

# Analiza utjecaja slijeganja oslonaca kontinuiranih greda na iznose reakcija i unutarnje sile

---

**Krešić, Fran**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:125180>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-13**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Fran Krešić

**Analiza utjecaja slijeganja oslonaca  
kontinuiranih greda na iznose reakcija i  
unutarnje sile**

ZAVRŠNI ISPIT

Zagreb, 2024.



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Fran Krešić

**Analiza utjecaja slijeganja oslonaca  
kontinuiranih greda na iznose reakcija i  
unutarnje sile**

ZAVRŠNI ISPIT

Petra Gidak

Zagreb, 2024.



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Fran Krešić

**Analysis of displacements of supports of  
continuous beams on the value of reactions  
and internal forces**

FINAL EXAM

Petra Gidak

Zagreb, 2024.



Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet



## OBRAZAC 1

## IZBOR KOLEGIJA I MENTORA ZA POLAGANJE ZAVRŠNOG ISPITA

Ime i prezime studenta:

JMBAG:

Akadska godina upisa studija:

Završni ispit želio/željela bih polagati iz kolegija i kod mentora:

Redni broj	Kolegij	Mentor
1.	TEHNOLOGIJA GRAĐENJA NISKOGRADNJA	Prof. dr. sc. Ivica Završki
2.	ORGANIZACIJA GRAĐENJA	Prof. dr. sc. Mladen Vukomanović
3.	TEHNOLOGIJA GRAĐENJA NISKOGRADNJA	Doc. dr. sc. Matej Mihić

Datum:

Potpis studenta:

Građevinski fakultet  
Fra Andrije Kačića-Miošića 26, HR-10000 Zagreb, OIB: 62924153420  
TEL.: +385 (0) 1 4639 115, FAKS: +385 (0) 1 4828 051  
www.grad.unizg.hr



Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet



OBRAZAC 2

TEMA ZAVRŠNOG ISPITA

Ime i prezime studenta: Fran Krešić  
 IMBAG: 0082068270  
 Završni ispit iz kolegija: Građevna statika 1

Naslov teme završnog ispita (HR): Analiza utjecaja slijeganja oslonaca kontinuiranih greda na iznose reakcija i unutarnje sile

Naslov teme završnog ispita (ENG): Analysis of displacements of supports of continuous beams on the value of reactions and internal forces

Opis teme završnog ispita:

Na primjerima kontinuiranih greda primjenom metode sila analizirat će se utjecaj prisilnih pomaka (slijeganja) oslonaca na iznose reakcija i unutarnje sile.

Datum: 8. travnja 2024.

Mentor: Petra Gidak

Potpis mentora: *P. Gidak*

Komentor:



Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet



**OBRAZAC 3**

**POTVRDA O POZITIVNOJ OCJENI PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA**

Student/ica :

Fran Krešić <small>(ime i prezime)</small>	0082068270 <small>(JMBAG)</small>
---	--------------------------------------

zadovoljio/la je na pisanom dijelu završnog ispita pod naslovom:

Analiza utjecaja slijeganja oslonaca kontinuiranih greda na iznose reakcija i unutarnje sile  
(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

Analysis of displacements of supports of continuous beams on the value of reactions and internal forces  
(Naslov teme završnog ispita na engleskom jeziku)

i predlaže se provođenje daljnjeg postupka u skladu s Pravilnikom o završnom ispitu i diplomskom radu Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta.

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu znanstvenog projekta: (upisati ako je primjenjivo)

(Naziv projekta, šifra projekta, voditelj projekta)

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu stručne prakse na Fakultetu: (upisati ako je primjenjivo)

(ime poslodavca, datum početka i kraja stručne prakse)

Datum: 17. rujna 2024.

Mentor: Petra Gidak

Potpis mentora:

Komentor:



**OBRAZAC 4**

**IZVJEŠĆE MENTORA O PROVEDENOJ PROVJERI IZVORNOSTI  
PISANOG DIJELA ZAVRŠNOGA ISPITA**



Ime i prezime studenta:	Fran Krešić
JMBAG:	0082068270
Naslov teme završnog ispita (HR):	Analiza utjecaja odjevanja oslonaca kontinuiranih greda na iznose reakcija i ustajanje sile
Ukupna podudarnost:	4 %
Izvori s interneta:	3 %
Publikacije:	1 %
Studentski radovi:	3 %

Ime i prezime mentora:

Petra Gidak

Mišljenje mentora (rad (ne)zadovoljava uvjete izvornosti) s obrazloženjem:

Rad zadovoljava uvjete izvornosti.

Datum: 17. rujna 2024.

Potpis mentora: *P. Gidak*





Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet



OBRAZAC 5

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja :

Fran Krešić, 0082068270

(Ime i prezime, JMBAG)

student/ica Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta ovim putem izjavljujem da je moj pisani dio završnog ispita pod naslovom:

Analiza utjecaja slijeganja oslonaca kontinuiranih greda na iznose reakcija i unutarnje sile

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

izvorni rezultat mogega rada te da se u izradi istoga nisam koristio/la drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

Datum:

17.09.2024.

Potpis:

*FKJ*



Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet



**OBRAZAC 6**

**IZJAVA O ODOBRENJU ZA POHRANU I OBJAVU PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA**

Ja :

**Fran Krešić, 0082068270**

(Ime i prezime, OIB)

ovom izjavom potvrđujem da sam autor/ica predanog pisanog dijela završnog ispita i da sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti odgovara sadržaju dovršenog i obranjenog pisanog dijela završnog ispita pod naslovom:

**Analiza utjecaja slijeganja oslonaca kontinuiranih greda na iznose reakcija i unutarnje sile**

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

koji je izrađen na sveučilišnom prijediplomskom studiju Građevinarstvo Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta pod mentorstvom:

**Petra Gidak**

(Ime i prezime mentora)

i obranjen dana:

**24.09.2024.**

(Datum obrane)

Suglasan/suglasna sam da pisani dio završnog ispita bude javno dostupan, te da se trajno pohrani u digitalnom repozitoriju Građevinskog fakulteta, repozitoriju Sveučilišta u Zagrebu te nacionalnom repozitoriju.

Datum:

**17.09.2024.**

Potpis:

*FKJ.*

Građevinski fakultet  
Fra Andrije Kačića-Miošića 26, HR-10000 Zagreb, OIB: 62924153420  
TEL.: +385 (0) 1 4639 115, FAKS: +385 (0) 1 4828 051  
www.grad.unizg.hr

## ZAHVALE

Zahvaljujem se svojoj mentorici, dr. sc. Petri Gidak, na stručnoj podršci, savjetima i strpljenju tijekom izrade ovog završnog rada. Njezino vodstvo i stručnost bili su od neprocjenjive važnosti za uspješan završetak rada.

Također se zahvaljujem svim profesorima Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu koji su mi tijekom studija prenijeli svoje znanje i vještine.

Posebnu zahvalnost dugujem svojoj obitelji i prijateljima na neizmjerne podršci, motivaciji i razumijevanju kroz cijeli studij.

## SAŽETAK

Ovaj završni rad bavi se analizom utjecaja slijeganja oslonaca na reakcije i unutarnje sile u kontinuiranim gredama, primjenom metode sila. Cilj rada je prikazati kako slijeganje oslonaca utječe na raspodjelu unutarnjih sila te reakcije u statički neodređenim sustavima. Kroz teorijsku razradu obrađene su vrste slijeganja, uzroci i preventivne metode, uz analizu primjera iz prakse, uključujući Millennium Tower. Glavna metodološka osnova bila je metoda sila, uz primjenu softverskih alata poput AutoCAD-a za vizualne prikaze i Excela za tablične proračune. Rezultati pokazuju značajan utjecaj diferencijalnog slijeganja na raspodjelu sila, što naglašava važnost precizne analize u fazi projektiranja.

**Ključne riječi:** slijeganje oslonaca; metoda sila; kontinuirane grede; reakcije; unutarnje sile; statička neodređenost.

## SUMMARY

This final thesis analyzes the effects of support settlements on reactions and internal forces in continuous beams using the force method. The aim of the paper is to demonstrate how support settlements influence the distribution of internal forces and reactions in statically indeterminate systems. The theoretical framework covers the types of settlements, their causes, and preventive methods, along with an analysis of practical examples, including the Millennium Tower. The primary methodological approach was the force method, with the use of software tools such as AutoCAD for visual representations and Excel for tabular calculations. The results show a significant impact of differential settlement on the distribution of forces, emphasizing the importance of precise analysis during the design phase.

**Keywords:** support settlement; force method; continuous beams; reactions; internal forces; static indeterminacy.

---

**SADRŽAJ**

<b>ZAHVALE .....</b>	<b>i</b>
<b>SAŽETAK .....</b>	<b>ii</b>
<b>SUMMARY .....</b>	<b>iii</b>
<b>SADRŽAJ .....</b>	<b>iv</b>
<b>1. UVOD .....</b>	<b>1</b>
<b>2. Teorijska pozadina .....</b>	<b>2</b>
2.1. Slijeganje oslonaca.....	2
2.1.1. Definicija slijeganja oslonaca .....	2
2.1.2. Vrste slijeganja.....	2
2.1.3. Uzroci slijeganja oslonaca .....	3
2.1.4. Preventivne metode .....	3
2.2. Primjeri iz prakse .....	4
2.2.1. Millenium Tower.....	4
2.2.1.1. Očekivano i dopušteno slijeganje .....	5
2.2.1.2. Pokušaji rješenja i troškovi .....	5
2.2.1.3. Pravne posljedice i tužbe .....	6
2.2.2. Ostali primjeri .....	7
2.3. Kontinuirane grede .....	7
2.3.1. Statički neodređeni sistemi .....	7
2.3.2. Uvod u kontinuirane nosače.....	7
2.3.3. Statička neodređenost kontinuiranih greda.....	8
2.3.4. Gerberovi nosači.....	8
2.3.5. Primjena u mostarstvu.....	9
<b>3. RAČUNSKA ANALIZA .....</b>	<b>9</b>
3.1. Metoda sila .....	10
3.2. Proračun kontinuirane grede uslijed slijeganja oslonca A.....	12
3.3. Proračun kontinuirane grede uslijed slijeganja oslonca B.....	17
3.4. Dodatni utjecaji.....	21
<b>4. ZAKLJUČAK .....</b>	<b>37</b>
<b>POPIS LITERATURE .....</b>	<b>38</b>
<b>POPIS SLIKA .....</b>	<b>40</b>
<b>POPIS TABLICA.....</b>	<b>41</b>

## 1. UVOD

Tema ovog završnog rada odnosi se na analizu utjecaja slijeganja oslonaca kontinuiranih greda, s posebnim naglaskom na proračun reakcija i unutarnjih sila primjenom metode sila. Ovaj problem je od velikog značaja u građevinskoj praksi, budući da slijeganje oslonaca može izazvati ozbiljne probleme u stabilnosti konstrukcija, osobito kod statički neodređenih sustava poput kontinuiranih greda.

Motivacija za odabir ove teme proizlazi iz sve veće potrebe za preciznim metodama analize slijeganja u modernim građevinskim projektima, gdje su deformacije tla čest uzrok strukturnih problema. Kroz proučavanje teorijskih osnova i primjera iz prakse, uključujući primjere poput Millennium Towera, cilj ovog rada je pružiti detaljan uvid u metode rješavanja ovih problema te ponuditi rješenja koja mogu pomoći u prevenciji strukturnih oštećenja uslijed slijeganja.

Ova analiza važna je za buduće inženjere jer doprinosi boljem razumijevanju odnosa između tla i konstrukcije, što je ključno za sigurnost i trajnost građevinskih projekata. Korištenjem metode sila, omogućuje se precizan proračun sila koje nastaju uslijed slijeganja, što omogućuje donošenje adekvatnih inženjerskih odluka u projektiranju i sanaciji objekata.

## 2. TEORIJSKA POZADINA

### 2.1. Slijeganje oslonaca

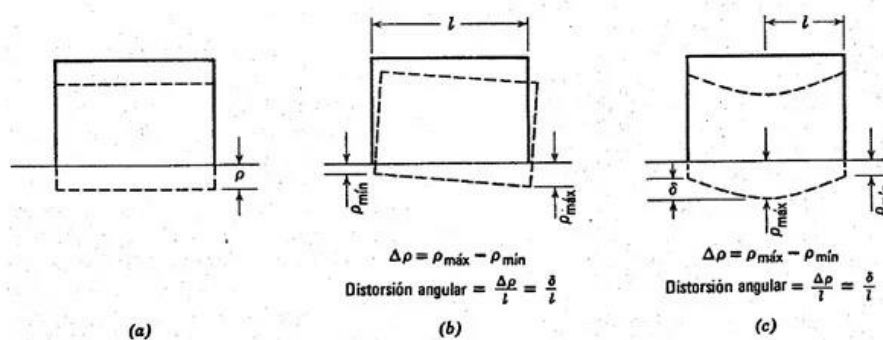
#### 2.1.1. Definicija slijeganja oslonaca

Oslonci su fiksne točke na konstrukciji koje prenose sve sile i momente koji djeluju na nju, osiguravajući ravnotežu i stabilnost čitavog sustava. U građevinskoj praksi, oslonci predstavljaju temelje koji se oslanjaju na tlo. Budući da tlo nije homogeno, konstrukcija ne stvara ravnomjerne reakcije na svim osloncima [1]. Kao posljedica toga, tlo se deformira pod opterećenjem temeljnih konstrukcija, što dovodi do slijeganja oslonaca, poznatog i kao slijeganje temelja. Slijeganje oslonaca predstavlja ukupni vertikalni pomak temelja građevinske konstrukcije uzrokovan deformacijama tla pod opterećenjem. Ovaj fenomen može imati ozbiljne posljedice na strukturalnu stabilnost objekta, a uzrokovan je smanjenjem volumenskog omjera zračnih šupljina u tlu. [2].

#### 2.1.2. Vrste slijeganja

Postoje tri glavne vrste slijeganja [2] koje su posebno relevantne u geotehničkom inženjerstvu kao što je prikazano na Slici 1. Jednoliko slijeganje (Slika 1a) odnosi se na situaciju kada se cijeli temelj konstrukcije slegne ravnomjerno. Ovakvo slijeganje je najvjerojatnije kada se svi dijelovi zgrade oslanjaju na istovrsnom tlu te kada su opterećenja konstrukcije ravnomjerno raspoređena. Također je ovo to slijeganje najpoželjnije jer ne predstavlja ozbiljnu opasnost za stabilnost zgrade, ali može utjecati na njenu funkcionalnost, primjerice oštetiti kanalizacijske cijevi, vodovodne instalacije te izazvati probleme s vratima i prozorima koji se zaglavljaju. Za razliku od jednolikog slijeganja, diferencijalno slijeganje (Slika 1b) predstavlja relativno mali pomak (zaokret) jednog oslonca u odnosu na drugi. Samim time je utjecaj diferencijalnog slijeganja jači što je konstrukcija kruća. Nastaje kada se različiti dijelovi temelja sliježu različitim brzinama ili u različitim iznosima. Kao rezultat, dolazi do pojave unutarnjih sila i momenata unutar konstrukcije, što može uzrokovati naginjanje, pukotine ili čak rušenje dijelova zgrade. Diferencijalno slijeganje je češće uzrok oštećenja u konstrukcijama i može imati ozbiljnije posljedice po stabilnost objekta [2]. Kada se konstrukcija nagne, između njenih se rubova može povući linija. Ukoliko je ta linija zakrivljena, to je pokazatelj da se različiti dijelovi konstrukcije pomiču neujednačeno, pod različitim stupnjevima te tada govorimo o zakrivljenom slijeganju (Slika 1c). Ovakvo zakrivljeno slijeganje može uzrokovati deformacije u konstrukciji, stvarajući vlačna naprezanja koja materijali poput opeke ili cestovnih pokrova ne mogu izdržati. Kao rezultat, s vremenom dolazi do pojave pukotina i oštećenja. Na primjer, kod željezničkih pruga, pretjerana zakrivljenost može izazvati deformacije tračnica, što onemogućava normalno prometovanje vlakova [3].





Slika 1: Vrste slijeganja (Izvor: [4])

### 2.1.3. Uzroci slijeganja oslonaca

Nakon što definirali vrste slijeganja, važno je za spomenuti i uzroke samih slijeganja. Slijeganje oslonaca može biti uzrokovano raznim faktorima povezanim s tlom i izvedbom same konstrukcije. Jedan od glavnih razloga je neodgovarajuće dimenzioniranje temelja, gdje nepravilna raspodjela pritiska može dovesti do nejednakog slijeganja. Ako je opterećenje jednako distribuirano po svim temeljima, veća je vjerojatnost jednolikog slijeganja. Osim toga jedan od ključnih uzroka slijeganja oslonaca je u ovisnosti o tipu tla. Tla poput gline, koja mijenja svoj volumen ovisno o vlažnosti tla, šireći se pri većoj i skupljajući se pri manjoj vlazi, obično dovode do većeg slijeganja u usporedbi sa šljunkom, koji je stabilniji. Također, slabo zbijeno tlo može dovesti do diferencijalnog slijeganja, zbog čega je važno osigurati ravnomjerno zbijanje prilikom gradnje. Još neki od uzroka slijeganja tla mogu biti: promjena u razini podzemne vode, vibracije iz okoline i prisutnost drveća u blizini temelja [5].

