

# Vlačno-tlačna analogija

---

**Rogošić, Ivan**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:759061>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-06**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Ivan Rogošić

# VLAČNO-TLAČNA ANALOGIJA

ZAVRŠNI ISPIT

Zagreb, 2024. g.



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Ivan Rogošić

# VLAČNO-TLAČNA ANALOGIJA

ZAVRŠNI ISPIT

Prof. dr. sc. Krešimir Fresl

Zagreb, 2024. g.



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Ivan Rogošić

# **HANGING CLOTH ANALOGY**

FINAL EXAM

Prof. dr. sc. Krešimir Fresl

Zagreb, 2024. g.



OBRAZAC 3

POTVRDA O POZITIVNOJ OCJENI PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Student/ica :

Ivan Rogošić (Ime i prezime)	0082068431 (JMBAG)
---------------------------------	-----------------------

zadovoljio/la je na pisanom dijelu završnog ispita pod naslovom:

Vlačno-tlačna analogija  
(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

Hanging cloth analogy  
(Naslov teme završnog ispita na engleskom jeziku)

i predlaže se provođenje daljnjeg postupka u skladu s Pravilnikom o završnom ispitu i diplomskom radu Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta.

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu znanstvenog projekta: (upisati ako je primjenjivo)

(Naziv projekta, šifra projekta, voditelj projekta)

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu stručne prakse na Fakultetu: (upisati ako je primjenjivo)

(Ime poslodavca, datum početka i kraja stručne prakse)

Datum: 16. rujna 2024.

Mentor: Krešimir Fresl

Potpis mentora:

Komentor: Elizabeta Šamec



OBRAZAC 5

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja :

Ivan Rogošić, 0082068431

(Ime i prezime, JMBAG)

student/ica Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta ovim putem izjavljujem da je moj pisani dio završnog ispita pod naslovom:

Vlačno-tlačna analogija

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

izvorni rezultat mogega rada te da se u izradi istoga nisam koristio/la drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

Datum:

16.9.2024.

Potpis:

Ivan Rogošić



OBRAZAC 6

IZJAVA O ODOBRENJU ZA POHRANU I OBJAVU PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Ja:

Ivan Rogošić, 80372290116

(Ime i prezime, OIB)

ovom izjavom potvrđujem da sam autor/ica predanog pisanog dijela završnog ispita i da sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti odgovara sadržaju dovršenog i obranjenog pisanog dijela završnog ispita pod naslovom:

Vlačno-tlačna analogija

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

koji je izrađen na sveučilišnom prijediplomskom studiju Građevinarstvo Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta pod mentorstvom:

prof.dr.sc. Krešimir Fresl

(Ime i prezime mentora)

i obranjen dana:

24.9.2024.

(Datum obrane)

Suglasan/suglasna sam da pisani dio završnog ispita bude javno dostupan, te da se trajno pohrani u digitalnom repozitoriju Građevinskog fakulteta, repozitoriju Sveučilišta u Zagrebu te nacionalnom repozitoriju.

Datum:

16.9.2024.

Potpis:

Ivan Rogošić

## ZAHVALE

Od srca zahvaljujem mentoru profesoru Freslu na savjetima i pomoći pri izradi ovoga završnog rada i ranije tijekom studija.

Hvala obitelji na beskrajnoj ljubavi i podršci.

Hvala kolegama na vrhunskoj suradnji tijekom naše prve tri godine studija.

Hvala prijateljima s kojima dijelim svakodnevne brige i veselja.



## SAŽETAK

U radu je obrađena vlačno-tlačna analogija. Temeljna zamisao proizlazi iz Hookeovog uočavanja analogije prijenosa vlačnih sila u ovješnom užetu ili lancu i tlačnih sila u zidanom luku, što uvjetuje njegov idealan oblik – lančanicu. Navedeni su značajni primjeri njezine primjene u povijesti graditeljstva. Opisan je povijesni razvoj modeliranja lukova, uz spomen svodova i kupola kao tlačnih konstrukcija, sve do uklapanja u modernu graničnu analizu pomoću ravnotežnog pristupa. Nakon toga navedeni su načini primjene fizičkih modela u oblikovanju zidanih građevina i ljuski, a koji su zasnovani na vlačno-tlačnoj analogiji. Slijedi povijesni razvoj gipkih vlačnih konstrukcija te suvremeni numerički model za njihovo oblikovanje - metoda gustoće sila. Pokazan je i primjer uporabe metode gustoće sila u oblikovanju tlačnih konstrukcija. Naposljetku, izrađeni su primjeri koji demonstriraju primjenu verižnog poligona u analizi i oblikovanju tlačne linije zidanih lukova te u oblikovanju tlačnih ljuski.

**Ključne riječi:** lančanica; luk; ravnoteža; tlačna linija; verižni poligon; ljuska; gustoća sila

## SUMMARY

Subject of this final exam thesis is the tension-compression analogy (which is today usually called hanging cloth analogy). The basic idea stems from Hooke's analogy of the transmission of tensile forces in a suspended rope or a chain and the compressive forces in a masonry arch, which determines its ideal form - a catenary. Significant examples of its application in the history of architecture are listed. The historical approach to masonry arch modeling is described, with the mention of vaults and domes as compression structures, up until modern times when the equilibrium approach to arch design and structural analysis is fitted into the frame of limit analysis. After that, the paper shows the ways of applying physical models in the design of masonry buildings and shells, which are based on the hanging cloth analogy. What follows is the historical development of flexible tensile structures and a modern numerical model for their design using the force density method. An example of the use of the force density method in the design of compression structures is also shown. Finally, examples were made that demonstrate the application of the funicular polygon in the analysis and shape of the thrust line of masonry arches and in the design of compression shells.

**Key words:** catenary; arch; equilibrium; thrust line; funicular polygon; shell; force density

---

## SADRŽAJ

<b>ZAHVALE</b> .....	<b>i</b>
<b>SAŽETAK</b> .....	<b>ii</b>
<b>SUMMARY</b> .....	<b>iii</b>
<b>SADRŽAJ</b> .....	<b>iv</b>
<b>1. UVOD</b> .....	<b>1</b>
<b>2. METODE I TEHNIKE RADA</b> .....	<b>2</b>
<b>3. ZAMISAO I TEORIJSKA PODLOGA</b> .....	<b>3</b>
3.1. Temeljna ideja .....	3
3.2. Lančanica.....	4
3.3. Povijesni pregled primjene lančanice.....	6
<b>4. RAVNOTEŽNI PRISTUP PRORAČUNU LUKOVA</b> .....	<b>11</b>
4.1. Povijesni razvoj metoda proračuna.....	11
4.2. Verižni poligon.....	15
4.3. Tlačna linija i primjena u okviru granične analize.....	16
<b>5. FIZIČKI MODELI</b> .....	<b>20</b>
5.1. Gaudíjeva primjena visećih modela.....	20
5.2. Islerovi modeli za oblikovanje ljuski .....	23
<b>6. PREDNAPETE GIPKE KONSTRUKCIJE OD UŽADI</b> .....	<b>29</b>
6.1. Općenito.....	29
6.2. Povijesni pregled .....	29
6.3. Proračunski model mreže kabela.....	34
6.4. Metoda gustoće sila.....	37
6.5. Primjena metode gustoće sila na tlačne konstrukcije s unutarnjim rebrima.....	38
<b>7. PRIMJERI</b> .....	<b>41</b>
7.1. Crtanje tlačne linije pomoću verižnog poligona.....	41
7.2. Analiza mosta Puente del Diablo u Martorellu.....	42
7.3. Oblikovanje ljuske pomoću verižnog poligona.....	44

