Usporedba postupka Crossa i postupka Wernera i Csonke

Flanak, Bruna

Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Bruna Flanak

USPOREDBA POSTUPKA CROSSA I POSTUPKA WERNERA I CSONKE

ZAVRŠNI RAD

Mentor : prof. dr. sc. Krešimir Fresl, dipl. ing. građ.

Zagreb, 2024.

Sveučilište u Zagrebu

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Bruna Flanak

COMPARISON OF METHODS BY CROSS AND BY WERNER AND CSONKA

FINAL EXAM

Supervisor : prof. dr. sc. Krešimir Fresl, dipl. ing. građ.

Zagreb, 2024.

Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet

OBRAZAC 3

POTVRDA O POZITIVNOJ OCJENI PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Student/ica :

Bruna Flanak	0082056007
(Ime i prezime)	(JMBAG)

zadovoljio/la je na pisanom dijelu završnog ispita pod naslovom:

Usporedba postupka Crossa i postupka Wernera i Csonke

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

Comparison of methods by Cross and by Werner and Csonka

(Naslov teme završnog ispita na engleskom jeziku)

i predlaže se provođenje daljnjeg postupka u skladu s Pravilnikom o završnom ispitu i diplomskom radu Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta.

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu znanstvenog projekta: (upisati ako je primjenjivo)

(Naziv projekta, šifra projekta, voditelj projekta)

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu stručne prakse na Fakultetu: (upisati ako je primjenjivo)

(Ime poslodavca, datum početka i kraja stručne prakse)

Datum: 17. rujna 2024.

Mentor: Krešimir Fresl

Potpis mentora: Krešimir Fresl

Komentor: Elizabeta Šamec

Građevinski fakultet
Fra Andrije Kačića-Miošića 26, HR – 10000 Zagreb, OIB: 62924153420
TEL.: +385 (0) 1 4639 115, FAKS: +385 (0) 1 4828 051
www.grad.unizg.hr

Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet

OBRAZAC 5

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja :

Bruna Flanak, 0082056007

(Ime i prezime, JMBAG)

student/ica Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta ovim putem izjavljujem da je moj pisani dio završnog ispita pod naslovom:

Usporedba postupka Crossa i postupka Wernera i Csonke

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

izvorni rezultat mojega rada te da se u izradi istoga nisam koristio/la drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

Datum: 17.9.2024.

Potpis: BF

Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet

OBRAZAC 6

IZJAVA O ODOBRENJU ZA POHRANU I OBJAVU PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Ja :

Bruna Flanak, 67059931030

(Ime i prezime, OIB)

ovom izjavom potvrđujem da sam autor/ica predanog pisanog dijela završnog ispita i da sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti odgovara sadržaju dovršenog i obranjenog pisanog dijela završnog ispita pod naslovom:

Usporedba postupka Crossa i postupka Wernera i Csonke

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

koji je izrađen na sveučilišnom prijediplomskom studiju Građevinarstvo Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta pod mentorstvom:

Krešimir Fresl

(Ime i prezime mentora)

i obranjen dana:

24.09.2024.

(Datum obrane)

Suglasan/suglasna sam da pisani dio završnog ispita bude javno dostupan, te da se trajno pohrani u digitalnom repozitoriju Građevinskog fakulteta, repozitoriju Sveučilišta u Zagrebu te nacionalnom repozitoriju.

Datum: 17.9.2024.

Potpis: BF

SAŽETAK

U radu su uspoređeni postupci Crossa i Werner-Csonke. Svaki od navedenih ima svoju primjenu. Crossov postupak upotrebljava se kod nepomičnih, a postupak Wernera i Csonke kod pomičnih sustava. Prvi korak isti je u oba postupka - izračunavaju se razdjelni koeficijenti, momenti upetosti i prijenosni koeficijenti te se provodi uravnoteživanje dok neravnoteža ne bude zadovoljavajuće malena. Nakon toga se kod Crossa dodaju pomaci kod svakog pridržanja te se uravnotežuju momenti upetosti nastali zbog tih pomaka. U postupku Wernera i Csonke pridržajnim se silama mijenja smisao djelovanja te se izračunava njihov utjecaj. Oba načina rješavanja daju približno ista rješenja. Crossov je postupak dugotrajniji, dok je postupak Wernera i Csonke složeniji.

Ključne riječi : Crossov postupak, postupak Werner – Csonke, iteracija, relaksacijski postupak

SUMMARY

The topic of the paper is the comparison of Cross and Werner-Csonka methods. Each has its own field of application. We use the cross procedure for systems without sideway, and Werner-Csonka for systems with sideway. The first step is identical in both methods — the partition coefficients, the fixed end moments, and the carry-uver coefficients. Node balancing is performed until they unbalanced moments are satisfactorily small. After that, with Cross, we make shifts of each story and balance the moments caused by these shifts. With Werner-Csonka, the reaction forces are reversed and their influence is calculated. Both methods have approximately the same accuracy. Cross method requires more iterations, while Werner-Csonka method is more complex.

Key words : Cross method, Werner – Csonka method, iteration, relaxation method

SADRŽAJ

SAŽETAK .... *i*

SUMMARY .... *ii*

1. UVOD *1*

2. POSTUPAK CROSSA *2*

2.1. Opis postupka 2

2.2. Izvodi izraza 3

3. POSTUPAK WERNER - CSONKA *8*

3.1. Opis postupka 8

3.2. Izvodi izraza 9

4. USPOREDBA POSTUPKA CROSSA I WERNER – CSONKE *17*

4.1. Postupak Crossa 17

4.2. Postupak Werner - Csonke 34

5. ZAKLJUČAK *43*

POPIS LITERATURE *44*

POPIS SLIKA *45*

1. UVOD

Tema koja će biti obrađena u ovom završnom radu je usporedba dvaju postupaka koja se koriste za statički proračun, postupak Crossa i postupak Werner – Csonke.

Svaki postupak je detaljno opisan, te je prikazan izvod izraza za svaki od pojedinih postupaka. Također su na konkretnom primjeru zadatka primjenjena oba postupka rješavanja te međusobono uspoređena u svrhu pronalaska zaključka.

Cilj ovog rada je analiza postupaka Crosa i Werner – Csonke, te dobivanje sličnih, tj. jednakih konačnih rješenja na zadanom primjeru. Osim usporedbe rješenja, prikazana je i dužina i način rješavanja oba postupka. Razdrada ovog problema dat će odgovor na pitanje koji od ova dva postupka su brži i efikasniji.

Činjenica da se jedan komplicirani i kompleksni problem može riješiti na dva potpuno različita načina navela me na pisanje ovog završnog rada. Također, rješavanjem zadatka sljedećim postupcima kompleksni problem se pojednostavljuje.

2. POSTUPAK CROSSA

2.1. Opis postupka

Crossova metoda ili metoda razdiobe momenata je relaksacijski, odnosno iteracijski postupak rješavanja sistema jednadžbi ravnoteže za konstrukcije bez translacijskih pomaka čvorova (postoje samo zaokreti).

Iteracijska metoda podrazumijeva rješavanje jednadžbi inženjerske metode pomaka iteracijskim postupkom. Cross je za kriterij dovoljne točnosti odabrao prirast momenata na krajevima štapova. Početna pretpostavka je da oslobađanjem po jedan čvor nastaje mogućnost zakretanja u tom čvoru, u inače nepomičnom sistemu spriječenih pomaka.

Kreće se od čvora koji je najneuravnoteženiji. Nakon otpuštanja čvora, u njemu se uravnotežuju momenti priključnih štapova dobivenih na osnovnom sistemu, uz dodavanje vanjskih momenata ako postoje (u tom čvoru). Neuravnoteženi momenti u čvorovima i njihova razdioba dobiva se množenjem njihovih vrijednosti sa razdijelnim koeficijentima dobivenih iz omjera krutosti pojedinog štapa i zbroja krutosti svih štapova spojenih u čvoru. Dio takvih dobivenih momenata treba prebaciti na suprotni kraj štapa pri čemu je prijenosni koeficijent ½ .Nakon uravnoteženja jednog čvora, taj isti se upne, a postupak se ponavlja na sljedećem čvoru.

Postupak se ponavlja dok sve vrijednosti neuravnoteženih momenata u svim čvorovima nisu približno nula. Zbrajanjem momenata upetosti, raspodijeljenih momenata i prenesenih momenata dobivaju se konačni momenti na upetim krajevima.

Uz primjenjivanje na navedene konstrukcije bez translacijskih pomaka čvorova, Crossov postupak se može primijeniti i na sustave s dopuštenim translacijskim pomacima. Takvi sustavi se rješavaju na način da se u 1. fazi dodaju veze te se bez dodatnih sila dolazi do jednadžbi iz kojih se dobivaju stvarni pomaci. Broj jednadžbi ovisi o broju veza koje su postavljene, a dobiveni pomaci se uvrštavaju u jednadžbe i iz njih se dobivaju vrijednosti konačnih momenata.

2.2. Izvodi izraza

S obzirom da se u postupku oslobađa jedan čvor, i to najčešće onaj s najneuravnoteženijim momentom, prirast kuta zaokreta čvora ***i*** kod obostrano upete grede označit će se sa $\Delta\varphi_i^{(n_i+1)}$, te ga se prikazuje kao :

$$\Delta\varphi_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{n_i}+1)} = \frac{\mathrm{m}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{n_i})}}{\sum_{\mathrm{j_i}} 4\mathrm{k}_{(\mathrm{i},\mathrm{j_i})}}$$

pri čemu je $m_i^{(n_i)}$ najveći neuravnoteženi rezidualni moment.

Ako je poznat prirast kuta zaokreta $\Delta\varphi_i^{(n_i+1)}$ čvora ***i***, obostrano upete grede, tada je prirast vrijednosti momenta na kraju ***i*** elementa ***(i,j)*** :

$$\Delta\mathrm{M}_{\mathrm{i},\mathrm{j_i}}^{(\mathrm{n_i}+1)} = 4\mathrm{k}_{(\mathrm{i},\mathrm{j_i})}\Delta\varphi_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{n_i}+1)}$$

Pri uravnoteženju čvora zaokreti svih ostalih čvorova su spriječeni, što znači da je $\Delta\varphi_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{n_i}+1)} = 0$, a uvrštavanjem izraza za $\Delta\varphi_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{n_i}+1)}$ dobiva se sljedeće :

$$\Delta\mathrm{M}_{\mathrm{i},\mathrm{j_i}}^{(\mathrm{n_i}+1)} = \frac{4\mathrm{k}_{(\mathrm{i},\mathrm{j_i})}}{\sum_{\mathrm{j_i}} 4\,\mathrm{k}_{(\mathrm{i},\mathrm{j_i})}}\mathfrak{M}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{n_i})}$$

Zbroj koeficijenata svih elemenata priključenih za čvor naziva se koeficijent krutosti čvora ***i***, oznake $k_i = \sum_{j_i} 4\, k_{(i,j_i)}$, a sljedeći izraz je za razdijelni koeficijent u čvoru ***i*** za element ***(i , j)*** :

$$\mu_{i,j_i} = \frac{4\, k_{(i,j_i)}}{k_i}$$

Na taj način se određuju razdijelni koeficijenti za sve elemente spojene u tom čvoru.

Razdijelni koeficijent za jednostrano upetu gredu je :

$$\mu_{i,j_i} = \frac{3k_{(i,j_i)}}{k_i}$$

dok je razdijelni koeficijent za klizno upetu gredu :

$$\mu_{i,j_i} = \frac{k_{(i,j_i)}}{k_i}$$

Suma razdijelnih koeficijenata u čvoru mora biti 1 jer je koeficijent krutosti čvora ***i*** jednak zbroju svih koeficijenata krutosti elemenata spojenih u taj čvor :

$$\sum_{j_i} \mu_{(i,j_i)=1}$$

Uvršavanjem razdjelnog koeficijenta u jednadžbu za prirast momenta na kraju elementa dobiva se sljedeće :

$$\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = \mu_{i,j_i} \mathfrak{M}_i^{(n_i)}$$

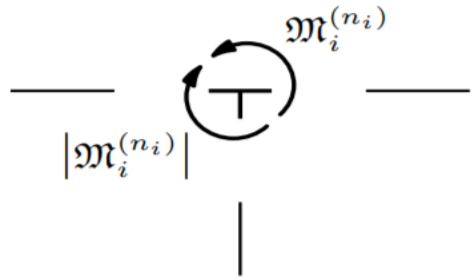
Sumiranjem prirasta momenata dobiva se :

$$\sum_{j_i} \Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = \mathfrak{M}_i^{(n_i)}$$

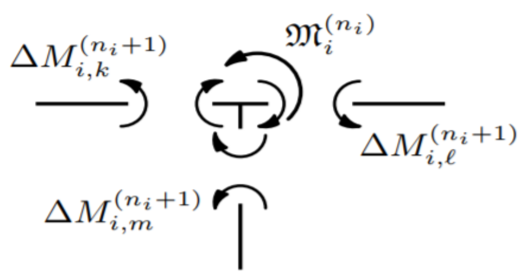
odnosno :

$$-\sum_{j_i} \Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} + \mathfrak{M}_i^{(n_i)} = 0$$

Čvor se može uravnotežiti dodavanjem momenta istog intenziteta ali suprotnje vrtnje rezidualnom momentu. Dodani moment se razdjeljuje na priključene elemente u omjeru njihovih krutosti. Upravo zbog ove činjenice se Crossov postupak naziva i postupkom raspodjele momenata ili postupkom razidobe momenata.