### 2.1.4. Preventivne metode

Prevenција diferencijalnog slijeganja temelja započinje detaljnim razumijevanjem uvjeta tla prije početka projektiranja i gradnje. Geotehnička ispitivanja su ključna, jer omogućuju projektantima da temelje dimenzioniraju prema stvarnim uvjetima tla, umjesto da koriste pretpostavljene vrijednosti. Pravilna procjena nosivosti tla temelji se na podacima prikupljenim tijekom ispitivanja. Pogrešno tumačenje ovih podataka može dovesti do lošeg dizajna temelja i neujednačenih slijeganja. Također je važno izbjeći ekscentrična opterećenja koliko je moguće te osigurati odgovarajuće dimenzioniranje temelja. Korištenje veznih greda u projektima s ekspanzivnim tlima može pomoći u kontroliranju slijeganja tla. Osim toga, poboljšanje tla na gradilištu može smanjiti slijeganje, osobito u područjima s nepouzdanim tlom, dok je kontrola

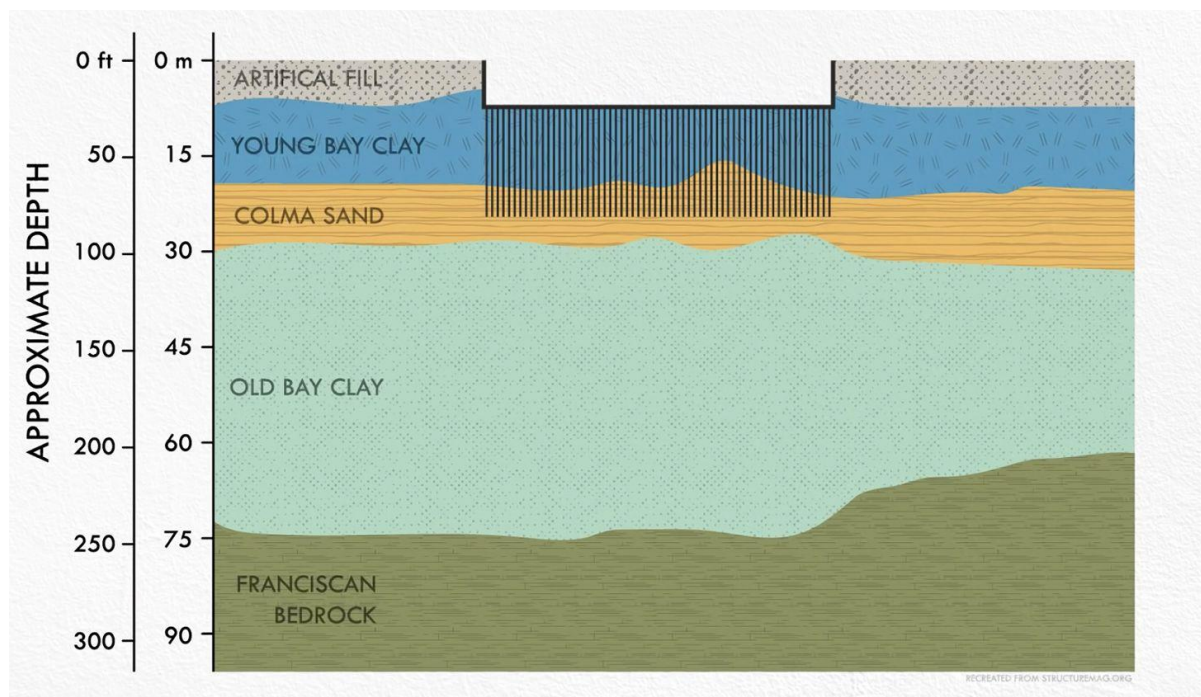
razine podzemnih voda tijekom gradnje također bitan faktor. Kontinuirano isušivanje tla može izazvati slijeganje temelja, pa se preporučuje nadzor podzemnih voda i po potrebi njihovo obnavljanje [6].

## 2.2. Primjeri iz prakse

U završnom radu obradit ćemo primjere iz prakse koji ilustriraju probleme slijeganja oslonaca, analizirajući kako su ti problemi utjecali na stabilnost konstrukcija i kako su se rješavali. Fokusirat ćemo se na tri primjera: Millenium Tower u San Franciscu, Kosi toranj u Pisi i zgrada Lotus Riverside u Šangaju. Glavni primjer detaljno obrađen bit će Millenium Tower, dok će ostali primjeri biti kratko spomenuti kako bi se pružio širi kontekst problema sa slijeganjem temelja.

### 2.2.1. Millenium Tower

Millenium Tower, stambena zgrada od 58 katova u San Franciscu, suočila se s ozbiljnim problemima slijeganja temelja ubrzo nakon dovršetka izgradnje 2009. godine. Zgrada je do sada potonula više od 46 cm te joj se nagib povećao na otprilike 56 cm prema sjeverozapadu. Ovi problemi uzrokovani su zbog oslanjanja temelja na slojeve "Old Bay Clay" tla, koje se može vidjeti na Slici 2. koje nije dovoljno nosivo. Dodatni radovi na okolnim građevinskim projektima, poput Salesforce Towera i Transbay Transit Centra, pogoršali su situaciju iscrpljivanjem podzemnih voda, čime je destabilizirano tlo ispod same zgrade [6, 7].



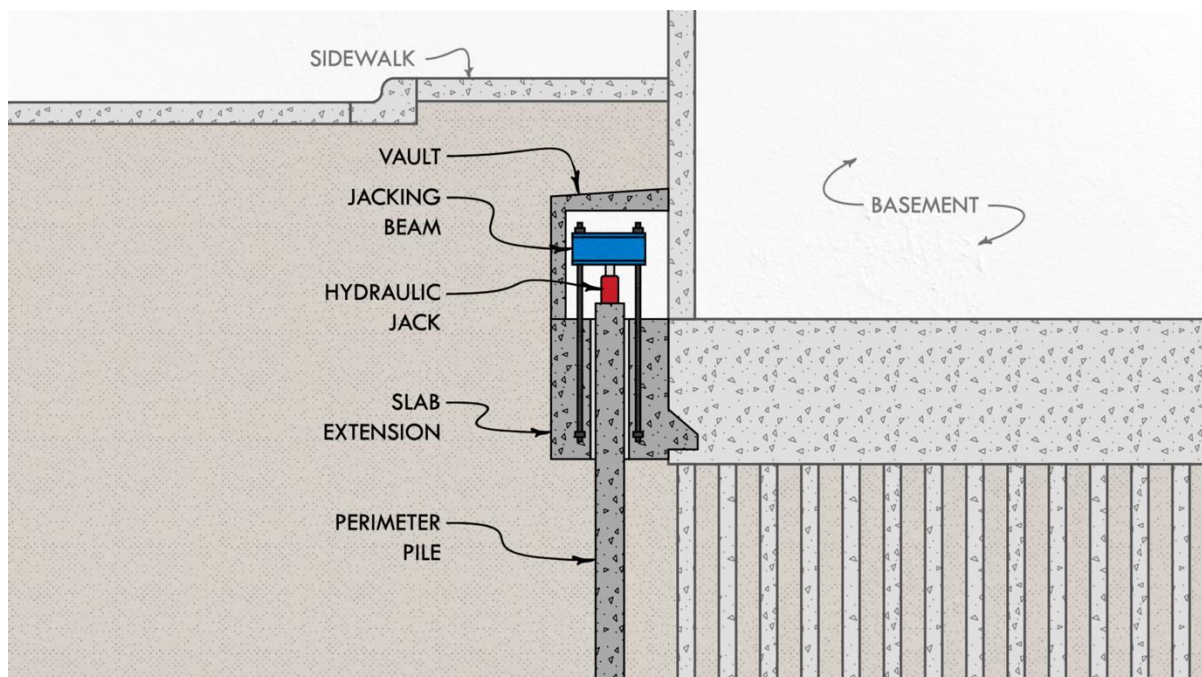
**Slika 2:** Tlo ispod Millenium Towera (Izvor: [6])

### 2.2.1.1. Očekivano i dopušteno slijeganje

Izvorni projekt građevine omogućio je određeni stupanj slijeganja, što je tipično za takve projekte. Međutim, stvarna situacija daleko je premašila očekivanja. Prema Practical Engineeringu, očekivalo se da će se toranj tijekom svog životnog vijeka slegnuti do 15 centimetara. Za usporedbu, zgrada je već dosegla 40-ak centimetara do 2016., a do 2021. kada je sanacija krenula do već spomenutih 46 centimetara, daleko iznad očekivanog raspona [6].

### 2.2.1.2. Pokušaji rješenja i troškovi

Popravak zgrade zahtijevao je inženjerske inovacije. Jedan od prvih prijedloga uključivao je ugradnju stotina mikropilota (tankih bušenih pilota) kroz postojeće temelje sve do stijenske podloge. Međutim, procijenjeni troškovi tog rješenja dosegali su čak 500 milijuna dolara, što je bilo više od originalnog troška izgradnje cijele zgrade. Troškovi su bili visoki zbog tehničkih izazova vezanih uz radove ispod postojeće zgrade, poput otežanog pristupa, vibracija, buke i nedostatka prostora. Na kraju je problem riješen na način da se bušenje pilota odvija duž dvije strane zgrade, što se pokazalo jeftinijim. Umjesto stotina mikropilota ispod zgrade, bušeno je 52 pilota uz sjevernu i zapadnu stranu zgrade, i to ispod okolnih pločnika, čime se znatno uštedjelo na troškovima. Ovi novi piloti se ugrađuju sve do stijenske podloge. Konstrukcija predviđa da se produži postojeća betonska ploča oko svakog pilota, no piloti nisu kruto povezani s tom pločom. Umjesto toga, piloti prolaze kroz ploču i produžuju se iznad nje kako bi se omogućilo neovisno kretanje zgrade. Iznad svakog pilota postavljeni su čelični nosači koji su usidreni duboko u betonsku ploču. Hidraulične dizalice će se koristiti kako bi se zgrada podigla i prebacilo oko 20% ukupnog opterećenja na nove pilote. Slikovni prikaz ovog rješenja možemo vidjeti na Slici 3.



**Slika 3:** Rješenje slijeganja Millenium Towera (Izvor: [8])

Cilj ovog popravka je smanjiti opterećenje na mekane glinaste slojeve ispod zgrade i prebaciti ga na čvrstu stijensku podlogu, čime bi se usporilo slijeganje zgrade. Također, nakon što se zgrada stabilizira, postepeno bi se ispravila njena nakrivljenost. Konačni rezultat trebao bi biti stabilna zgrada, nekoliko metara niža nego što je izvorno bila. Međutim, kao što je često slučaj s ovako velikim građevinskim projektima, stvari nisu išle glatko prema planu. Tijekom početnih faza bušenja u 2021. godini, primijećeno je da vibracije i poremećaji tla uzrokovani radovima zapravo ubrzavaju slijeganje zgrade. Grad San Francisco i inženjeri su pažljivo pratili kretanje zgrade i privremeno obustavili radove u kolovozu 2021. godine kako bi se ponovno procijenio plan i pronašlo rješenje koje će minimalizirati poremećaj tla prilikom bušenja. Trenutno se testiraju nove tehnike bušenja koje bi trebale smanjiti vibracije i ubrzati sigurno postavljanje novih pilota.

#### 2.2.1.3. Pravne posljedice i tužbe

Zbog strukturnih problema, vlasnici stanova pokrenuli su brojne tužbe protiv izvođača radova. Stanari su tražili odštetu zbog gubitka vrijednosti nekretnina, koje su pale za čak 30-50%. Tužbe su također uključivale međusobne optužbe između tvrtki uključenih u izgradnju Millennium Towera i obližnjih projekata, što je dodatno kompliciralo pravni proces. Pravni sporovi uključivali su više od 400 pojedinačnih stranaka, uključujući investitora, izvođače radova i lokalne vlasti [6].

## 2.2.2. Ostali primjeri

Kosi toranj u Pisi i zgrada Lotus Riverside u Šangaju dva su poznata primjera građevinskih problema uzrokovanih slijeganjem temelja. Kosi toranj u Pisi počeo je tonuti već u 12. Stoljeću, zbog slabe i mekane podloge ispod temelja. Temelji su postavljeni na kombinaciji pijeska i gline, što nije bilo dovoljno stabilno da podrži težinu tornja, koji se počeo nagnjati prema jugu. Tijekom godina provedeni su brojni pokušaji stabilizacije, uključujući uklanjanje tla ispod temelja i korištenje betonskih protivteža. Toranj je stabiliziran u modernim vremenima, no zadržao je svoj karakterističan nagib, čime je postao jedna od najpoznatijih turističkih atrakcija na svijetu. [9].

Slično tome, ali na žalost sa različitim posljedicama, 2009. godine, zgrada u šangajskom kompleksu Lotus Riverside srušila se zbog neadekvatnog temeljenja i destabilizacije tla tijekom iskopavanja podzemne garaže susjedne zgrade. Istraživanja su kasnije pokazala kako su do rušenja doveli upravo ti radovi koji su destabilizirali tlo ispod zgrade. Ovaj kolaps rezultirao je gubitkom života i postao upozorenje na važnost sigurnosnih standarda i pravilnog temeljenja. [10].

## 2.3. Kontinuirane grede

### 2.3.1. Statički neodređeni sistemi

Statički neodređeni sustavi su konstrukcije koje ostaju u ravnoteži pod bilo kojim opterećenjem, ali imaju više nepoznatih sila nego što postoji nezavisnih jednadžbi ravnoteže. To znači da takvi sustavi imaju beskonačno mnogo mogućih rješenja za te sile. S kinematičkog aspekta, ovi sustavi su geometrijski nepromjenjivi i imaju više veza nego što je nužno za osiguranje njihove stabilnosti. Stupanj statičke neodređenosti opisuje koliko je sustav "višestruko neodređen", odnosno koliko veza ima više nego što je potrebno za ravnotežu. Te "višak" veze nisu nepotrebne već čine sustav otpornijim jer on neće automatski propasti ako neka od tih veza popusti. [11].

### 2.3.2. Uvod u kontinuirane nosače

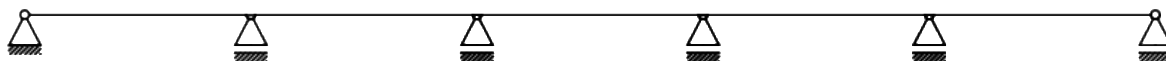
Jedna od vrsta statički neodređenih sustava su upravo kontinuirane grede. Kontinuirane grede ili nosači su strukturalni elementi koji se protežu preko više od dva oslonca. Ovakva konstrukcija omogućuje ravnomjerniju raspodjelu opterećenja i smanjenje maksimalnih momenata u usporedbi s jednostavnim gredama, koje imaju samo dva oslonca. Zahvaljujući većem broju oslonaca, kontinuirane grede postižu veću stabilnost i učinkovitiju upotrebu materijala.

### 2.3.3. Statička neodređenost kontinuiranih greda

Kao što smo već spomenuli, kontinuirane grede su statički neodređeni sustavi, a za stupanj statičke neodređenosti se možemo koristiti jednostavnom formulom :

$$S = n_D \cdot 3 - n_L. \quad (1)$$

Uzmimo za primjer kontinuiranu gredu prikazanu na Slici 4. Na temelju analize možemo lako zaključiti da je stupanj statičke neodređenosti jednak 4. To možemo uočiti promatrajući oslonce - da bismo dobili jednostavnu gredu, trebali bismo ukloniti četiri oslonca, koji predstavljaju "višak" u odnosu na potrebni broj veza. Ovaj zaključak možemo potvrditi koristeći gore navedenu formulu :  $S = 1 \cdot 3 - 7 = -4$ .



**Slika 4:** Primjer kontinuirane grede

Zbog same statičke neodređenosti kontinuiranih greda za njihovo proračunavanje nisu dovoljne samo jednačbe ravnoteže, već je potrebno koristiti metode poput metode sila, metode pomaka, metode konačnih elemenata i slično.