<b>8. ZAKLJUČAK.....</b>	<b>48</b>
<b>POPIS LITERATURE .....</b>	<b>49</b>
<b>POPIS SLIKA.....</b>	<b>54</b>

## 1. UVOD

Sve do 20. stoljeća ziđe je bilo najzastupljeniji materijal u graditeljstvu. Iako se danas više ne grade zidani lukovi i svodovi, za potrebe očuvanja bogatog arhitektonskog nasljedstva i ocjene stanja postojećih konstrukcija toga tipa potrebno je dobro razumijevanje njihova ponašanja. Prije razvitka teorije zidanih lukova i svodova za određivanje njihovih dimenzija i dimenzija kontrafora koji ih podupiru korištena su iskustvena pravila i zakoni aritmetičkih proporcija. Na taj način bilo je moguće izgraditi brojne velebne građevine od kojih mnoge stoje i danas, svjedočeći o umijeću starih majstora graditelja. Međutim, prekretnica u razumijevanju lukova i svodova kao tlačnih konstrukcija bila je ideja Roberta Hookea kojom je uočio statičku analogiju između ovješene užeta i krutog luka. U ovom radu bit će opisana njezina primjena u okviru razvoja teorije i razumijevanja tlačnih konstrukcija kao što su lukovi, svodovi i kupole, te uklapanje u današnju teoriju konstrukcija.

S druge strane, razvoj gipkih vlačnih konstrukcija kreće od šatora ranih nomadskih plemena i visećih mostova od bambusove užadi u Kini. Za viseće je mostove presudan bio početak korištenja kovanog željeza u 19. stoljeću i kasnije čelika, koji je omogućio rekordne raspone. Sredinom 20. stoljeća čelični kabeli počinju se koristiti i za krovne konstrukcije većih raspona. Isprva su prekrivani krutim pokrovom. Pojavom tkanina većih čvrstoća dolazi do njihove primjene za gipke konstrukcije od platna većih raspona [1]. Za takve je konstrukcije bilo potrebno razviti proračunski model i metode proračuna. Prvi je korak u projektiranju nalaženje oblika. Kako je to vrlo složen nelinearan problem, u svrhu njegova pojednostavljenja razvijena je metoda gustoće sila, koje će biti opisana u ovom radu.

Usporedno s razvojem prednapetih gipkih vlačnih konstrukcija, primjenom Hookeove ideje vlačno-tlačne analogije dolazi i do pomaka u projektiranju tankih betonskih ljsaka. One su se dotada gradile u vrlo ograničenom broju geometrijski jednostavnih oblika koje je bilo moguće pouzdano proračunati, primjerice polusfere i valjkasti bačvasti svodovi. Pojavom novih proračunskih metoda omogućena je velika sloboda u izboru oblika koji se sada mogu iterativnim postupcima optimizirati uzimajući u obzir svojstva betona.

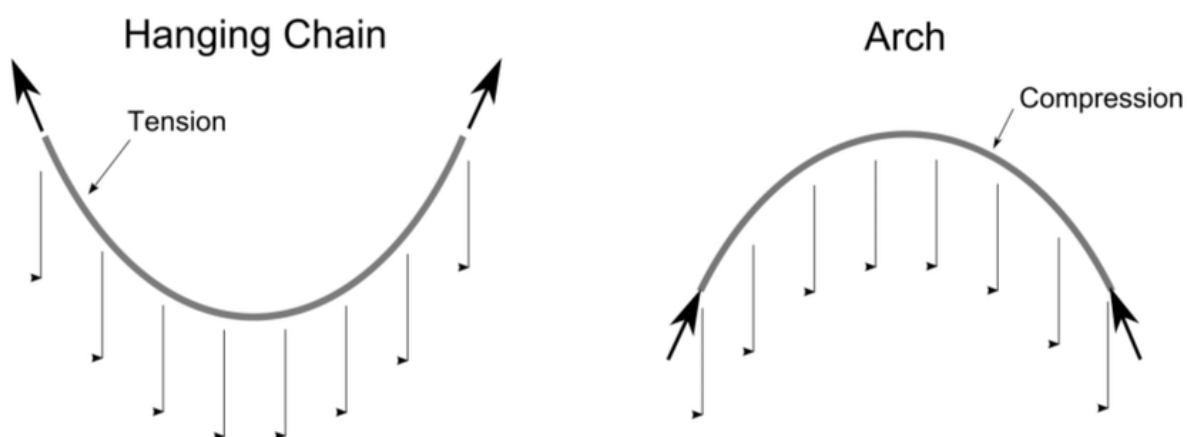
## 2. METODE I TEHNIKE RADA

Za izradu ovoga rada rabljena su znanja iz statike o teoriji zidanih lukova i svodova te o gipkim vlačnim konstrukcijama od užadi. Tekst je sastavljen na temelju znanstvenih članaka i istraživanja iz *online* inačica stručnih časopisa i odabranih poglavlja iz knjiga, kao što je navedeno u popisu literature. Slike i crteži preuzeti su iz iste literature ili s navedenih web stranica. Primjeri iz potpoglavlja 7.1. i 7.2. nacrtani su u programu AutoCAD, a model iz potpoglavlja 7.3. nacrtan je u GeoGebri.

### 3. ZAMISAO I TEORIJSKA PODLOGA

#### 3.1. Temeljna ideja

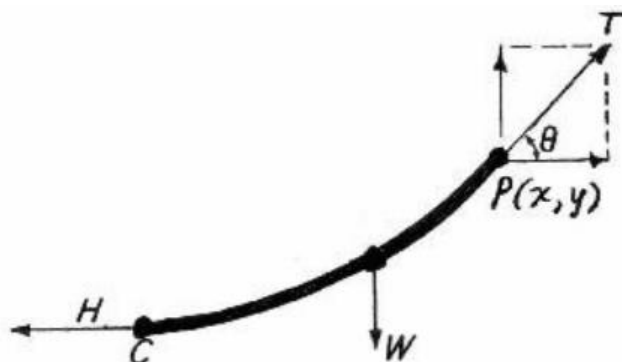
Engleski znanstvenik Robert Hooke bavio se problemom idealnog oblika luka i veličine potiska luka na oslonce. Uočio je sličnost u statičkom modelu užadi i zidanih lukova: dok uža može prenijeti samo vlačne uzdužne sile, za zidane lukove od kamena i opeke može se pretpostaviti da prenose samo tlačne uzdužne sile. Godine 1675. u svojem djelu *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments* u obliku anagrama naveo je sljedeće: „Kako visi gipko uža, tako, ali okrenuto, stajat će kruti luk“. Ta tvrdnja temelj je vlačno-tlačne analogije. Općenito rečeno, oblik koji viseće uža određene duljine, učvršćeno na dvjema točkama poprima pod zadanim opterećenjem, ako se preslika s obzirom na horizontalnu ravninu, predstavlja oblik tlačne linije luka. To je tzv. funikularni oblik. Na Hookevu tvrdnju nadovezao se škotski matematičar David Gregory tvrdnjom da je lančanica prirodni oblik luka te da drugi oblici lukova mogu stajati zato što je unutar njihove debljine sadržana neka lančanica, kako navodi Huerta [2]. Međutim, Gregory nije uspio točno matematički opisati lančanicu. To je uspjelo, nakon Bernoullijevog izazova, Gottfriedu Leibnizu uz pomoć njegova učitelja Huygensa, kako navodi Palomo [3]. Njihova rješenja objavljena su u časopisu *Acta Eruditorum* 1691. godine.



