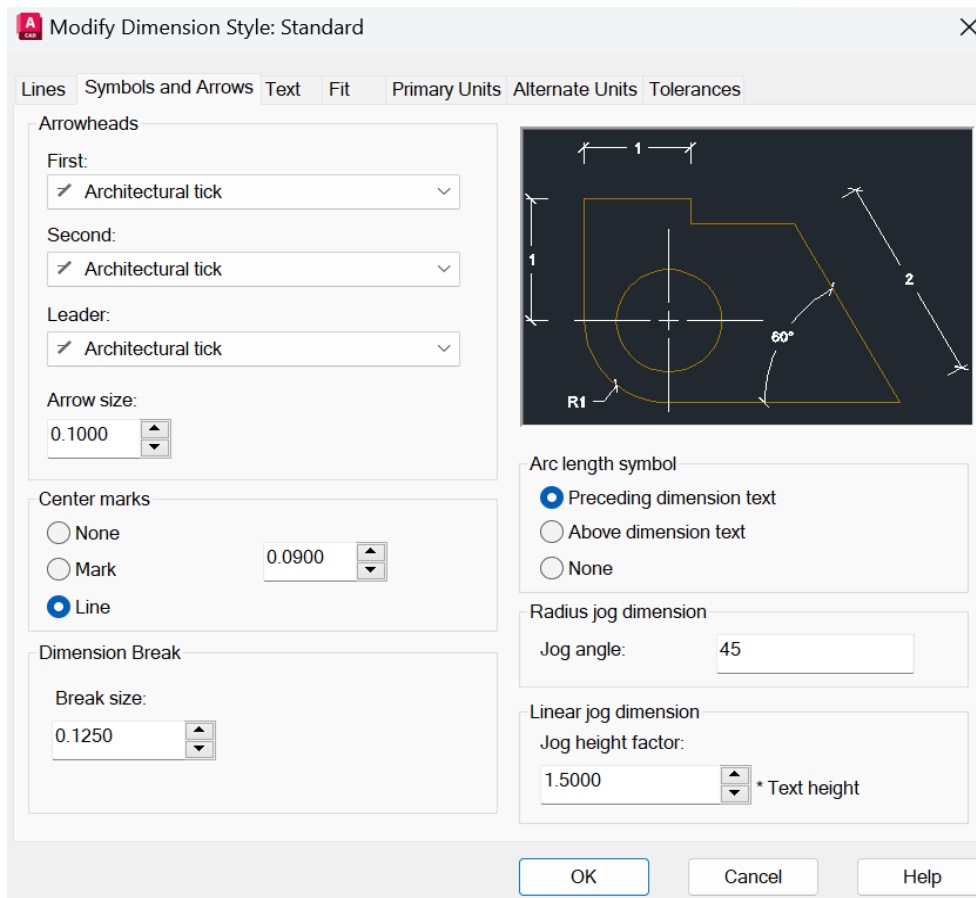
Ostatak završnog rada je strukturiran prema sljedećim poglavljima: u poglavlju 2 će biti detaljno opisani programi koji se koriste, te će bit prikazana usporedba istih. U trećem poglavlju bit će detaljno opisan statički neodređeni nosač i kontinuirani nosač te način i metode rješavanja. Biti će potkrepljeni jednadžbama te će biti opisani utjecaji koji djeluju na nosače. U zadnjem dijelu trećeg poglavlja će biti prikazan primjer statički neodređenog nosača i primjer kontinuiranog nosača. Četvrto poglavlje sadržava zaključak ovog rada.



Slika 1.4. Prikaz statički neodređenog nosača (Izvor: [<https://theconstructor.org/structural-engg/analysis/determinate-and-indeterminate-structures/3483/> ])

## 2. METODE I TEHNIKE RADA

Prilikom izrade rada koristio se program AutoCad, pomoću kojeg su crtane skice za lakše prikazivanje određenih informacija. Skice su prikazane u dvije dimenzije. Koristile su se različite naredbe, kao što su line, polyline, circle, arc, copy i ostali. Pomoću naredbe mirror, zrcaljeni su objekti. Hatch je korišten za lakše prikazivanje unutarnjih sila kod dijagrama. Za tekst se koristio standard style. Kote su modificirane prema navedenoj slici.



Slika 2.1. Postavke kota u AutoCad-u

Za numeričko rješavanje primjera koristio se programski paket SAP2000. U programu su definirani materijal i poprečni presjek te su potom pridruženi promatranom nosaču. Odabrane su točke u kojima je postavljen ležaj, te su definirane vrste ležajeva. Također, definirano je opterećenje koje je postavljeno na nosač. Krajnji rezultati dobiveni iz programa su dijagrami sila i momenta.

### 3. STATIČKI NEODREĐENI NOSAČI

#### 3.1 Statički neodređeni nosači

Sa statičkog gledišta, neodređeni nosač je onaj koji ima veći broj vanjskih ili unutarnjih veza od broja nezavisnih jednažbi kojima se opisuju uvjeti ravnoteže. S kinematičkog gledišta statički neodređeni nosač je geometrijski nepromjenjiv sustav u kojem je broj vanjskih ili unutarnjih veza veći od minimalno potrebnih za njegovu geometrijsku nepromjenjivost [4].



Slika 3.1. Primjer statički neodređenog nosača u praksi (Izvor:[  
<http://unalam.blogspot.com/2015/10/girder-wednesdays-word-of-week.html> ])

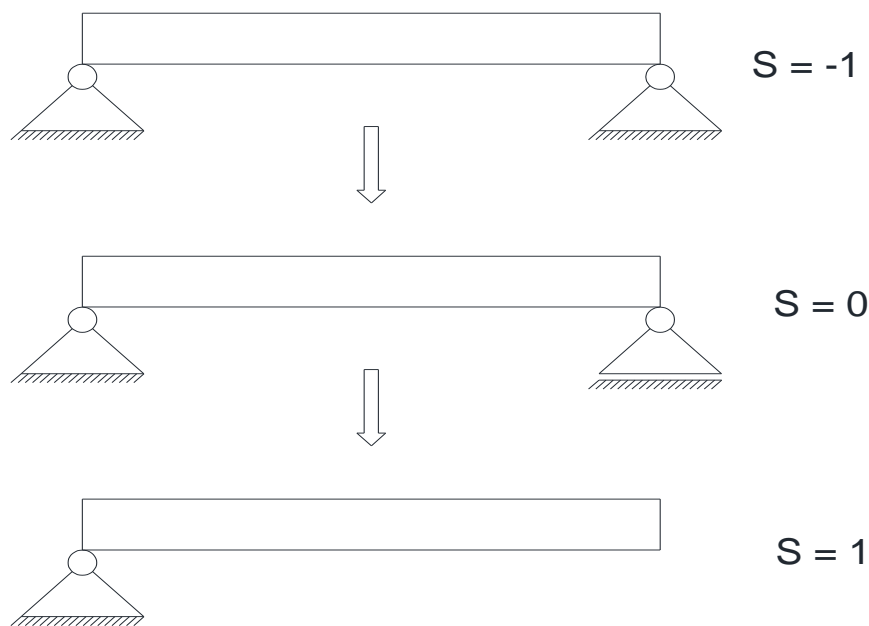
Statička određenost ili neodređenost ne ovisi o opterećenju nosača nego o njegovim vezama, zbog toga je potrebno odrediti stupanj (broj) statičke neodređenosti. Stupnjem (brojem) statičke neodređenosti utvrđujemo broj prekobrojnih veza, to jest, stupanj statičke neodređenosti je razlika broja neovisnih nepoznatih statičkih veličina i broj neovisnih statički jednažbi ravnoteže koje se mogu postaviti za nosač. Statički neodređeni nosač ima „višak veza“ koje se određuju kroz stupanj (broj) statičke neodređenosti nosača. Stupanj statičke neodređenosti određujemo prema izrazu:

$$S = 3 * n - m \quad 3.1$$

$$m = z_1 + 2 * z_2 + 3 * z_3 + \dots \quad 3.2$$

gdje je S stupanj (broj) statičke neodređenosti, n je broj zatvorenih kontura u sistemu,  $z_1$  broj jednostrukih zglobova,  $z_2$  broj dvostrukih zglobova i  $z_3$  broj trostrukih zglobova.

Prekobrojne veze je potrebno ukloniti kako bi dobili osnovni sustav zbog lakše analize. Izbor osnovnog sustava ovisi o odabranoj prekobrojnoj vezi. Prilikom određivanja osnovnog sustava treba paziti da ne dođe do kinematičkog mehanizma, to jest, sustav treba ostati kinetički stabilan. Mehanizam je struktura koja je potpuno oslobođena, to jest, nema dovoljno veza ili potpora da osigura stabilnost ili ravnotežu. Zbog toga bilo koje opterećenje izaziva kretanje strukture ili njezini dijelova [4].