### 2.3.4. Gerberovi nosači

Inženjeri iz prve polovice 19. stoljeća znali su da kontinuirani nosači, imaju povoljne statičke karakteristike. Međutim, također su bili svjesni njihove statičke neodređenosti, što ih čini neprikladnima u situacijama gdje može doći do nejednolikih slijeganja oslonaca, poput onih na lošem tlu, ili velikih promjena temperature. U takvim uvjetima, u statički neodređenim sustavima mogu se pojaviti značajne unutarnje sile i reakcije. Kako bi izbjegli te probleme, mostovi su se često gradili kao nizovi jednostavno oslonjenih greda, iako je to značilo gubitak mogućnosti smanjenja momenata savijanja u sredini raspona. Njemački inženjer Heinrich Gerber uočio je da ugradnjom zglobova na strateškim mjestima može smanjiti momente savijanja, a istovremeno izbjeći negativne posljedice slijeganja. Ovu ideju je razvio i patentirao

1868. godine, čime je stvorio temelje za Gerberove nosače. Gerberovi nosači predstavljaju posebnu vrstu kontinuiranih nosača s umetnutim zglobovima, koji omogućuju učinkovitu kontrolu raspodjele momenata savijanja. Zbog ugradnje zglobova, ovi nosači postaju statički određeni sustavi, eliminirajući statičku neodređenost koja se inače javlja kod kontinuiranih greda. Primjena Gerberovih nosača doprinosi stabilnosti konstrukcija, čak i u slučajevima diferencijalnog slijeganja oslonaca, što ih čini izuzetno pogodnima za mostogradnju. Raspored zglobova u Gerberovom nosaču igra ključnu ulogu u osiguravanju geometrijske nepromjenjivosti i statičke određenosti sustava. Kada govorimo o "rasporedu zglobova", mislimo na to u kojim se poljima ili nad kojim osloncima zglobovi nalaze. Dva važna pravila za ispravan raspored zglobova su: u jednom polju ne smiju biti više od dva zgloba, a u dva susjedna polja ne smiju biti po dva zgloba. Pravilnim rasporedom zglobova osigurava se ravnoteža i stabilnost, dok nepravilnim rasporedom dijelovi sustava postaju statički neodređeni i ponašaju se kao mehanizmi, što vodi do gubitka stabilnosti. Analitički postupci, uključujući neraščlanjene i raščlanjene metode, koriste se za precizno proračunavanje unutarnjih sila, reakcija u osloncima i momenata savijanja u kritičnim dijelovima Gerberovih nosača [11].

### 2.3.5. Primjena u mostarstvu

Kontinuirane grede predstavljaju vrlo praktičan i primjenjiv nosivi sustav za mostove s više raspona, pri čemu se obično protežu duž cijele duljine mosta bez prekida. Prekidi se, ako ih ima, obično postavljaju tek nakon dovoljno dugih dionica. Ovakvi nosači mogu se protezati i do više od 1000 metara, obuhvaćajući desetke raspona. Njihova glavna prednost leži u kontinuiranosti i povoljnoj raspodjeli momenata savijanja u poljima i nad osloncima, što omogućuje da konstrukcija bude izvedena s manjom visinom, što je korisno ne samo zbog uštede materijala, nego i zbog estetskih razloga. Za raspane do 100 metara, kontinuirane grede obično se izvode s konstantnom visinom. Kod većih raspona, nad osloncima se često koriste vute kako bi se dodatno ojačala konstrukcija. Zbog statičkih razloga, sustavi s jednakim središnjim rasponima i otprilike 20% kraćim krajnjim poljima su optimalni jer omogućuju ujednačavanje maksimalnih momenata u svim poljima. U nekim slučajevima, posebice kada se koristi balansni postupak izgradnje, krajnja polja se izvode s polovicom raspona u odnosu na središnja polja, što dodatno olakšava izvedbu i stabilnost konstrukcije [12].

## 3. RAČUNSKA ANALIZA

U ovom radu prikazat ćemo kako slijeganje jednog oslonca kontinuirane grede utječe na reakcije na osloncima i unutarnje sile u gredi. Kao što je već ranije objašnjeno, kontinuirane grede predstavljaju statički neodređene sustave, za čije rješavanje nisu dovoljne samo poznate jednačbe ravnoteže, već se moraju primijeniti specifične metode analize. Jedna od tih metoda je metoda sila, koja će biti detaljno obrađena u ovom radu.

### 3.1. Metoda sila

Metoda sila koristi se za analizu statički neodređenih sustava kako bi se odredile statičke veličine poput reakcija na osloncima i unutarnjih sila u presjecima elemenata. Osnovna ideja metode je da se statički neodređeni sustav transformira u statički određeni uklanjanjem određenog broja prekobrojnih veza, bilo oslonaca ili unutarnjih veza. Na taj način dobiva se osnovni sustav, na kojem se provodi proračun unutarnjih sila i reakcija. Nakon toga, zahtijeva se da pomaci u izvornom, statički neodređenom sustavu budu jednaki onima u novom, statički određenom sustavu [13]. Uz to, budući da uvjeti ravnoteže nisu dovoljni za rješavanje svih nepoznatih sila, dodatni uvjeti pronalaze se u rubnim uvjetima pomaka, koji se izražavaju jednadžbama. Iz tih jednadžbi dobivaju se sile u vezama koje odgovaraju poznatim pomacima. [1]. Ova metoda omogućuje precizno određivanje unutarnjih sila i reakcija, a dobiveni rezultati koriste se za izradu dijagrama unutarnjih sila u analiziranoj konstrukciji.

Kako bismo izjednačili progibe, odnosno progibne linije osnovnog i zadanog sustava, na mjestima gdje smo prekinuli veze dodajemo nepoznatu silu  $X$ . Zatim, zbrajamo progibe osnovnog sustava pod djelovanjem vanjskog opterećenja s progibima koji nastaju zbog sile  $X$ . Na taj način postizemo izjednačavanje progibnih linija oba sustava. Međutim, problem je što iznos sile  $X$  nije unaprijed poznat. Kako bismo to riješili, pretpostavljamo da sila  $X$  ima vrijednost 1, čime uzrokuje pomak  $\delta_{X,X=1}$ . U tom slučaju, stvarna sila  $X$  uzrokuje pomak  $X$  puta veći od pomaka uzrokovanog silom  $X = 1$ . Ovo pravilo vrijedi zbog linearne ovisnosti u slučaju malih pomaka i deformacija. Stoga, pomak u zadanom sustavu na mjestu sile  $X$  možemo izraziti odgovarajućom formulom:

$$\delta_{X,q} + X \cdot \delta_{X,X=1} = \Delta. \quad (2)$$

, gdje je  $\delta_{X,q}$  pomak na mjestu sile  $X$  uzrokovan vanjskim opterećenjem, a  $\Delta$  pomak na mjestu sile  $X$ . Kada pomaka nebi bilo tada bismo tu jednadžbu izjednačili s nulom. Izraz 2 nazivamo uvjet kompatibilnosti pomaka zadanoga i osnovnoga statičkog sistema. Broj jednadžbi ovisi o stupnju statičke neodređenosti. Kada bi statički sustav bio  $n$  puta neodređen tada bismo imali uvjete kompatibilnosti tvorene od  $n$  jednadžbi:

$$\begin{aligned} \delta_{1,0} + \delta_{1,1} \cdot X_1 + \delta_{1,2} \cdot X_2 + \delta_{1,3} \cdot X_3 + \dots + \delta_{1,n} \cdot X_n &= 0 \\ \delta_{2,0} + \delta_{2,1} \cdot X_1 + \delta_{2,2} \cdot X_2 + \delta_{2,3} \cdot X_3 + \dots + \delta_{2,n} \cdot X_n &= 0 \\ \delta_{3,0} + \delta_{3,1} \cdot X_1 + \delta_{3,2} \cdot X_2 + \delta_{3,3} \cdot X_3 + \dots + \delta_{3,n} \cdot X_n &= 0 \\ \dots & \\ \delta_{n,0} + \delta_{n,1} \cdot X_1 + \delta_{n,2} \cdot X_2 + \delta_{n,3} \cdot X_3 + \dots + \delta_{n,n} \cdot X_n &= 0 \end{aligned}$$

**Slika 5:** Jednadžbe kompatibilnosti (Izvor: [13])



Koeficijenti koji stoje uz nepoznanice u tim jednadžbama nazivaju se koeficijentima fleksibilnosti. Oni, zajedno sa slobodnim članovima jednadžbi, određuju se prema sljedećim izrazima:

$$\delta_{i,j} = \int \frac{m_i \cdot m_j}{EI} ds + \int \frac{n_i \cdot n_j}{EA} ds + k \cdot \int \frac{t_i \cdot t_j}{GA} ds$$

$$\delta_{i,0} = \int \frac{M_0 \cdot m_i}{EI} ds + \int \frac{N_0 \cdot n_i}{EA} ds + k \cdot \int \frac{T_0 \cdot t_i}{GA} ds + \int (\kappa_i \cdot m_i) ds + \int (\varepsilon_i \cdot n_i) ds$$

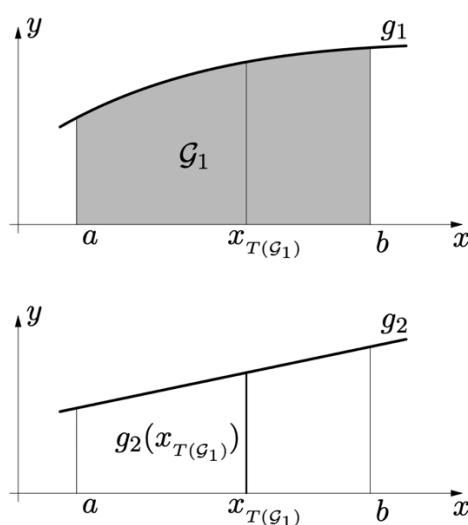
Slika 6: Koeficijenti fleksibilnosti (Izvor: [13])

Ovdje je  $\delta_{i,j}$  pomak na mjestu i u smjeru sile s indeksom i, uzrokovan jediničnim djelovanjem na mjestu j, dok je  $\delta_{i,0}$  pomak na mjestu i u smjeru sile s indeksom i izazvan vanjskim opterećenjem [13].

Vrijednosti integrala sa Slike 6 izračunavaju se prema Vereščaginovom teoremu [11]. U tim izrazima se pojavljuju integrali kojima je podfunkcija umnožak dviju funkcija, od kojih je barem jedna linearna. Vereščaginov teorem dokazuje kako vrijedi ova jednakost:

$$I_{1,2} = \int_a^b g_1(x)g_2(x)dx = G_1 * g_2(x_{T(G_1)}) \quad (3)$$

, gdje su:  $G_1$  lik ispod grafa funkcije  $g_1$  i, kao broj, ploština tog lika,  $x_{T(G_1)}$  apscisa težišta lika  $G_1$ ,  $g_2(x_{T(G_1)})$  vrijednost linearne funkcije  $g_2$  u  $x_{T(G_1)}$ . Grafički prikaz toga možemo vidjeti na Slici 7.



Slika 7: Vereščaginov teorem (Izvor: [11])

Tablica integrala za metodu Vereščagin, daje nam već gotove izraze za najčešće slučajeve koji se pojavljuju u ovoj metodi (Slika 8).

a	f	g	h	
$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{2}j(k_1 + k_2)$	$\frac{a}{4}jk$	1
$\frac{a}{4}jk$	$\frac{a}{6}jk(1 + \gamma)$	$\frac{a}{6}j(k_1 + 2k_2)$	$\frac{a}{5}jk$	2
$\frac{a}{4}jk$	$\frac{a}{6}jk(1 + \delta)$	$\frac{a}{6}j(2k_1 + k_2)$	$\frac{a}{20}jk$	3
$\frac{a}{3}jk$	$\frac{a}{12}jk \frac{3 - 4\gamma^2}{\delta}$ für $\gamma \leq \delta$	$\frac{a}{4}j(k_1 + k_2)$	$\frac{3a}{32}jk$	4
$\frac{a}{12}jk \frac{3 - 4\alpha^2}{\beta}$ für $\alpha \leq \beta$	$\frac{a}{6}jk \frac{2\alpha - \alpha^2 - \gamma^2}{\alpha\delta}$ für $\alpha \geq \gamma$ *)	$\frac{a}{6}j(k_1(1 + \beta) + k_2(1 + \alpha))$	$\frac{a}{20}jk(1 + \alpha + \alpha^2 + \gamma^2)$	5
$\frac{a}{4}j_1 + j_2)k$	$\frac{a}{6}j_1(1 + \delta) + j_2(1 + \gamma)k$	$\frac{a}{6}j_1(2k_1 + k_2) + j_2(k_1 + 2k_2)k$	$\frac{a}{20}k(j_1 + 4j_2)$	6
$\frac{5a}{12}jk$	$\frac{a}{3}jk(1 + \gamma\delta)$	$\frac{a}{3}j(k_1 + k_2)$	$\frac{2a}{15}jk$	7
$\frac{7a}{48}jk$	$\frac{a}{12}jk(1 + \gamma + \gamma^2)$	$\frac{a}{12}j(k_1 + 3k_2)$	Anmerkung: Kubische Parabel als M-Fläche des folgenden S-Systems: 	8
$\frac{7a}{48}jk$	$\frac{a}{12}jk(1 + \delta + \delta^2)$	$\frac{a}{12}j(3k_1 + k_2)$		9
$\frac{a}{24}j_1 + 10j_2 + j_3)k$	$\frac{a}{6}j_1\delta^2 + 2j_2(1 + \gamma\delta) + j_3\gamma^2)k$	$\frac{a}{6}j_1k_1 + 2j_2 \cdot (k_1 + k_2) + j_3k_2)k$		10
$\frac{5a}{32}jk$	$\frac{a}{30}jk(1 + \gamma)\left(\frac{7}{3} - \gamma^2\right)$	$\frac{a}{60}j(7k_1 + 8k_2)$	$k = -\frac{qa^2}{6}$	11
$\frac{5a}{32}jk$	$\frac{a}{30}jk(1 + \delta)\left(\frac{7}{3} - \delta^2\right)$	$\frac{a}{60}j(8k_1 + 7k_2)$		12

\*) Für  $\alpha = \gamma$  und  $\beta = \delta$  folgt  $\frac{a}{3}jk$

4.29

Auswertung der Integrale  $\int_a^b f(x) \cdot g(x) \cdot dx$  z. B.  $\int_a^b M_1 M_2 dx$

f(x)	a	b	c	d
1	$aj/k$	$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{2}jk$	$\frac{2a}{3}jk$
2	$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{3}jk$	$\frac{a}{6}jk$	$\frac{a}{3}jk$
3	$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{6}jk$	$\frac{a}{3}jk$	$\frac{a}{3}jk$
4	$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{4}jk$	$\frac{a}{4}jk$	$\frac{5a}{12}jk$
5	$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{6}jk(1 + \alpha)$	$\frac{a}{6}jk(1 + \beta)$	$\frac{a}{3}jk(1 + \alpha\beta)$
6	$\frac{a}{2}(j_1 + j_2)k$	$\frac{a}{6}(j_1 + 2j_2)k$	$\frac{a}{6}(2j_1 + j_2)k$	$\frac{a}{3}(j_1 + j_2)k$
7	$\frac{2a}{3}jk$	$\frac{a}{3}jk$	$\frac{a}{3}jk$	$\frac{8a}{15}jk$
8	$\frac{a}{3}jk$	$\frac{a}{4}jk$	$\frac{a}{12}jk$	$\frac{a}{3}jk$
9	$\frac{a}{3}jk$	$\frac{a}{12}jk$	$\frac{a}{4}jk$	$\frac{a}{3}jk$
10	$\frac{a}{6}(j_1 + 4j_2 + j_3)k$	$\frac{a}{6}(2j_2 + j_3)k$	$\frac{a}{6}(j_1 + 2j_2)k$	$\frac{a}{15}(j_1 + 8j_2 + j_3)k$
11	$\frac{a}{4}jk$	$\frac{2a}{15}jk$	$\frac{7a}{60}jk$	$\frac{2a}{15}jk$
12	$\frac{a}{4}jk$	$\frac{7a}{60}jk$	$\frac{2a}{15}jk$	$\frac{2a}{15}jk$

1) Alle Werte j und k sind mit Vorzeichen einzusetzen!  
2) Bei M-Flächen infolge Dreiecksbelastung ist  $j = qa^2/6$

4.28

Slika 8: Tablica integrala za metodu Vereščagin (Izvor: [14])

Rješenja jednadžbi kompatibilnosti ( $X_i$ ) uvrštavaju se u sljedeće izraze za određivanje vrijednosti unutarnjih sila u zadanom sustavu, a ti se izrazi temelje na principu superpozicije:

$$M(x) = M_0 + X_1 \cdot m_1(x) + X_2 \cdot m_2(x) + X_3 \cdot m_3(x) + \dots + X_n \cdot m_n(x)$$