Slika 1.: Oblici visećeg užeta i analognog luka (Izvor: [4])

### 3.2. Lančanica

Da bi se izvela jednađba lančanice potrebno je postaviti jednađbe ravnoteže na njezinom dijelu.



Slika 2.: Sile koje djeluju na odsječak užeta (Izvor: [5])

$W$  označava vlastitu težinu odsječka užeta,  $T$  i  $H$  vlačne sile napetosti užeta, pri čemu sila  $H$  djeluje u najnižoj točki ovješene užeta. Jednađbe ravnoteže glase:

$$T \sin \theta = W$$

$$T \cos \theta = H$$

Podijelimo li prvu jednađbu drugom dobivamo:

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = \frac{W}{H}$$

što je jednako nagibu u točki  $P$ , dakle:

$$\frac{W}{H} = \frac{dy}{dx} \quad (1)$$



Opterećenje po duljini užeta je stalno, a po horizontalnoj se udaljenosti mijenja. Zato se može napisati:

$$\frac{dW}{ds} = w = \left(\frac{dW}{dx}\right) \left(\frac{dx}{ds}\right)$$

Preoblikovano, izraz glasi:

$$\frac{dW}{dx} = w \frac{ds}{dx} \quad (2)$$

Iz Pitagorinog poučka:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

slijedi:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}$$

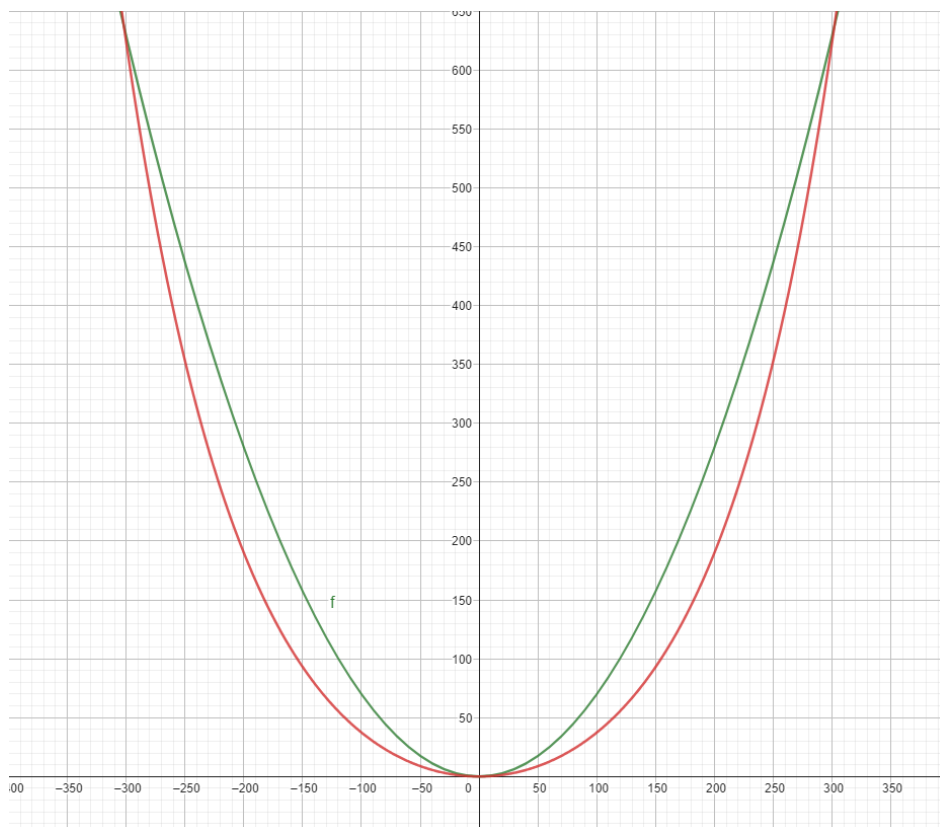
Objedinjavanjem s izrazima (1) i (2) dobiva se diferencijalna jednačba:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Njezino rješenje po  $y$  je jednačba lančanice i glasi:

$$y = C \left( \frac{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}}{2} \right) = C \cdot \cosh \frac{x}{C}$$

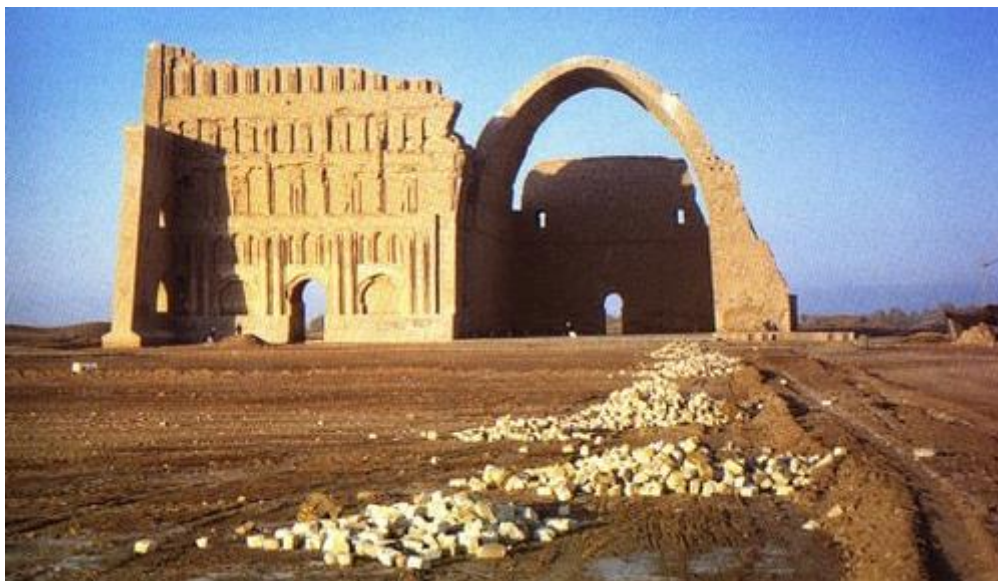
Izvod je preuzet iz [5]. Na slici 3. uspoređeni su oblici lančanice (crveno) i kvadratne parabole (zeleno). Lančanica ima jednadžbu koja odgovara jednadžbi centralne linije luka u St. Louisu arhitekta Eera Saarinen, a parabola je prilagođena tako da je luk jednake visine u tjemenu kao i stvarni luk, prema [5]. Dimenzije su u stopama, a crtež prikazan u alatu GeoGebra.