Slika 1 : Uravnotežavanje čvora (Izvor : [2])

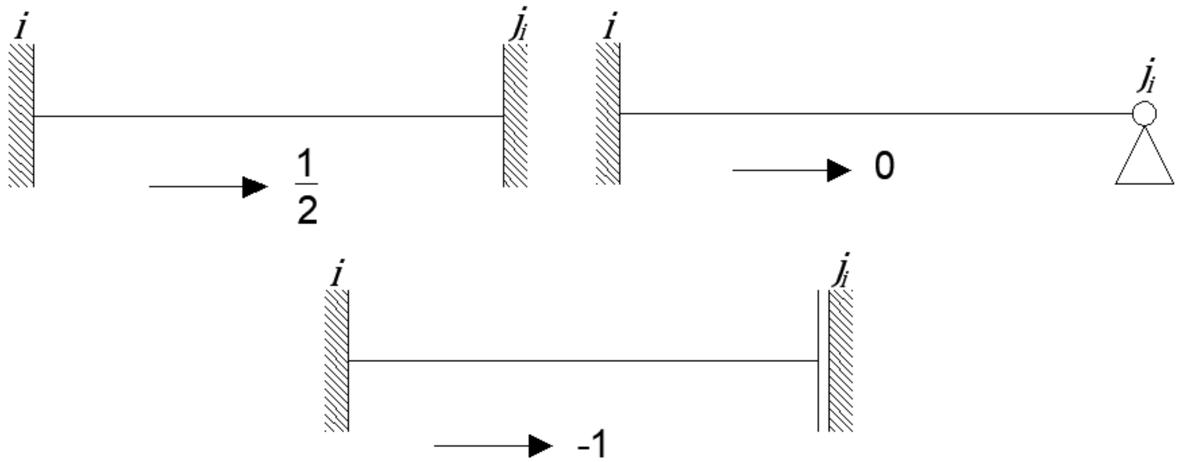


Slika 2 : Uravnotežavanje čvora pridruženim momentima na elementima (Izvor : [2])

Postupak iteracije najčešće počinje u onom čvoru u kojemu je najveći neuravnoteženi rezidualni moment. Nakon uravnoteženja čvora množenjem neuravnoteženog momenta s razdjelnim faktorom određuju se momenti na krajevima štapova susjednih čvorova pomoću prijenosnog koeficijenta. Ako se kraj i elementa ***(i, j_i***) zaokrene za kut , na drugom kraju elementa ***j_i*** , pojavit će se moment vrijednosti :

$$\Delta M_{j_i,i} = 2k_{(i,j_i)} \times \Delta\varphi_i^{(n_i+1)} = \frac{1}{2}\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)}$$

Prijenosni koeficijent za jednostrano upetu gredu je 0, a za gredu s jednim upetim kliznim ležajem na kraju je -1.



Slika 3 : Prijenosni koeficijenti za obostrano upetu, jednostrano upetu, i gredu sa upeto kliznim ležajem na jednom kraju

Crossov postupak se ponavlja dok vrijednosti neuravnoteženih ili prenosećih momenata ne postanu dovoljno, tj. toliko male da se mogu zanemariti. Razdjelni faktori, momenti upetosti, i prirasti momenata upisuju se na grafičkoj shemi konstrukcije. Konačni momenti na krajevima štapova dobivaju se zbrajanjem momenata upetosti i prirasta tijekom iteracije, raspodijeljenih i prenesenih momenata. Sile na krajevima štapova T_{ij} i N_{ij} određuju se iz sume momenata na pojedine dijelove sustava.

3. POSTUPAK WERNER - CSONKA

3.1. Opis postupka

Potreba za jednostavnijim proračunom višekatnih i višerasponskih okvirnih konstrukcija rezultirala je ideju metode Werner – Csonka. Namijenjena je proračunu simetričnih okvira. Prva faza je uravnoteženje momenata u čvorovima na okviru sa spriječenim translacijskim pomacima, primjenom Crossovog postupka. On se očituje u računanju razdijelnih koeficijenata I provedbi razdiobe momenata po čvorovima sve dok neuravnoteženi moment ne bude približno jednak nuli. Nakon određivanja pridržajnih sila, vrši se proračun unutarnjih sila.

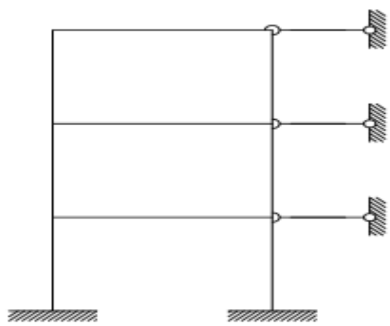
Sljedeći korak je opterećivanje okvira silama istih intenziteta kao zamišljene pridržajne sile koje se dodaju da se spriječi pomak. Te sile djeluju na istim pravcima, istog su intenziteta, ali različitog predznaka. Sile u pridržajnim vezama određuju se presijecanjem konstrukcije u katu ispod veze u kojoj se traži sila. Iz sume projekcija na pravac veze dobiva se sila u vezi. Druga faza proračuna provodi se na sistemu sa slobodnim pomacima čvorova, tj. uvodi se poluokvir koji opterećujemo izračunatim silama.

Osnovna pretpostavka ove metode je da su, pri horizontalnom opterećenju čvorova koncentriranim silama, kutovi zaokreta čvorova u jednom katu jednaki. Momenti upetosti se računaju na tako opterećenom sistemu. U gredama nema momenata upetosti jer se njihovi krajevi ne zaokreću. Pomoću poznatih vrijednosti poprečnih sila računaju se vrijednosti momenata upetosti u stupovima. Potrebno je definirati krutosti štapova i greda kako bi se definirao poluokvir i izračunali razdijelni koeficijenti jer je sada uveden drugi sistem. Krutosti ovise o tome koliko grede i stupovi predstavljaju, tj. pokrivaju greda i stupova glavnog okvira. To znači da ako jedan stup u poluokviru predstavlja 3 stupa u okviru, njegova krutost je suma krutosti tih triju stupova. Momenti upetosti se uravnotežuju na poluokviru s prijenosnim koeficijentom -1, sve dok konačni neuravnoteženi moment ne bude približno nula. Dobiveni momenti s poluokvira vraćaju se na početni, ali treba imati na umu krutost greda i stupova na poluokviru i okviru. Poanta je da se pravilno raspodijele momenti s obzirom na krutost greda I stupova.

Zbroj momenata dobivenih Crossovim postupkom i momenata dobivenih postupkom Werner – Csonke dati će konačne momente.

3.2. Izvodi izraza

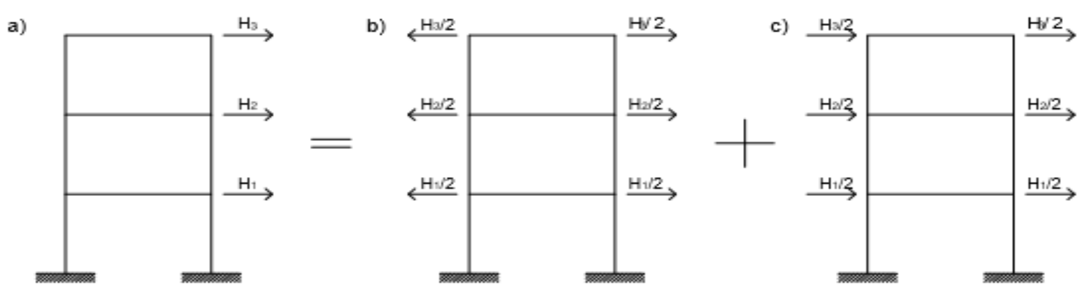
Postupak je ilustriran na primjeru simetričnog višeetažnog okvira s jednim rasponom, na kojem su spriječeni pomaci etaža.



Slika 4 : Simetrični višeetažni okvir s jednim rasponom (Izvor : [2])

Budući da su spriječeni pomaci etaža, u prvom koraku se proračunava okvir sa spriječenim translacijskim pomacima čvorova, tj. primjenjuje se Crossova metoda.

U dodanim vezama će se pojaviti reaktivne (pridržajne) sile, a budući da u izvornom sistemu te veze i reakcije u njima ne postoje, okvir se opterećuje silama istog intenziteta i na istim pravcima, ali suprotnog predznaka.



Slika 5 : Okvir rastavljen na simetrični i antimetrični dio (Izvor : [2])

Uzdužne sile ne mijenjaju duljinu greda, što znači da simetrično opterećenje neće prouzročiti momente savijanja. Oni mogu nastati samo zbog djelovanja antimetričnog opterećenja. Pri djelovanju antimetričnog opterećenja polje pomaka simetrične konstrukcije je antimetrično, tj. kutevi zaokreta i horizontalni pomaci su jednaki u oba čvora, a vrijednost vertikalnog pomaka na polovini raspona grede je 0 i tu se nalazi točka infleksije progibne linije. S obzirom na to da je zakrivljenost u točki infleksije 0, vrijednost momenta savijanja je također 0. Zbog te činjenice umjesto cijelog okvira može se promatrati samo njegova polovica. Takav promatrani sistem naziva se *poluokvir*.

Rubni uvjet koji treba ispoštovati je u osi simetrije, a to je pomični zglobni ležaj koji sprječava vertikalni, a dopušta horizontalni pomak i zaokret.

Prvi korak je računanje vrijednosti momenata upetosti u stupovima iz poznatih vrijednosti poprečnih sila uz pretpostavku da su kutevi zaokreta čvorova spriječeni, ali horizontalni pomaci nisu. Sile u stupovima određuju se presijecanjem konstrukcije u katu ispod veze u kojoj se traži sila. Sila u vezi dobiva se sumom projekcija sila na pravac veze. Krajevi greda se ne zaokreću pa u njima nema momenata upetosti. Poluokvir je opterećen samo u čvorovima, što znači da su vrijednosti poprečnih sila u pojedinim stupovima konstante :

$$\mathrm{T}_{\mathrm{i,i-1}} = -\mathrm{T}_{\mathrm{i-1,i}} = \mathrm{T}_{\mathrm{i}}$$

Točka infleksije progibne linije u polovištu jednaka je nuli, kao i vrijednost momenta savijanja u toj istoj točki ali samo kod stupa konstantnog poprečnog presjeka što znači :

$$\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{i,i-1}} = \overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{i-1,i}}$$

Jednadžba ravnoteže momenata oko dna stupa (*i* – 1, *i*) iznosi :

$$-\mathrm{T}_{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{h}_{\mathrm{i}} + \overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{i,i-1}} + \overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{i-1,i}} = 0$$

i daje izraz za momente upetosti :

$$\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{i,i-1}} = \overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{i-1,i}} = \frac{1}{2}\mathrm{T}_{\mathrm{i}}\mathrm{h}_{\mathrm{i}}$$

Presijecanjem konstrukcije u katu ispod veze u kojoj se traži sila i pomoću uvjeta ravnoteže horizontalnih sila koje djeluju na dio poluokvira iznad presjeka (kroz *i* – ti stup) dobiva se vrijednost poprečne sile T_i :

$$\mathrm{T_i} = \sum_{\mathrm{j=i}}^{\mathrm{e}} \mathrm{H_j}$$

Potrebno je definirati razdjelne I prijenosne koeficijente prije proračuna poluokvira.

Grede su u osnovnom sistemu jednostrano upete, pa za prirast vrijednosti momenta na upetom kraju zbog zaokreta čvora vrijedi izraz :

$$\Delta \mathrm{M}_{\mathrm{i,g}}^{(\mathrm{n_i}+1)} = 3\mathrm{k}_{\mathrm{i,g}} \Delta \varphi_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{n_i}+1)}$$

gdje je $k_{i,g}$ koeficijent krutosti grede poluokvira :

$$\mathrm{k}_{\mathrm{i,g}} = \frac{\mathrm{E}_\mathrm{i}'(2\mathrm{I}_\mathrm{i}')}{\frac{\mathrm{l}}{2}} = 4\frac{\mathrm{E}_\mathrm{i}'\mathrm{I}_\mathrm{i}'}{\mathrm{l}} = 4\mathrm{k}_{(\mathrm{i}_1,\mathrm{i}_2)}$$

Prirast vrijednosti momenta može se izraziti I pomoću koeficijenta krutosti grede izvornog oblika :

$$\Delta \mathrm{M}_{\mathrm{i,g}}^{(\mathrm{n_i}+1)} = 12\mathrm{k}_{(\mathrm{i}_1,\mathrm{i}_2)} \cdot \Delta \varphi_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{n_i}+1)}$$

S obzirom da horizontalni pomaci osnovnog sistema nisu spriječeni, kod izvoda za vrijednost momenta u stupu zamišlja se da na kraju priključenom u čvor stup ima krutu pomičnu vezu koja omogućuje pomak okomito na njegovu os. Veza između prirasta vrijednosti momenta na krajevima i prirasta kuta zaokterta kraja *i* dana je sljedećim izrazima:

$$\Delta \mathrm{M}_{\mathrm{i,i-1}}^{(\mathrm{n_i}+1)} = \mathrm{k}_{(\mathrm{i}_1-1,\mathrm{i})}.\Delta \varphi_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{n_i}+1)}$$

$$\Delta \mathrm{M}_{\mathrm{i-1,i}}^{(\mathrm{n_i}+1)} = -\mathrm{k}_{(\mathrm{i}_1-1,\mathrm{i})}.\Delta \varphi_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{n_i}+1)}$$

gdje je $k_{(i-1,i)}$ koeficijent krutosti stupova poluokvira :

$$k_{(i_1-1,i)} = \frac{E_i'(2I_i')}{h_i} = 2\frac{E_i'I_i'}{h_i} = 2k_{(i_1-1,i)}$$

Zakretanjem za kut $\Delta\varphi_i^{(n_i)}$ uravnotežuje se čvor *i* na koji djeluje rezidualni moment vrijednošću $\mathfrak{M}_i^{(n_i-1)}$:

$$-\Delta M_{i,g}^{(n_i+1)} - \Delta M_{i-1,i}^{(n_i+1)} - \Delta M_{i,i+1}^{(n_i+1)} + \mathfrak{M}_i^{(n_i)} = 0$$

$$(3k_{i,g} + k_{(i-1,i)} + k_{(i,i+1)}).\Delta\varphi_i^{(n_i+1)} = \mathfrak{M}_i^{(n_i)}$$

$$\Delta\varphi_i^{(n_i+1)} = \frac{\mathfrak{M}_i^{(n_i)},}{k_i^w}$$

Dobiveni izraz za prirast kuta $\Delta\varphi_i^{(n_i+1)}$ može se uvrstiti u izraze za vrijednosti momenata na krajevima ležaja grede i stupa :

$$\Delta M_{i,g}^{(n_{ii}+1)} = \frac{3k_{i,g}}{k_i^w} \cdot \mathfrak{M}_i^{(n_i)} = \mu_{i,g} \cdot \mathfrak{M}_i^{(n_i)}$$

$$\Delta M_{i,i-1}^{(n_{ii}+1)} = \frac{k_{(i-1,i)}}{k_i^w} \cdot \mathfrak{M}_i^{(n_i)} = \mu_{i,i-1} \cdot \mathfrak{M}_i^{(n_i)}$$

$$\Delta M_{i,i+1}^{(n_i+1)} = \frac{3k_{i,i+1}}{k_i^w} \cdot \mathfrak{M}_i^{(n_i)} = \mu_{i,i+1} \cdot \mathfrak{M}_i^{(n_i)}$$

Razdijelni koeficijenti za čvor *i* su :

$$\mu_{i,g} = \frac{3k_{i,g}}{k_i^w},$$

$$\mu_{i,i-1} = \frac{k_{(i-1,i)}}{k_i^w},$$

$$\mu_{i,i+1} = \frac{k_{i+1,i}}{k_i^w}$$

Oni se mogu izraziti pomoću koeficijenata krutosti grede i stupova izvornog okvira :

$$k_i^w = 12k_{(i_1,i_2)} + 2k_{(i_{1,}-1i_1)} + 2k_{(i_{1,}i_{1+1})}$$

$$\mu_{i,g} = \frac{12k_{(i_1,i_2)}}{k_i^w}$$

$$\mu_{i,g} = \frac{2k_{(i_1-1,i_{12})}}{k_i^w}$$

$$\mu_{i,g} = \frac{2k_{(i_{1,}i_{11+1})}}{k_i^w}$$

Izrazi pokazuju da je $\Delta M_{i-1,i}^{(n_i+1)} = -\Delta M_{i,i-1}^{(n_i+1)}$, što znači da je prijenosni koeficijent -1.