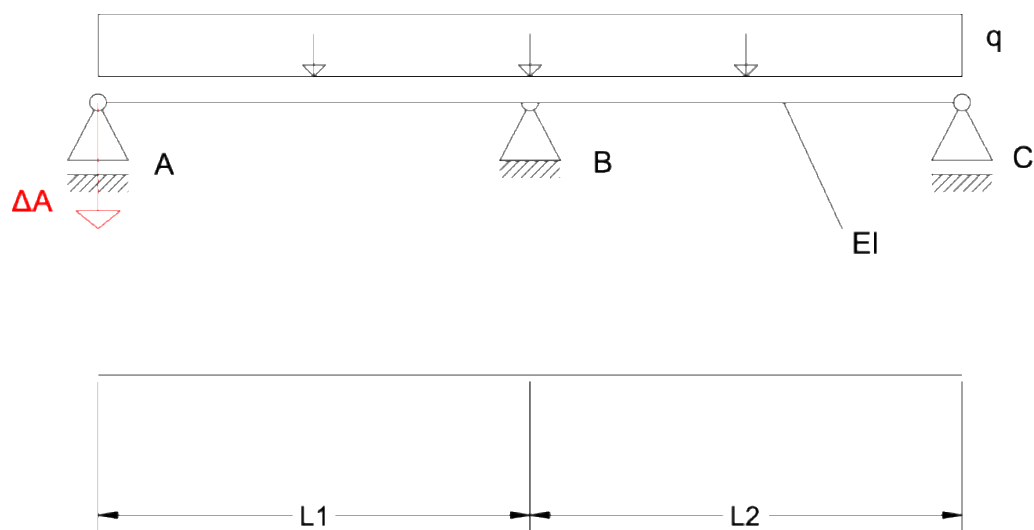
$$T(x) = T_0 + X_1 \cdot t_1(x) + X_2 \cdot t_2(x) + X_3 \cdot t_3(x) + \dots + X_n \cdot t_n(x)$$

$$N(x) = N_0 + X_1 \cdot n_1(x) + X_2 \cdot n_2(x) + X_3 \cdot n_3(x) + \dots + X_n \cdot n_n(x)$$

Slika 9: Formule za unutarnje sile metodom sila (Izvor: [13])

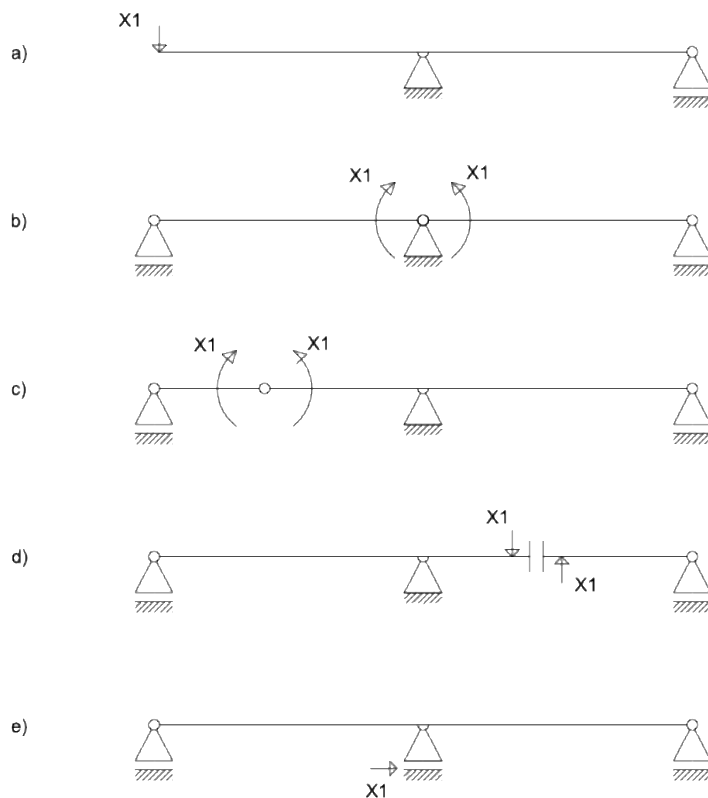
### 3.2. Proračun kontinuirane grede uslijed slijeganja oslonca A

U ovom ćemo primjeru prikazati kako se metodom sila izračunavaju reakcije i unutarnje sile kontinuirane grede, te analizirati utjecaj slijeganja jednog od oslonaca na te sile. Primjer koji ćemo riješiti prikazan je na Slici 10.



**Slika 10:** Primjer kontinuirane grede pod opterećenjem  $q$

Prvi korak u našem postupku je određivanje stupnja statičke neodređenosti zadanog sustava. Prema izrazu 1, lako možemo izračunati da je stupanj statičke neodređenosti jednak 1. Ovaj rezultat možemo također potvrditi i logičnim promatranjem primjera. Naime, uklanjanjem jednog od oslonaca, bilo A ili B, sustav se pojednostavljuje u dobro poznatu gredu s prepustom. Sljedeći korak je kreiranje statički određenog osnovnog sustava, što postizemo prekidanjem prekobrojnih vanjskih ili unutarnjih veza. Neki mogući primjeri osnovnih sustava prikazani su na Slici 8. Važno je napomenuti da osnovni sustav ni u kojem slučaju ne smije postati mehanizam, zbog čega primjer e sa Slike 8 nije prikladan za daljnji proračun. U daljnjim koracima koristit ćemo primjer a kao osnovni sustav.



Slika 11: Primjeri osnovnih sustava

Već poznatim jednadžbama ravnoteže, lako dolazimo do izraza za reakcije u osloncima ovog osnovnog sustava:

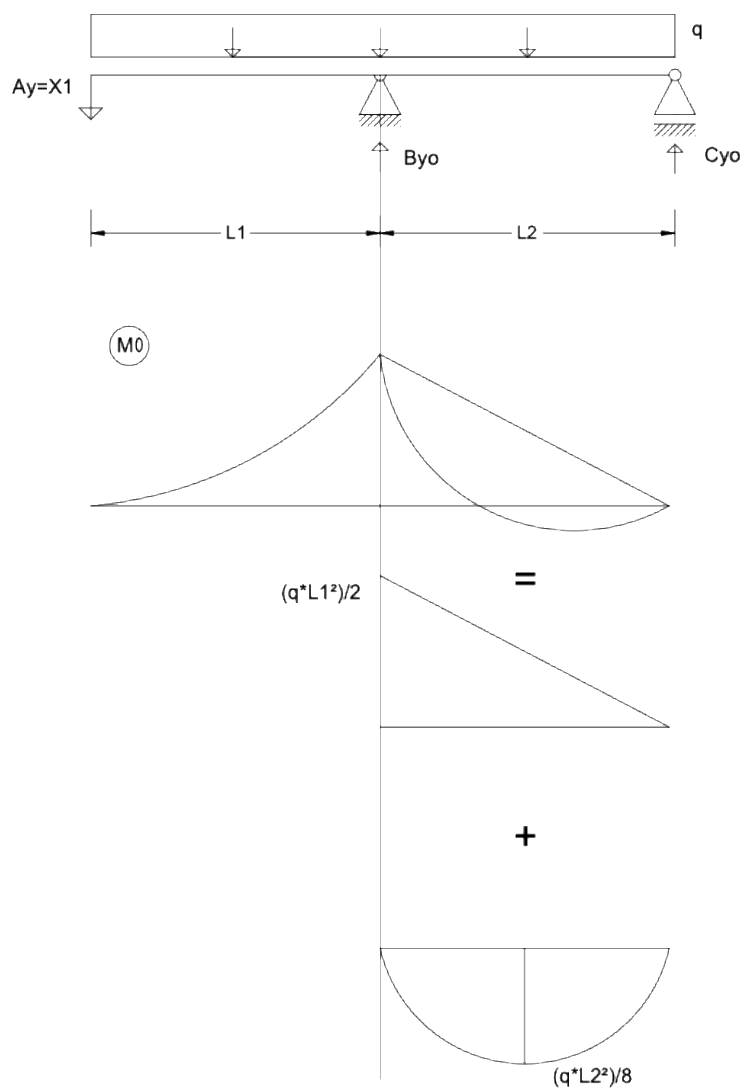
$$B_{y0} = Q * \frac{L_1 + L_2}{2L_2} \quad (4)$$

$$C_{y0} = Q * \frac{-L_1 + L_2}{2L_2} \quad (5)$$

, gdje vrijedi:

$$Q = q * (L_1 + L_2) \quad (6)$$

Kao što smo izračunali  $B_{y0}$  i  $C_{y0}$ , tako ćemo nacrtati i momentni dijagram  $M_0$  (Slika 12).

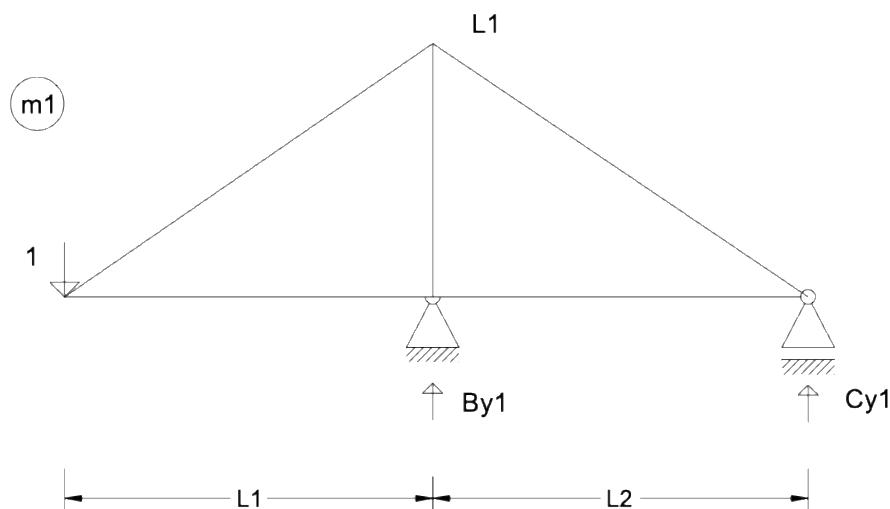


**Slika 12:**  $M_0$  dijagram uslijed slijeganja oslonca A

Dio parabole na rasponu  $L_2$  pojednostavljujemo raščlanjivanjem na trokut i parabolu kako bismo mogli primijeniti gotove izraze iz tablice integrala prema Vereščaginovoj metodi (Slika 8). Obzirom na to da smo na mjestu uklonjenog oslonca A dodali silu  $X_1=1$ , sada ćemo izračunati izraze za reakcije na osloncima te momentni dijagram pod djelovanjem te jedinične sile:

$$B_{y1} = \frac{L_1 + L_2}{L_2} \quad (7)$$

$$C_{y1} = \frac{-L_1}{L_2} \quad (8)$$



Slika 13: Momentni dijagram od jedinične sile

Jednadžba kompatibilnosti našeg slučaja glasi:

$$\delta_{10} + \delta_{11} * X_1 = \Delta A \quad (9)$$

U ovoj jednadžbi jasno se vidi kako prisilni pomak (slijeganje oslonca) prvenstveno utječe na jednadžbu kompatibilnosti, a posljedično i na iznose reakcija i sila unutar grede. U slučaju da nema prisilnog pomaka, jednadžba bi se izjednačila s nulom. Tražena sila  $X_1$  odgovara sili  $A_y$  zadanog sustava. Pomoću Vereščaginove metode izračunavamo vrijednosti  $\delta_{10}$  i  $\delta_{11}$ . Također ćemo prikazati analitički postupak za izračunavanje  $\delta_{11}$ , bez korištenja gotovih izraza iz tablice integrala Vereščaginove metode (Slika 8)

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{L_1 * L_1}{2} * \left( \frac{2}{3} * L_1 \right) + \frac{L_2 * L_1}{2} * \left( \frac{2}{3} * L_1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{L_1^3}{3} + \frac{L_1^2 * L_2}{3} \right] \quad (10) \end{aligned}$$

Za  $\delta_{10}$  možemo odmah iskoristiti gotove izraze iz tablice integrala (Slika 8), podijeljene s krutošću na savijanje  $EI$ . Za izračun  $\delta_{10}$  kombinirat ćemo dijagrame  $M_0$  i  $M_1$ . Na rasponu  $L_1$ , koristi se kombinacija parabole i trokuta, prema tablici kombinacija 8b. Na rasponu  $L_2$  kombiniramo dva trokuta (kombinacija 3c), te parabolu i trokut (kombinacija 7c). Kada uvrstimo naše vrijednosti u te formule, dobit ćemo sljedeću jednadžbu:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL_1^4}{8} + \frac{qL_1^3 L_2}{6} - \frac{qL_2^3 L_1}{24} \right] \quad (11)$$

Preostala nepoznanica je sada  $X_1$ , koju ćemo izračunati prema sljedećoj formuli:

$$X_1 = \frac{\Delta A - \delta_{10}}{\delta_{11}} \quad (12)$$

Pomoću te formule prelazimo na posljednji korak, koji uključuje izračunavanje konačnih reakcija, odnosno unutarnjih sila u zadanom sustavu, koristeći izraze:

$$M_K = M_0 + X_1 * m_1 \quad (13)$$

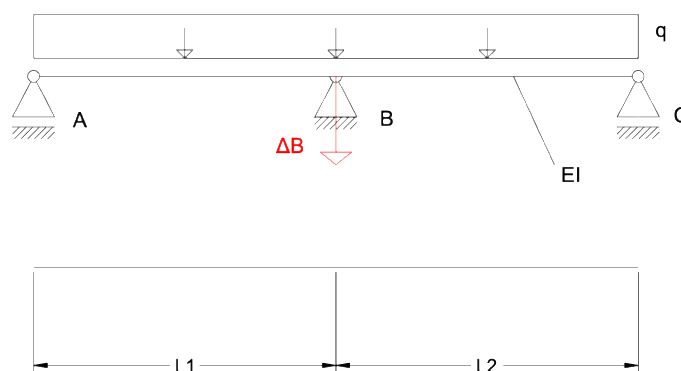
$$B_y = B_{y0} + X_1 * B_{y1} \quad (14)$$

$$C_y = C_{y0} + X_1 * C_{y1} \quad (15)$$

Time smo dovršili proračun reakcija i unutarnjih sila kontinuirane grede uzrokovanih prisilnim pomakom oslonca A.

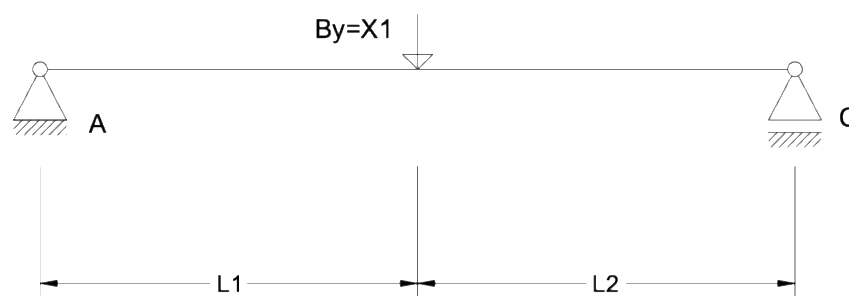
### 3.3. Proračun kontinuirane grede uslijed slijeganja oslonca B

Na istom primjeru kontinuirane grede sa Slike 7, prikazat ćemo kako bi slijeganje oslonca B utjecalo na reakcije i unutarnje sile. Ponovno ćemo analizirati ovaj primjer, ali sada s prisilnim pomakom oslonca B.



Slika 14: Primjer kontinuirane grede pod opterećenjem  $q$

Postupak rješavanja bit će isti kao u prethodnom primjeru. Prvo je potrebno odabrati osnovni sustav. Da bismo to učinili, moramo odrediti stupanj statičke neodređenosti grede. Kao i u prethodnom primjeru, sustav je jedan put statički neodređen, što znači da trebamo ukloniti jednu vezu. Iako bi najpraktičnije bilo ukloniti ležaj B zbog prisilnog pomaka, to bi rezultiralo stvaranjem mehanizma, čime sustav ne bi bio stabilan i prikladan za daljnju analizu. Umjesto toga, blokirat ćemo horizontalnu translaciju na ležaju A, a zatim ukloniti oslonac B, čime dobivamo prihvatljiv osnovni sustav. Odabrani osnovni sustav prikazan je na Slici 15.