Slika 3.: Usporedba lančanice (crveno) i kvadratne parabole (zeleno)

### 3.3. Povijesni pregled primjene lančanice

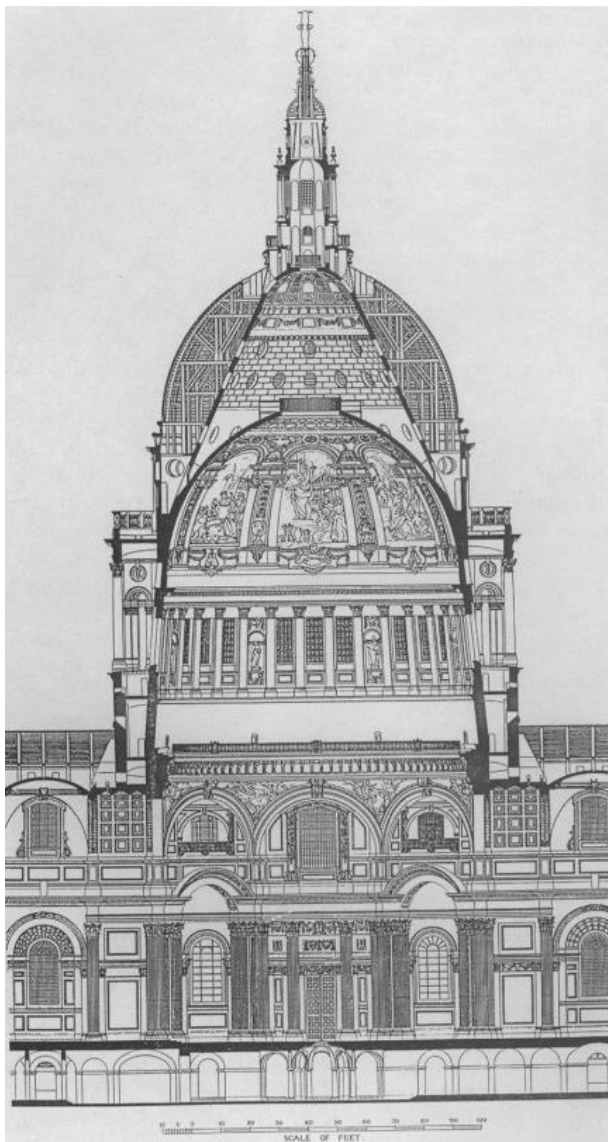
Najstariji poznati primjer primjene lančanice je svod palače Tāq Kīsrā u starom perzijskom gradu Ktezifontu, na rijeci Tigris, blizu današnjeg Baghdada. Potječe iz šestog stoljeća prije Krista. Svod je raspona 26 metara i visine 37 metara, a dvorana koju je nadsvođivao bila je duljine 50 metara. Pri vrhu, luk je debljine oko jednog metra, a zidovi su u bazi debljine i do 7 metara, prema [6] i [7].



Slika 4.: Palača Tāq Kistrā u Ktezifontu (Izvor: [8])

Iako firentinska katedrala Santa Maria del Fiore u presjeku nije lančanica, već šiljasti luk oblikovan po pravilu tzv. „šiljaste petine“, prema nekim autorima, Brunelleschi je bio svjestan povoljnih sredstava lančanice u pogledu nosivosti, koristeći se ovješnom užadi za postizanje zakrivljenosti u polaganju redova opeke. To je, uz inovativan način spiralnog slaganja opeke, omogućilo da velika kupola raspona od 42 m bude izvedena bez ikakve potpore.

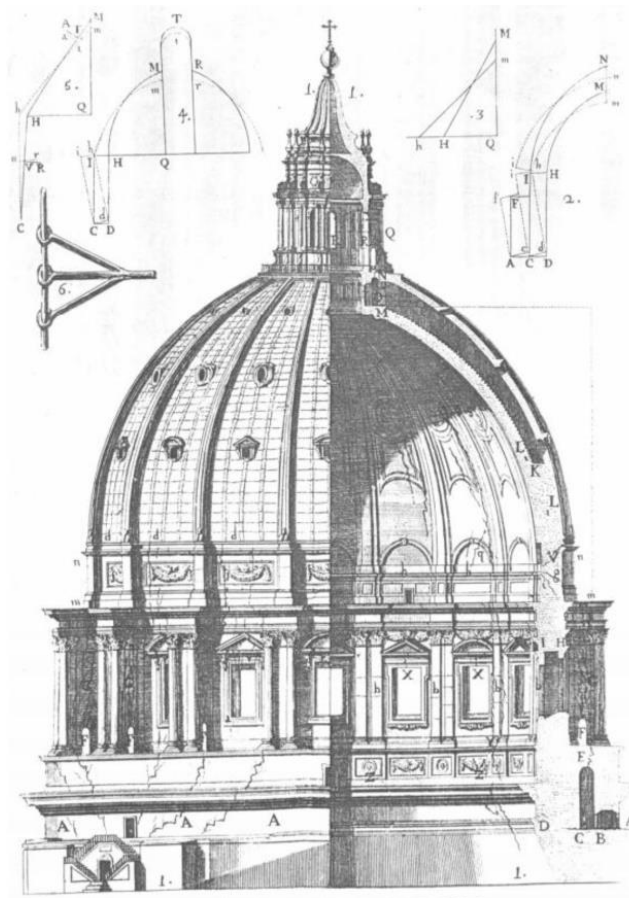
Nakon velikog požara u Londonu 1666. godine glavni dvojac zadužen za obnovu grada bili su Christopher Wren i sam Robert Hooke. Jedan od zadataka bila je i ponovna izgradnja katedrale Svetog Pavla. Wren je između 1669. i 1675. izradio nekoliko različitih varijanti crkve i njezine kupole. U konačnici je odobrena varijanta s trostrukom kupolom, prikazana na slici 5. Unutarnja je zidana s otvorom u tjemenu. Iznad nje je konična kupola koja nosi lanternu. Vanjska kupola je drvena, prekrivena olovom. Kako je upravo tih godina Hooke došao na ideju o analogiji luka i visećeg užeta, a istim problemom bavio se i Wren, Hookeovo načelo korišteno je u oblikovanju unutarnje kupole s podupirućim zidom koje je blago nagnuto prema unutra. Za preuzimanje bočnih potisaka Wren je postavio 3 skupine kružnih prstenova, kako navodi Heyman [9].



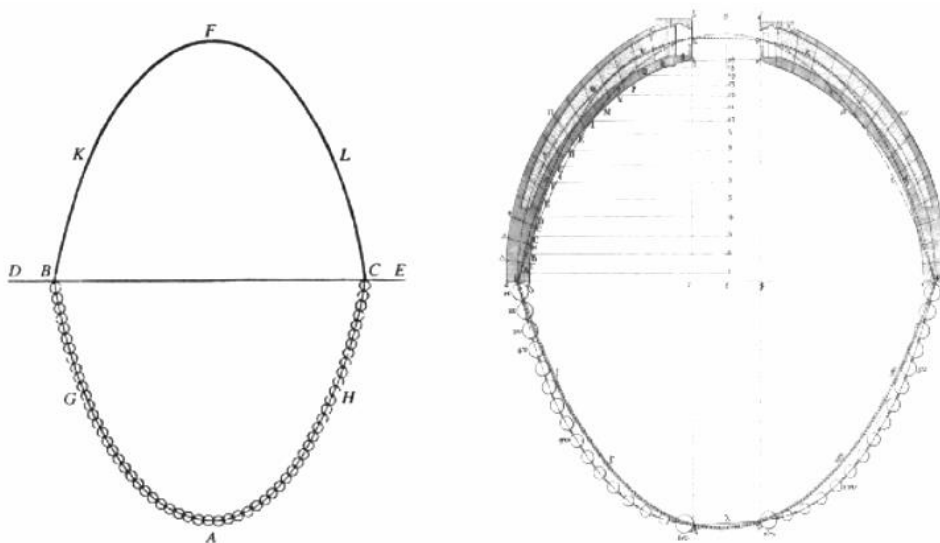
Slika 5.: Presjek kupole katedrale Sv. Pavla u Londonu (Izvor: [9])