Zbroj momenata na krajevima jednog stupa naziva se moment etaže i iznosi :

$$M_{e,i}^{(n_i+1)} = M_{i-1,i}^{(n_i+1)} + M_{i,i-1}^{(n_i-1)}.$$

Iz jednadžbe ravnoteže momenata oko dna stupa slijedi :

$$-T_i \cdot h_i + \overline{M}_{i,i-1} + \overline{M}_{i-1,i} = -T_i \cdot h_i + M_{e,i}^{(n_i+1)} = 0,$$

$$M_{e,i}^{(n_i+1)} = T_i \cdot h_i$$

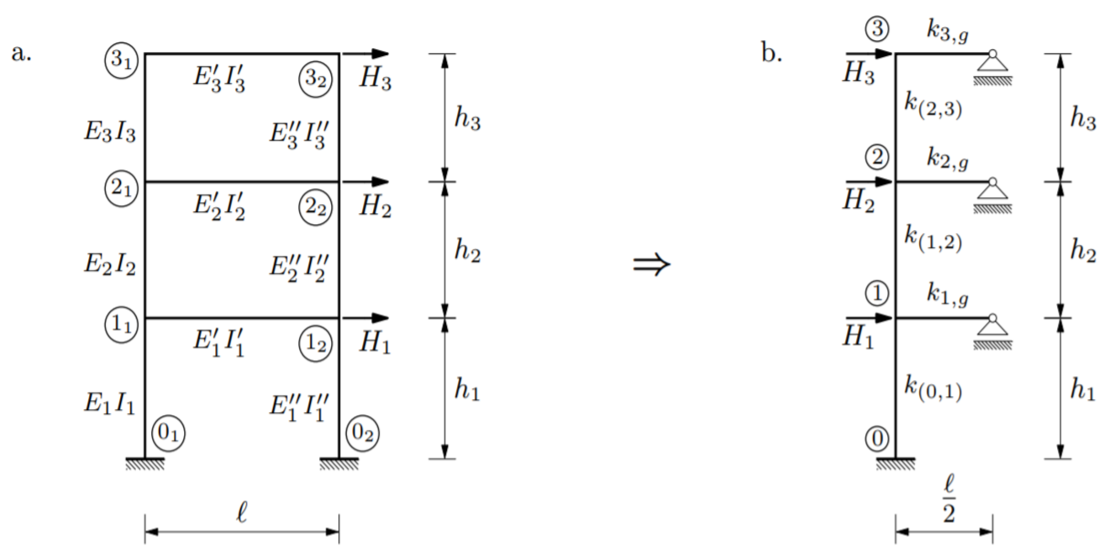
Iz navedene jednadžbe, zaključak je da vrijednosti momenata etaže tijekom proračuna moraju ostati konstantne. Prilikom vraćanja izračunatih vrijednosti s poluokvira na okvir, vrijednosti se moraju raspoloviti :

$$M_{i_1,i_2} = M_{i_2,i_1} = \frac{1}{2} M_{i,g}$$

$$M_{i_1,i_{1-1}} = M_{i_2,i_{2-1}} = \frac{1}{2} M_{i,1-1}$$

$$M_{i_1,i_{1+1}} = M_{i_2,i+2=} \frac{1}{2} M_{i,1+1}$$

Opisani postupak proširuje se na proračun nesimetričnog višeetažnog okvira s jednim rasponom. Pridržani sistem nastavlja se rješavati Crossovim postupkom pod zadanim djelovanjima i računaju se reakcije u dodanim vezama. Nakon toga se okvir u odgovarajućim čvorovima opterećuje silama istih intenziteta i pravaca djelovanja, a suprotnih orijentacija.



Slika 6 : Okvir rastavljen na poluokvir „preklapanjem" (Izvor : [2])

S obzirom na to da okvir nije simetričan, pod antimetričnim opterećenjem progibna linija neće biti antimetrična. U prvoj fazi proračuna uzimamo da su kutevi zaokreta oba čvora na nekoj od etaža međusobno jednaki. To rezultira jednakosti i kuteva zaokreta, pa će u sredini raspona biti točka infleksije u kojoj je moment savijanja jednak nuli. Zbog toga se i sada okvir prve faze proračuna može zamijeniti poluokvirom.

Vrijednosti momenata upetosti rješavaju se prema sljedećem izrazu :

$$\overline{M}_{i,i-1} = \overline{M}_{i-1,i} = \frac{1}{2} T_i h_i$$

U nesimetričnom okviru stupovi u jednoj etaži nisu međusobno jednaki. Zbog toga koeficijente krutosti stupova poluokvira definiramo kao zbroj koeficijenata krutosti stupova okvira :

$$k_{(i-1,i)} = k_{(i_1-1,i_1)} + k_{(i_2-1,i_2)}$$

pa je :

$$k_i^W = 3k_{i,g} + k_{(i-1,i)} + k_{(i,i+1)} = \quad 12k_{(i_1,i_2)} + \left[k_{(i_1-1,i_1)} + k_{(i_2-1,i_2)}\right] + \left[k_{(i_1,i_1+1)} + k_{(i_2,i_2+1)}\right]$$

a razdijelni koeficijenti su :

$$\mu_{i,g} = \frac{3k_{i,g}}{k_i^w} = \frac{12k_{(i_1,i_2)}}{k_i^w}$$

$$\mu_{i,i-1} = \frac{k_{(i-1,i)}}{k_i^w} = \frac{k_{(i_1-1,i_1)} + k_{(i_2-1,i_2)}}{k_i^w}$$

$$\mu_{i,i+1} = \frac{k_{i+1,i}}{k_i^w} = \frac{k_{(i_1,i_1+1)} + k_{(i_2,i_2+1)}}{k_i^w}$$

Ponovno se provodi relaksacijski proračun na poluokviru s prijenosnim koeficijentom -1.

Vrijednosti dobivenih momenata na poluokviru raspodjeljuju se na odgovarajuće elemente okvira u omjerima njihove krutosti :

$$M_{i_1,i_2} = M_{i_2,i_1} = \frac{1}{2} M_{i,g},$$

$$M_{i_1,i_1-1} = \frac{k_{(i_1-1,i_1)}}{k_{(i_1-1,i_1)} + k_{(i_2-1,i_2)}} M_{i,i-1},$$

$$M_{i_2,i_2-1} = \frac{k_{(i_2-1,i_2)}}{k_{(i_1-1,i_1)} + k_{(i_2-1,i_2)}} M_{i,i-1},$$

$$M_{i_1,i_1+1} = \frac{k_{(i_1,i_1+1)}}{k_{(i_1,i_1+1)} + k_{(i_2,i_2+1)}} M_{i,i+1,}$$

$$M_{i_2,i_2+1} = \frac{k_{(i_2,i_2+1)}}{k_{(i_1,i_1+1)} + k_{(i_2,i_2+1)}} M_{i,i+1}.$$

Budući da pretpostavka o jednakosti kutova zaokreta jedne grede nije ispravna, čvorovi okvira neće biti u ravnoteži.

Zato se, u drugoj fazi proračuna, momenti u čvorovima uravnotežuju Crossovim postupkom (pritom treba spriječiti horizontalne pomake etaža).

Daljnjim računanjem vrijednosti poprečnih sila u stupovima presijecanjem etaža, otkrit će se da je narušena ravnoteža horizontalnih sila, tj. one nisu u ravnoteži sa silama H_i

U većini slučajeva je neispunjenje tih uvjeta ravnoteže toliko malo da se dobiveni rezultati mogu smatrati konačnima.

U potrazi za točnijim rezultatima, ponavlja se cijeli postupak i dobiveni rezultati se pridodaju prethodnima. Dobiveno riješenje i dalje nije konačno, ali ga se ovisno o veličini neuravnoteženih sila može smatrati konačnim.

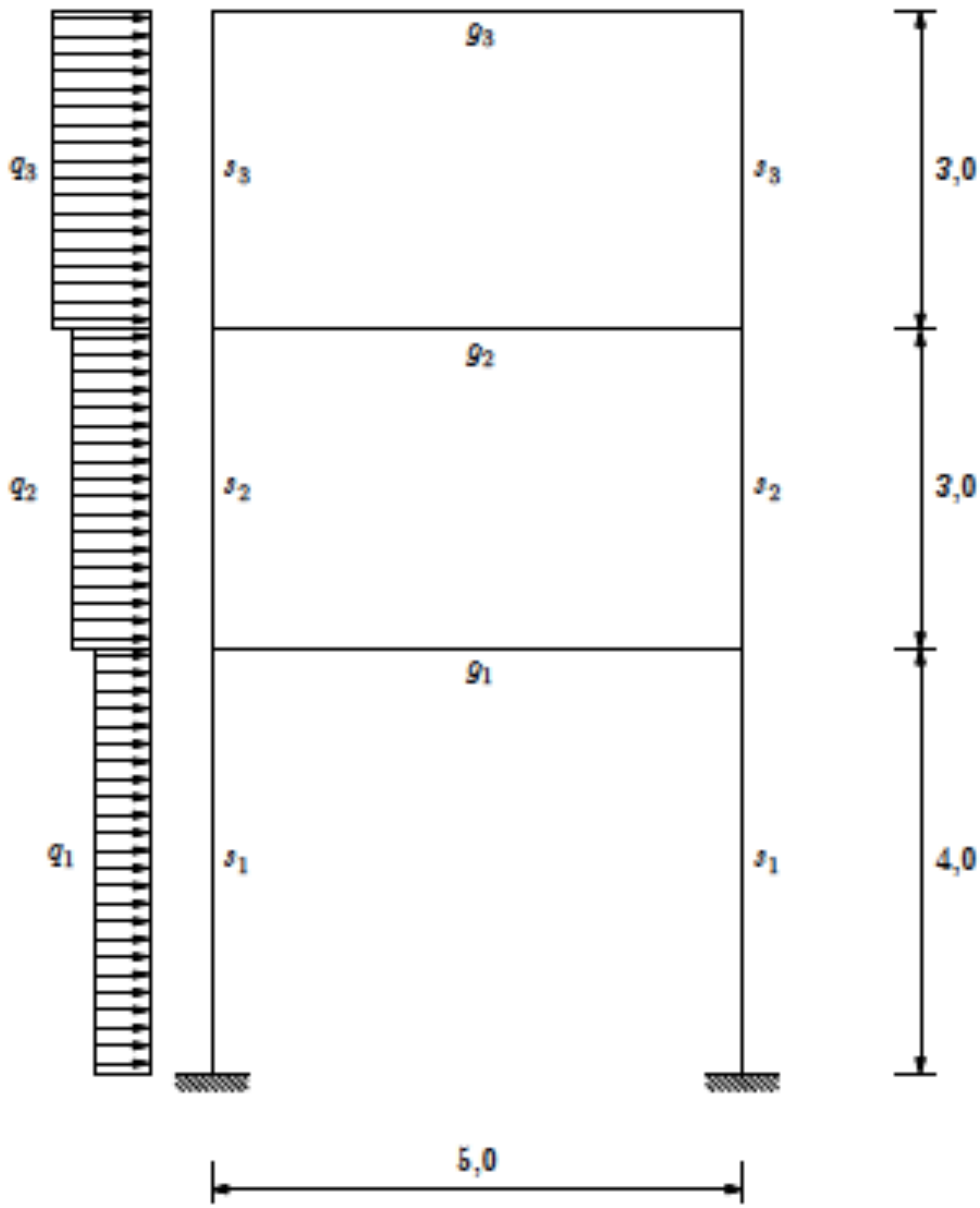
Daljnjim ponavljanjem ciklusa postiže se bilo koja točnost.

Analogija s Crossovim postupkom je jasna, zbog uravnotežívanja čvorova više puta do zahtijevane točnosti.

Uvođenje popravnog koeficijenta omogućava prekid postupka, uz dovoljnu točnost „za praktične potrebe", već nakon prvog ili, u najgorem slučaju, nakon drugog ciklusa.