**Slika 15:** Osnovni sustav za primjer prisilnog pomaka ležaja B

Kao i u prethodnom primjeru, koristimo jednadžbe ravnoteže kako bismo odredili reakcije u osloncima A i C osnovnog sustava pod djelovanjem vanjskog opterećenja  $q$ . Jednadžbe ravnoteže izgledaju ovako:

$$A_{y0} = C_{y0} = \frac{Q}{2} \quad (16)$$

, gdje za  $Q$  vrijedni jednakost :

$$Q = q * (L_1 + L_2) \quad (17)$$

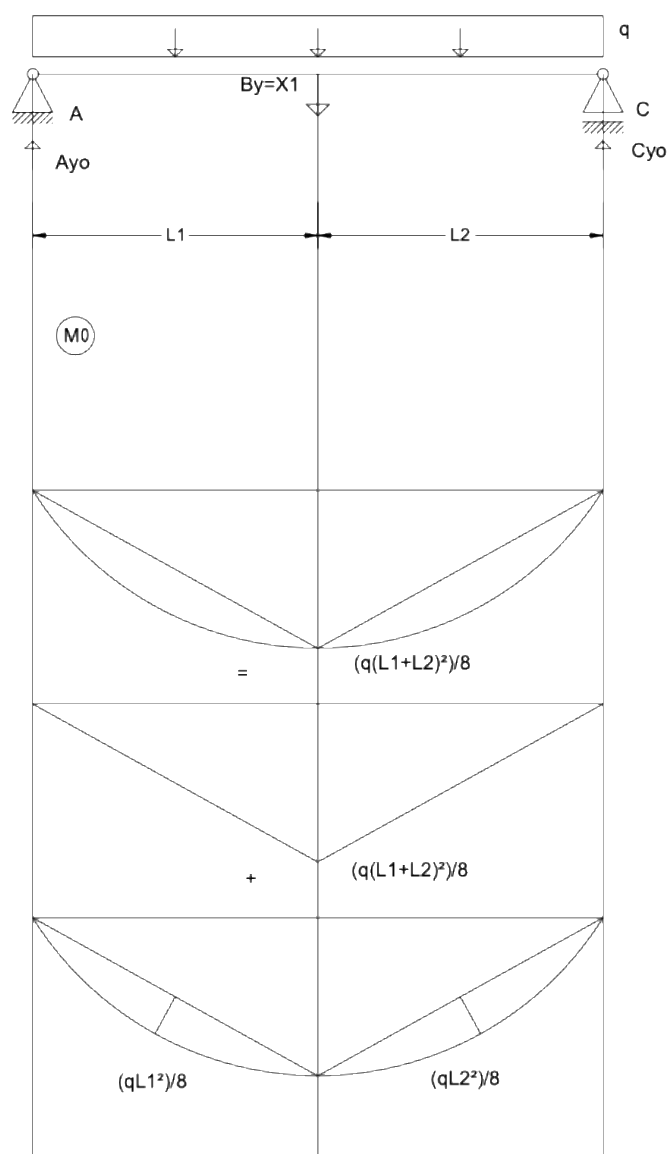
Nakon što izračunamo reakcije na osloncima osnovnog sustava pod djelovanjem vanjskog opterećenja  $q$ , prikazat ćemo i momentni dijagram osnovnog sustava  $M_0$  (Slika 16). Kao i u prethodnom primjeru, parabolu ćemo raščlaniti na jednostavnije geometrijske oblike kako bismo mogli primijeniti već poznate formule za integraciju prema Vereščaginovoj metodi. Parabolu na oba raspona,  $L_1$  i  $L_2$ , dijelimo na dva trokuta s njihovim pripadajućim parabolama. Ovaj postupak primjenjujemo jer, u slučaju kada su  $L_1$  i  $L_2$  različiti, maksimalna



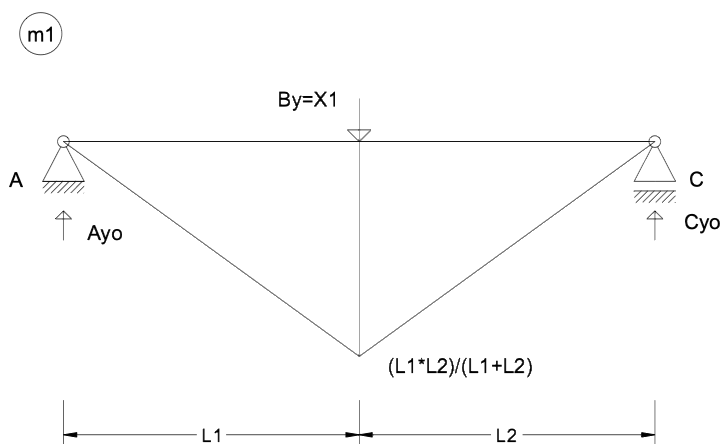
vrijednost momenta  $M_0$  ne podudara se s mjestom gdje je maksimalna vrijednost momenta  $M_1$  (Slika 17). S obzirom na to da smo na mjestu uklonjenog oslonca B dodali silu  $X_1=1$ , sada ćemo izračunati izraze za reakcije na osloncima i prikazati momentni dijagram uslijed djelovanja te jedinične sile (Slika 17).

$$Ay_1 = \frac{L_2}{L_1+L_2} \quad (18)$$

$$Cy_1 = \frac{L_1}{L_1+L_2} \quad (19)$$



**Slika 16:**  $M_0$  dijagram uslijed slijeganja oslonca B

Slika 17:  $M_1$  dijagram

Jednadžba kompatibilnosti glasi:

$$\delta_{10} + \delta_{11} * X_1 = \Delta B \quad (20)$$

Koristeći poznate tablice inetgrale (Slika 6), možemo izračunati  $\delta_{11}$  prema izrazu:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{L_1}{3} * \left( \frac{L_1 * L_2}{L_1 + L_2} \right)^2 + \frac{L_2}{3} * \left( \frac{L_1 * L_2}{L_1 + L_2} \right)^2 \right]. \quad (21)$$

Za izračun  $\delta_{10}$  morat ćemo razmotriti dva slučaja. Prvi slučaj odnosi se na situaciju kada je  $L_1 \neq L_2$ . U tom slučaju, koristit ćemo kombinaciju 7f iz tablice integrala (Slika 6), čime dolazimo do sljedećeg izraza:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{L_1 + L_2}{3} * \frac{q(L_1 + L_2)^2}{8} * \frac{L_1 * L_2}{L_1 + L_2} * \left( 1 + \frac{L_1}{L_1 + L_2} * \frac{L_2}{L_1 + L_2} \right) \right] \quad (22)$$

Uz pretpostavku da vrijedi jednakost  $L_1 = L_2$ , koristit ćemo kombinaciju 7e, te možemo izračunati  $\delta_{10}$  prema sljedećem izrazu:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{5}{24} * L^4 * q \right]. \quad (23)$$

Iz jednadžbe 22, dobivamo nepoznanicu  $X1=By$  prema izrazu:

$$X1 = \frac{\Delta B - \delta_{10}}{\delta_{11}} \quad (24)$$

Nakon toga prelazimo na posljednji korak proračuna, u kojem uvrštavamo poznate vrijednosti u izraze za konačne reakcije i momente, koji odgovaraju onima u zadanom sustavu:

$$M_K = M_0 + X1 * m_1 \quad (25)$$

$$A_y = A_{y0} + X1 * A_{y1} \quad (26)$$

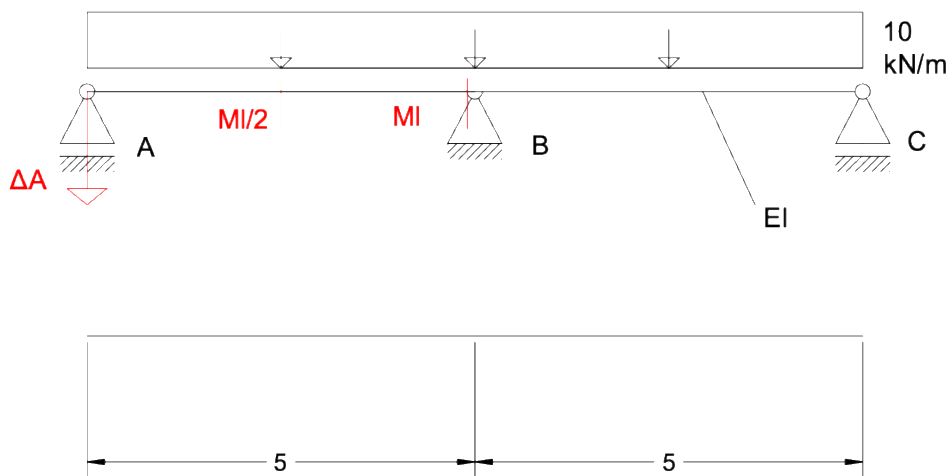
$$C_y = C_{y0} + X1 * C_{y1} \quad (27)$$

### 3.4. Dodatni utjecaji

Na reakcije u ležajevima i unutarnje sile greda, osim veličine pomaka, značajan utjecaj imaju i karakteristike temelja. Ako temelje zamislimo kao gredu, kao u primjerima koje smo obrađivali, reakcije i unutarnje sile bit će ovisiti o poprečnom presjeku grede i materijala od kojeg je izrađena. U izrazima prikazanim na Slici 6 vidljivo je kako koeficijenti fleksibilnosti ovise o modulu elastičnosti materijala ( $E$ ) i momentu tromosti ( $I$ ). Modul elastičnosti određuje se prema vrsti materijala, dok moment tromosti ovisi o geometriji poprečnog presjeka grede.

#### 3.4.1. Utjecaj veličine slijeganja ležaja A na momente

Prikazat ćemo kako različite veličine slijeganja oslonca, bilo pozitivne ili negativne, mogu utjecati na momente u sredini raspona i na osloncu B, kao što je prikazano na Slici 18. Pretpostavit ćemo da su  $L1 = L2 = 5$  m, opterećenje  $q = 10$  kNm, dimenzije poprečnog presjeka  $10 \times 23$  cm, te da je materijal čelik s modulom elastičnosti  $E = 2,8 \times 10^8$  kN/m<sup>2</sup>. U Tablici 1 vidimo kako, uz jednak poprečni presjek istog materijala, veličina slijeganja oslonca A utječe na momente u polju i na osloncu, kao što je prikazano na Slici 18.



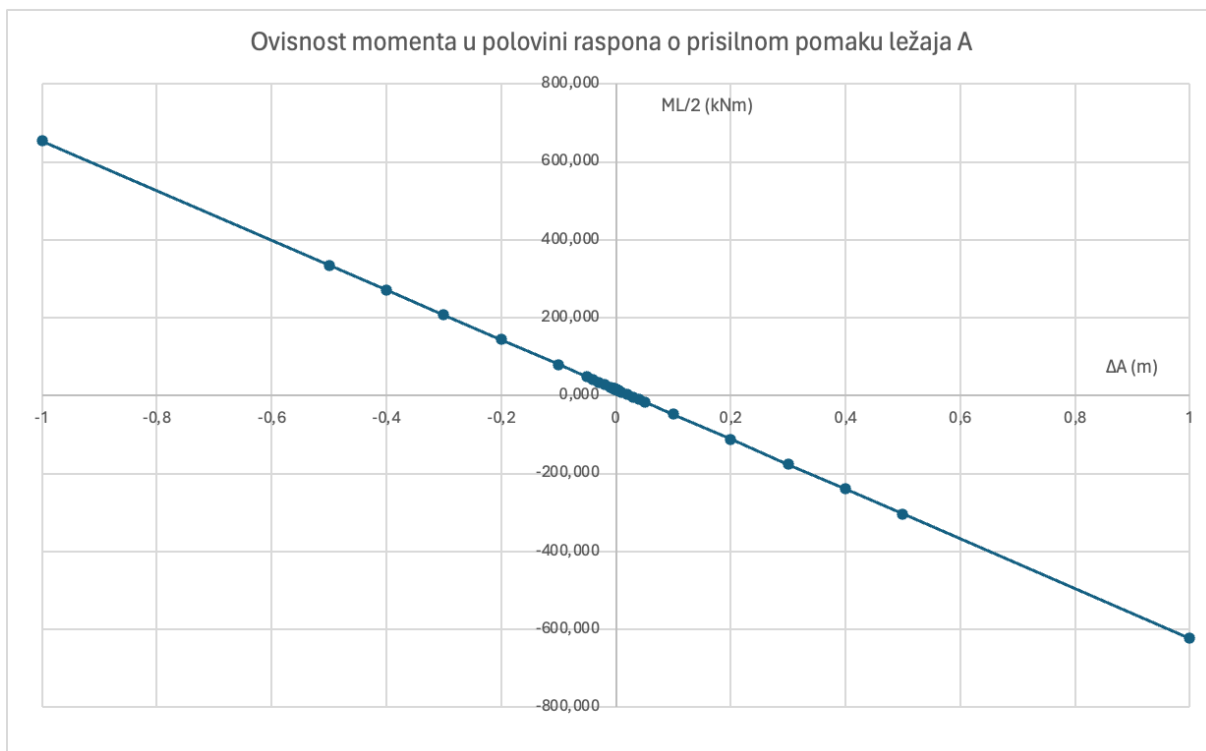
Slika 18: Prikaz Momenta  $MI/2$  i  $MI$

Tablica 1: Ovisnost momenta u polju i na ležaju o prisilnom pomaku ležaja A

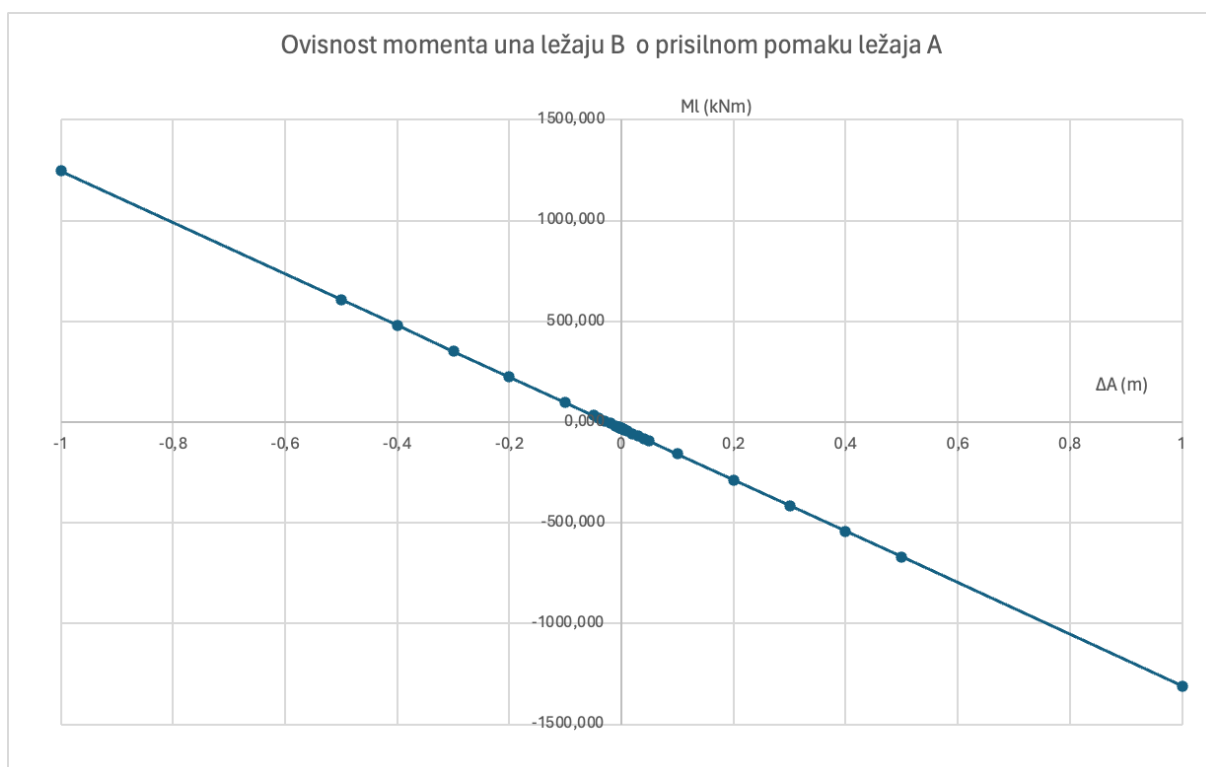
$\Delta A$	$MI/2$	$MI$	$\delta_{11}$	$\delta_{10}$	$EI$	$X=Ay$
-1	654,393	1246,285	0,00391	0,07338	21292,25	-274,257
-0,5	335,009	607,518	0,00391	0,07338	21292,25	-146,504
-0,4	271,132	479,764	0,00391	0,07338	21292,25	-120,953
-0,3	207,255	352,011	0,00391	0,07338	21292,25	-95,402
-0,2	143,379	224,257	0,00391	0,07338	21292,25	-69,851
-0,1	79,502	96,504	0,00391	0,07338	21292,25	-44,301
-0,05	47,563	32,627	0,00391	0,07338	21292,25	-31,525
-0,04	41,176	19,851	0,00391	0,07338	21292,25	-28,970
-0,03	34,788	7,076	0,00391	0,07338	21292,25	-26,415
-0,02	28,400	-5,699	0,00391	0,07338	21292,25	-23,860
-0,01	22,013	-18,475	0,00391	0,07338	21292,25	-21,305
-0,005	18,819	-24,862	0,00391	0,07338	21292,25	-20,028
-0,004	18,180	-26,140	0,00391	0,07338	21292,25	-19,772
-0,003	17,541	-27,417	0,00391	0,07338	21292,25	-19,517
-0,002	16,903	-28,695	0,00391	0,07338	21292,25	-19,261

-0,001	16,264	-29,972	0,00391	0,07338	21292,25	-19,006
0	15,625	-31,250	0,00391	0,07338	21292,25	-18,750
0,001	14,986	-32,528	0,00391	0,07338	21292,25	-18,494
0,002	14,347	-33,805	0,00391	0,07338	21292,25	-18,239
0,003	13,709	-35,083	0,00391	0,07338	21292,25	-17,983
0,004	13,070	-36,360	0,00391	0,07338	21292,25	-17,728
0,005	12,431	-37,638	0,00391	0,07338	21292,25	-17,472
0,01	9,237	-44,025	0,00391	0,07338	21292,25	-16,195
0,02	2,850	-56,801	0,00391	0,07338	21292,25	-13,640
0,03	-3,538	-69,576	0,00391	0,07338	21292,25	-11,085
0,04	-9,926	-82,351	0,00391	0,07338	21292,25	-8,530
0,05	-16,313	-95,127	0,00391	0,07338	21292,25	-5,975
0,1	-48,252	-159,004	0,00391	0,07338	21292,25	6,801
0,2	-112,129	-286,757	0,00391	0,07338	21292,25	32,351
0,3	-176,005	-414,511	0,00391	0,07338	21292,25	57,902
0,4	-239,882	-542,264	0,00391	0,07338	21292,25	83,453
0,5	-303,759	-670,018	0,00391	0,07338	21292,25	109,004
1	-623,143	-1308,785	0,00391	0,07338	21292,25	236,757

Tablične podatke možemo dodatno prikazati grafički. Na Slikama 19 i 20 primjećujemo da je veza između veličine pomaka oslonca i momenata u rasponu i na osloncu linearna. Prolazeći kroz proračun iz poglavlja 3.2, jasno je da je jednačba kompatibilnosti prvog reda, što objašnjava linearnu ovisnost između slijeganja oslonca i rezultirajućih momenata.