Za analizu još jedne velike kupole korištena je Hookeova ideja. Riječ je o kupoli u bazilici Svetoga Petra u Rimu. Analizu je zbog pojave pukotina na kupoli naručio papa Benedikt XIV. Prvi koji su se bavili tim problemom bili su „tri matematičara“: Le Seur, Jacquier i Bošković. Zaključili su da su pukotine posljedica blagog popuštanja tambura na koji se kupola oslanja. Stabilnost su analizirali principom virtualnog rada, a njihov crtež prikazan je na slici 6. Nakon njih, u koštac s problemom uhvatio se Giovanni Poleni, što opisuje Huerta [2]. Koristio je Hookeov i Gregoryjev pristup. Zamislio je kupolu podijeljenu na 40 meridijalnih isječaka, a svaki kod njih na 16 dijelova. Ovjesevši na uže utege proporcionalne težinama dijelova kupole koje su izračunali „trojica matematičara“, dobio je oblik užeta koji je, kad se obrne, bio sadržan unutar debljine kupole, što je prikazano na slici 7. Na temelju toga zaključio je da je kupola sigurna. Međutim, bio je svjestan mane kod primjene principa podjele na meridijalne

isječke, a to je činjenica da ne uzima u obzir prstenaste sile koje bi u stvarnosti postojale i djelovale između takvih isječaka. Zato je predložio dodavanje pet željeznih prstenova.



Slika 6.: Crtež iz analize Le Seura, Jacquiera i Boškovića sa skicama virtualnih pomaka (Izvor: [10])



Slika 7.: Polenijev crtež Hookeove analogije i tlačne linije u presjeku kupole bazilike Sv. Petra (Izvor: [11])

Još neki primjeri primjene lančanice su krov željezničkog kolodvora Budapešt Keleti i već spomenuti Gateway Arch u St. Louisu, na slici 8. Velik značaj lančanica i vlačno-tlačna analogija imaju i u radu i djelima Antonija Gaudíja, o čemu će još biti riječi.



Slika 8.: Gateway Arch, St. Louis, Missouri, SAD (Izvor: [12])

## 4. RAVNOTEŽNI PRISTUP PRORAČUNU LUKOVA

### 4.1. Povijesni razvoj metoda proračuna

U ovom je potpoglavlju u glavnim crtama naveden povijesni razvoj metoda proračuna zidanih lukova koji opisuje Huerta [2], radi razumijevanja validnosti uporabe ravnotežnog pristupa.

Nakon Hookeovog otkrića, u Engleskoj su znanstvenici i inženjeri tražili načine njegove primjene u praksi, ignorirajući pritom Gregoryjevu tvrdnju. Paralelno s time, u Francuskoj se razvijala potpuno drugačija metoda. Razvili su je Phillipe de la Hire i Bernard Forest de Bélidor. Temeljila se na fiksiranju točke pucanja luka, čime bi se točno mogli odrediti potisak gornjeg dijela luka na bočne dijelove i dubina upornjaka ili kontrafora. U 18. i početkom 19. stoljeća drugi inženjeri i znanstvenici nadograđivali su tu metodu, što teorijski, što eksperimentalno. Primjerice, Coulomb je nastojao pronaći stvarnu točku pucanja, koja se dotad po Bélidorovom prijedlogu za proračun „umjetno“ fiksirala na polovici između tjemena i oslonaca. Osim toga predvidio je postojanje maksimalne i minimalne vrijednosti horizontalnog potiska.

Nit koja je povezala engleski i francuski pristup i omogućila novo i potpunije razumijevanje ponašanja lukova je koncept tlačne linije. Prvi ga je dobro opisao engleski fizičar Thomas Young početkom 19. stoljeća. Razumio je da je za materijale dobrih tlačnih i slabijih vlačnih svojstava, kao što je žiđe i lijevano željezo, ključno da se tlačna linija nalazi unutar presjeka i to s određenom geometrijskom sigurnošću. Međutim, njegov rad nije ostavio utjecaj na druge inženjere njegovog vremena. Zahvaljujući radovima Méryja u Francuskoj i Moseleyja u Engleskoj koncept tlačne linije povezan je s ranije promatranim mehanizmima sloma. Postalo je jasno, prema ranijoj Coulombovoj pretpostavci, da postoje ekstremne vrijednosti horizontalnog potiska, ali i da se između njih može nacrtati beskonačno mnogo tlačnih linija koje su u ravnoteži s opterećenjima.

Logično, uslijedili su pokušaji utvrđivanja metoda kojima bi se mogla naći stvarna tlačna linija. Jedan način bio je korištenje principa najmanjeg otpora, dakle najmanjeg horizontalnog potiska. S druge strane, tlačna linija mogla se i konstruktivno fiksirati stavljanjem tri zgloba u luk koji onda postaje statički određen.

S razvojem teorije elastičnosti, u drugoj polovici 19. stoljeća javljaju se prvi pokušaji njezine primjene na zidane lukove. Na tome planu najviše se istaknuo njemački inženjer Emil Winkler. Predložio je proračun za idealnu situaciju: sasvim jednolično nanesen mort, potpuno kruto oblučilo i upornjaci, konstantna temperatura. Međutim, kako idealna situacija ne odgovara stvarnoj, naveo je konstruktivne mjere kojima bi se smanjio utjecaj neidealnosti navedenih parametara na položaj i oblik tlačne linije. Utjecaj popuštanja upornjaka proučavao je Engesser. Unatoč tim nedostacima smatralo se da bi elastični proračun trebao biti najbolji način. Austrijsko društvo inženjera i arhitekata provelo je istraživanja materijala iz kojih su zaključili da su stvarni lukovi puno fleksibilniji nego što bi se moglo pretpostaviti po modulu elastičnosti materijala.