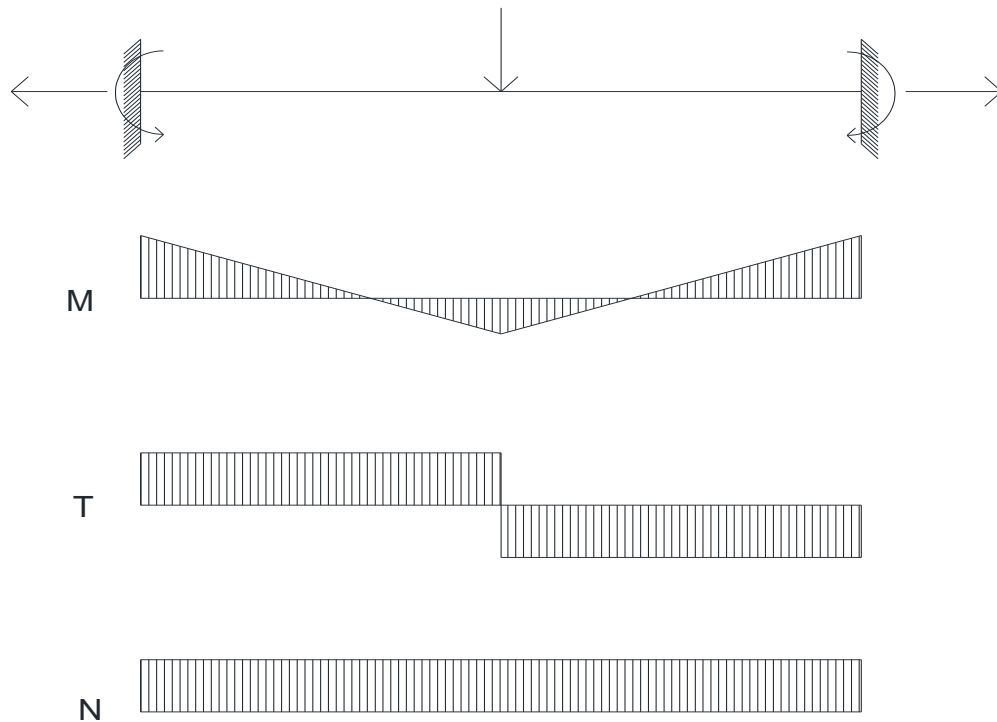
Slika 3.2. Primjer statički određenog nosača, statički neodređenog nosača i mehanizma

Na mjestu gdje je uklonjena prekobrojna veza stavlja se statička nepoznata veličina. Statička nepoznata veličina može biti sila ili moment, ovisno o uklonjenoj vezi, koja zamjenjuje njihovo djelovanje. Statički osnovni sustav koji je opterećen zadanim opterećenjem i statički nepoznatom veličinom naziva se ekvivalentnim sustavom.

Statički neodređeni nosač može biti opterećen koncentriranom i/ili kontinuiranom silom i/ili momentom. Kod određivanja reakcija u ležajevima i unutarnjih sila u presjecima nosača nisu dovoljne jednadžbe ravnoteže, zbog toga se koriste jednadžbe kompatibilnosti. Ekvivalentni statički određeni osnovni sustav sa statičkim nepoznatim veličinama moraju imati takvu vrijednost tako da se deformacija statički određenog osnovnog sustava ne razlikuje od deformacije zadanog statički neodređenog sustava. Na mjestima uklonjenih prekobrojnih veza postavljamo jednadžbe kompatibilnosti koje se koriste u metodi sila i metodi pomaka.

Nakon određivanja statički nepoznatih veličina crta se dijagram unutarnjih sila. Dijagrami unutarnjih sila su grafički prikaz koji pokazuju kako se unutarnje sile mijenjaju po nosaču. Prikazuju se dijagrami momenta savijanja, poprečne sile i uzdužne sile. [5]





Slika 3.3. Primjer dijagrama unutarnjih sila opterećenog nosača

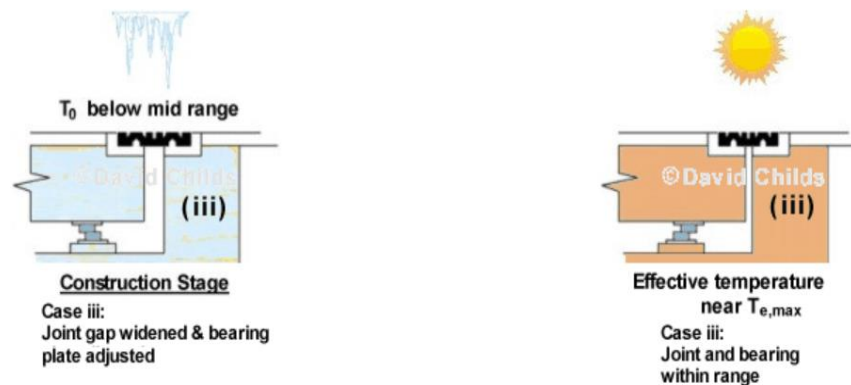
Na statički neodređene nosače značajan utjecaj ima promjena temperature. Promjena temperature, odnosno zagrijavanje ili hlađenje, utječe na širenje ili skupljanje nosača. Prilikom rješavanja statički neodređenog nosača s obzirom na promjenu temperature uzimamo koeficijent toplinskog rastezanja. Koeficijent toplinskog rastezanja je fizikalna veličina koja opisuje toplinsko širenje, to jest promjenu duljine  $\Delta l$  ovisno o vrsti tvari od koje je načinjeno neko tijelo duljine  $l_0$  pri promjeni temperature  $\Delta T$ , uz stalan tlak.

$$\Delta l = l_0 \cdot \alpha_t \cdot \Delta T \quad 3.3$$

Jednadžba (3.3) prikazuje promjenu duljine koja se računa umnoškom početne duljine, koeficijenta toplinskog rastezanja i promjene temperature. Promjena temperature može biti pozitivna ili negativna. Koeficijent toplinske rastezanja ovisi o vrsti materijala koji možemo vidjeti u navedenoj tablici. [5]

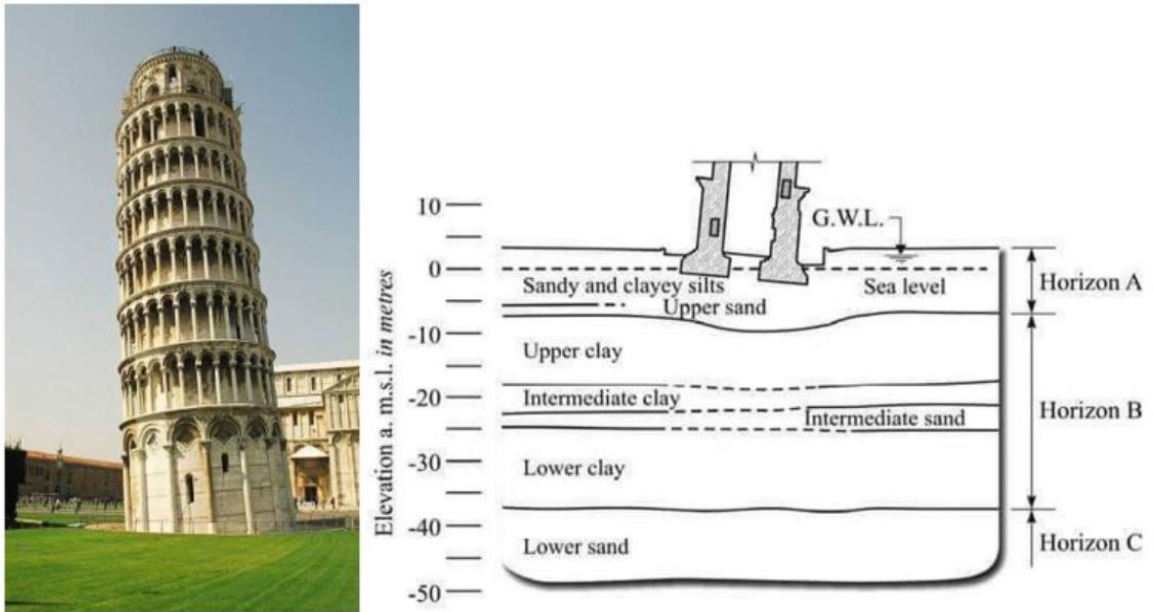
Tablica 1: Vrijednost koeficijenta toplinskog rastezanja na 20 °C (Izvor: [https://www.enciklopedija.hr/clanak/koeficijent-linearnog-toplinskoga-sirenja])

Materijal	Koeficijent linearnog toplinskog širenja $\alpha_t/10^{-6} \text{ K}^{-1}$
aluminij	23
bakar	17
beton	12
mjed	19
olovo	29
srebro	18
zlato	14
željezo	12



Slika 3.4. Primjer pomaka zbog promjene temperature (Izvor: [http://bridgedesign.org.uk/tutorial/temperature-effects.php])

Osim temperature, značajan utjecaj na nosače ima slijeganje ležajeva. Slijeganje ležajeva (potpora) odnosi se na pomak ležajeva ili potpora zbog promjene u podlozi, osloncu ili okolini. Može uzrokovati promjenu u unutarnjim silama i stabilnosti strukture. Promjene mogu biti opasne ako se ne uzme u obzir prilikom analize i dizajna strukture. Slijeganje nosača je izražajnije kod kontinuiranih nosača, zbog njegove strukture. [6]



Slika 3.5. Primjer slijeganja nosača zbog tla (Izvor: [ <https://www.geotech.hr/diferencijalna-slijeganja/> ])

### 3.1.1 Metoda sila

Metoda sila je metoda koja se koristi u analizi statički neodređeni sustava radi određivanja unutarnjih sila, momenata i ostalih reakcija. Zamisao je metode sila definirati statički određeni sistem raskidanjem odabranih prekobrojnih veza te zahtijevati jednakost (kompatibilnost) pomaka zadanoga statičkog sistema i odabranog statički određenog sistema. Proračun se radi na osnovnom sustavu. Progibna linija odabranog osnovnog sustava opterećenog jednakim opterećenjem kao i zadani sustav nije jednak zadanom sustavu. Zbog toga se osnovni sustav optereti silom  $X$  koja djeluje na mjestu i u smjeru raskinute prekobrojne veze. Zbrajanjem progiba osnovnog sustava opterećenim vanjskim djelovanjem i osnovnog sustava opterećenim silom  $X$ , osnovni sustav se dovodi u stanje jednako stanju zadanog sustava. Prilikom određivanja sile  $X$ , uzimamo da sila iznosi  $X = 1$  i uzrokuje pomak  $\delta_{x,x=1}$  zbog linearnosti koja vrijedi u slučaju malih pomaka i malih deformacija. Tada sila iznosa  $X$  uzrokuje  $X$  puta veći pomak ( $\delta_{x,x}$ ). [7]

$$\delta_{1,0} + \delta_{1,1} \cdot X_1 + \delta_{1,2} \cdot X_2 + \delta_{1,3} \cdot X_3 \dots + \delta_{1,n} \cdot X_n = 0$$

$$\delta_{2,0} + \delta_{2,1} \cdot X_1 + \delta_{2,2} \cdot X_2 + \delta_{2,3} \cdot X_3 \dots + \delta_{2,n} \cdot X_n = 0$$

$$\delta_{3,0} + \delta_{3,1} \cdot X_1 + \delta_{3,2} \cdot X_2 + \delta_{3,3} \cdot X_3 \dots + \delta_{3,n} \cdot X_n = 0$$