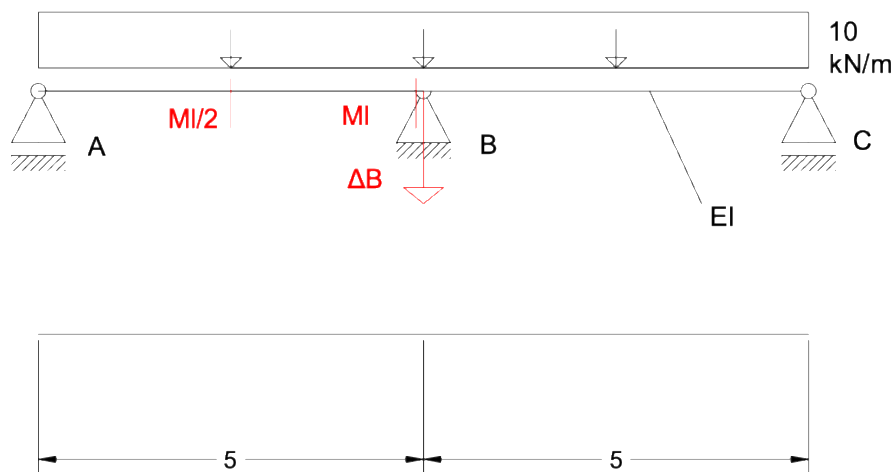
Slika 19: Grafički prikaz ovisnosti momenta u polovini raspona o pomaku ležaja A



Slika 20: Grafički prikaz ovisnosti momenta na ležaju B o pomaku ležaja A

### 3.4.2. Utjecaj veličine slijeganja oslonca B na momente

Na sličan način možemo analizirati momente na istim točkama kao rezultat slijeganja oslonca B, a slikovni prikaz ove analize prikazan je na Slici 21.



Slika 21: Prikaz Momenta  $MI/2$  i  $MI$

Uz iste pretpostavke, gdje su  $L_1 = L_2 = 5$  m, opterećenje  $q = 10$  kNm, dimenzije poprečnog presjeka  $10 \times 23$  cm, te čelik kao materijal s modulom elastičnosti  $E = 2,8 \times 10^8$  kN/m<sup>2</sup>, prikazujemo ovisnost momenta o veličini slijeganja oslonca. U Tablici 2 možemo vidjeti kako promjena veličine slijeganja oslonca B, uz isti poprečni presjek i materijal, utječe na momente u rasponu i na osloncu, kao što je prikazano na Slici 18.

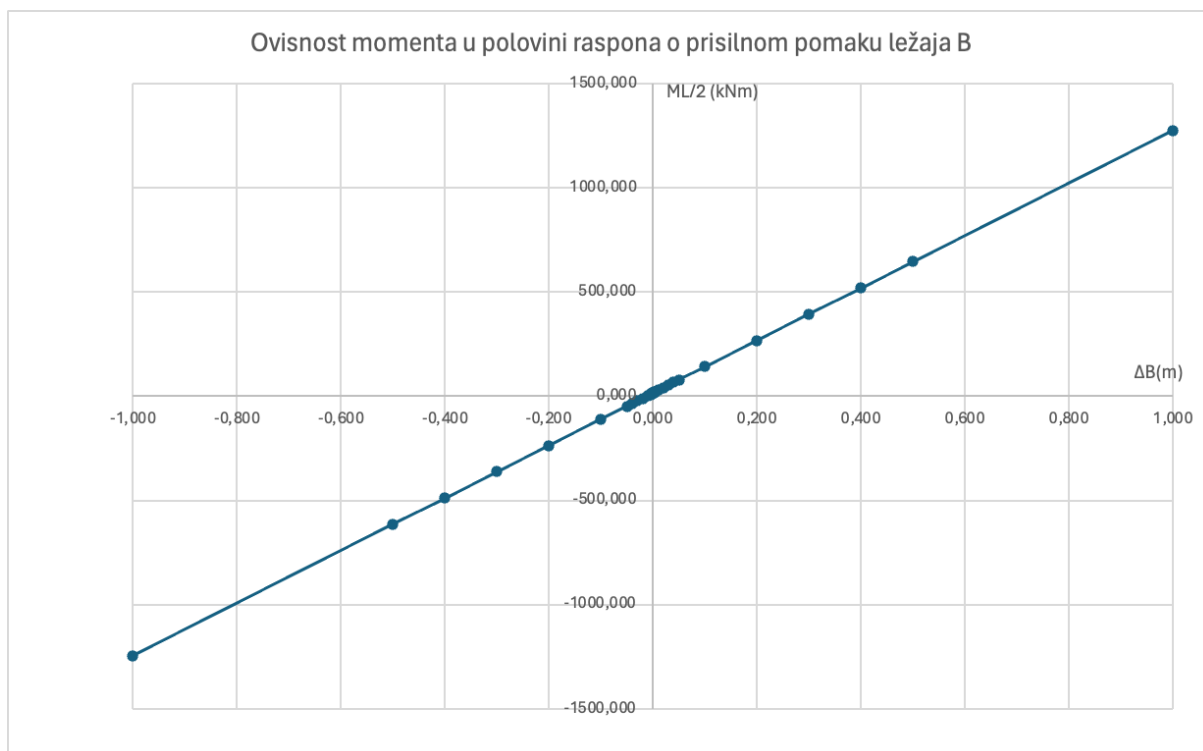
Tablica 2: Ovisnost momenta u polju i na ležaju o prisilnom pomaku ležaja B

$\Delta B$	$MI/2$	$MI$	$\delta_{11}$	$\delta_{10}$	$EI$	$A_y$
-1,000	-1244,375	-2551,250	0,001	0,062	21000	-485,250
-0,500	-614,375	-1291,250	0,001	0,062	21000	-233,250
-0,400	-488,375	-1039,250	0,001	0,062	21000	-182,850
-0,300	-362,375	-787,250	0,001	0,062	21000	-132,450
-0,200	-236,375	-535,250	0,001	0,062	21000	-82,050
-0,100	-110,375	-283,250	0,001	0,062	21000	-31,650
-0,050	-47,375	-157,250	0,001	0,062	21000	-6,450
-0,040	-34,775	-132,050	0,001	0,062	21000	-1,410

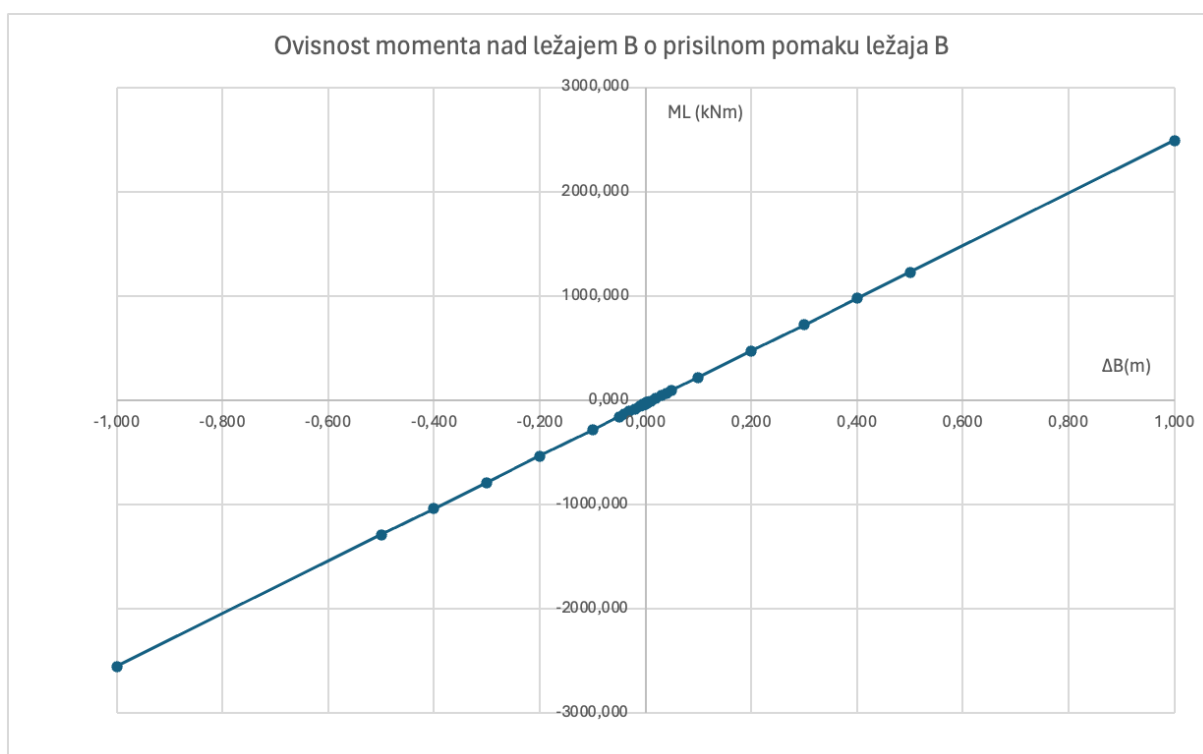
-0,030	-22,175	-106,850	0,001	0,062	21000	3,630
-0,020	-9,575	-81,650	0,001	0,062	21000	8,670
-0,010	3,025	-56,450	0,001	0,062	21000	13,710
-0,005	9,325	-43,850	0,001	0,062	21000	16,230
-0,004	10,585	-41,330	0,001	0,062	21000	16,734
-0,003	11,845	-38,810	0,001	0,062	21000	17,238
-0,002	13,105	-36,290	0,001	0,062	21000	17,742
-0,001	14,365	-33,770	0,001	0,062	21000	18,246
0,000	15,625	-31,250	0,001	0,062	21000	18,750
0,001	16,885	-28,730	0,001	0,062	21000	19,254
0,002	18,145	-26,210	0,001	0,062	21000	19,758
0,003	19,405	-23,690	0,001	0,062	21000	20,262
0,004	20,665	-21,170	0,001	0,062	21000	20,766
0,005	21,925	-18,650	0,001	0,062	21000	21,270
0,010	28,225	-6,050	0,001	0,062	21000	23,790
0,020	40,825	19,150	0,001	0,062	21000	28,830
0,030	53,425	44,350	0,001	0,062	21000	33,870
0,040	66,025	69,550	0,001	0,062	21000	38,910
0,050	78,625	94,750	0,001	0,062	21000	43,950
0,100	141,625	220,750	0,001	0,062	21000	69,150
0,200	267,625	472,750	0,001	0,062	21000	119,550
0,300	393,625	724,750	0,001	0,062	21000	169,950
0,400	519,625	976,750	0,001	0,062	21000	220,350
0,500	645,625	1228,750	0,001	0,062	21000	270,750
1,000	1275,625	2488,750	0,001	0,062	21000	522,750

Prikažemo li ovu ovisnost grafički, ponovno možemo primijetiti već ranije objašnjenu linearnu povezanost. Slike 22 i 23 pružaju grafički prikaz kako se momenti mijenjaju u odnosu na veličinu oslonca B, dajući bolji uvid u njihove iznose s obzirom na različite veličine pomaka.





Slika 22: Grafički prikaz ovisnosti momenta u polovini raspona o pomaku ležaja B



Slika 23: Grafički prikaz ovisnosti momenta na ležaju B o pomaku ležaja B

### 3.4.3. Ovisnost momenta o prisilnom pomaku, raznih materijala

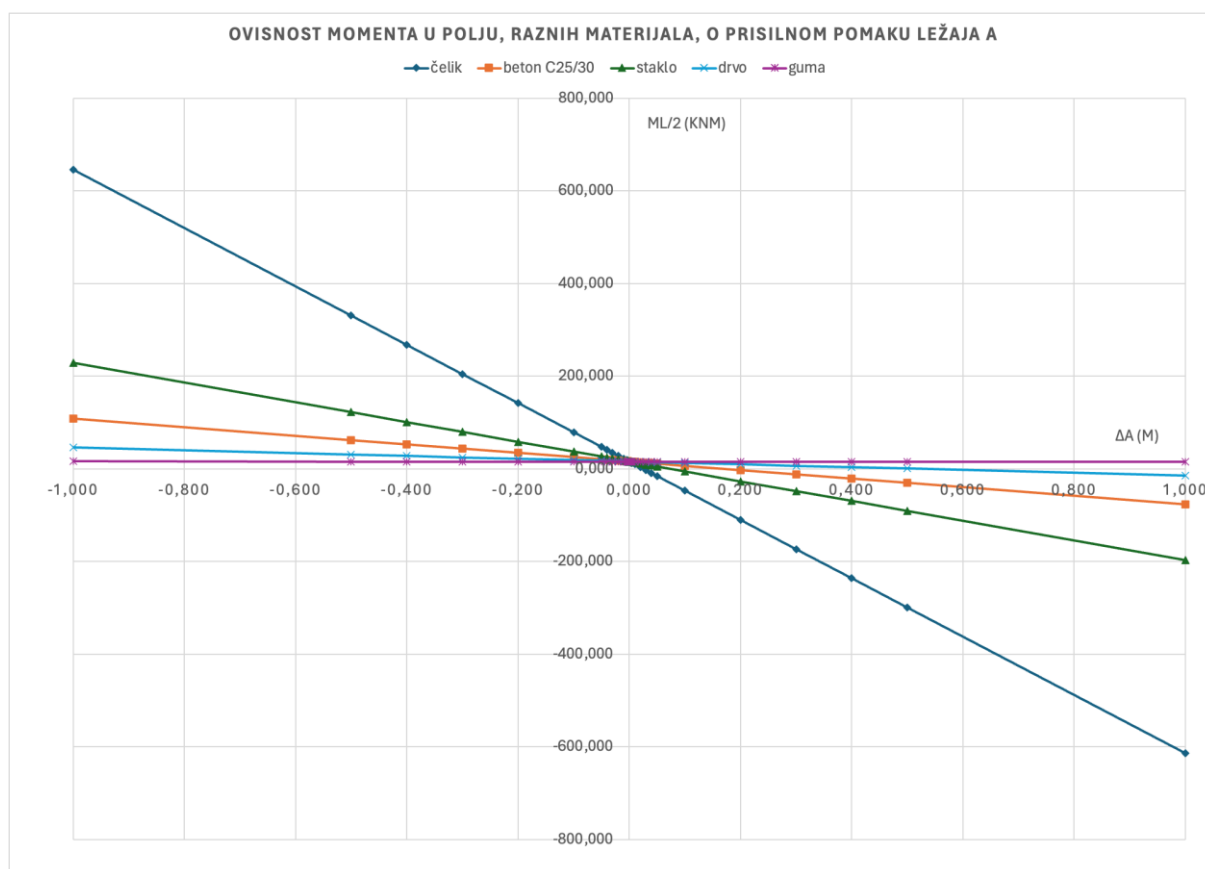
Kao što smo ranije spomenuli, unutarnje sile, u ovom slučaju momenti, ovise o svojstvima materijala. Konkretno, momenti su u direktnoj vezi s modulom elastičnosti materijala, što možemo vidjeti u jednadžbi na Slici 6. U Tablici 3 prikazujemo kako različiti materijali utječu na momente kao rezultat prisilnih pomaka oslonca A.