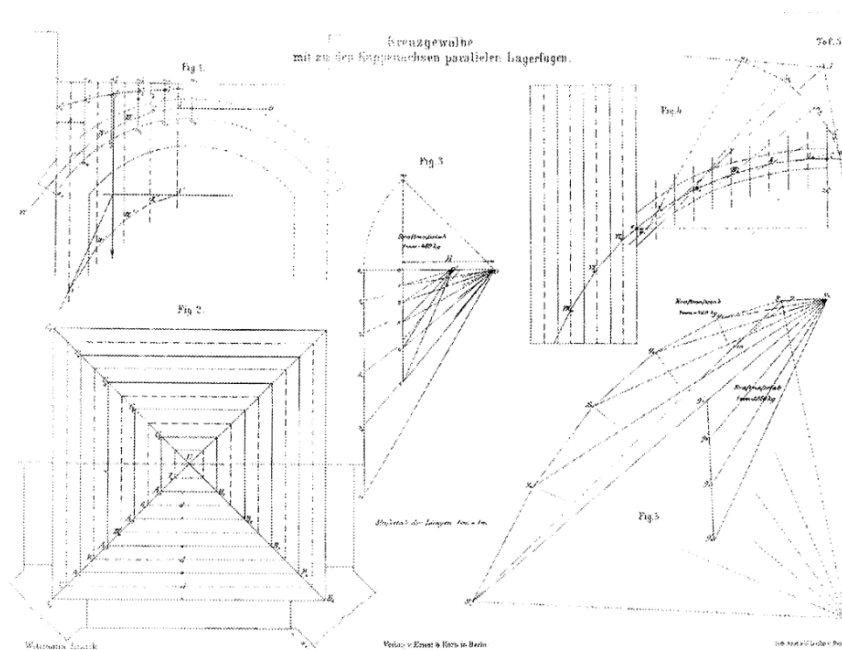
Iako se analiza po teoriji elastičnosti znanstveno smatrala najboljom metodom, u praksi se stabilnost najčešće provjeravala grafičkom metodom, prema Rankineovom prijedlogu. On kaže da je luk siguran ako se tlačna linija u ravnoteži s vanjskim silama koje djeluju na stvarnom luku može nacrtati unutar srednje trećine debljine luka. Velik odjek imao je rad Carla Culmanna, koji je popularizirao uporabu verižnih poligona i poligona sila. Do 1900. godine grafička analiza postala je standardna provjera za svaki luk, dok je analiza po teoriji elastičnosti služila kao završna provjera za najvažnije mostove.

Osim teorije samih lukova, razvijala se i teorija zidanih svodova i zgrada. Prve analize već su spomenute analize Hookea i Wrena za novu katedralu Sv. Pavla te analize trojice matematičara i Polenija za procjenu sigurnosti kupole bazilike Sv. Petra. Krajem 18. i početkom 19. stoljeća tehnika „rezanja“ kupola na meridijalne isječke korištena je za provjere oblika kupola još nekih poznatih crkava kao što su Sv. Genevieve u Parizu, današnji Pantheon, i Sv. Izak u Sankt Petersburgu. Tijekom 19. stoljeća javljaju se razne matematičke studije kupola i raznih vrsta svodova, ali one nikad nisu iskorištene u praksi.

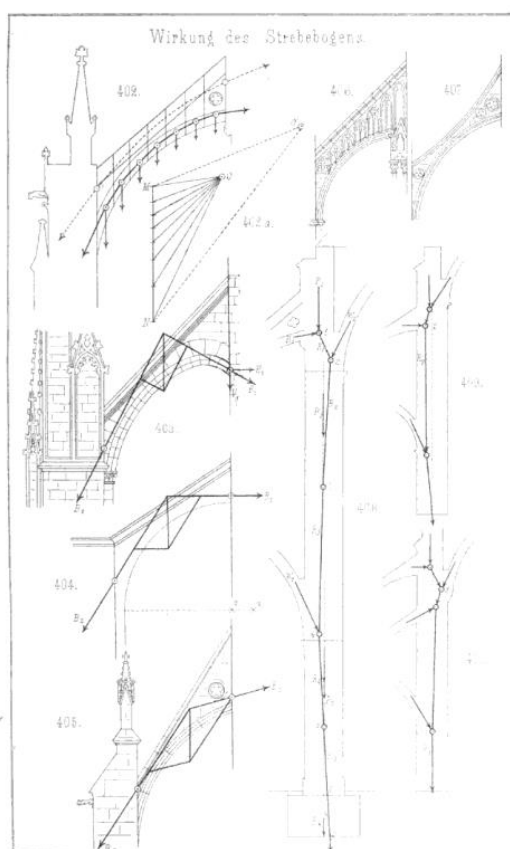
Popularizacijom grafičkih metoda za analizu lukova 1870-ih, one su se, u kombinaciji s tehnikom „rezanja“, počele koristiti za svodove. Prve grafičke analize ravnoteže kupola i križnih svodova napravio je njemački arhitekt Wilhelm Wittmann. Njegova analiza križnog svoda prikazana je na slici 9. Najkompletniji prikaz građenja i strukturalne analize gotičke arhitekture daje Karl Mohrmann u trećem izdanju Ungewitterova *Lehrbuch der gotischen Konstruktionen* iz 1890. godine. Za križni svod predložio je podjelu na osnovne lukove čije se reakcije onda smatraju opterećenjima na rebra križnog svoda. Za kupole je zbog osne



simetrije stvar bila jednostavnija te je predložen i način za računanje prstenastih sila.



Slika 9.: Wittmanova grafička analiza ravnoteže križnog svoda (Izvor: [2])



Slika 10.: Mohrmannova analiza kontraformnog sustava (Izvor: [13])

Prvu grafičku analizu cijelog presjeka zgrade napravio je Planat 1877. koristeći pristup La Hirea i Bélidora, a nakon toga je analizirao i cijelu zgradu, podijelivši je u zasebne elemente: svodove, zidove, kontrafore. Njegov i Mohrmannov rad ostavili su velik utjecaj te se do prijelaza stoljeća grafički ravnotežni način analize zidanih zgrada proširio po cijeloj Europi. Treba spomenuti analize katedrale u Beauvaisu, koju je izradio Benouville, katedrale u Palma de Mallorci (slika 11.), koju je izradio Rubio y Bellver, i kapele Sv. Pavla na sveučilištu Columbia koju je izradio Goodyear. Gaudí je takve metode koristio za proračun svojih djela, a Pieper za obnovu više crkava i katedrala u Njemačkoj, stradalih u Drugom svjetskom ratu.



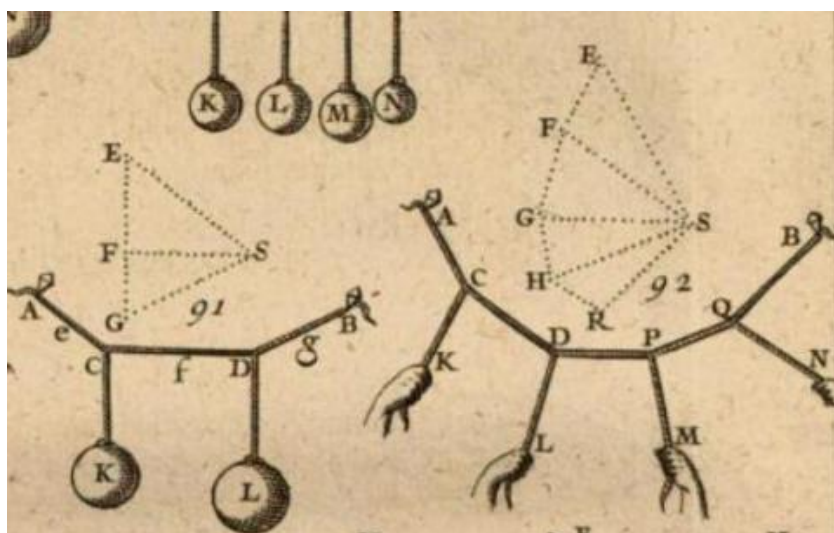
Slika 11.: Katedrala u Palma de Mallorci, s jednim od najvećih gotičkih kontrafornih sustava (Izvor: [14])