4. USPOREDBA POSTUPKA CROSSA I WERNER – CSONKE

4.1. Postupak Crossa



ULAZNI PODACI :

q_1 = 10 kN / m	grede:	stupovi :
q_2 = 20 kN / m	g_1 i g_2 : b/h = 30/60 cm.	s_1 : b/h = 45/45 cm
q_3 = 25 kN/ m	g_3 : b/h = 30/45 cm	s_2 i s_3 : b/h = 30/30 cm

$$E = 3 \cdot 10^7 kN/m^2$$

FIZIKALNE KARAKTERISTIKE :

GREDE :

g_1 i g_2 : $EI = 3 \cdot 10^7 \cdot \frac{0,3 \cdot 0,6^3}{12} = 162000\ kNm^2 = 8EI$

g_3 : $EI = 3 \cdot 10^7 \cdot \frac{0,3 \cdot 0,45^3}{12} = 68343,75\ kNm^2 = 3,375EI$

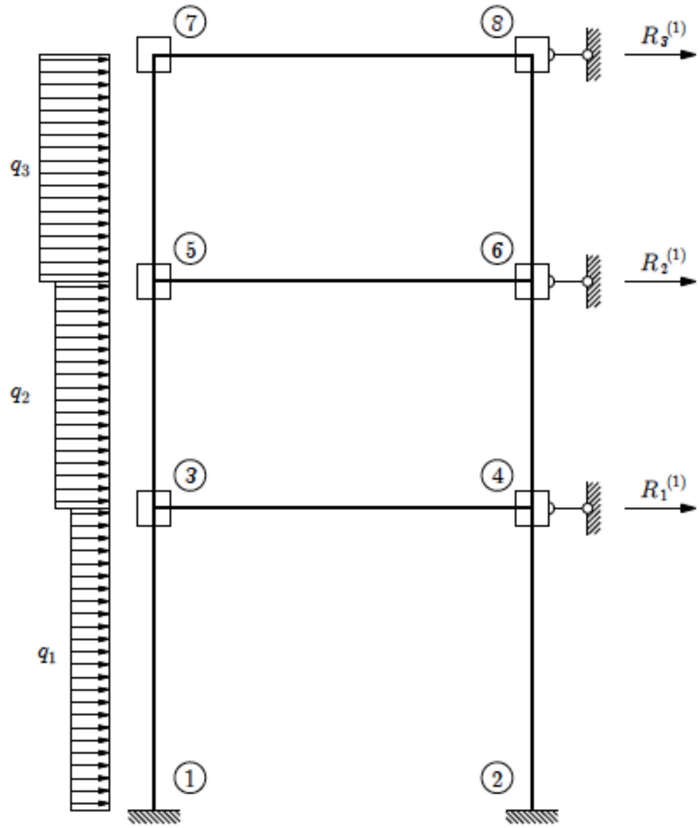
STUPOVI :

s_1 : $EI = 3 \cdot 10^7 \cdot \frac{0,45 \cdot 0,45^3}{12} = 102515,625\ kNm^2 = 5,0625EI$

s_2 i s_3 : $EI = 3 \cdot 10^7 \cdot \frac{0,3 \cdot 0,3^3}{12} = 20250\ kNm^2 = EI$

Prvi korak : Crossov postupak uslijed zadanog opterećenja :

Osnovni sistem :



Krutosti štapnih elemenata:

$$k_{3,4} = k_{4,3} = k_{5,6} = k_{6,5} = 8EI/5 = 1{,}6\ EI$$

$$k_{7,8} = k_{8,7} = 3{,}375EI/5 = 0{,}675\ EI$$

$$k_{1,3} = k_{3,1} = k_{2,4} = k_{4,2} = 5{,}0625EI/4 = 1{,}265625\ EI$$

$$k_{3,5} = k_{5,3} = k_{4,6} = k_{6,4} = k_{5,7} = k_{7,5} = k_{6,8} = k_{8,6} = EI/3$$

Razdijelni koeficijenti :

$a_{3,1} = 4k_{3,1} = 5{,}0625\,EI \rightarrow \mu_{3,1} = a_{3,1}/k_3 = 0{,}40 = \mu_{4,2}$

$a_{3,4} = 4k_{3,4} = 6{,}4\,EI \rightarrow \mu_{3,4} = a_{3,4}/k_3 = 0{,}50 = \mu_{4,3}$

$a_{3,5} = 4k_{3,5} = 4EI/3 \rightarrow \mu_{3,5} = a_{3,5}/k_3 = 0{,}10 = \mu_{4,6}$

$k_3 = \sum a_{3,i} = 12{,}7858E$

$a_{5,3} = 4k_{5,3} = 4EI/3 \rightarrow \mu_{5,3} = a_{5,3}/k_5 = 0{,}15 = \mu_{6,4}$

$a_{5,6} = 4k_{5,6} = 6{,}4\,EI \rightarrow \mu_{5,6} = a_{5,6}/k_5 = 0{,}70 = \mu_{6,5}$

$a_{5,7} = 4k_{5,7} = 4EI/3 \rightarrow \mu_{5,7} = a_{5,7}/k_5 = 0{,}15 = \mu_{6,8}$

$k_5 = \sum a_{5,i} = 9{,}06667EI$

$a_{7,5} = 4k_{7,5} = 4EI/3 \rightarrow \mu_{7,5} = a_{7,5}/k_5 = 0{,}33 = \mu_{8,6}$

$a_{7,8} = 4k_{7,8} = 2{,}7\,EI \rightarrow \mu_{7,8} = a_{7,8}/k_5 = 0{,}67 = \mu_{8,7}$

$k_7 = \sum a_{7,i} = 4{,}03333EI$

Momenti upetosti :

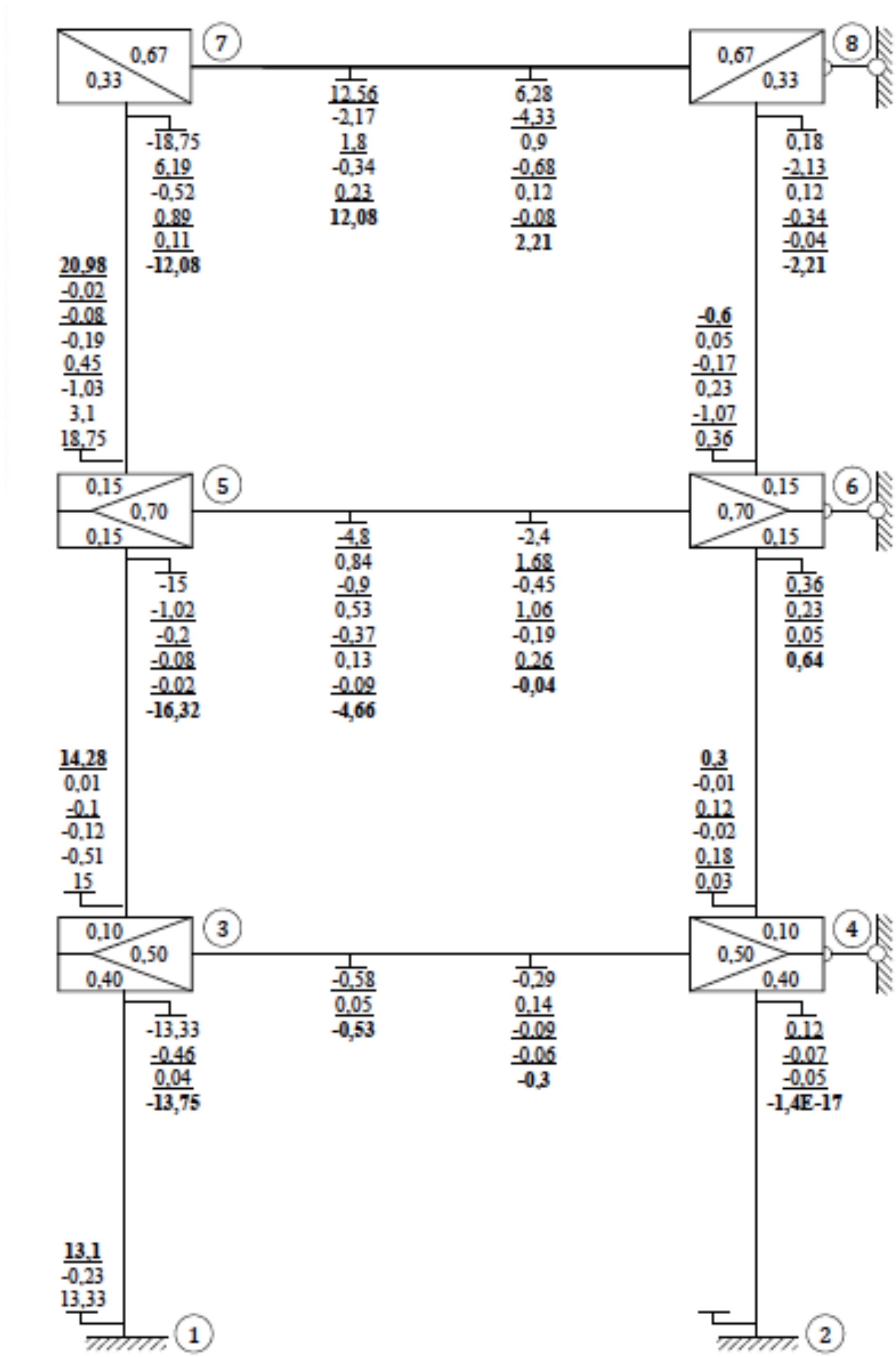
$\overline{M}_{1,3} = -\overline{M}_{3,1} = \frac{q_1 \cdot 4^2}{12} = 13{,}33\,kNm$

$\overline{M}_{3,5} = -\overline{M}_{5,3} = \frac{q_2 \cdot 3^2}{12} = 15{,}0\,kNm$

$\overline{M}_{5,7} = -\overline{M}_{7,5} = \frac{q_3 \cdot 3^2}{12} = 18{,}75\,kNm$

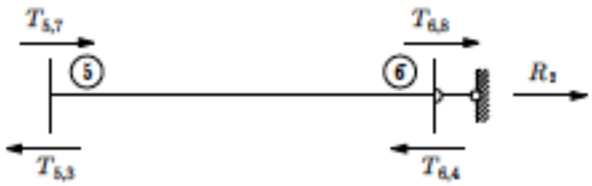
Raspodjela momenata $M^{(1)}$

Smjer obilaženja : 7 – 5 – 3 – 4- 6 - 8



Izračun reakcija u zamišljenim spojevima :

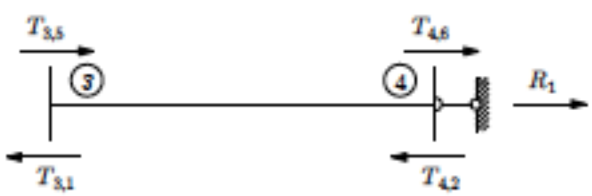
$$R_3^{(1)} = T_{7,5} + T_{8,6} = \frac{M_{7,5} + M_{5,7}}{3} - \frac{q_3 \cdot 3}{2} + \frac{M_{8,6} + M_{6,8}}{3} = -35{,}5\ kN$$



$$R_2^{(1)} = T_{5,3} + T_{6,4} - T_{5,7} - T_{6,8}$$

$$= \frac{M_{5,3} + M_{3,5}}{3} - \frac{q_2 \cdot 3}{2} + \frac{M_{6,4} + M_{4,6}}{3} - \frac{M_{7,5} + M_{5,7}}{3} + \frac{q_3 \cdot 3}{2} - \frac{M_{8,6} + M_{6,8}}{3}$$

$$= -69{,}9\ kN$$



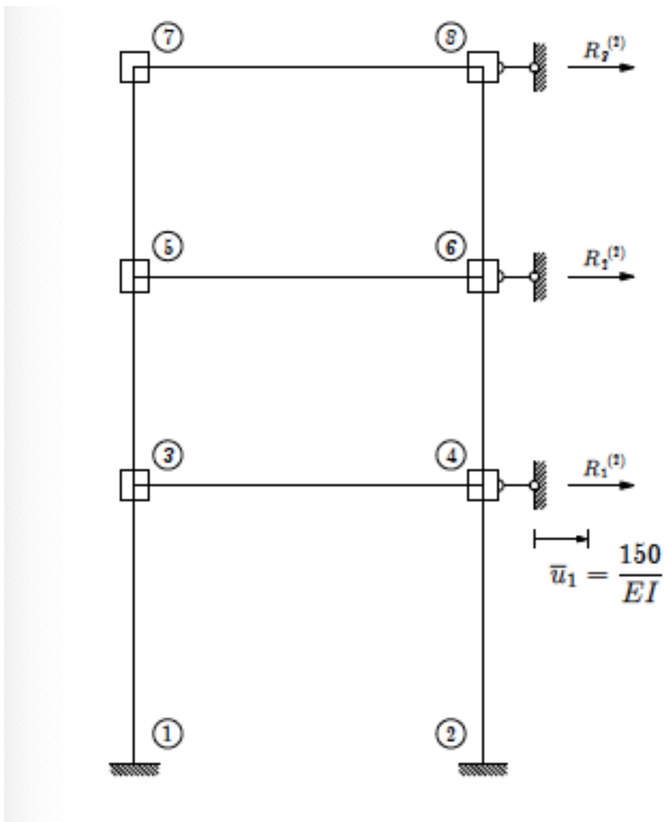
$$R_1^{(1)} = T_{3,1} + T_{4,2} - T_{3,5} - T_{4,6}$$

$$= \frac{M_{3,1} + M_{1,3}}{4} - \frac{q_1 \cdot 4}{2} + \frac{M_{4,2} + M_{2,4}}{4} - \frac{M_{5,3} + M_{3,5}}{3} - \frac{q_2 \cdot 3}{2} - \frac{M_{6,4} + M_{4,6}}{3}$$