**Tablica 3:** Ovisnost momenta u polju, raznih materijala, o prisilnom pomaku ležaja A

$\Delta A/\text{materijal}$	čelik	beton C25/30	staklo	drvo	guma
-1,000	645,625	108,398	228,548	46,043	15,929
-0,500	330,625	62,012	122,086	30,834	15,777
-0,400	267,625	52,734	100,794	27,792	15,747
-0,300	204,625	43,457	79,502	24,750	15,716
-0,200	141,625	34,180	58,210	21,709	15,686
-0,100	78,625	24,902	36,917	18,667	15,655
-0,050	47,125	20,264	26,271	17,146	15,640
-0,040	40,825	19,336	24,142	16,842	15,637
-0,030	34,525	18,408	22,013	16,538	15,634
-0,020	28,225	17,480	19,883	16,233	15,631
-0,010	21,925	16,553	17,754	15,929	15,628
-0,005	18,775	16,089	16,690	15,777	15,627
-0,004	18,145	15,996	16,477	15,747	15,626
-0,003	17,515	15,903	16,264	15,716	15,626
-0,002	16,885	15,811	16,051	15,686	15,626
-0,001	16,255	15,718	15,838	15,655	15,625
0,000	15,625	15,625	15,625	15,625	15,625
0,001	14,995	15,532	15,412	15,595	15,625
0,002	14,365	15,439	15,199	15,564	15,624
0,003	13,735	15,347	14,986	15,534	15,624
0,004	13,105	15,254	14,773	15,503	15,624

0,005	12,475	15,161	14,560	15,473	15,623
0,010	9,325	14,697	13,496	15,321	15,622
0,020	3,025	13,770	11,367	15,017	15,619
0,030	-3,275	12,842	9,237	14,712	15,616
0,040	-9,575	11,914	7,108	14,408	15,613
0,050	-15,875	10,986	4,979	14,104	15,610
0,100	-47,375	6,348	-5,667	12,583	15,595
0,200	-110,375	-2,930	-26,960	9,541	15,564
0,300	-173,375	-12,207	-48,252	6,500	15,534
0,400	-236,375	-21,484	-69,544	3,458	15,503
0,500	-299,375	-30,762	-90,836	0,416	15,473
1,000	-614,375	-77,148	-197,298	-14,793	15,321

Tablicu 3 možemo prikazati i grafički radi jasnijeg pregleda ovisnosti momenta o različitim materijalima.



Slika 24: Ovisnost momenta u polju, raznih materijala, o prisilnom pomaku ležaja A

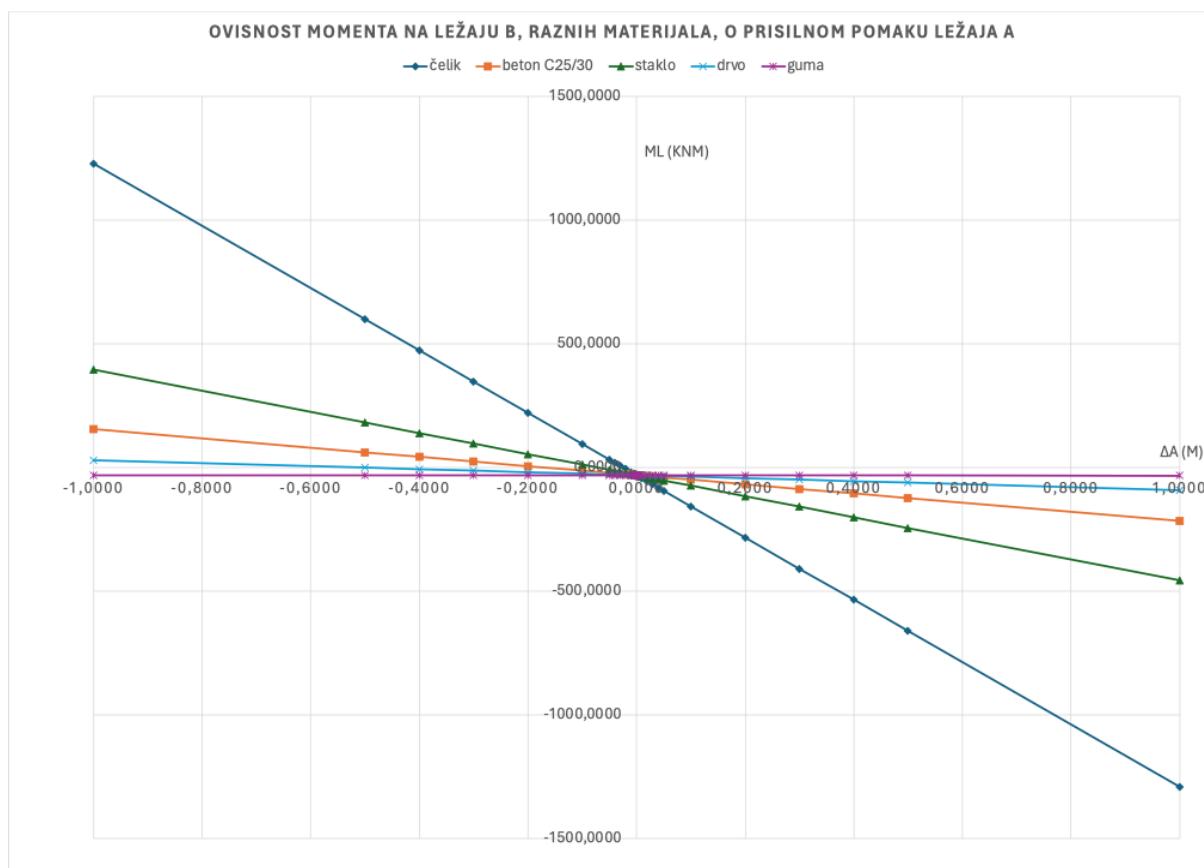
U skladu s tim, možemo prikazati momente na osloncu B koji nastaju uslijed prisilnog pomaka oslonca A. Za početak, prikazat ćemo ih tablično u Tablici 4.

**Tablica 4:** Ovisnost momenta na ležaju B, raznih materijala, o prisilnom pomaku ležaja A

$\Delta A$ /materijal	čelik	beton C25/31	staklo	drvo	guma
-1,000	1228,750	154,297	394,595	29,585	-30,642
-0,500	598,750	61,523	181,673	-0,833	-30,946
-0,400	472,750	42,969	139,088	-6,916	-31,007
-0,300	346,750	24,414	96,504	-13,000	-31,067
-0,200	220,750	5,859	53,919	-19,083	-31,128
-0,100	94,750	-12,695	11,335	-25,167	-31,189
-0,050	31,750	-21,973	-9,958	-28,208	-31,220
-0,040	19,150	-23,828	-14,216	-28,817	-31,226
-0,030	6,550	-25,684	-18,475	-29,425	-31,232
-0,020	-6,050	-27,539	-22,733	-30,033	-31,238
-0,010	-18,650	-29,395	-26,992	-30,642	-31,244
-0,005	-24,950	-30,322	-29,121	-30,946	-31,247
-0,004	-26,210	-30,508	-29,547	-31,007	-31,248
-0,003	-27,470	-30,693	-29,972	-31,067	-31,248
-0,002	-28,730	-30,879	-30,398	-31,128	-31,249
-0,001	-29,990	-31,064	-30,824	-31,189	-31,249
0,000	-31,250	-31,250	-31,250	-31,250	-31,250
0,001	-32,510	-31,436	-31,676	-31,311	-31,251
0,002	-33,770	-31,621	-32,102	-31,372	-31,251
0,003	-35,030	-31,807	-32,528	-31,433	-31,252
0,004	-36,290	-31,992	-32,953	-31,493	-31,252
0,005	-37,550	-32,178	-33,379	-31,554	-31,253
0,010	-43,850	-33,105	-35,508	-31,858	-31,256

0,020	-56,450	-34,961	-39,767	-32,467	-31,262
0,030	-69,050	-36,816	-44,025	-33,075	-31,268
0,040	-81,650	-38,672	-48,284	-33,683	-31,274
0,050	-94,250	-40,527	-52,542	-34,292	-31,280
0,100	-157,250	-49,805	-73,835	-37,334	-31,311
0,200	-283,250	-68,359	-116,419	-43,417	-31,372
0,300	-409,250	-86,914	-159,004	-49,501	-31,433
0,400	-535,250	-105,469	-201,588	-55,584	-31,493
0,500	-661,250	-124,023	-244,173	-61,668	-31,554
1,000	-1291,250	-216,797	-457,095	-92,085	-31,858

Ako bismo Tablicu 4 prikazali grafički, dobili bismo sljedeći prikaz koji jasno ilustrira ovisnost momenata na osloncu B uslijed prisilnog pomaka oslonca A.



Slika 25: Ovisnost momenta na ležaju B, raznih materijala, o prisilnom pomaku ležaja A

Zanimljivo je primijetiti kako krući materijali, odnosno oni s većim modulom elastičnosti, akumuliraju značajno veće sile u usporedbi s elastičnijim materijalima, koji imaju manji modul elastičnosti. Razlog za to leži u izrazima prikazanim na Slici 6, nastavno u izrazu 2, te konačno u izrazima sa Slike 9. Pogledajmo detaljnije izraze sa Slike 6. Uočavamo da je modul elastičnosti obrnuto proporcionalan koeficijentima fleksibilnosti. To znači da, kako modul elastičnosti raste, koeficijenti fleksibilnosti postaju manji. Kada tu pretpostavku primijenimo na izraz 2, vidimo da su koeficijenti fleksibilnosti obrnuto proporcionalni nepoznanici  $X_1$ . Dakle, što su koeficijenti fleksibilnosti manji,  $X_1$  postaje veći. Konačno, sa Slike 9 zaključujemo da, kako  $X_1$  raste, tako se povećavaju i momenti, što objašnjava zašto krući materijali stvaraju veće sile.

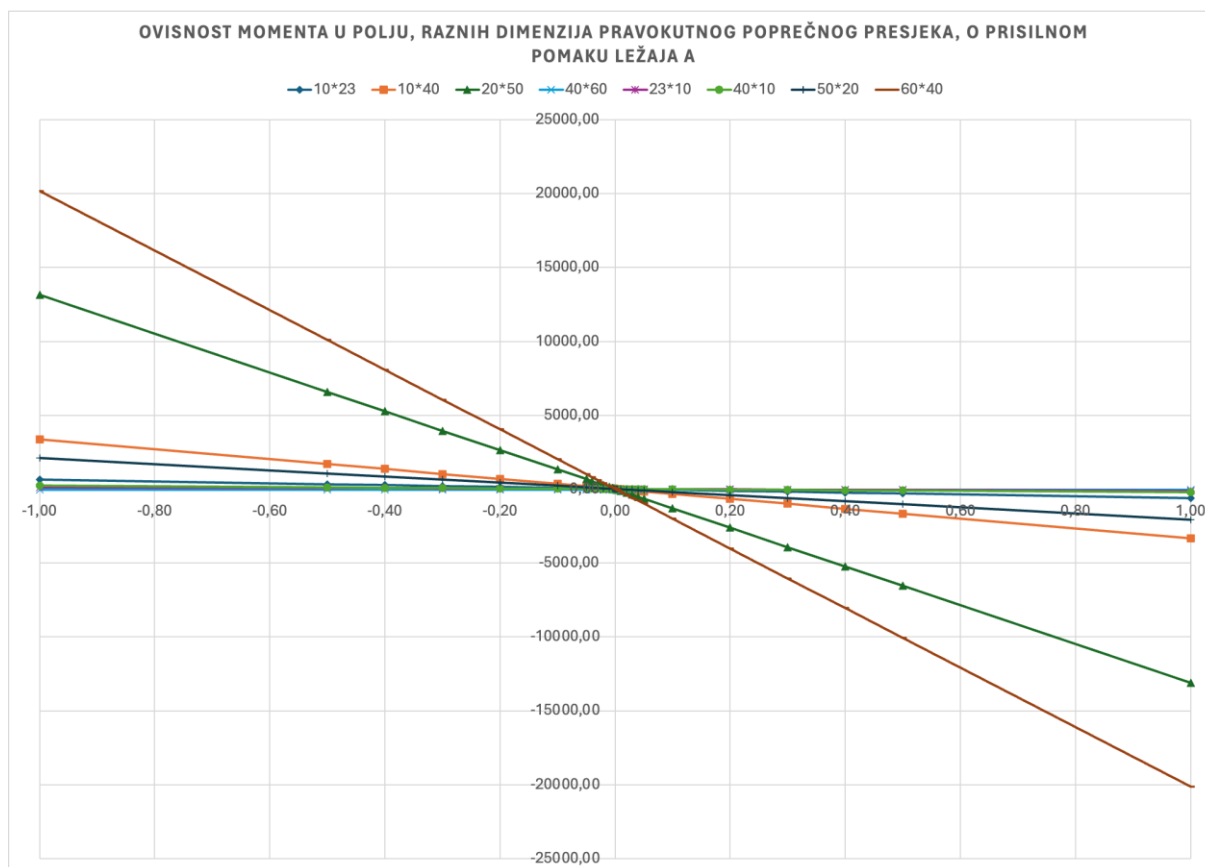
#### 3.4.4. Ovisnost momenta o prisilnom pomaku, materijala s različitim dimenzijama poprečnog presjeka

Na sličan način kao što smo uspoređivali momente uslijed prisilnog pomaka oslonca A za različite materijale istog poprečnog presjeka, možemo usporediti momente za isti materijal, ali s različitim dimenzijama poprečnog presjeka. Pretpostavit ćemo da je poprečni presjek pravokutnog oblika. Rezultate ćemo prikazati tablično i grafički. Prvo ćemo prikazati momente u rasponu (Tablica 5, Slika 26), a zatim momente na osloncu B (Tablica 6, Slika 27) kao posljedicu prisilnog pomaka oslonca A.

**Tablica 5:** Ovisnost momenta u polju, raznih dimenzija pravokutnog poprečnog presjeka, o prisilnom pomaku ležaja A

$\Delta A/b \cdot h$	10*23	10*40	20*50	40*60	23*10	40*10	50*20	60*40
-1,00	654,39	3375,63	13140,63	-31,25	136,38	225,63	2115,63	20175,63
-0,50	335,01	1695,63	6578,13	-31,25	76,00	120,63	1065,63	10095,63
-0,40	271,13	1359,63	5265,63	-31,25	63,93	99,63	855,63	8079,63
-0,30	207,26	1023,63	3953,13	-31,25	51,85	78,63	645,63	6063,63
-0,20	143,38	687,63	2640,63	-31,25	39,78	57,63	435,63	4047,63
-0,10	79,50	351,63	1328,13	-31,25	27,70	36,63	225,63	2031,63
-0,05	47,56	183,63	671,88	-31,25	21,66	26,13	120,63	1023,63
-0,04	41,18	150,03	540,63	-31,25	20,46	24,03	99,63	822,03
-0,03	34,79	116,43	409,38	-31,25	19,25	21,93	78,63	620,43
-0,02	28,40	82,83	278,13	-31,25	18,04	19,83	57,63	418,83
-0,01	22,01	49,23	146,88	-31,25	16,83	17,73	36,63	217,23

-0,01	18,82	32,43	81,25	-31,25	16,23	16,68	26,13	116,43
0,00	18,18	29,07	68,13	-31,25	16,11	16,47	24,03	96,27
0,00	17,54	25,71	55,00	-31,25	15,99	16,26	21,93	76,11
0,00	16,90	22,35	41,88	-31,25	15,87	16,05	19,83	55,95
0,00	16,26	18,99	28,75	-31,25	15,75	15,84	17,73	35,79
0,00	15,63	15,63	15,63	-31,25	15,63	15,63	15,63	15,63
0,00	14,99	12,26	2,50	-31,25	15,50	15,41	13,52	-4,54
0,00	14,35	8,90	-10,63	-31,25	15,38	15,20	11,42	-24,70
0,00	13,71	5,54	-23,75	-31,25	15,26	14,99	9,32	-44,86
0,00	13,07	2,18	-36,88	-31,25	15,14	14,78	7,22	-65,02
0,01	12,43	-1,18	-50,00	-31,25	15,02	14,57	5,12	-85,18
0,01	9,24	-17,98	-115,63	-31,25	14,42	13,52	-5,38	-185,98
0,02	2,85	-51,58	-246,88	-31,25	13,21	11,42	-26,38	-387,58
0,03	-3,54	-85,18	-378,13	-31,25	12,00	9,32	-47,38	-589,18
0,04	-9,93	-118,78	-509,38	-31,25	10,80	7,22	-68,38	-790,78
0,05	-16,31	-152,38	-640,63	-31,25	9,59	5,12	-89,38	-992,38
0,10	-48,25	-320,38	-1296,88	-31,25	3,55	-5,38	-194,38	-2000,38
0,20	-112,13	-656,38	-2609,38	-31,25	-8,53	-26,38	-404,38	-4016,38
0,30	-176,01	-992,38	-3921,88	-31,25	-20,60	-47,38	-614,38	-6032,38
0,40	-239,88	-	-5234,38	-31,25	-32,68	-68,38	-824,38	-8048,38
		1328,38						
0,50	-303,76	-	-6546,88	-31,25	-44,75	-89,38	-	-
		1664,38					1034,38	10064,38
1,00	-623,14	-	-	-31,25	-105,13	-194,38	-	-
		3344,38	13109,38				2084,38	20144,38