Analiza prostornih svodova i kupola po teoriji elastičnosti bila je gotovo nemoguća zbog teškoće rješavanja sustava jednadžbi ravnoteže, materijala i geometrijske kompatibilnosti. Nakon izuma računala pojavili su se pokušaji, korištenjem metode konačnih elemenata. Međutim, problem je što je u toj metodi zidana konstrukcija modelirana kao kontinuum, što ona u stvarnosti nije. Iterativnim postupkom, gdje se na mjestima vlačnih naprezanja u prethodnoj iteraciji za sljedeću postavljaju diskontinuiteti, moguće je doći do rješenja koja bi bila u tlaku, što je uvjet za zide, ali potrebno je dobro poznavanje ponašanja takvih konstrukcija za interpretaciju dobivenih rješenja. Međutim, i u dobro napravljenoj analizi (npr. Barthelovoj iz 1993.), neki su rezultati takvi da za sitne pomake (npr. od 1/20000 do 1/5000 raspona) dolazi do formiranja pukotina, što dovodi do drastičnih promjena u veličinama potiska. Jasno je da model s tolikim stupnjem nesigurnosti ne može biti korišten za analize stvarnih građevina. Isto se pokazalo i za pokušaje s metodom diskretnih elemenata.

Konačno, britanski je inženjer Jacques Heyman u svojim radovima pokazao način primjene granične analize (eng. *Limit Analysis*), prvotno razvijene za proračun čeličnih okvira, na zidane konstrukcije. Način će biti prikazan u potpoglavlju 4.3.

## 4.2. Verižni poligon

Vrata grafičke metode otvorio je nizozemski matematičar i fizičar Simon Stevin krajem 16. stoljeća, otkrićem pravila paralelograma za zbrajanje sila. Već tada Stevin je proučavao ravnotežni oblik užeta s ovješanim utezima. Na njegova razmatranja nadovezao se u 17. stoljeću Pierre Varignon, koji je uveo verižni poligon kao metodu uravnoteženja tijela, povezavši ju s poligonom sila, što je prikazano na slici 12. Uže ili lanac pod djelovanjem skupa sila zauzima oblik određen zrakama poligona tih sila (na desnom crtežu dužine ES, FS, GS, HS i RS).

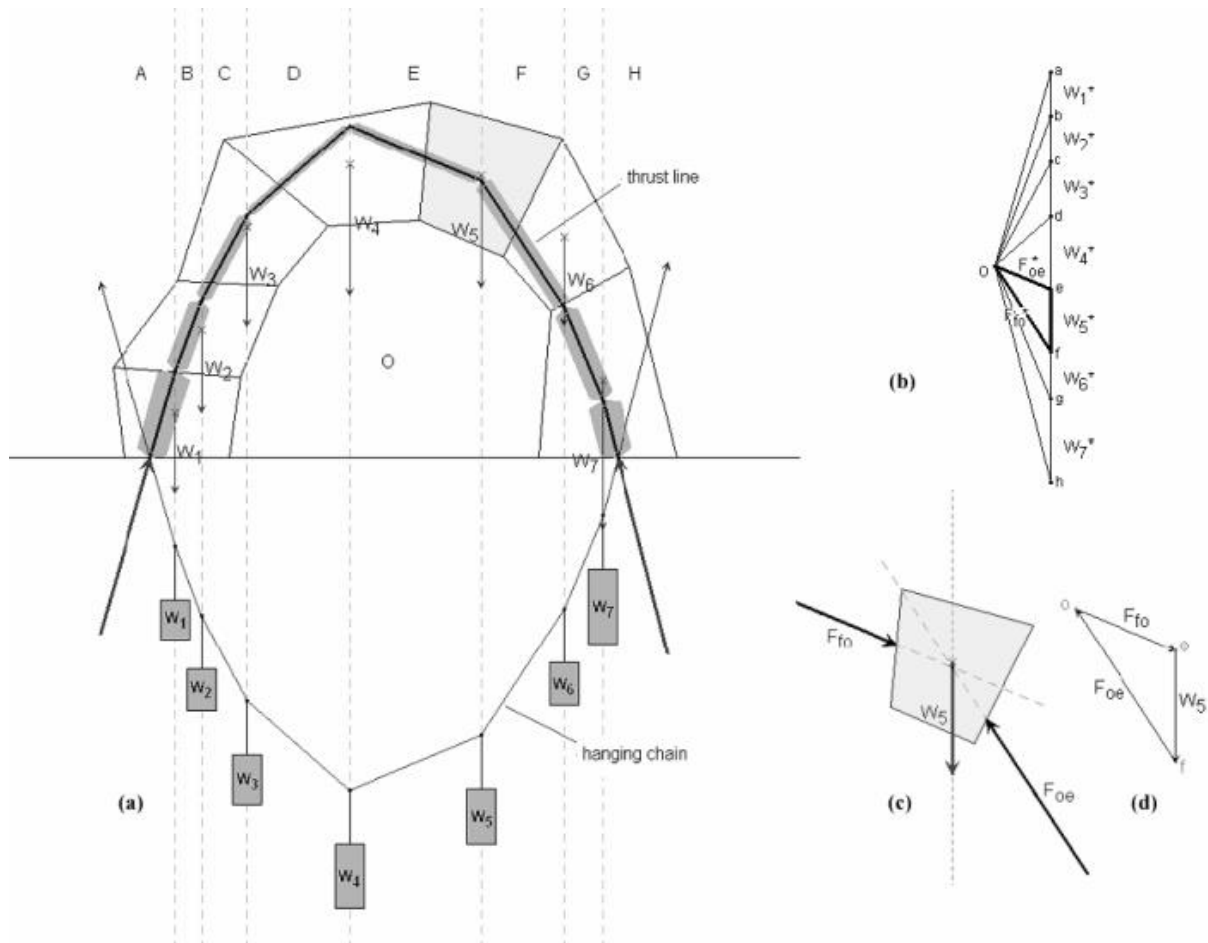


Slika 12.: Varignonovi crteži verižnog poligona i poligona sila (Izvor: [15])

Međutim, tek se, kao što je već spomenuto, u 19. stoljeću zahvaljujući Culmannu verižni poligon u kombinaciji s poligonom sila počeo primjenjivati za proračun lukova, na temelju načela Hookea i Gregoryja.

### 4.3. Tlačna linija i primjena u okviru granične analize

Tlačna linija teoretska je linija koja predstavlja „put“ tlačnih sila kroz luk, odnosno ona je skup točaka u kojima djeluju rezultante unutarnjih sila. Način crtanja tlačne linije u grafičkoj analizi poziva se na Hookeovo načelo vlačno-tlačne analogije. Da bi se dobila tlačna linija, crta se plan sila i verižni poligon koji je zapravo oblik ovješeneg užeta na koje te sile djeluju. Prvi korak je računanje težina kamenih blokova i njihovih težišta da bi se dobili pravci na kojima one djeluju. Težine se crtaju u plan sila. Polna udaljenost u planu sila predstavlja horizontalni potisak u luku. Paralelno sa zrakama u planu sila crtaju se odsječci verižnog poligona. Zrcaljenjem oko horizontale dobiva se tlačna linija.