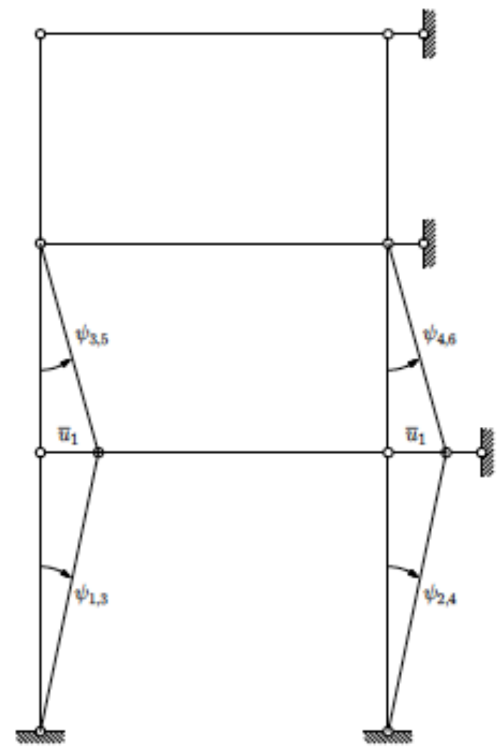
$$= -49{,}8\ kN$$

Drugi korak : Crossov postupak uslijed opterećenja pomakom $\overline{u_1}$:

osnovni sistem :



plan pomaka :



kutovi zaokreta. elemenata :

$$\psi_{1,3} = \psi_{2,4} = \frac{\overline{u}_1}{4} = -\frac{37{,}5}{EI}$$

$$\psi_{3,5} = \psi_{4,6} = \frac{\overline{u}_1}{3} = \frac{50}{EI}$$

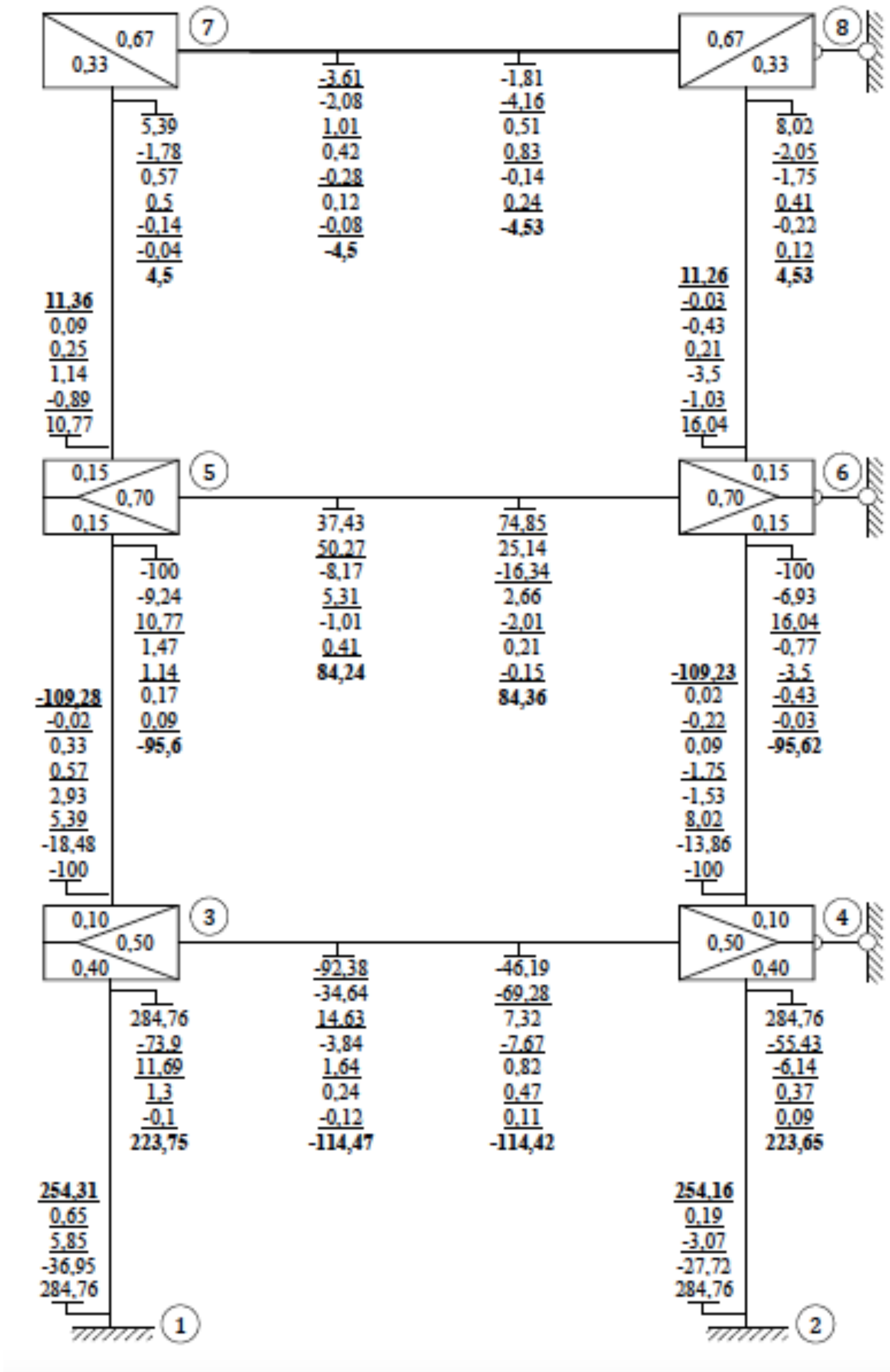
momenti upetosti :

$$\overline{M}_{1,3} = \overline{M}_{3,1} = \overline{M}_{2,4} = \overline{M}_{4,2} = \ -6\ k_{1,3}\psi_{1,3} = 284{,}76\ kNm$$

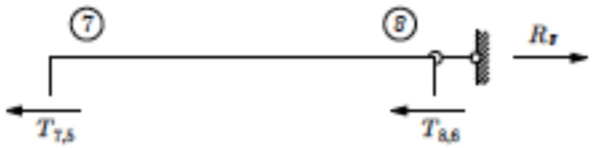
$$\overline{M}_{3,5} = \overline{M}_{5,3} = \overline{M}_{4,6} = \overline{M}_{6,4} = \ -6\ k_{3,5}\psi_{3,5} = -100\ kNm$$

Raspodjela momenata $M^{(2)}$:

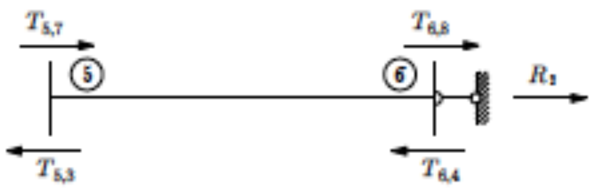
smjer obilaženja : 3 – 4 – 6 – 5 – 7- 8



Izračun reakcija u zamišljenim spojevima :



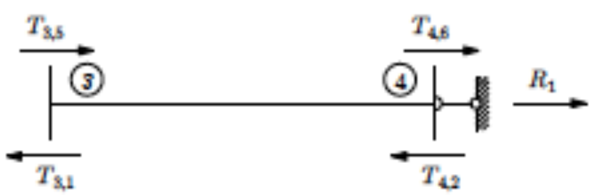
$$R_3^{(2)} = T_{7,5} + T_{8,6} = \frac{M_{7,5} + M_{5,7}}{3} + \frac{M_{8,6} + M_{6,8}}{3} = 10{,}5\ kN$$



$$R_2^{(2)} = T_{5,3} + T_{6,4} - T_{5,7} - T_{6,8}$$

$$= \frac{M_{5,3} + M_{3,5}}{3} + \frac{M_{6,4} + M_{4,6}}{3} - \frac{M_{7,5} + M_{5,7}}{3} - \frac{M_{8,6} + M_{6,8}}{3}$$

$$= -147{,}1\ kN$$



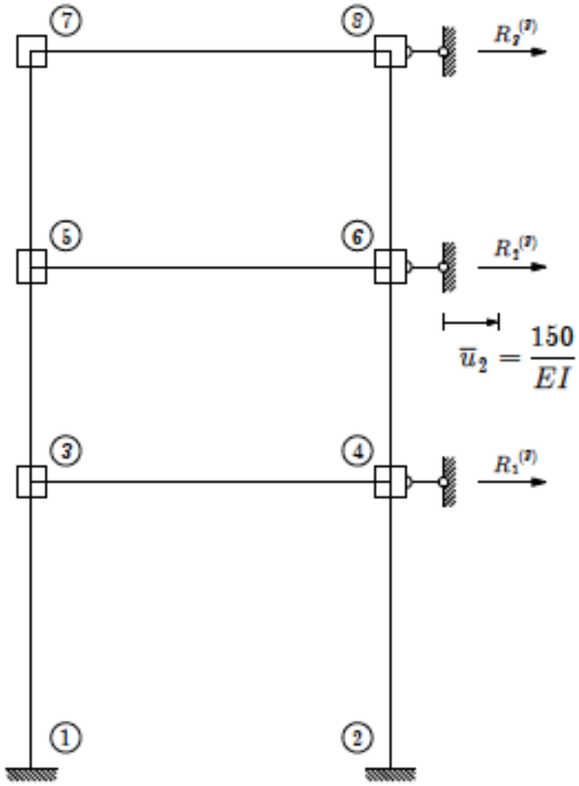
$$R_1^{(1)} = T_{3,1} + T_{4,2} - T_{3,5} - T_{4,6}$$

$$= \frac{M_{3,1} + M_{1,3}}{4} + \frac{M_{4,2} + M_{2,4}}{4} - \frac{M_{5,3} + M_{3,5}}{3} - \frac{M_{6,4} + M_{4,6}}{3}$$

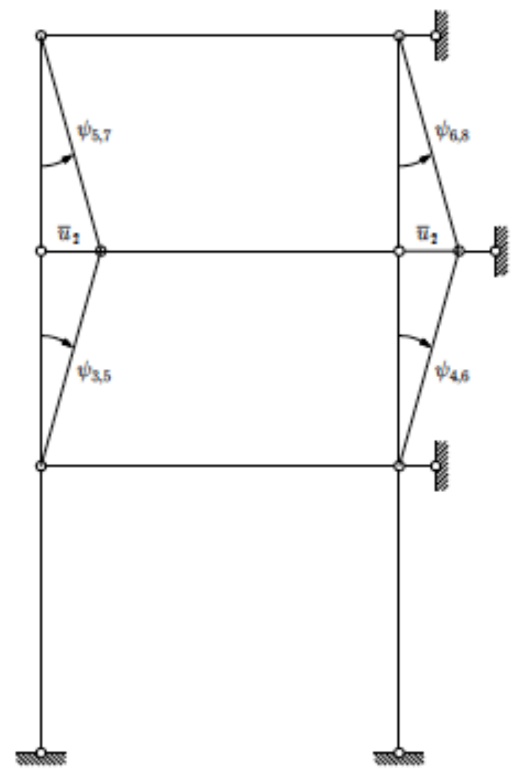
$$= 375{,}5\ kN$$

Treći korak : Crossov postupak uslijed opterećenja pomakom $\overline{u_2}$:

osnovni sistem :



plan pomaka :



kutovi zaokreta. elemenata :

$$\psi_{3,5} = \psi_{4,6} = \frac{\overline{u}_2}{3} = -\frac{50}{EI}$$

$$\psi_{5,7} = \psi_{6,8} = \frac{\overline{u}_2}{3} = \frac{50}{EI}$$

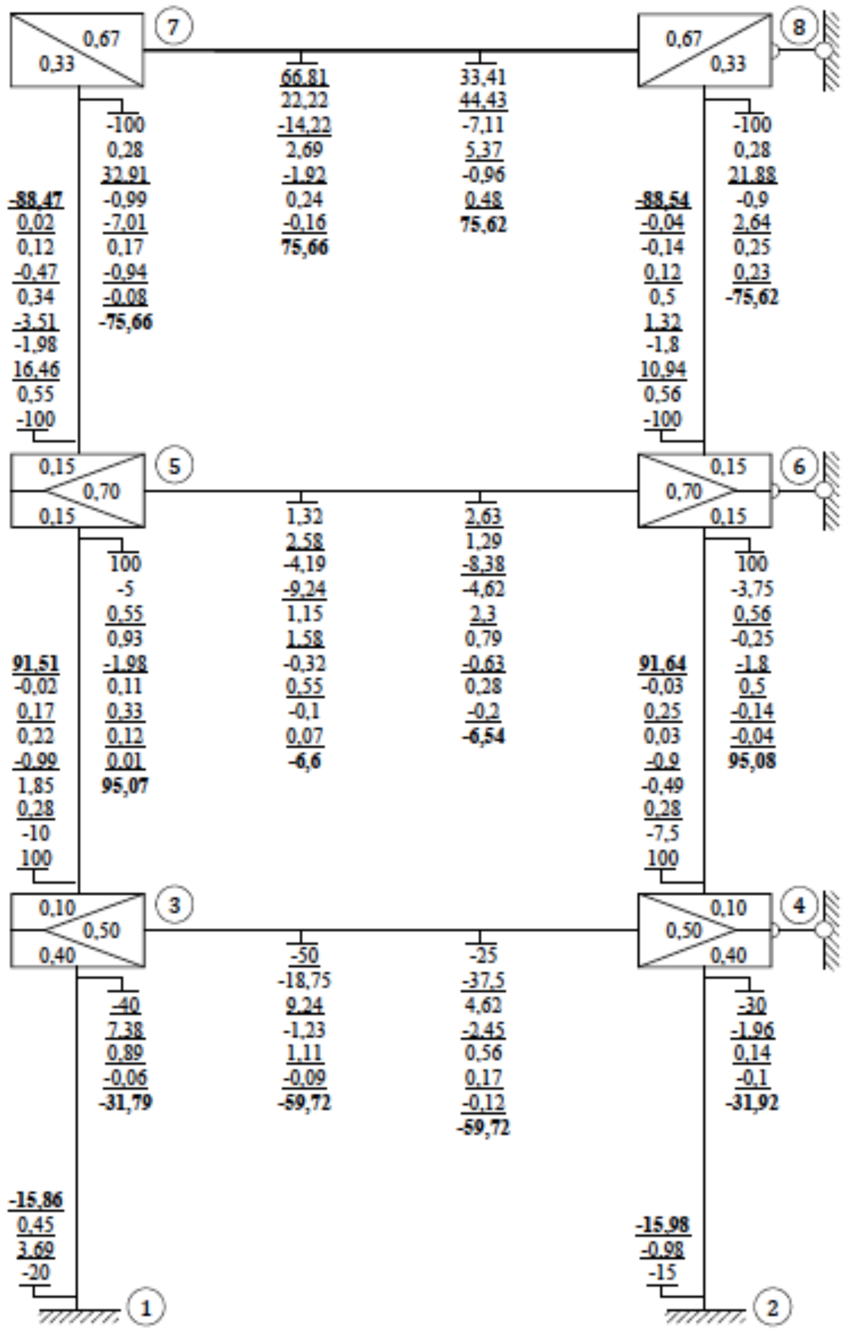
momenti upetosti :

$$\overline{M}_{3,5} = \overline{M}_{5,3} = \overline{M}_{4,6} = \overline{M}_{6,4} = -6\ k_{3,5}\psi_{3,5} = 100\ kNm$$