**Slika 26:** Ovisnost momenta u polju, raznih dimenzija pravokutnog poprečnog presjeka, o prisilnom pomaku ležaja A

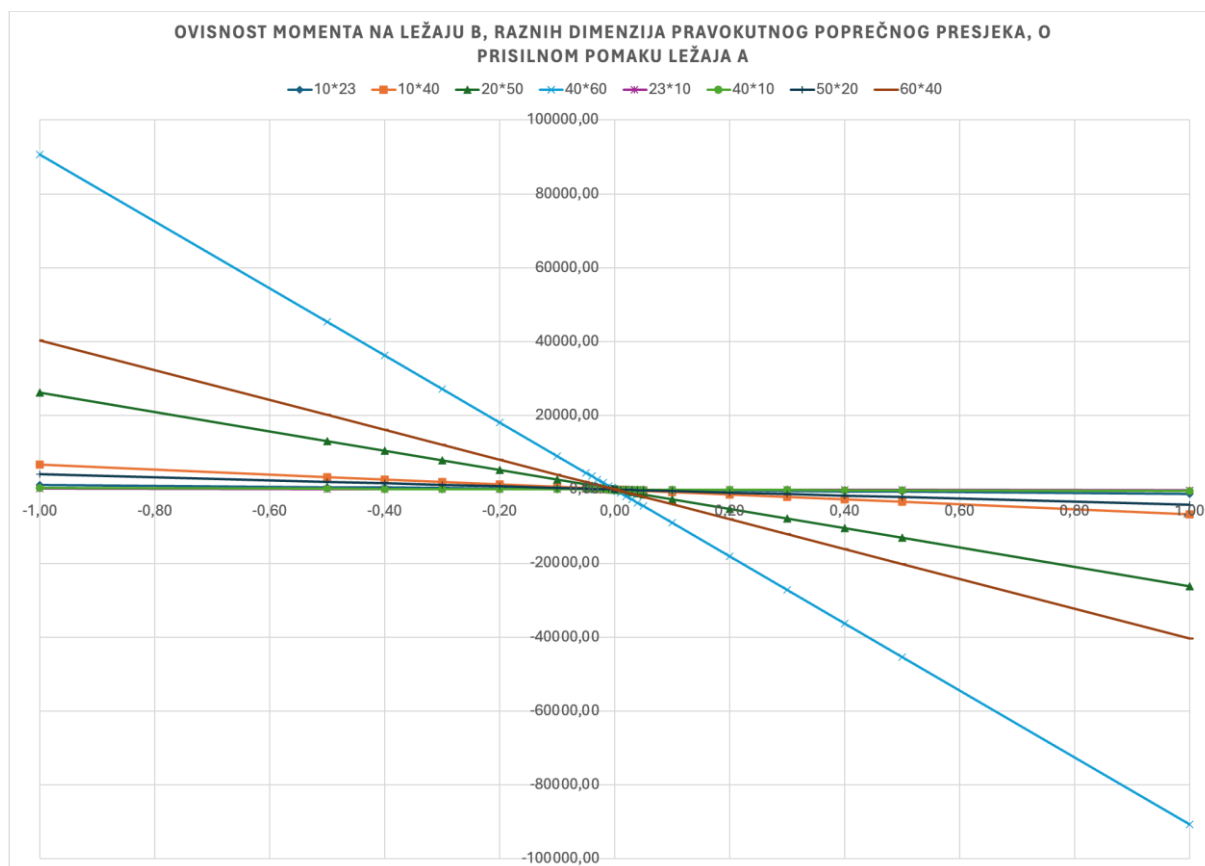
Sada ćemo prikazati vrijednosti momenata na osloncu B.

**Tablica 6:** Ovisnost momenta na ležaju B, raznih dimenzija pravokutnog poprečnog presjeka, o prisilnom pomaku ležaja A

$\Delta A/b \cdot h$	10*23	10*40	20*50	40*60	23*10	40*10	50*20	60*40
-1,00	1246,29	6688,75	26218,75	90688,75	210,25	388,75	4168,75	40288,75
-0,50	607,52	3328,75	13093,75	45328,75	89,50	178,75	2068,75	20128,75
-0,40	479,76	2656,75	10468,75	36256,75	65,35	136,75	1648,75	16096,75
-0,30	352,01	1984,75	7843,75	27184,75	41,20	94,75	1228,75	12064,75
-0,20	224,26	1312,75	5218,75	18112,75	17,05	52,75	808,75	8032,75
-0,10	96,50	640,75	2593,75	9040,75	-7,10	10,75	388,75	4000,75
-0,05	32,63	304,75	1281,25	4504,75	-19,18	-10,25	178,75	1984,75
-0,04	19,85	237,55	1018,75	3597,55	-21,59	-14,45	136,75	1581,55



-0,03	7,08	170,35	756,25	2690,35	-24,01	-18,65	94,75	1178,35
-0,02	-5,70	103,15	493,75	1783,15	-26,42	-22,85	52,75	775,15
-0,01	-18,47	35,95	231,25	875,95	-28,84	-27,05	10,75	371,95
-0,01	-24,86	2,35	100,00	422,35	-30,04	-29,15	-10,25	170,35
0,00	-26,14	-4,37	73,75	331,63	-30,28	-29,57	-14,45	130,03
0,00	-27,42	-11,09	47,50	240,91	-30,53	-29,99	-18,65	89,71
0,00	-28,69	-17,81	21,25	150,19	-30,77	-30,41	-22,85	49,39
0,00	-29,97	-24,53	-5,00	59,47	-31,01	-30,83	-27,05	9,07
0,00	-31,25	-31,25	-31,25	-31,25	-31,25	-31,25	-31,25	-31,25
0,00	-32,53	-37,97	-57,50	-121,97	-31,49	-31,67	-35,45	-71,57
0,00	-33,81	-44,69	-83,75	-212,69	-31,73	-32,09	-39,65	-111,89
0,00	-35,08	-51,41	-110,00	-303,41	-31,97	-32,51	-43,85	-152,21
0,00	-36,36	-58,13	-136,25	-394,13	-32,22	-32,93	-48,05	-192,53
0,01	-37,64	-64,85	-162,50	-484,85	-32,46	-33,35	-52,25	-232,85
0,01	-44,03	-98,45	-293,75	-938,45	-33,67	-35,45	-73,25	-434,45
0,02	-56,80	-165,65	-556,25	-1845,65	-36,08	-39,65	-115,25	-837,65
0,03	-69,58	-232,85	-818,75	-2752,85	-38,50	-43,85	-157,25	-1240,85
0,04	-82,35	-300,05	-1081,25	-3660,05	-40,91	-48,05	-199,25	-1644,05
0,05	-95,13	-367,25	-1343,75	-4567,25	-43,33	-52,25	-241,25	-2047,25
0,10	-159,00	-703,25	-2656,25	-9103,25	-55,40	-73,25	-451,25	-4063,25
0,20	-286,76	-	-5281,25	-	-79,55	-115,25	-871,25	-8095,25
		1375,25		18175,25				
0,30	-414,51	-	-7906,25	-	-103,70	-157,25	-	-
		2047,25		27247,25			1291,25	12127,25
0,40	-542,26	-	-	-	-127,85	-199,25	-	-
		2719,25	10531,25	36319,25			1711,25	16159,25
0,50	-670,02	-	-	-	-152,00	-241,25	-	-
		3391,25	13156,25	45391,25			2131,25	20191,25
1,00	-	-	-	-	-272,75	-451,25	-	-
	1308,79	6751,25	26281,25	90751,25			4231,25	40351,25



**Slika 27:** Ovisnost momenta na ležaju B, raznih dimenzija pravokutnog poprečnog presjeka, o prisilnom pomaku ležaja A

Analizirajući prikazane grafove, zanimljivo je primijetiti da se veličina momenata ne može jednostavno povezati s površinom poprečnog presjeka. Naime, pravokutni poprečni presjek dimenzija 10\*40 cm generira veće momente od presjeka dimenzija 50\*20 cm. Da bismo to bolje razumjeli, krenimo od osnova. Prema analizi formula koje povezuju modul elastičnosti s momentom, sličan princip vrijedi i za moment tromosti. Što je moment tromosti veći, to će momenti u gredi biti veći. Međutim, moment tromosti nije izravno proporcionalan površini poprečnog presjeka. Podsjetimo se da je formula za moment tromosti pravokutnog poprečnog presjeka:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (28)$$

gdje je  $b$  širina, a  $h$  visina presjeka. Ova formula jasno pokazuje da je moment tromosti značajnije ovisan o visini presjeka nego o širini, što objašnjava zašto presjeci različitih dimenzija, unatoč sličnoj površini, mogu imati različite momente.

## 4. ZAKLJUČAK

Ovaj rad bavio se analizom utjecaja slijeganja oslonaca na reakcije i unutarnje sile u kontinuiranim gredama, koristeći metodu sila. Glavni cilj bio je prikazati kako slijeganje oslonaca može utjecati na stabilnost i raspodjelu unutarnjih sila u statički neodređenim sustavima, te ponuditi rješenja za smanjenje negativnih posljedica ovog fenomena.

Kroz teorijski dio rada obrađeni su pojmovi poput slijeganja oslonaca, različitih vrsta slijeganja, uzroka te metoda prevencije. Metoda sila je detaljno prikazana kao ključna metoda za analizu statički neodređenih konstrukcija. Primjeri iz prakse, poput Millennium Towera, pokazali su koliko je važno pravilno predvidjeti slijeganje temelja i primijeniti odgovarajuće inženjerske metode za rješavanje ovih izazova.

U razradi teme korišteni su različiti alati. AutoCAD je korišten za izradu slikovnih prikaza konstrukcija i rezultata analiza, dok je Excel korišten za tablične proračune reakcija i unutarnjih sila. Ovi alati omogućili su precizne grafičke i numeričke prikaze rezultata, čime je osigurana točnost proračuna i razumijevanje utjecaja slijeganja na konstrukcije.

Rezultati provedene analize pokazali su da slijeganje oslonaca značajno utječe na raspodjelu sila unutar kontinuiranih greda. Metodom sila uspješno su izračunate reakcije i unutarnje sile, što potvrđuje da je metoda učinkovita za analizu ovakvih konstrukcijskih problema. Pretpostavke o važnosti pravilnog proračuna i predviđanja slijeganja su potvrđene, dok su pogrešne procjene u projektu poput Millennium Towera rezultirale ozbiljnim strukturnim problemima.

Ovaj rad objašnjava kako različiti materijali i poprečni presjeci mogu utjecati na reakcije i sile unutar grede te naglašava važnost pravilnog dimenzioniranja i istraživanja tla u fazi projektiranja kako bi se izbjegle daljnje posljedice, sanacije i veće štete. Rezultati istraživanja potvrđuju nužnost ispravne analize i pripreme u ranoj fazi projekta, čime se osigurava sigurnost i trajnost građevinskih konstrukcija.

---

## POPIS LITERATURE

- [1] **Akmađić, V., Trogrlić, B., Prusac, K.:** *Građevna statika II - Metoda sila kroz primjere*, Sveučilište u Mostaru, 2016.
- [2] The Constructor (n.d.). **Foundation Settlement - Types and Causes.** [online] Dostupno na: <https://theconstructor.org/geotechnical/foundation-settlement-types-causes/6544/> [Pristupio 20. kolovoza 2024.].
- [3] Tensar (n.d.). **Understanding Settlement in Geotechnical Engineering.** [online] Dostupno na: <https://blog.tensar.com.hr/understanding-settlement-in-geotechnical-engineering-0> [Pristupio 20. kolovoza 2024.].
- [4] Geo Web Online (n.d.). **Fundaciones Asentamientos Diferenciales.** [online] Dostupno na: <https://geo-webonline.com/en/fundaciones-asentamientos-diferenciales/> [Pristupio 20. kolovoza 2024.].
- [5] CED Engineering (n.d.). **Settlement of the Foundation Structures - US.** [online] Dostupno na: <https://www.cedengineering.com/userfiles/S01-015%20-%20Settlement%20of%20the%20Foundation%20Structures%20-%20US.pdf> [Pristupio 20. kolovoza 2024.].
- [6] SFist (2021). **Old Bay Clay and Foundation Piles: Millennium Tower's Tilting Troubles and Fixes Finally well explained** [online] Dostupno na: <https://sfist.com/2021/11/17/old-bay-clay-and-foundation-piles-millennium-towers-tilting-troubles-and-fixes-finally-well-explained/> [Pristupio 30. kolovoza 2024.].
- [7] The Architect's Newspaper (2021). **San Francisco's Millennium Tower Halts Foundation Work as Sinking Intensifies.** [online] Dostupno na: <https://www.archpaper.com/2021/08/san-franciscos-millennium-tower-halts-foundation-work-as-sinking-intensifies/> [Pristupio 30. kolovoza 2024.].
- [8] Practical Engineering (2021). **What Really Happened at the Millennium Tower.** [online] Dostupno na: <https://practical.engineering/blog/2021/11/10/what-really-happened-at-the-millennium-tower> [Pristupio 13. rujna 2024.].
- [9] Britannica (n.d.). **Leaning Tower of Pisa.** [online] Dostupno na: <https://www.britannica.com/topic/Leaning-Tower-of-Pisa> [Pristupio 30. kolovoza 2024.].
- [10] ASCE Library (n.d.). **Settlement of Foundations.** [online] Dostupno na: <https://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%29GT.1943-5606.0002264> [Pristupio 30. kolovoza 2024.].
- [11] **Fresl, K. :** *Građevna statika 1.*, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, 2017.

- [12] **Radić, J.** : Uvod u mostarstvo, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, 2009.
- [13] **Gidak, P., Šamec, E.** : *Statički neodređeni sistemi*, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, 2022.
- [14] Vereshchagin, (n.d.). **Tablice integrala - VERESHCHAGIN Metoda sila**. [online] Dostupno na: <https://www.scribd.com/document/322594964/Tablice-integrala-VERESHCHAGIN-Metoda-sila> [Pristupio 5. rujna 2024.].

## POPIS SLIKA

<b>Slika 1:</b> Vrste slijeganja (Izvor: [4]) .....	3
<b>Slika 2:</b> Tlo ispod Millenium Towera (Izvor: [6]) .....	4
<b>Slika 3:</b> Rješenje slijeganja Millenium Towera (Izvor: [8]) .....	6
<b>Slika 4:</b> Primjer kontinuirane grede .....	8
<b>Slika 5:</b> Jednadžbe kompatibilnosti (Izvor: [13]) .....	10
<b>Slika 6:</b> Koeficijenti fleksibilnosti (Izvor: [13]) .....	11
<b>Slika 7:</b> Vereščaginov teorem (Izvor: [11]) .....	11
<b>Slika 8:</b> Tablica integrala za metodu Vereščagin (Izvor: [14]) .....	12
<b>Slika 9:</b> Formule za unutarnje sile metodom sila (Izvor: [13]) .....	12
<b>Slika 10:</b> Primjer kontinuirane grede pod opterećenjem $q$ .....	13
<b>Slika 11:</b> Primjeri osnovnih sustava .....	14
<b>Slika 12:</b> $M_0$ dijagram uslijed slijeganja oslonca A .....	15
<b>Slika 13:</b> Momentni dijagram od jedinične sile .....	16
<b>Slika 14:</b> Primjer kontinuirane grede pod opterećenjem $q$ .....	17
<b>Slika 15:</b> Osnovni sustav za primjer prisilnog pomaka ležaja B .....	18
<b>Slika 16:</b> $M_0$ dijagram uslijed slijeganja oslonca B .....	19
<b>Slika 17:</b> $M_1$ dijagram .....	20
<b>Slika 18:</b> Prikaz Momenta $M_{l/2}$ i $M_l$ .....	22
<b>Slika 19:</b> Grafički prikaz ovisnosti momenta u polovini raspona o pomaku ležaja A .....	24
<b>Slika 20:</b> Grafički prikaz ovisnosti momenta na ležaju B o pomaku ležaja A .....	24
<b>Slika 21:</b> Prikaz Momenta $M_{l/2}$ i $M_l$ .....	25
<b>Slika 22:</b> Grafički prikaz ovisnosti momenta u polovini raspona o pomaku ležaja B .....	27
<b>Slika 23:</b> Grafički prikaz ovisnosti momenta na ležaju B o pomaku ležaja B .....	27
<b>Slika 24:</b> Ovisnost momenta u polju, raznih materijala, o prisilnom pomaku ležaja A .....	29
<b>Slika 25:</b> Ovisnost momenta na ležaju B, raznih materijala, o prisilnom pomaku ležaja A .....	31
<b>Slika 26:</b> Ovisnost momenta u polju, raznih dimenzija pravokutnog poprečnog presjeka, o prisilnom pomaku ležaja A .....	34
<b>Slika 27:</b> Ovisnost momenta na ležaju B, raznih dimenzija pravokutnog poprečnog presjeka, o prisilnom pomaku ležaja A .....	36

## POPIS TABLICA

Tablica 1: Ovisnost momenta u polju i na ležaju o prisilnom pomaku ležaja A.....	22
Tablica 2: Ovisnost momenta u polju i na ležaju o prisilnom pomaku ležaja B.....	25
Tablica 3: Ovisnost momenta u polju, raznih materijala, o prisilnom pomaku ležaja A .....	28
Tablica 4: Ovisnost momenta na ležaju B, raznih materijala, o prisilnom pomaku ležaja A ....	30
Tablica 5: Ovisnost momenta u polju, raznih dimenzija pravokutnog poprečnog presjeka, o prisilnom pomaku ležaja A .....	32
Tablica 6: Ovisnost momenta na ležaju B, raznih dimenzija pravokutnog poprečnog presjeka, o prisilnom pomaku ležaja A .....	34