...

$$\delta_{n,0} + \delta_{n,1} \cdot X_1 + \delta_{n,2} \cdot X_2 + \delta_{n,3} \cdot X_3 \dots + \delta_{n,n} \cdot X_n = 0$$

Jednadžbe prikazuju uvjet kompatibilnosti pomaka zadanoga i osnovnoga statičkog sustava. Koeficijenti uz nepoznanice su koeficijenti fleksibilnosti.

$$\delta_{i,j} = \int \frac{m_i \cdot m_j}{EI} ds + \int \frac{n_i \cdot n_j}{EA} ds + k \cdot \int \frac{t_i \cdot t_j}{GA} ds \quad 3.4$$

$$\delta_{i,0} = \int \frac{M_0 \cdot m_i}{EI} ds + \int \frac{N_0 \cdot n_i}{EA} ds + k \cdot \int \frac{T_0 \cdot t_i}{GA} ds + \int (\kappa_t \cdot m_i) ds + \int (\varepsilon_t \cdot n_i) ds \quad 3.5$$

Jednadžbama (3.4) i (3.5) prikazano je određivanje koeficijenta fleksibilnosti i slobodnih članova. Pomak  $\delta_{i,j}$  je pomak na mjestu  $i$  u smjeru sile  $s$  indeksom  $i$  uzrok kojega je jedinično djelovanje na mjestu  $j$ . Pomak  $\delta_{i,0}$  je pomak na mjestu  $i$  u smjeru sile  $s$  indeksom  $i$  od vanjskog djelovanja (opterećenja). Osim koncentriranih i linijskih sila i momenata, vanjsko djelovanje može biti promjenjiva temperatura ( $\Delta t$ ) i/ili jednolika temperatura  $t_s$ . Promjenjiva temperatura uzrokuje dodatnu zakrivljenost ( $\kappa_t$ ) elementa na kojeg djeluje, dok jednolika temperatura uzrokuje promjenu duljine elementa ( $\Delta l$ ) tako i pomake elementa statičkog sustava. [7]

Rješenja jednadžbi kompatibilnosti ( $X_i$ ) uvrštavaju se u izraze za određivanje vrijednosti unutarnjih sila na zadanom sustavu.

$$M(x) = M_0 + X_1 \cdot m_1(x) + X_2 \cdot m_2(x) + X_3 \cdot m_3(x) + \dots + X_n \cdot m_n(x)$$

$$T(x) = T_0 + X_1 \cdot t_1(x) + X_2 \cdot t_2(x) + X_3 \cdot t_3(x) + \dots + X_n \cdot t_n(x)$$

$$N(x) = N_0 + X_1 \cdot n_1(x) + X_2 \cdot n_2(x) + X_3 \cdot n_3(x) + \dots + X_n \cdot n_n(x)$$

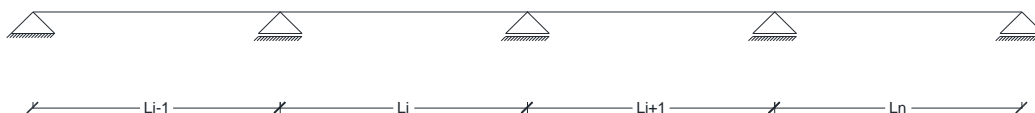
### 3.1.2 Metoda pomaka

Metoda pomaka koristi se za kruto tijelo u ravnini. Ako se za nepoznate veličine statički neodređenog sistema odaberu duljine translacijskih pomaka i (ili) kutovi zaokreta odabranih točaka, odnosno čvorova, primjenjuje se postupak metoda pomaka. Metoda pomaka je postupak za proračun funkcija unutarnjih sila. Statički sistem dijeli se na grede ili štapne elemente i čvorove. Čvorovi su definirane točke gdje se dva ili više štapna elementa sastaju pod nekim kutem. U ravnini čvor ima dva translacijska pomaka (u smjeru  $x$  i  $y$ ) i jedan rotacijski pomak (zaokret oko osi okomite na ravninu). Pomaci u čvoru nastaju zbog djelovanja vanjskog opterećenja. Za čvor se uzima točka pomoću čijih se iznosa pomaka i zaokreta lako određuju funkcije sila i momenata krajeva elementa te funkcija unutarnjih sila uzduž cijeloga elementa.

Kao i kod metoda sila, proračun se provodi na osnovnom sustavu. Osnovnom sustavu se povećava statička neodređenosti, tako da se dodaju veze s podlogom. Dodavanjem veza sprječavaju se pomaci u čvoru, prilikom rješavanja zadanog sistema razdvajamo ga na niz međusobno neovisnih obostrano upetih greda. Rezultat je konačne sile na krajevima svake grede dobivene superponiranjem sila. Sila od zadanog opterećenja na obostrano upetoj gredi i sila od pomaka čvorova izvornog sistema, opterećenog samo silama upetosti, se superponiraju. Jednadžbe metode pomaka su jednadžbe ravnoteže sila u čvorovima. Metodom pomaka možemo analizirati statički određeni zadani sistem ako proračun provodimo na statički neodređeni osnovni sistem. Temelj metode pomaka je teorem o virtualnim pomacima. [8]

### 3.2 Kontinuirani nosač

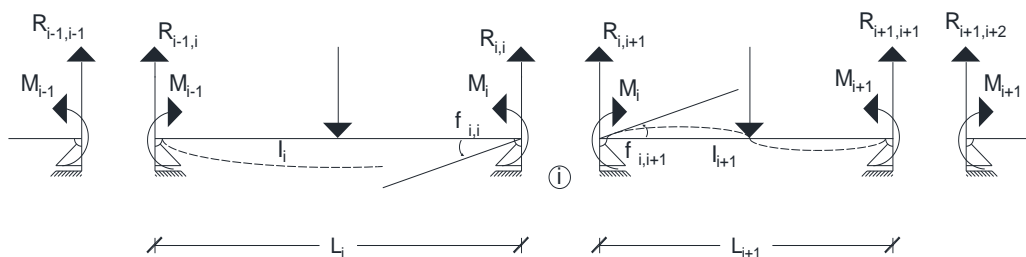
Kontinuirani nosač je nosač koji leži preko tri i više ležajeva, a nema zglobova. Jedan ležaj je nepomičan zbog preuzimanja aksijalnog opterećenja, a drugi su pomični (klizni) što omogućuje promjenu duljine nosača pri djelovanju temperature [6].



Slika 3.6. Prikaz kontinuiranog nosača preko četiri raspona

U slučaju da nam je  $n$  broj polja kontinuiranog nosača, imamo  $n+1$  ležajeva, a statičku neodređenost možemo odrediti kao  $n-1$ . Broj prekobrojnih veza i reakcija jednak je broju unutarnjih ležajeva. Stupanj statičke neodređenosti povećava se za jedan ako je nosač upet.

Proračun kontinuiranog nosača se radi na osnovnom sustavu. Najpogodnije je izabrati statički određeni osnovni sustav tako da se zadrže svi ležajevi i umetnu se zglobovi u presjeke nosača iznad ležajeva. Umetanjem zglobova oslobađaju se moment savijanja kao prekobrojne nepoznate statičke veličine. Osnovni sistem predstavljen je nizom statički određenih nosača zglobno oslonjenih na oba kraja, opterećenim vanjskim zadanim opterećenjem i nepoznatim reaktivnim momentima savijanja koji djeluju u presjecima iznad oslonaca. [6]



Slika 3.7 Prikaz elastične linije i kuta zaokreta

Uzimajući u obzir dva susjedna polja raspona  $l_i$  i  $l_{i+1}$ . Elastična linija u dva susjedna polja osnovnog sustava imaju zajedničku tangentu u presjeku iznad zajedničkog ležaja. Iz toga se vidi da su kutovi nagiba tangente na elastičnoj liniji desno i lijevo od zajedničkog ležaja jednaki.

$$\varphi_{i,i} = \varphi_{i,i+1} \quad 3.6$$

Grafoanalitičkom analizom određuju se kutovi nagiba tangente elastične linije. Fiktivni nosač za svako polje je nosač sa dva ležaja. Principom superpozicije dobiva se vrijednost kutova.

$$\varphi_{i,i} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{M_i l_i}{EI_i} - \frac{1}{6} \cdot \frac{M_{i-1} l_i}{EI_i} - \frac{\Phi_i a_i}{l_i EI_i} \quad 3.7$$

$$\varphi_{i,i+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{M_i l_{i+1}}{EI_{i+1}} - \frac{1}{6} \cdot \frac{M_{i+1} l_{i+1}}{EI_{i+1}} - \frac{\Phi_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} EI_{i+1}} \quad 3.8$$

Vrijednosti kuta se dobiva iz reaktivnog momenta i vanjskog opterećenja na određenom rasponu. U određenom rasponu površinu dijagrama momenta savijanja od vanjskog opterećenja označava se težište sa  $\phi$  te površina sa  $S_i$ , a udaljenost težišta od lijevog ležaja s  $a_i$ , a od desnog ležaja s  $b_i$ .