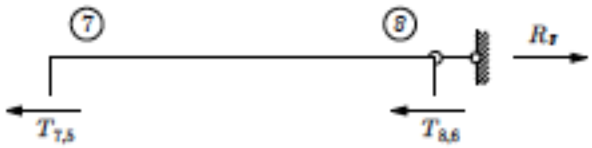
$$\overline{M}_{5,7} = \overline{M}_{7,5} = \overline{M}_{6,8} = \overline{M}_{8,6} = -6\ k_{5,7}\psi_{5,7} = -100\ kNm$$

Raspodjela momenata M $^{(3)}$:

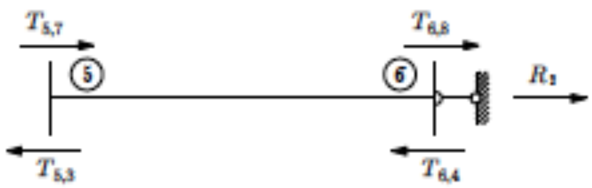
smjer obilaženja : 3 – 4 – 6 – 5 -7 - 8



Izračun reakcija u zamišljenim spojevima :



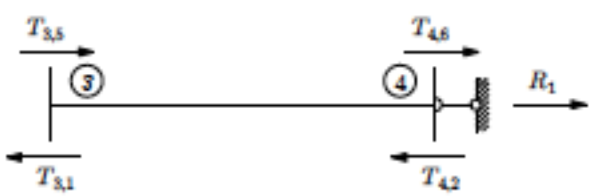
$$R_3^{(3)} = T_{7,5} + T_{8,6} = \frac{M_{7,5} + M_{5,7}}{3} + \frac{M_{8,6} + M_{6,8}}{3} = -109{,}4\ kN$$



$$R_2^{(3)} = T_{5,3} + T_{6,4} - T_{5,7} - T_{6,8}$$

$$= \frac{M_{5,3} + M_{3,5}}{3} + \frac{M_{6,4} + M_{4,6}}{3} - \frac{M_{7,5} + M_{5,7}}{3} - \frac{M_{8,6} + M_{6,8}}{3}$$

$$= 233{,}9\ kN$$



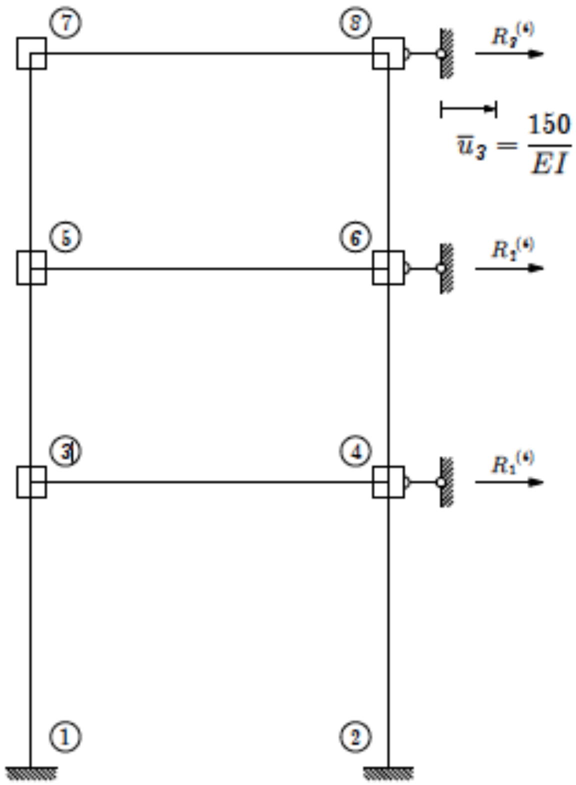
$$R_1^{(3)} = T_{3,1} + T_{4,2} - T_{3,5} - T_{4,6}$$

$$= \frac{M_{3,1} + M_{1,3}}{4} + \frac{M_{4,2} + M_{2,4}}{4} - \frac{M_{5,3} + M_{3,5}}{3} - \frac{M_{6,4} + M_{4,6}}{3}$$

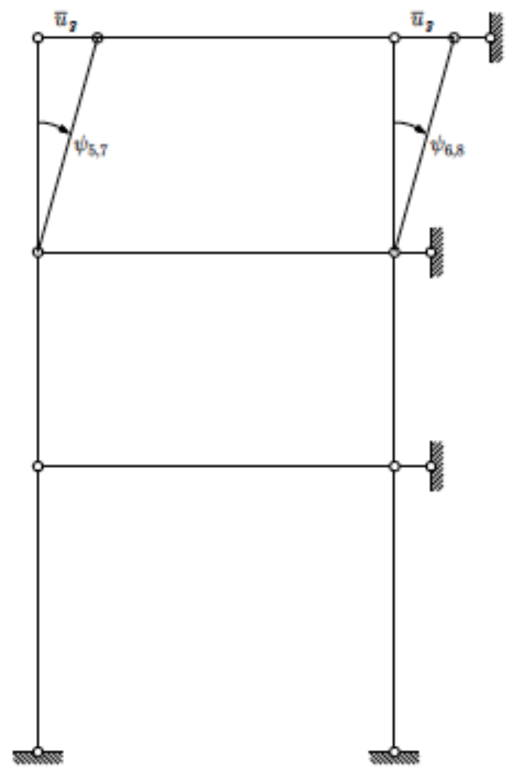
$$= -148{,}3\ kN$$

Četvrti korak : Crossov postupak uslijed opterećenja pomakom $\overline{u_3}$:

osnovni sistem :



plan pomaka :



kutovi zaokreta. elemenata :

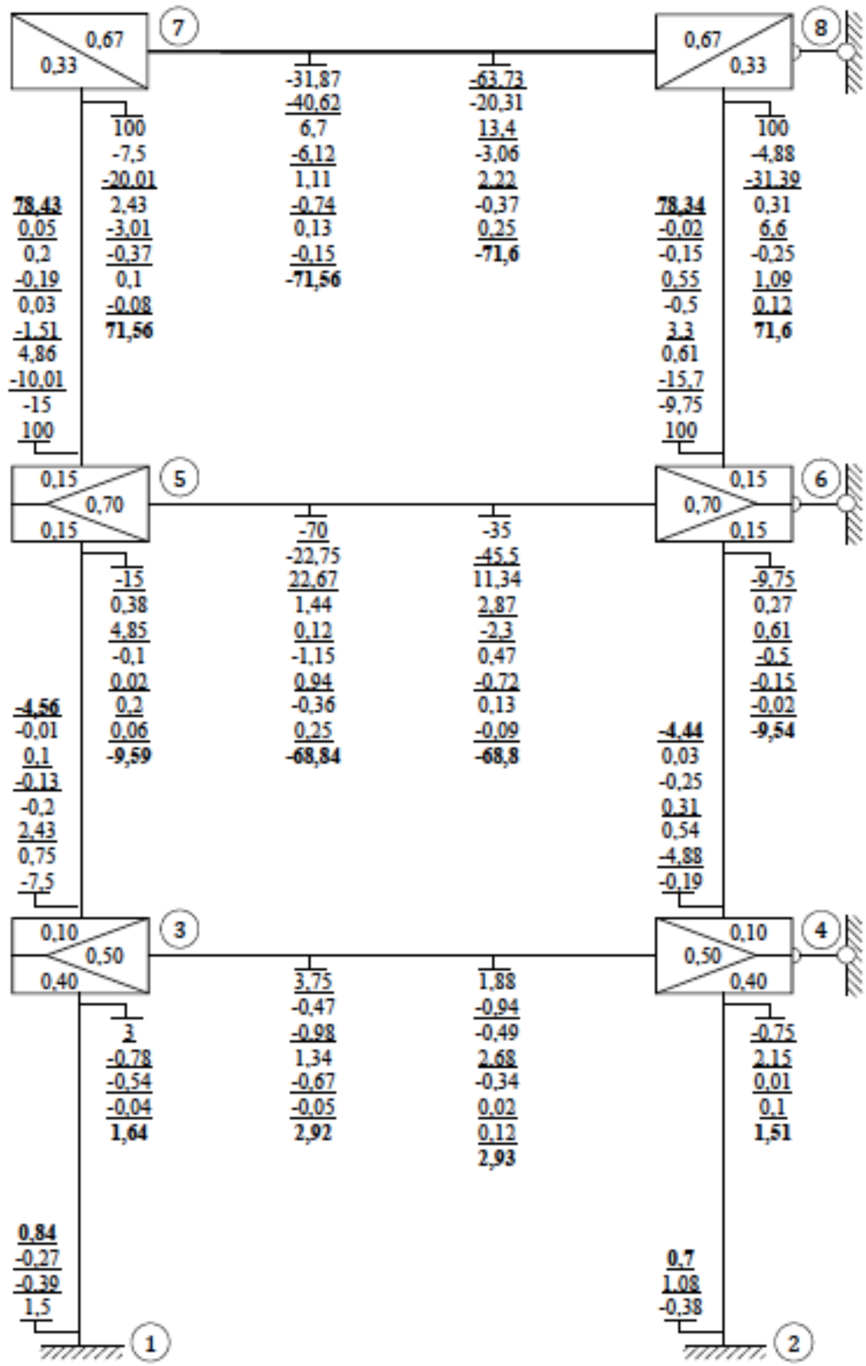
$$\psi_{5,7} = \psi_{6,8} = -\frac{\overline{u}_3}{3} = -\frac{50}{EI}$$

momenti upetosti :

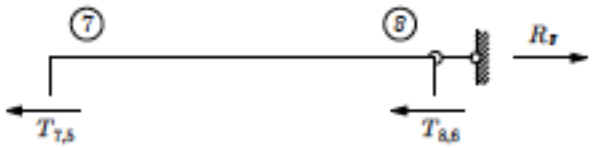
$$\overline{M}_{5,7} = \overline{M}_{7,5} = \overline{M}_{6,8} = \overline{M}_{8,6} = \ -6\ k_{5,7}\psi_{5,7} = -100\ kNm$$

Raspodjela momenata $M^{(4)}$:

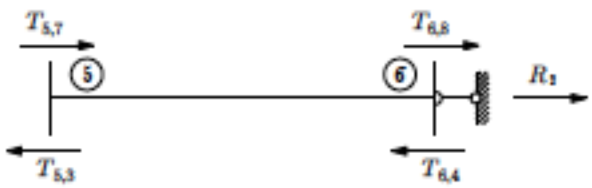
smjer obilaženja : 5 – 3 – 4 – 6 – 8 - 7



Izračun reakcija u zamišljenim spojevima :



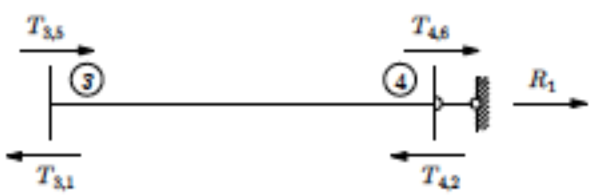
$$R_3{}^{(4)} = T_{7,5} + T_{8,6} = \frac{M_{7,5} + M_{5,7}}{3} + \frac{M_{8,6} + M_{6,8}}{3} = 100\ kN$$



$$R_2{}^{(4)} = T_{5,3} + T_{6,4} - T_{5,7} - T_{6,8}$$

$$= \frac{M_{5,3} + M_{3,5}}{3} + \frac{M_{6,4} + M_{4,6}}{3} - \frac{M_{7,5} + M_{5,7}}{3} - \frac{M_{8,6} + M_{6,8}}{3}$$

$$= -109{,}3\ kN$$



$$R_1{}^{(4)} = T_{3,1} + T_{4,2} - T_{3,5} - T_{4,6}$$

$$= \frac{M_{3,1} + M_{1,3}}{4} + \frac{M_{4,2} + M_{2,4}}{4} - \frac{M_{5,3} + M_{3,5}}{3} - \frac{M_{6,4} + M_{4,6}}{3}$$

$$= 10{,}5\ kN$$

Jednadžbe ravnoteže :

$R_1{}^{(1)} + R_1{}^{(2)} \cdot \beta_1 + R_1{}^{(3)} \cdot \beta_2 + R_1{}^{(4)} \cdot \beta_3 = 0$

$R_2{}^{(1)} + R_2{}^{(2)} \cdot \beta_1 + R_2{}^{(3)} \cdot \beta_2 + R_2{}^{(4)} \cdot \beta_3 = 0$

$R_3{}^{(1)} + R_3{}^{(2)} \cdot \beta_1 + R_3{}^{(3)} \cdot \beta_2 + R_3{}^{(4)} \cdot \beta_3 = 0$

$-49{,}8 + 375{,}5 \cdot \beta_1 - 148{,}3 \cdot \beta_2 + 10{,}5 \cdot \beta_3 = 0$

$-69{,}9 + 147{,}1 \cdot \beta_1 + 233{,}9 \cdot \beta_2 - 109{,}3 \cdot \beta_3 = 0$

$-35{,}5 + 10{,}5 \cdot \beta_1 - 109{,}4 \cdot \beta_2 + 100 \cdot \beta_3 = 0$

$\beta_1 = 0{,}83053686$

$\beta_2 = 1{,}93606182$

$\beta_3 = 2{,}38584526$

Konačni momenti savijanja :

$M = M^{(1)} + M^{(2)}\,\beta_1 + M^{(3)}\,\beta_2 + M^{(4)}\,\beta_3 = 0$

$M_{1,3} = 195{,}6\ kNm$

$M_{3,1} = 114{,}4\ kNm$

$M_{3,5} = 89{,}8\ kNm$

$M_{5,3} = 65{,}5\ kNm$

$M_{5,7} = 46{,}2\ kNm$

$M_{7,5} = 15{,}9\ kNm$

$M_{3,4} = -204{,}2\ kNm$

$M_{4,3} = -204{,}0\ kNm$

$M_{5,6} = -111{,}7\ kNm$ $M_{4,2} = 127{,}6\ kNm$

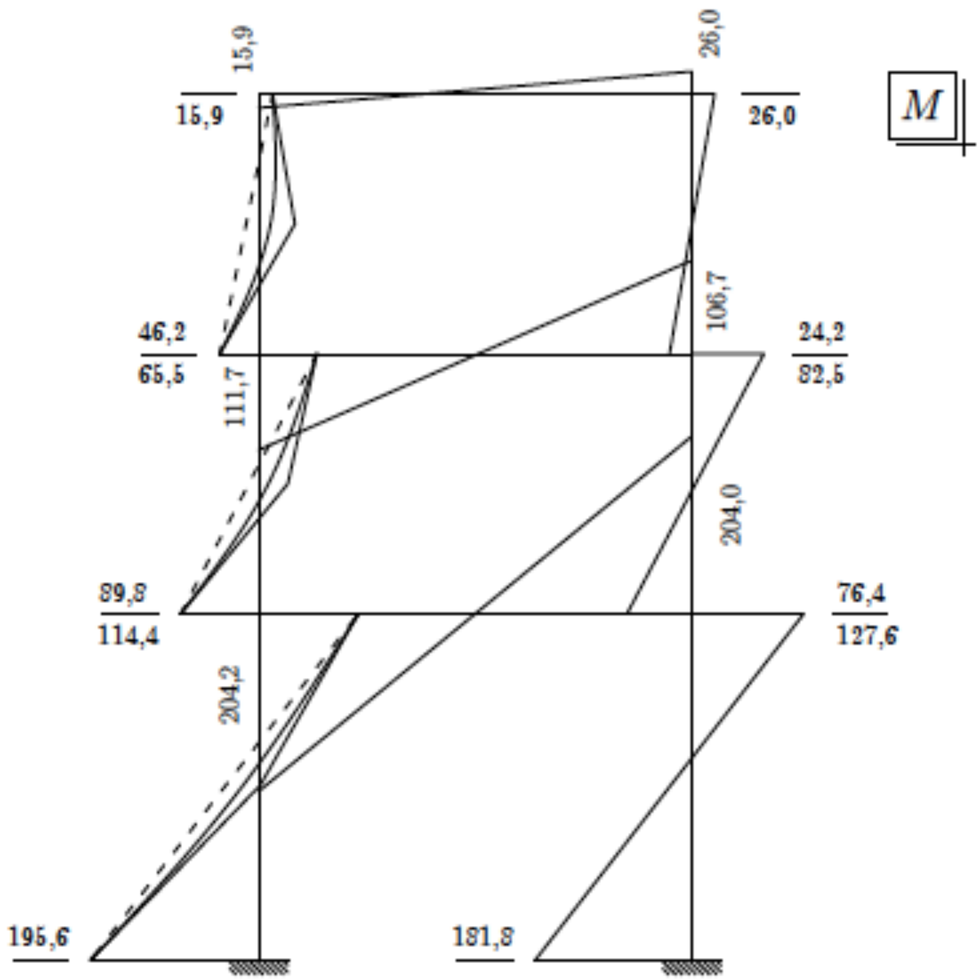
$M_{6,5} = -106{,}7\ kNm$ $M_{4,6} = 76{,}4\ kNm$

$M_{7,8} = -15{,}9\ kNm$ $M_{6,4} = 82{,}5\ kNm$

$M_{8,7} = -26{,}0\ kNm$ $M_{6,8} = 24{,}2\ kNm$

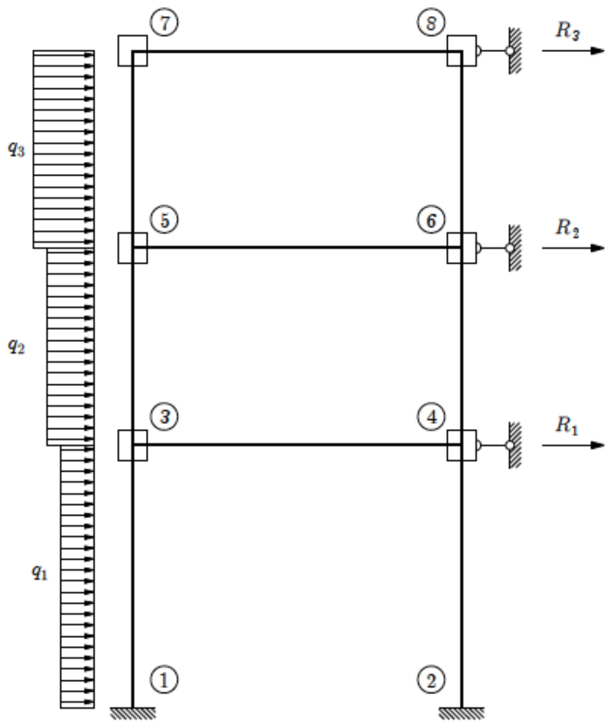
$M_{2,4} = 181{,}8\ kNm$ $M_{8,6} = 26{,}0\ kNm$

Konačni dijagram momenata :



4.2. Postupak Werner - Csonke

Prvi korak postupka Werner-Csonke identičan je Crossovom postupku, što znači da rješavamo pridržani sistem pod zadanim djelovanjem te proračunavamo reakcije u dodanim vezama. Iz toga dobivamo sljedeće :



Krutosti štapnih elemenata :

$$k_{3,4} = k_{4,3} = k_{5,6} = k_{6,5} = 8EI\ /5 = 1{,}6\ EI$$

$$k_{7,8} = k_{8,7} = 3{,}375EI\ /5 = 0{,}675\ EI$$

$$k_{1,3} = k_{3,1} = k_{2,4} = k_{4,2} = 5{,}0625EI\ /4 = 1{,}265625\ EI$$

$$k_{3,5} = k_{5,3} = k_{4,6} = k_{6,4} = k_{5,7} = k_{7,5} = k_{6,8} = k_{8,6} = EI\ /3$$

Razdijelni koeficijenti :

$a_{3,1} = 4k_{3,1} = 5{,}0625\ EI \rightarrow \mu_{3,1} = a_{3,1}/k_3 = 0{,}40 = \mu_{4,2}$

$a_{3,4} = 4k_{3,4} = 6{,}4\ EI \rightarrow \mu_{3,4} = a_{3,4}/k_3 = 0{,}50 = \mu_{4,3}$

$a_{3,5} = 4k_{3,5} = 4EI/3 \rightarrow \mu_{3,5} = a_{3,5}/k_3 = 0{,}10 = \mu_{4,6}$

$$k_3 = \sum a_{3,i} = 12{,}7858E$$

$a_{5,3} = 4k_{5,3} = 4EI/3 \rightarrow \mu_{5,3} = a_{5,3}/k_5 = 0{,}15 = \mu_{6,4}$

$a_{5,6} = 4k_{5,6} = 6{,}4\ EI \rightarrow \mu_{5,6} = a_{5,6}/k_5 = 0{,}70 = \mu_{6,5}$

$a_{5,7} = 4k_{5,7} = 4EI/3 \rightarrow \mu_{5,7} = a_{5,7}/k_5 = 0{,}15 = \mu_{6,8}$

$$k_5 = \sum a_{5,i} = 9{,}06667EI$$

$a_{7,5} = 4k_{7,5} = 4EI/3 \rightarrow \mu_{7,5} = a_{7,5}/k_5 = 0{,}33 = \mu_{8,6}$

$a_{7,8} = 4k_{7,8} = 2{,}7\ EI \rightarrow \mu_{7,8} = a_{7,8}/k_5 = 0{,}67 = \mu_{8,7}$

$$k_7 = \sum a_{7,i} = 4{,}03333EI$$

Momenti upetosti :

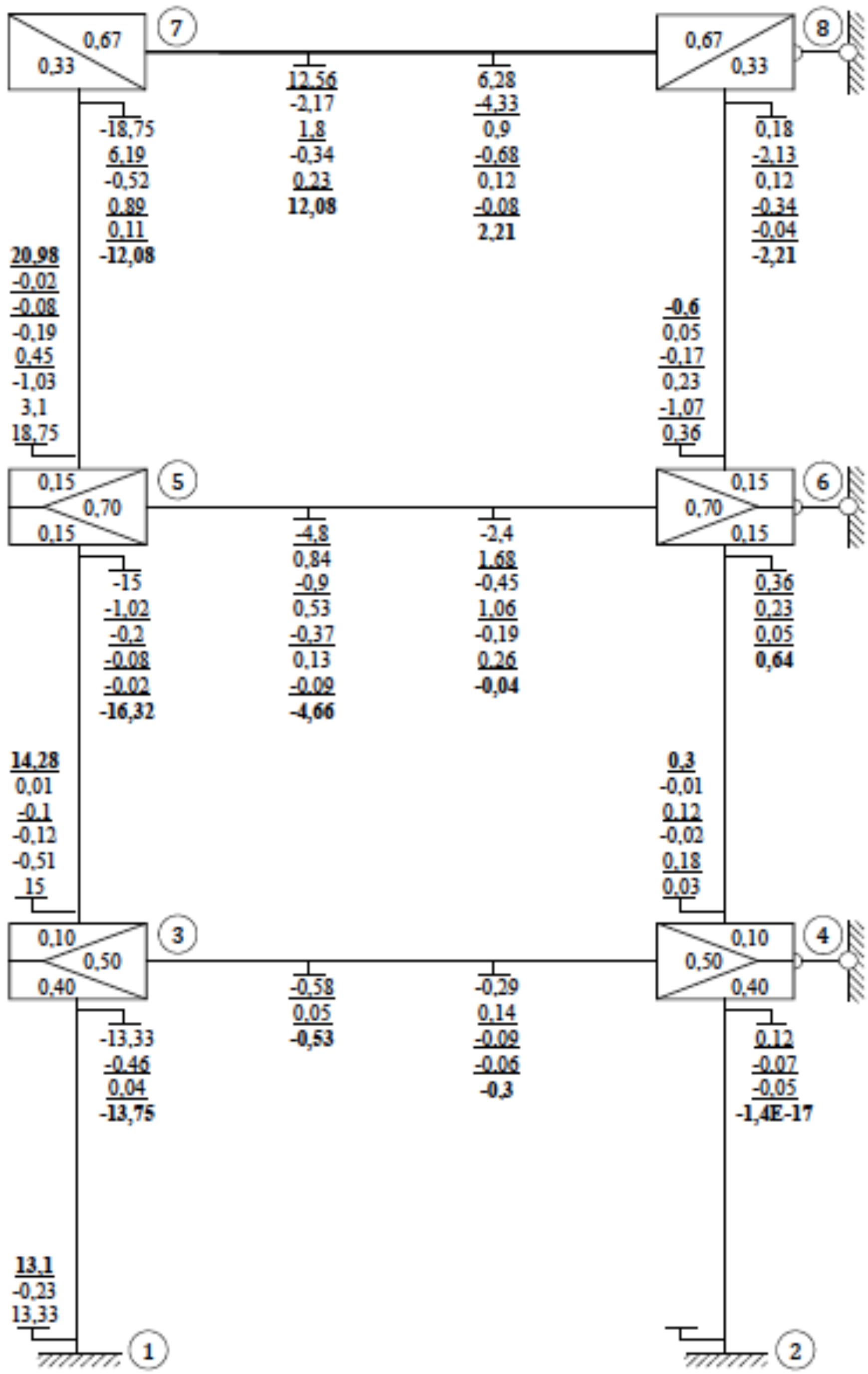
$$\bar{M}_{1,3} = -\bar{M}_{3,1} = \frac{q_1 \cdot 4^2}{12} = 13{,}33\ kNm$$

$$\bar{M}_{3,5} = -\bar{M}_{5,3} = \frac{q_2 \cdot 3^2}{12} = 15{,}0\ kNm$$

$$\bar{M}_{5,7} = -\bar{M}_{7,5} = \frac{q_3 \cdot 3^2}{12} = 18{,}75\ kNm$$

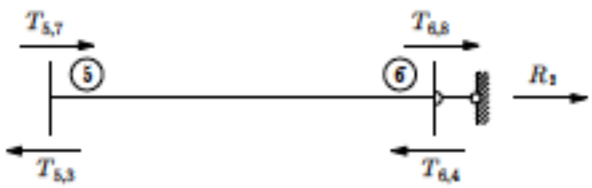
Raspodjela momenata M^{CR} :

smjer obilaženja čvorova : 7 – 5 – 3 – 4 – 6 - 8



Izračun reakcija u zamišljenim spojevima :