Izjednačavanjem i sređivanjem izraza dobiva se izraz za jednadžba triju momenata ili Clapeyronova jednadžba (3.9) koja se koristi za određivanje momenta savijanja, odnosno nepoznate statičke veličina. [9]

$$M_{i-1} \frac{l_i}{l_i} + 2M_i \left( \frac{l_i}{l_i} + \frac{l_{i+1}}{l_{i+1}} \right) + M_{i+1} \frac{l_{i+1}}{l_{i+1}} = -6 \left( \frac{\Phi_i a_i}{l_i l_i} + \frac{\Phi_{i+1} a_{i+1}}{l_{i+1} l_{i+1}} \right) \quad 3.9$$

Rješavanjem jednadžbe se dobiju veličine momenata i daljnji proračun se svodi na promatranje svakog polja pojedinačno, a ukupna reakcija se dobiva zbrajanjem reakcija susjednih polja. [6]

Jednadžba (3.9) opisuje situaciju ako su kruti ležajevi na istoj razini, u slučaju netočnosti izvedbe ili nejednolika slijeganja ležajeva može doći do relativnih pomaka između ležajeva. [6] Relativni pomaci ležajeva imaju utjecaj na reaktivne momente te jednadžba triju momenata prima oblik (3.10):

$$M_{i-1} \frac{l_i}{l_i} + 2M_i \left( \frac{l_i}{l_i} + \frac{l_{i+1}}{l_{i+1}} \right) + M_{i+1} \frac{l_{i+1}}{l_{i+1}} = -6E \left( \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{l_{i+1}} - \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{l_i} \right) \quad 3.10$$

U slučaju da temperatura nosača nije konstantna nego dolazi do smanjenja ili povećanja iste, dolazi do promjene duljine. Odnosno, ako je temperatura gornjih vlakana nosača veća od donjih vlakana nosača, razlika između srednje temperature  $T_s$  i početne temperature  $T_0$  uzrokuje promjenu duljine nosača. Ta promjena ne utječe na stanje naprezanja. Razlika između temperature gornje i donje vlakana nosača dovodi do zakrivljenosti nosača i pojave momenta savijanja. [6] Kutovi nagiba tangente elastične linije iznad ležaja uzima u obzir promjenu temperature te jednadžbu triju momenata poprima slijedeću vrijednost (3.11):

$$M_{i-1} \frac{l_i}{l_i} + 2M_i \left( \frac{l_i}{l_i} + \frac{l_{i+1}}{l_{i+1}} \right) + M_{i+1} \frac{l_{i+1}}{l_{i+1}} = -3E\alpha\Delta T \left( \frac{l_i}{h_i} + \frac{l_{i+1}}{h_{i+1}} \right) \quad 3.11$$

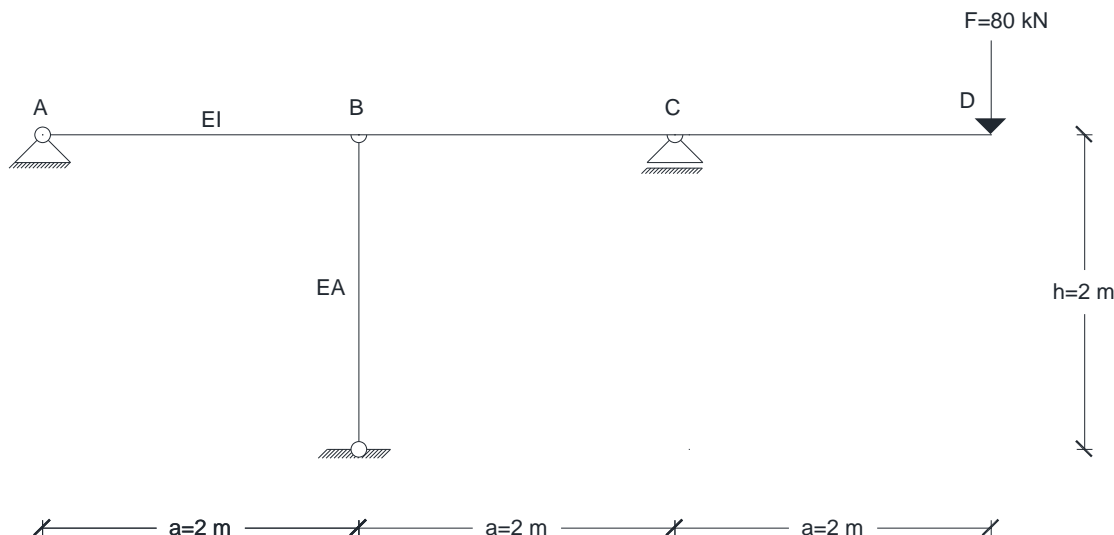
Ako na nosač djeluje slijeganje ležajeva i promjena temperature jednadžba izgleda (3.12):

$$M_{i-1} \frac{l_i}{l_i} + 2M_i \left( \frac{l_i}{l_i} + \frac{l_{i+1}}{l_{i+1}} \right) + M_{i+1} \frac{l_{i+1}}{l_{i+1}} = -6 \left( \frac{\Phi_i a_i}{l_i l_i} + \frac{\Phi_{i+1} a_{i+1}}{l_{i+1} l_{i+1}} \right) - 6E \left( \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{l_{i+1}} - \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{l_i} \right) - 3EI \frac{\alpha\Delta T}{h} (l_i + l_{i+1}) \quad 3.12$$

### 3.3 Primjeri

#### 3.3.1 Primjer statički neodređenog nosača

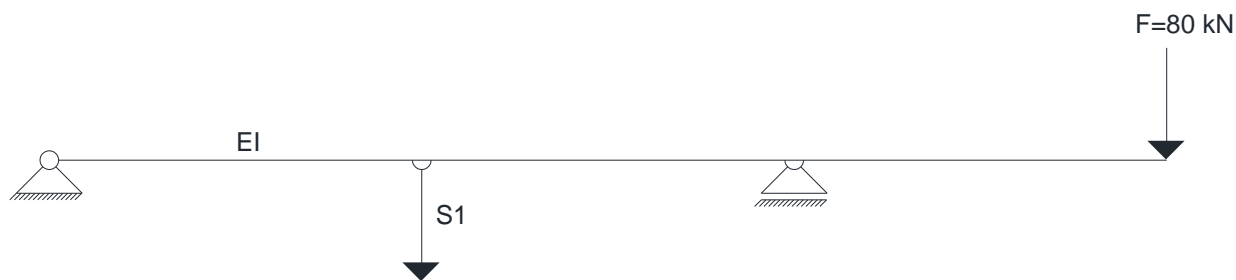
Za sustav prikazan na slici treba odrediti dijagrame unutarnjih sila (M, T, N) ako je zadano:  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $I = 1,5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$ ,  $A = 30 \text{ mm}^2$ .



Slika 3.8 Prvi numerički primjer – statički neodređeni nosač

Prvi korak prilikom rješavanja je dobiti osnovni sustav. U ovom slučaju osnovni sustav, koji će biti statički određen, dobiva se zamjenom štapa nepoznatom silom  $S_1$ .

OSNOVNI SUSTAV:



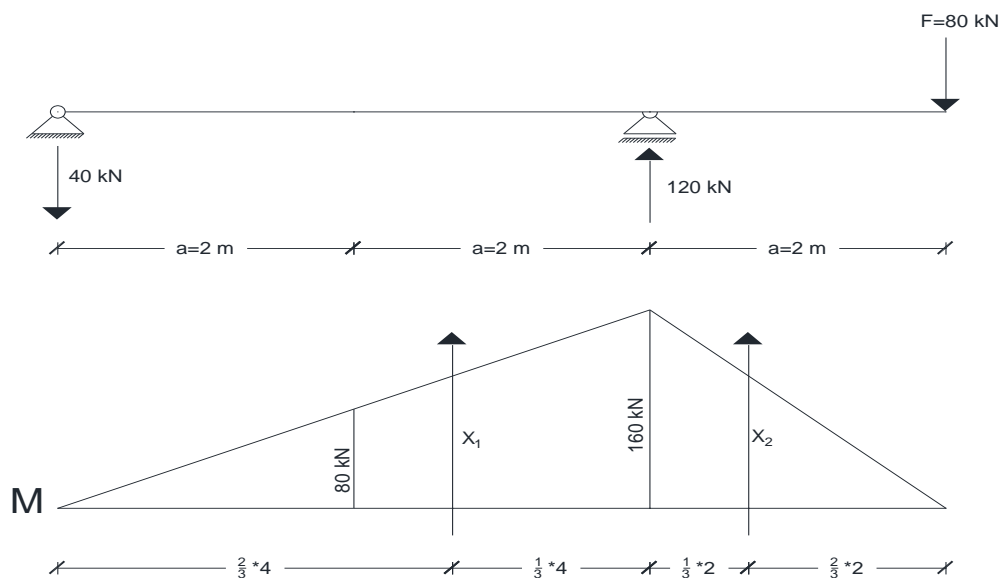
Slika 3.9 Prikaz osnovnog sustava

Sljedeći korak je odrediti uvjet deformacije. Uvjet deformacije se postavlja na mjesto uklonjene prekobrojne veze, odnosno na točki B. Na tom mjestu se dobiva dodatna jednadžba kompatibilnosti deformacija. U ovom slučaju pomak točke B odgovarat će promjeni duljine štapa.

UVJETI DEFORMACIJE:  $\omega_B = \Delta h$

Pomak točke B je uzrokovan od vanjskog opterećenja i od sile S1. Prvo će se odrediti pomak točke B od vanjskog opterećenja. Sile u ležajevima osnovnog sustava će se riješiti pomoću jednačbe ravnoteže. Uzme li se u obzir da je suma momenta u točki A jednaka nuli i suma sila u smjeru y-osi je jednak nuli dobiva se iznose sila u ležajevima. Nakon određivanja sila, može se skicirati dijagram momenta te odrediti fiktivne sile. Fiktivne sile su jednake površini ispod dijagrama momenta te se postavljaju u težište, u ovom slučaju na jednu trećinu duljine.