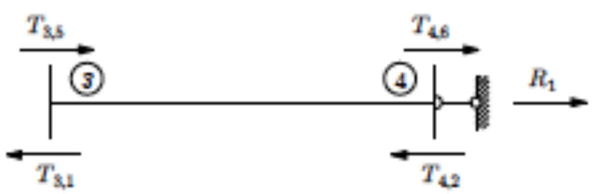
$$R_3 \; = \; T_{7,5} + T_{8,6} = \frac{M_{7,5} + M_{5,7}}{3} - \frac{q_3 \cdot 3}{2} + \frac{M_{8,6} + M_{6,8}}{3} = -35{,}5 \; kN$$



$$R_2 \; = \; T_{5,3} + T_{6,4} - T_{5,7} - T_{6,8}$$

$$= \frac{M_{5,3} + M_{3,5}}{3} - \frac{q_2 \cdot 3}{2} + \frac{M_{6,4} + M_{4,6}}{3} - \frac{M_{7,5} + M_{5,7}}{3} - \frac{q_3 \cdot 3}{2} - \frac{M_{8,6} + M_{6,8}}{3}$$

$$= -69{,}9 \; kN$$



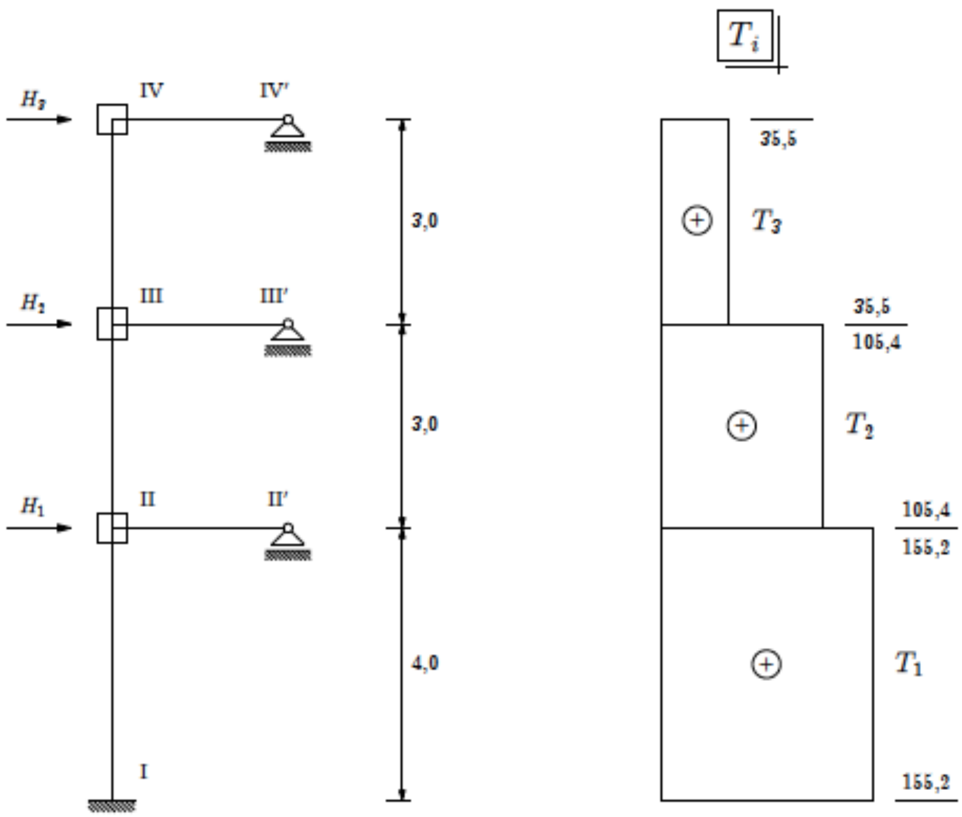
$$R_1 \; = \; T_{3,1} + T_{4,2} - T_{3,5} - T_{4,6}$$

$$= \frac{M_{3,1} + M_{1,3}}{4} - \frac{q_1 \cdot 4}{2} + \frac{M_{4,2} + M_{2,4}}{4} - \frac{M_{5,3} + M_{3,5}}{3} - \frac{q_2 \cdot 3}{2} - \frac{M_{6,4} + M_{4,6}}{3}$$

$$= -49{,}8 \; kN$$

Drugi korak postupka Werner – Csonke : pomični zamjenski sistem

osnovni sistem :



$H_1 = -R_1 = 49{,}8\ kN$

$H_2 = -R_2 = 69{,}9\ kN$

$H_3 = -R_3 = 35{,}5\ kN$

Momenti upetosti :

$\bar{M}_{I,II} = \bar{M}_{II,I} = \frac{T_1 \cdot 4}{2} = 310{,}4\ kNm$

$\bar{M}_{II,III} = \bar{M}_{III,II} = \frac{T_2 \cdot 3}{2} = 158{,}1\ kNm$

$\bar{M}_{III,IV} = \bar{M}_{IV,III} = \frac{T_3 \cdot 3}{2} = 53{,}25\ kNm$

Razdijelni koeficijenti :

$a_{II,I} = k_{3,1} + k_{4,2} = 2{,}53125\ EI \rightarrow \mu_{II,I} = a_{II,I}/k_{II} = 0{,}11$

$a_{II,II'} = 12k_{3,4} = 19{,}2\ EI \rightarrow \mu_{II,II'} = a_{II,II'}/k_{II} = 0{,}86$

$a_{II,III} = k_{3,5} + k_{4,6} = 4EI/3 \rightarrow \mu_{II,III} = a_{II,III}/k_{II} = 0{,}03$

$k_{II} = \sum a_{II,i} = 22{,}3979EI$

$a_{III,II} = k_{5,3} + k_{6,4} = 2EI/3 \rightarrow \mu_{III,II} = a_{III,II}/k_{III} = 0{,}03$

$a_{III,III'} = 12k_{5,6} = 19{,}2\ EI \rightarrow \mu_{III,III'} = a_{III,III'}/k_{III} = 0{,}94$

$a_{III,IV} = k_{5,7} + k_{6,8} = 2EI/3 \rightarrow \mu_{III,IV} = a_{III,IV}/k_{III} = 0{,}03$

$k_{III} = \sum a_{III,i} = 20{,}5333EI$

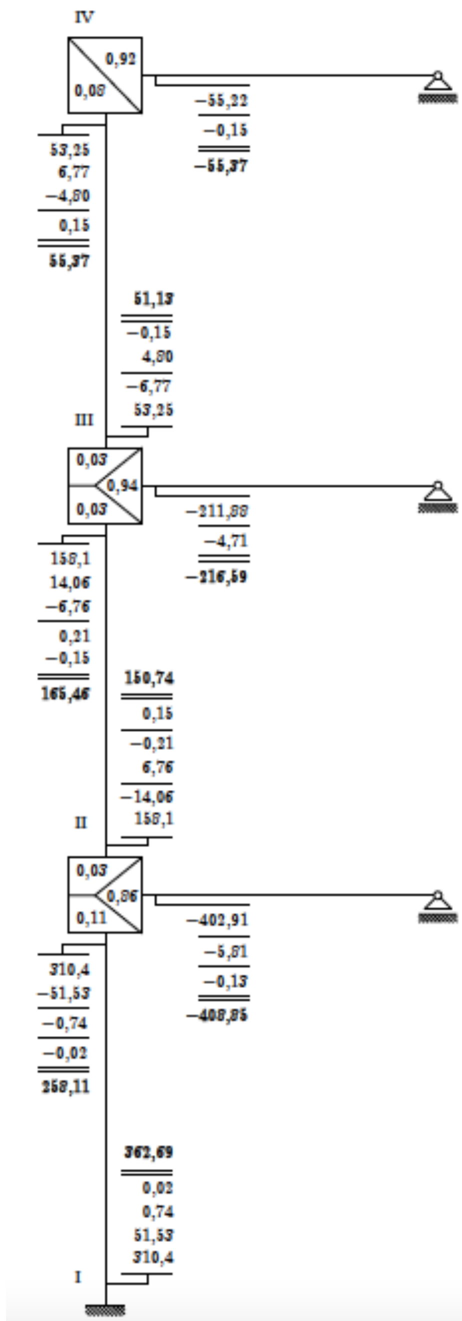
$a_{IV,III} = k_{7,5} + k_{8,6} = 2EI/3 \rightarrow \mu_{IV,III} = a_{IV,III}/k_{IV} = 0{,}08$

$a_{IV,IV'} = 12k_{7,8} = 8{,}1\ EI \rightarrow \mu_{IV,IV'} = a_{IV,IV'}/k_{IV} = 0{,}92$

$k_{IV} = \sum a_{IV,i} = 8{,}7667EI$

Raspodjela momenata M^{WC} :

smjer obilaženja čvorova : II – III – IV



Konačni momenti savijanja :

Zadani sistem je simetričan okvir sa jednim poljem što znači da nema daljnjeg postupka rješavanja već konačne vrijednosti možemo odmah izračunati po formuli $M = M^{CR} + M^{WC}/2$.

$M_{1,3} = 13{,}06 + 362{,}45/2 = 194{,}4\ kNm$

$M_{2,4} = 0{,}07 + 362{,}45/2 = 181{,}3\ kNm$

$M_{3,1} = -13{,}87 + 257{,}95/2 = 115{,}3\ kNm$

$M_{4,2} = 0{,}09 + 257{,}95/2 = 129{,}1\ kNm$

$M_{3,5} = 14{,}55 + 150{,}5/2 = 89{,}6\ kNm$

$M_{4,6} = 0{,}14 + 150{,}5/2 = 75{,}7\ kNm$

$M_{5,3} = -15{,}79 + 165{,}1/2 = 66{,}4\ kNm$

$M_{6,4} = 0{,}44 + 165{,}1/2 = 83{,}4\ kNm$

$M_{5,7} = 18{,}38 + 52{,}4/2 = 46{,}5\ kNm$

$M_{6,8} = -0{,}73 + 52{,}4/2 = 25{,}0\ kNm$

$M_{7,5} = -11{,}98 + 56{,}5/2 = 15{,}6\ kNm$

$M_{8,6} = -2{,}26 + 56{,}5/2 = 25{,}5\ kNm$

$M_{3,4} = -0{,}68 - 408{,}45/2 = -204{,}9\ kNm$

$M_{4,3} = -0{,}23 - 408{,}45/2 = -204{,}8\ kNm$

$M_{5,6} = 2{,}59 - 217{,}5/2 = -112{,}9\ kNm$

$M_{6,5} = 0{,}29 - 217{,}5/2 = -108{,}4\ kNm$

$M_{7,8} = 11{,}98 - 56{,}5/2 = -15{,}6\ kNm$

$M_{8,7} = 2{,}26 - 56{,}5/2 = -25{,}5\ kNm$

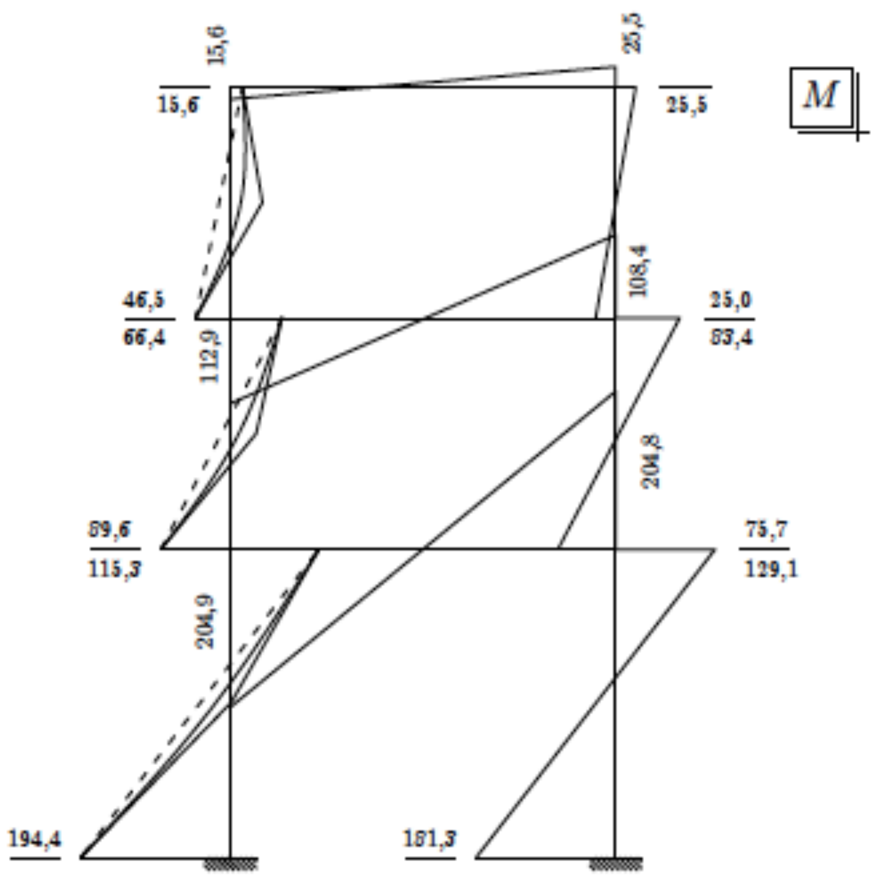
Provjesi parabola :

$$M(q1) = \frac{q_1.4^2}{8} = 20\ kNm$$

$$M(q2) = \frac{q_2.4^2}{8} = 22{,}5\ kNm$$

$$M(q3) = \frac{q_3.4^2}{8} = 28{,}1\ kNm$$

Konačni dijagram momenata :



5. ZAKLJUČAK

Nakon provedene analize postupaka Crossa i Werner – Csonke na zadanom primjeru okvira vidljivo je da je postupak Werner – Csonke znatno jednostavniji i kraći zbog korištenja zamjenskog poluokvira umjesto računanja i iteriranja svakog koraka zasebno što bitno ubrzava proces uravnotežavanja samog okvira. No zbog korištenja zamjenskog poluokvira kod ovog procesa treba uvelike obratiti pažnju na računanje koeficijenata krutosti i razdijelnih koeficijenata krutosti, raspodjelu momenata s poluokvira na okvir, računanje poprečnih sila okvira i razlika među njima te uvrštavanja popravnog koeficijenta. Popravni koeficijent se može koristiti jedino u slučaju kada su razlike među horizontalnim silama istog predznaka.

Postupak Crossa je uvelike složeniji te zahtjeva više vremena za proračun, ali postupak računanja ovim postupkom je rutinski te je vjerojatnost za pogrešku bitno smanjena. Ovaj postupak je na ovom konkretnom okviru sveden na četiri koraka, od kojih je prvi proces uravnotežavanje momenata uzrokovanih djelovanjem vanjskih opterećenja. Dok kod preostala tri koraka također provodimo uravnotežavanje momenata samo što su u tim procesima momenti upetosti dobiveni uslijed djelovanja unutarnjih pomaka okvira.

POPIS LITERATURE

[1] M. Anđelić, Građevna statika 2, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2005.god.

[2] K. Fresl, Građevna statika 2, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2017.god, kolegij Građevna statika 2, Bilješke i skice s predavanja, http://master.grad.hr/nastava/gs/gs2/gs2.pdf

POPIS SLIKA

SLIKA 1 : URAVNOTEŽAVANJE ČVORA (IZVOR : [2]) 6
SLIKA 2 : URAVNOTEŽAVANJE ČVORA PRIDRUŽENIM MOMENTIMA NA ELEMENTIMA (IZVOR : [2]) 6
SLIKA 3 : PRIJENOSNI KOEFICIJENTI ZA OBOSTRANO UPETU, JEDNOSTRANO UPETU, I GREDU SA UPETO KLIZNIM LEŽAJEM NA JEDNOM KRAJU 7
SLIKA 4 : SIMETRIČNI VIŠEETAŽNI OKVIR S JEDNIM RASPONOM (IZVOR : [2]) 9
SLIKA 5 : OKVIR RASTAVLJEN NA SIMETRIČNI I ANTIMETRIČNI DIO (IZVOR : [2]) 9
SLIKA 6 : OKVIR RASTAVLJEN NA POLUOKVIR „PREKLAPANJEM“ (IZVOR : [2]) 14