#### OSNOVNI SUSTAV I OPTEREĆENJE:



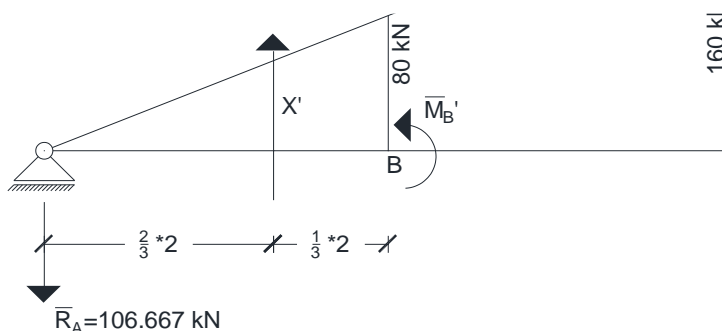
Slika 3.10 Prikaz vanjskog opterećenja i fiktivnih sila

#### FIKTIVNE SILE:

$$X_1 = \frac{160 \cdot 4}{2} = 320 \text{ kN}$$

$$X_2 = \frac{160 \cdot 2}{2} = 160 \text{ kN}$$

#### FIKTIVNI NOSAČ:



Slika 3.11 Prikaz fiktivnog nosača



$$1) \Sigma M_C = 0$$

$$-320 \cdot \frac{4}{3} + \bar{R}_A \cdot 4 = 0$$

$$\bar{R}_A = \frac{320}{3} = 106.667 \text{ kNm}^2$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-\bar{R}_A + 320 - \bar{R}_C = 0$$

$$\bar{R}_C = \frac{640}{3} = 213.333 \text{ kNm}^2$$

$$2) \Sigma F_y = 0$$

$$\bar{R}_D = \bar{R}_C + 160$$

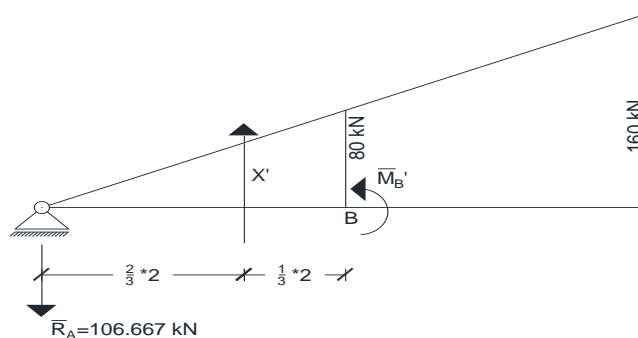
$$\bar{R}_D = -373.333 \text{ kNm}^2$$

$$\Sigma M_D = 0$$

$$-\bar{R}_C \cdot 2 - 160 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \bar{M}_D = 0$$

$$\bar{M}_D = 640 \text{ kNm}^3$$

Presjek u točki:



Slika 3.12 Prikaz presjeka u točki B

$$X' = \frac{80 \cdot 2}{2} = 80 \text{ kNm}^2$$

$$\Sigma M_i = 0$$

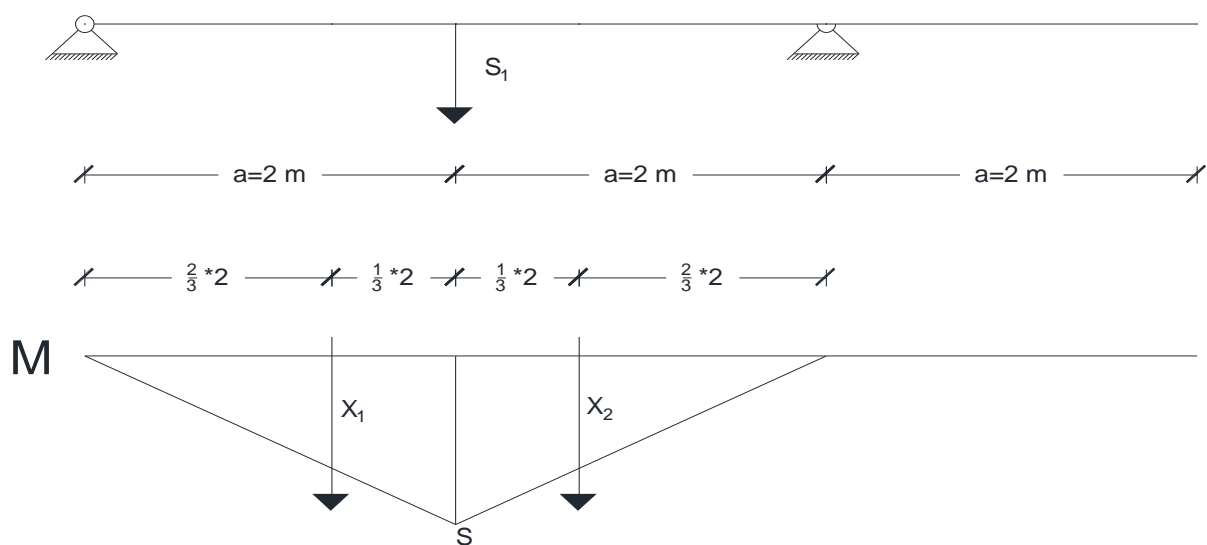
$$\bar{M}'_B + \bar{R}_A \cdot 2 - X' \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = 0$$

$$\bar{M}'_B = -160 \text{ kNm}^3$$

$$\omega_B^{\text{OPT}} = \frac{-160 \cdot 10^{-12}}{EI}$$

Nakon što se dobije pomak točke B od vanjskog opterećenja, potrebno je odrediti pomak točke od sile S1. Ponovno se skicira dijagram momenta i stavljaju fiktivne sile koje su jednake površini dijagrama momenta te se i u ovom slučaju stavljaju na jednu trećinu dužine.

OSNOVNI SUSTAV + S<sub>1</sub>:

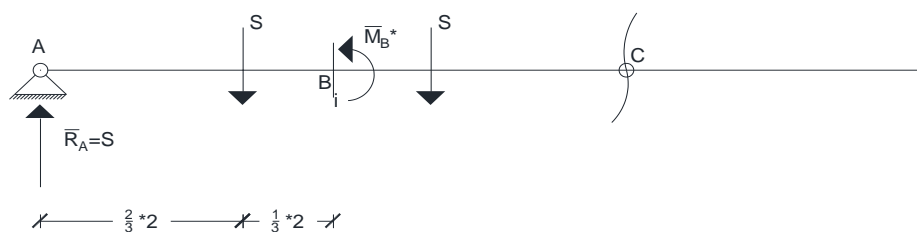


Slika 3.13 Prikaz opterećenja od sile S<sub>1</sub> i fiktivne sile

FIKTIVNE SILE:

$$X_1 = X_2 = \frac{S \cdot 2}{2} = S \text{ [kNm}^2\text{]}$$

FIKTIVNI NOSAČ:



Slika 3.14 Prikaz fiktivnog nosača

$$1) \bar{M}_C = 0$$

$$-\bar{R}_A \cdot 4 + S \cdot \left(2 + \frac{2}{3}\right) + S \cdot \left(2 \cdot \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$4 \cdot S - 4 \cdot \bar{R}_A = 0$$

$$\bar{R}_A = S$$

$$\Sigma M_i = 0$$

$$\bar{M}_B^* - 2 \cdot S + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot S = 0$$

$$\bar{M}_B^* = \frac{4}{3} \cdot S$$

$$\omega_B^S = \frac{\frac{4}{3} \cdot S \cdot 10^{12}}{EI}$$

Nakon određivanja pomaka točke B od vanjskog opterećenja i sile S1, može se odrediti ukupni pomak točke B principom superpozicije te odrediti sila S koja djeluje u štapu. Nakon određivanja sile S mogu se odrediti ostale sile i nacrtati dijagrami unutarnjih sila.

UVJET DEFORMACIJE:

$$\omega_B = \Delta h$$

$$\omega_B^{\text{OPT}} + \omega_B^S = -\frac{S \cdot h}{EA}$$

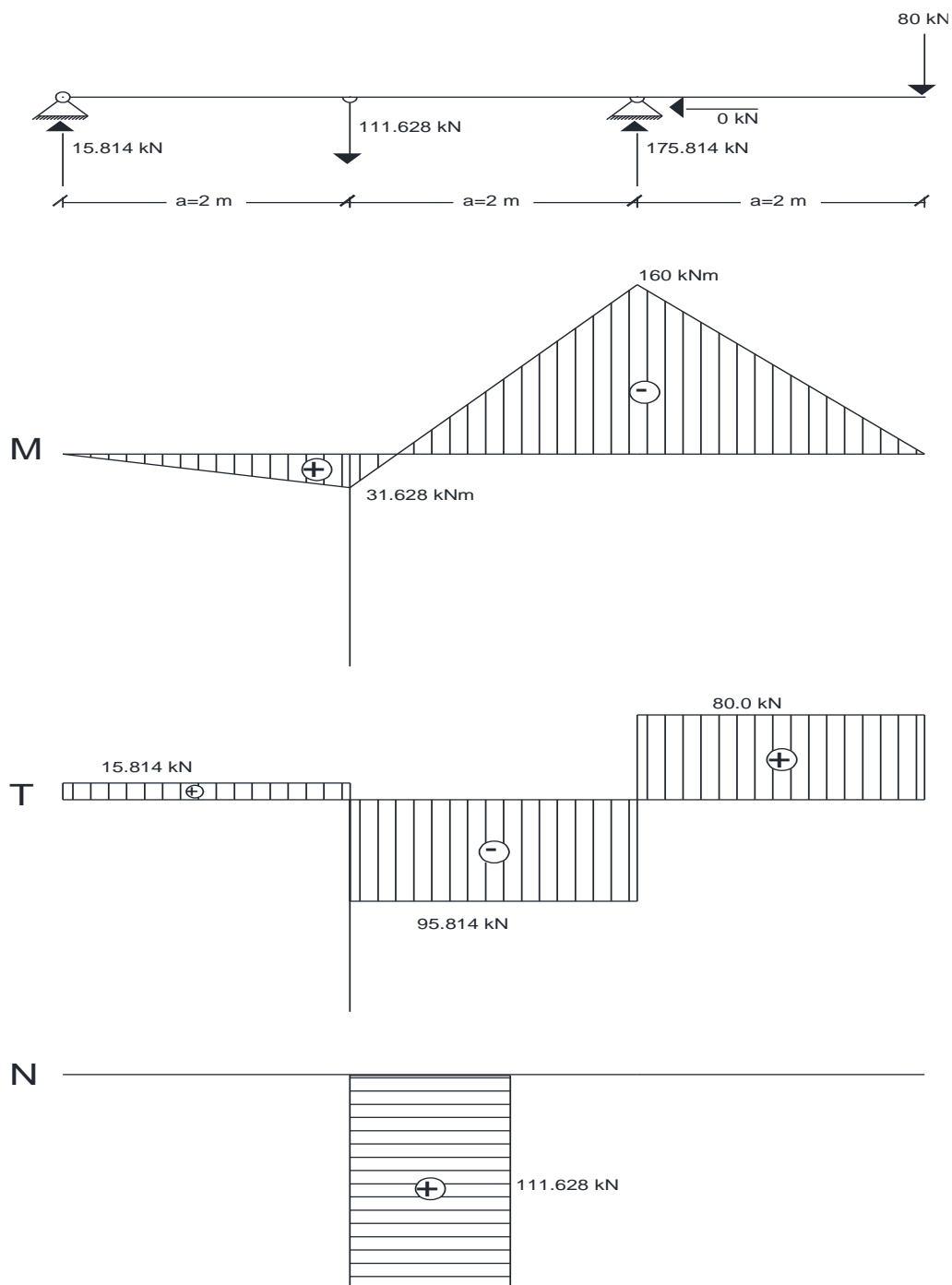
$$\frac{-100 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1.5 \cdot 10^6} + \frac{\frac{4}{3} \cdot S \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1.5 \cdot 10^6} = \frac{-S \cdot 10^3 \cdot 2000}{2 \cdot 10^5 \cdot 30}$$

$$-\frac{1600}{3} + \frac{40}{9} \cdot S = -\frac{1}{3} \cdot S$$

$$\frac{43}{9} \cdot S = \frac{1600}{3}$$

$$S = \frac{4800}{43} = 111.628 \text{ kN (vlak)}$$

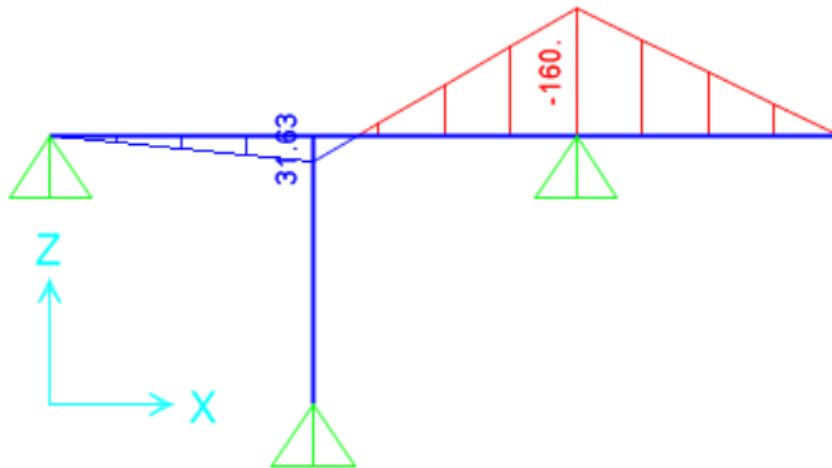
Dijagrami unutarnjih sila (M, T i N):



Slika 3.15 Prikaz dijagrama unutarnjih sila

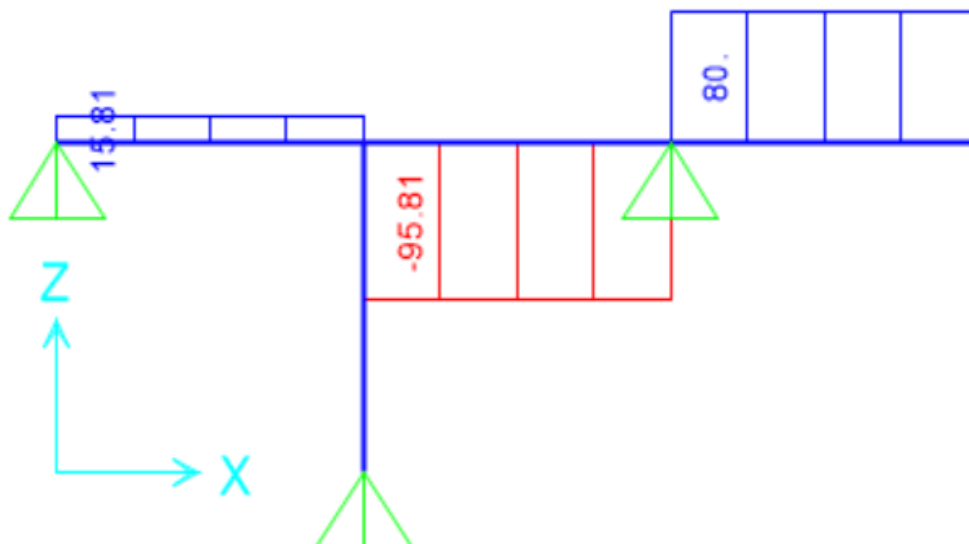
U programu SAP2000 izrađen je numerički model zadanog primjera. Prikazani su dobiveni dijagrami unutarnjih sila te su rezultati uspoređeni s analitičkim rješenjem.

M dijagram



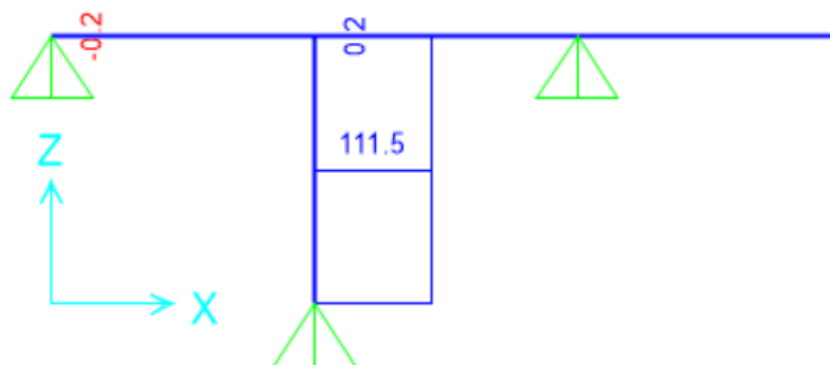
Slika 3.16 Prikaz momentnog dijagrama – SAP2000

T dijagram



Slika 3.17 Prikaz dijagrama poprečnih sila – SAP2000

N dijagram



Slika 3.18 Prikaz dijagrama uzdužnih sila – SAP2000

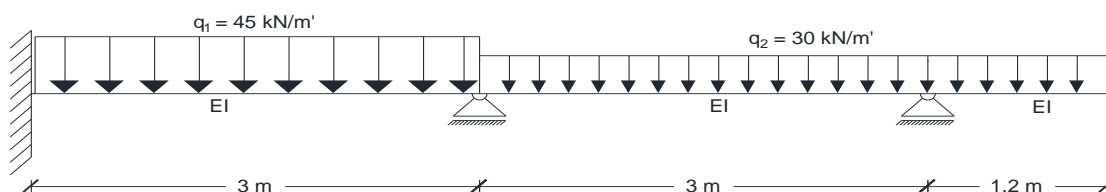
U tablici 2 prikazana je usporedba rezultata vrijednosti sile  $S_1$  dobivene analitičkim i numeričkim putem. Vidljivo je da su odstupanja vrlo mala, manja od 0,5%. Na temelju toga može se potvrditi valjanosti analitičkog rješenja primjera.

Tablica 2. Usporedba vrijednosti iz N dijagrama

Rezultati analitičkog rješenja (kN)	Rezultati iz SAP2000 (kN)	Odstupanje (%)
111.63	111.5	0.12

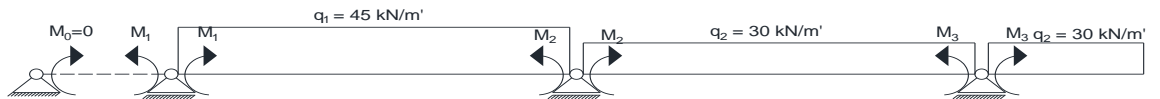
### 3.3.2 Kontinuirani nosač

Za zadani kontinuirani nosač preko dva raspona treba odrediti nepoznate veličine i nacrtati dijagrame unutarnjih sila  $M$  i  $T$ , koristeći tromomentnu (Clapeyronovu) jednadžbu.



Slika 3.19 Drugi numerički primjer – kontinuirani nosač

Prvi korak je određivanje osnovnog sustava. Osnovni sustav se dobiva umetanjem zglobova iznad unutarnjih kliznih ležajeva, umetanjem dopunskog polja zbog upetog kraja grede i oslobađanjem momenta savijanja.

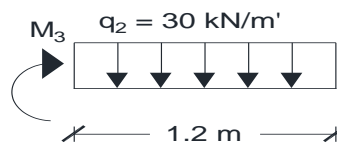


Slika 3.20 Prikaz osnovnog sustava

Sljedeći korak je određivanje momenata.

### 1. PREPUST

Prvo će se riješiti prepust na desnoj strani iz uvjeta ravnoteže. Suma momenata na zadnjem osloncu je jednaka nuli i iz toga se dobiva vrijednost momenta  $M_3$ .



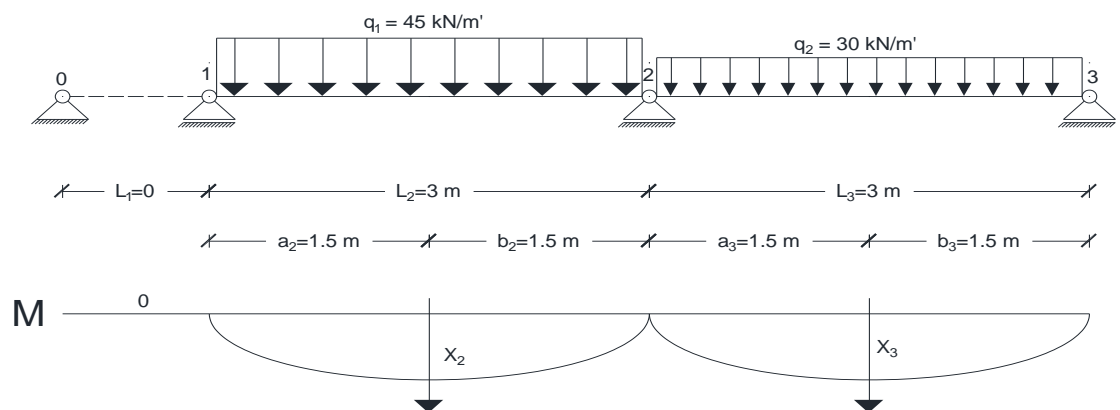
Slika 3.21 Prikaz opterećenog prepusta

$$-M_3 - 30 \cdot 1.2 \cdot 0.6 = 0$$

$$M_3 = -21.6 \text{ kNm}$$

### 2. RASPONI

Prilikom određivanja momenata na rasponu potrebno je odrediti fiktivne sile koje su jednake površini ispod dijagrama momenta savijanja.



Slika 3.22 Prikaz opterećenja raspona i fiktivnih sila

FIKTIVNE SILE:

$$X_2 = \frac{45 \cdot 3^2}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3$$

$$X_2 = 101.25 \text{ kNm}^2$$

$$X_3 = \frac{30 \cdot 3^2}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3$$

$$X_3 = 67.5 \text{ kNm}^2$$

Nakon određivanja fiktivni sila, raspisuju se dvije tromomentne jednačbe, za oslonac 1 i 2. Time dobivamo sustav od dvije jednačbe s dvije nepoznanice koje predstavljaju vrijednosti momenata nad osloncima.

#### TROMOMENTNA JEDNAČBA

##### 1. oslonac

$$M_0 \cdot \frac{X}{I} + \frac{2 \cdot M_1 \cdot [0 + 3]}{I} + \frac{M_2 \cdot 3}{I} = -6 \cdot \left[ 0 + \frac{X_2 \cdot 1.5}{3 \cdot I} \right]$$

$$6 \cdot M_1 + 3 \cdot M_2 = -303.75$$

##### 2. oslonac

$$\frac{M_1 \cdot 3}{I} + \frac{2 \cdot M_2 \cdot (3 + 3)}{I} + \frac{M_3 \cdot 3}{I} = -6 \cdot \left[ \frac{X_2 \cdot 1.5}{3 \cdot I} + \frac{X_3 \cdot 1.5}{3 \cdot I} \right]$$

$$3 \cdot M_1 + 12 \cdot M_2 - 64.8 = -506.25$$

$$3 \cdot M_1 + 12 \cdot M_2 = -441.45$$

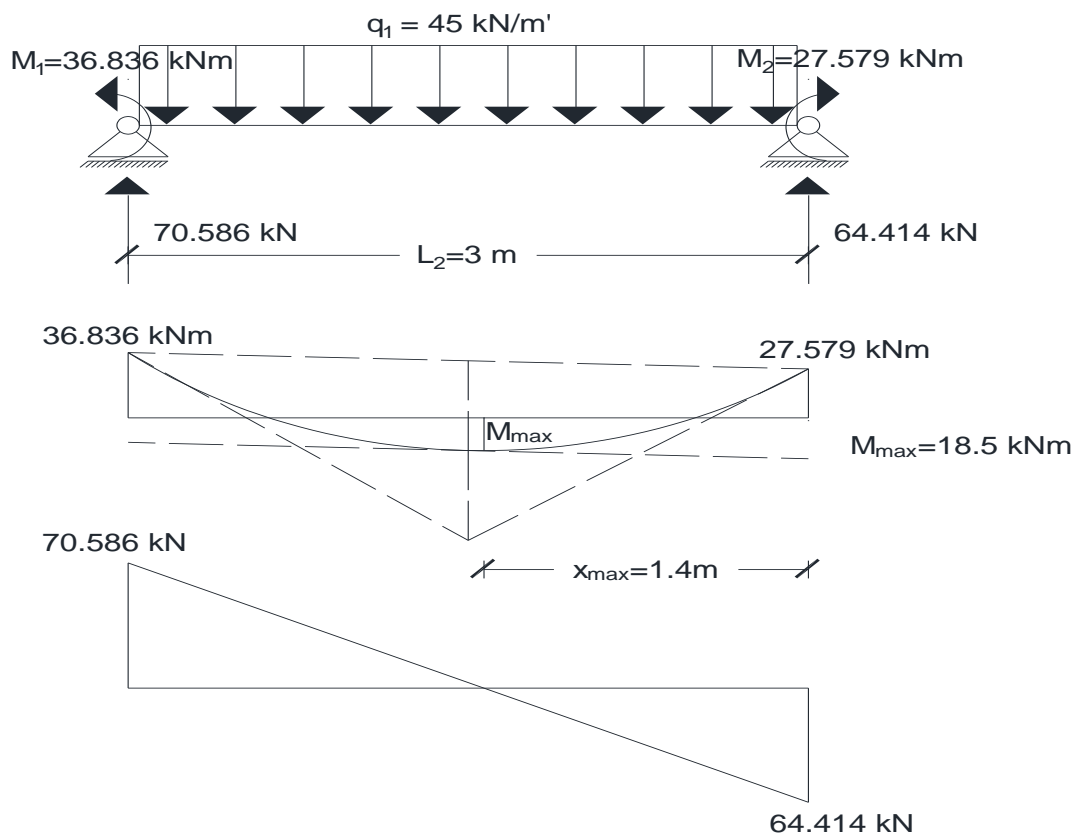
Zbrajanjem jednačbi prvog i drugog oslonca se dobivaju sljedeće vrijednosti:

$$M_1 = -36.836 \text{ kNm}$$

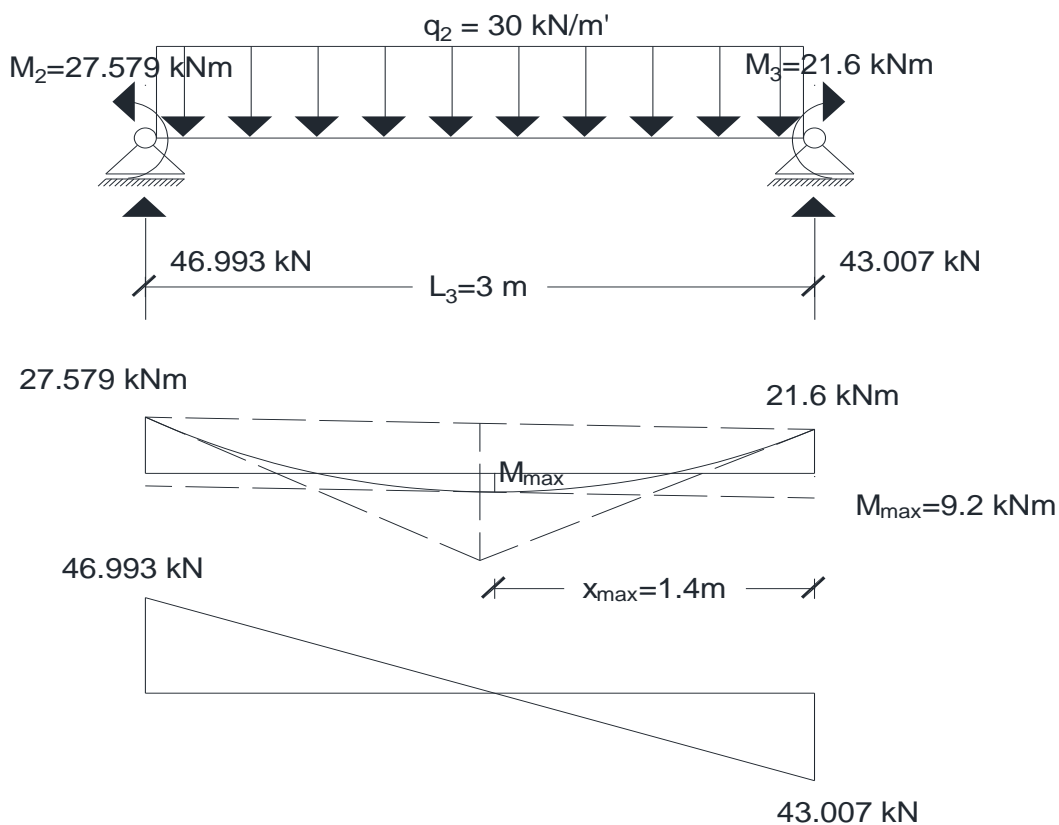
$$M_2 = -27.579 \text{ kNm}$$

Na osnovu dobivenih vrijednosti momenata mogu se izračunati vrijednosti poprečnih sila na osloncima svakog pojedinog raspona.



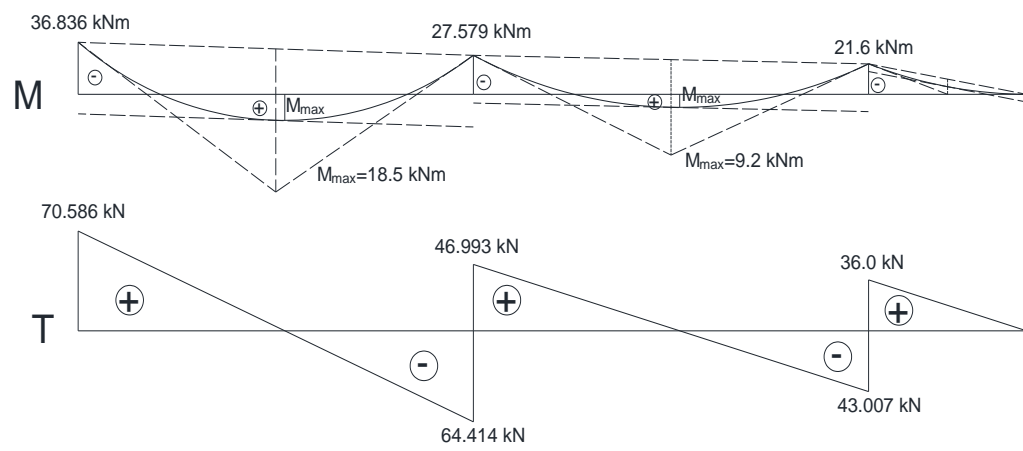


Slika 3.23 Prikaz M i T dijagrama za drugi raspon



Slika 3.24 Prikaz M i T dijagrama za treći raspon

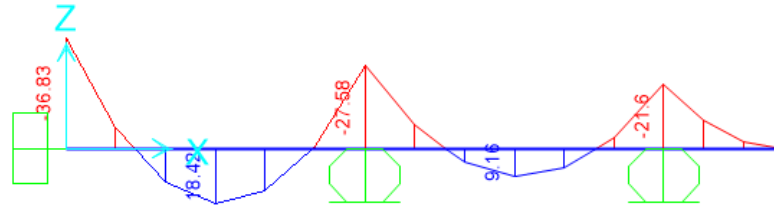
Dijagram unutarnjih sila (M, T):



Slika 3.25 Prikaz dijagrama unutarnjih sila

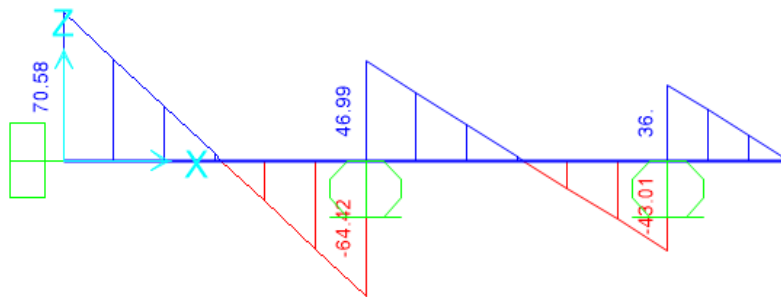
U programu SAP2000 izrađen je numerički model zadanog primjera. Prikazani su dobiveni dijagrami unutarnjih sila te su rezultati uspoređeni s analitičkim rješenjem.

M dijagram



Slika 3.26 Prikaz momenta dijagrama – SAP2000

T dijagram



Slika 3.27 Prikaz dijagrama poprečnih sila – SAP2000

U tablici 3 prikazana je usporedba rezultata vrijednosti momenata savijanja nad osloncima dobivenih analitičkim i numeričkim putem. Vidljivo je da su odstupanja zanemariva. Na temelju toga može se potvrditi valjanost analitičkog rješenja primjera.

Tablica 3. Usporedba vrijednosti iz M dijagrama

Oslonac	Rezultati analitičkog rješenja (kNm)	Rezultati iz SAP2000 (kNm)	Odstupanje (%)
M1	36.84	36.83	0.03
M2	27.58	27.58	0.00
M3	21.60	21.60	0.00

## 4. ZAKLJUČAK

Statički neodređeni nosači zadržavaju svoju nosivost, odnosno geometrijsku nepromjenjivost, nakon gubitka jednog ili svih suvišnih ograničenja. Zbog toga se smatra pouzdanim od statički određenih nosača. Uklanjanjem prekobrojnih veza dobivamo statički određeni sustav. Takav sustav zovemo ekvivalentni sustav koji je opterećen zadanim opterećenjem i statičkim nepoznatim veličinama na mjestima uklonjenih veza. Za rješavanje statički neodređeni nosača nisu dovoljne samo jednačbe ravnoteže, već se uvode jednačbe kompatibilnosti deformacija. Jednačbi kompatibilnosti uvodimo onoliko koliko imamo prekobrojnih veza. Jednačbe ravnoteže zajedno s jednačbama kompatibilnosti deformacija daju nam potreban broj jednačbi za određivanje svih reakcija te unutarnjih sila u presjecima nosača.

U ovom radu riješena su dva numerička primjera statički neodređenih nosača. Primjeri su riješeni i numeričkim putem, izradom modela u programskom paketu SAP2000. Usporedbom rezultata utvrđena je točnost rješenja. Metoda sila i tromomentna jednačba jednostavne su metode, lako primjenjive pri rješavanju jednostavnijih statički neodređenih sustava.

---

## POPIS LITERATURE

- [1] »Nosači,« [Mrežno]. Available: <https://www.enciklopedija.hr/clanak/nosac-gradjevni>.
- [2] K.-E. Kurrer, *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, Berlin: Wiley, 2008.
- [3] A. L. Rojas, »METHOD OF STRUCTURAL ANALYSIS FOR STATICALLY,« [Mrežno]. Available: <http://www.ijicic.org/ijicic-11-04076.pdf>.
- [4] K. V.S., »Statički neodređeni nosači,« [Mrežno]. Available: <http://www.grad.hr/nastava/gS/bilj2/stns.pdf>.
- [5] M. Bartolac, »Predavanja iz kolegija Otpornost materijala II,« Građevinski fakultet Zagreb, Zagreb.
- [6] Š. Vice, *Otpornost materijala II*, Zagreb: Školska knjiga, 2002.
- [7] E. Š. Petra Gidak, »Statički neodređeni nosači,« [Mrežno]. Available: [https://master.grad.hr/nastava/gS/gS2/e\\_sns.pdf](https://master.grad.hr/nastava/gS/gS2/e_sns.pdf).
- [8] »Metoda pomaka,« [Mrežno]. Available: <http://www.grad.hr/nastava/gS/zB2/node30.html>.
- [9] M. Bartolac, »Vježbe iz kolegija Otpornost materijala II,« u *Građevinski fakultet Zagreb*, Zagreb.
- [10] [Mrežno]. Available: <https://www.enciklopedija.hr/clanak/nosac-gradjevni>.
- [11] »Structural analysis,« [Mrežno]. Available: <http://www.ijicic.org/ijicic-11-04076.pdf>.
- [12] »Statički neodređeni nosači,« [Mrežno]. Available: [https://master.grad.hr/nastava/gS/gS2/e\\_sns.pdf](https://master.grad.hr/nastava/gS/gS2/e_sns.pdf), <http://www.grad.hr/nastava/gS/bilj2/stns.pdf>.
- [13] »Girders,« [Mrežno]. Available: <https://beamcut.com/steel-girders-vs-beams/>.

## POPIS SLIKA

Slika 1.1 Prikaz linijskog nosača .....	1
Slika 1.2. Prikaz statički određenog nosača – greda .....	1
Slika 1.3. Prikaz statički neodređenog nosača .....	2
Slika 1.4. Prikaz statički neodređenog nosača .....	3
Slika 2.1. Postavke kota u AutoCad-u .....	4
Slika 3.1. Primjer statički neodređenog nosača u praksi .....	5
Slika 3.2. Primjer statički određenog nosača, statički neodređenog nosača i mehanizma .....	6
Slika 3.3. Primjer dijagrama unutarnjih sila opterećenog nosača .....	7
Slika 3.4. Primjer pomaka zbog promjene temperature .....	8
Slika 3.5. Primjer slijeganja nosača zbog tla .....	9
Slika 3.6. Prikaz kontinuiranog nosača preko četiri raspona .....	11
Slika 3.7 Prikaz elastične linije i kuta zaokreta.....	11
Slika 3.8 Prvi numerički primjer – statički neodređeni nosač .....	13
Slika 3.9 Prikaz osnovnog sustava.....	13
Slika 3.10 Prikaz vanjskog opterećenja i fiktivnih sila .....	14
Slika 3.11 Prikaz fiktivnog nosača .....	14
Slika 3.12 Prikaz presjeka u točki B.....	15
Slika 3.13 Prikaz opterećenja od sile S1 i fiktivne sile .....	16
Slika 3.14 Prikaz fiktivnog nosača .....	16
Slika 3.15 Prikaz dijagrama unutarnjih sila .....	18
Slika 3.16 Prikaz momentnog dijagrama – SAP2000 .....	19
Slika 3.17 Prikaz dijagrama poprečnih sila – SAP2000 .....	19
Slika 3.18 Prikaz dijagrama uzdužnih sila – SAP2000 .....	20
Slika 3.19 Drugi numerički primjer – kontinuirani nosač .....	20
Slika 3.20 Prikaz osnovnog sustava.....	21
Slika 3.21 Prikaz opterećenog prepusta .....	21
Slika 3.22 Prikaz opterećenja raspona i fiktivnih sila .....	21
Slika 3.23 Prikaz M i T dijagrama za drugi raspon .....	23
Slika 3.24 Prikaz M i T dijagrama za treći raspon .....	23
Slika 3.25 Prikaz dijagrama unutarnjih sila .....	24
Slika 3.26 Prikaz momenta dijagrama – SAP2000 .....	25
Slika 3.27 Prikaz dijagrama poprečnih sila – SAP2000 .....	25

## POPIS TABLICA

Tablica 1: Vrijednost koeficijenta toplinskog rastezanja na 20 °C.....	8
Tablica 2. Usporedba vrijednosti iz N dijagrama .....	20
Tablica 3. Usporedba vrijednosti iz M dijagrama .....	25