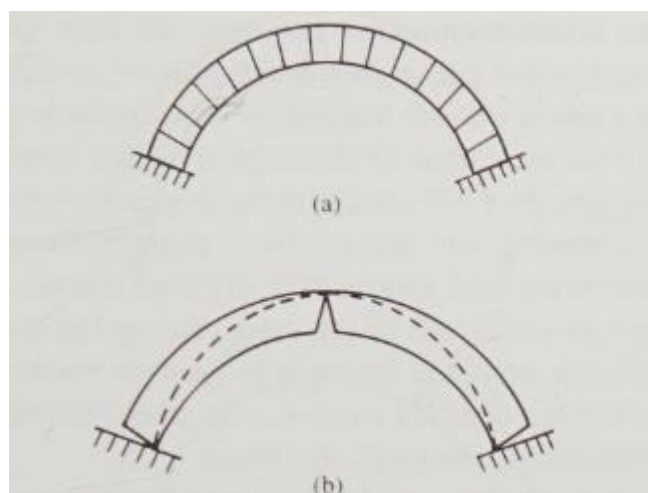


Slika 13.: Primjer grafičke metode crtanja tlačne linije (Izvor: [16])

Za primjenu principa ravnoteže lukova u okviru granične analize prema Heymanu potrebne su 3 pretpostavke:

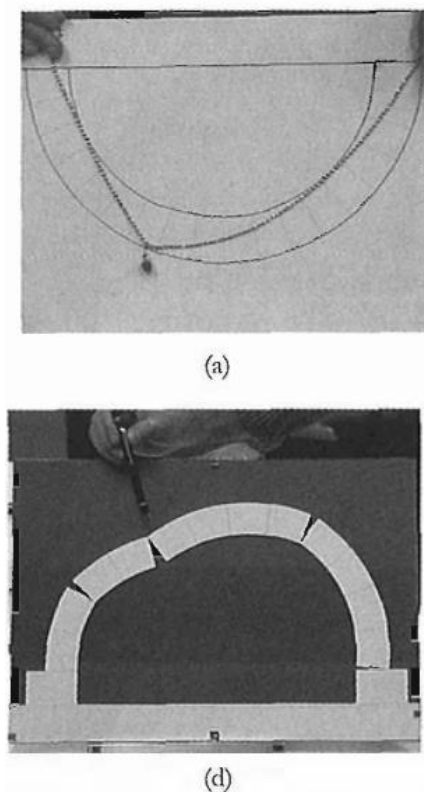
- Zida ima beskonačnu tlačnu čvrstoću. Ova pretpostavka nije na strani sigurnosti, ali su naprezanja i u najtežim konstrukcijama jedan ili dva reda veličine ispod tlačne čvrstoće, što je moguće naknadno provjeriti.
- Vlačna čvrstoća zida je nula. Ova pretpostavka je na strani sigurnosti.
- Klizanje između blokova je nemoguće. Koeficijenti trenja obično su između 0.6 i 0.7 te pretpostavka nije na strani sigurnosti, ali kao i za prvu pretpostavku, moguća je naknadna provjera.

Ako su ta tri uvjeta ispunjena, za određeni presjek će rezultanta naprezanja biti tlačna sila koja djeluje unutar njega. Ako pak ta rezultanta djeluje na rubu presjeka, dolazi do formacije zgloba. Za realni luk nakon uklanjanja oblučila može, primjerice, doći do malog povećanja raspona zbog pomaka oslonaca (upornjaka). Prema Heymanu, u tome slučaju dolazi do pojave pukotina između diskretnih komada luka kako bi se luk prilagodio povećanju raspona, i to uz upornjake i uz tjeme luka (slika 14.). Mjesta na kojima dolazi do pucanja postaju, mehanički gledano, zglobovi te je riječ o trozglobnom luku. Sad je, za razliku od luka bez pukotina, za koji je moguće nacrtati beskonačno mnogo tlačnih linija, sustav statički određen. To znači da je moguće nacrtati jedinstvenu tlačnu liniju, određenu pozicijom pukotina, koja predstavlja stanje ravnoteže luka. Međutim, za drugačije male pomake dolazi do drugačijih pukotina i drugačijih tlačnih linija. U stvari, luk za koji vrijede Heymanove 3 pretpostavke odgovara na različite pomake oslonaca otvaranjem i zatvaranjem pukotina. To se događa čak i za pomake koje je nemoguće detektirati, a kamoli predvidjeti. Stoga je u stvari nemoguće znati koja je stvarna tlačna linija. Moguće je samo pronaći ekstremne pozicije tlačne linije koje odgovaraju najmanjem i najvećem potisku.



Slika 14.: Stabilno stanje luka s pukotinama (Izvor: [17])

Budući da u ovom modelu materijal beskonačno nosi na tlak i ne može doći do klizanja, do rušenja može doći samo nastankom mehanizma koji to dozvoljava. Do toga može doći, primjerice, povećanjem opterećenja na luk koji je u takvom stanju da već ima tri zgloba, zbog čega bi tlačna linija dotaknula granicu presjeka još u jednoj točki i nastao bi četverozglobni luk, koji je mehanizam (slika 15.).

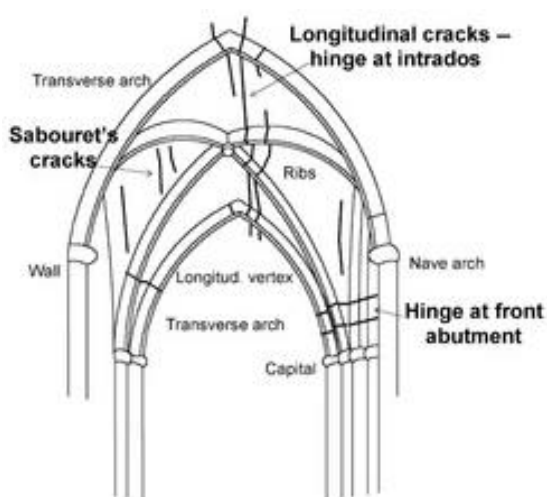


Slika 15.: Demonstracija mehanizma sloma sa četiri zgloba na fizičkom modelu (Izvor: [18])

Uza sve rečeno, ako se ne može znati koja je stvarna tlačna linija, onda se postavlja pitanje kako potvrditi sigurnost luka. Teorem sigurnosti (eng. *Safe Theorem*) unutar granične analize kaže da je konstrukcija sigurna ako je moguće pronaći sistem unutarnjih sila koje su u ravnoteži s opterećenjima, takvih da nije narušen uvjet popuštanja materijala. Kod zidanih lukova svaka je pravilno nacrtana tlačna linija u ravnoteži s opterećenjima. Ako, dakle, materijal od kojeg je izrađen luk zadovoljava Heymanove uvjete, dokaz da je moguće nacrtati tlačnu liniju sadržanu unutar debljine luka (što je uvjet popuštanja materijala) je i dokaz da je luk za dano opterećenje stabilan.

Kako bi se sigurnost mogla kvantitativno ocijeniti, Heyman [17] predlaže geometrijski faktor sigurnosti. Da bi on bio definiran, potrebno je uvesti pojam graničnog luka. To je luk unutar čije je debljine za zadano opterećenje moguće nacrtati samo jednu tlačnu liniju, čiji bi položaj bio takav da je luk na rubu otkazivanja zbog nastanka mehanizma. Geometrijski faktor sigurnosti dobiva se tako da se debljina luka podijeli s debljinom graničnog luka. Predložena vrijednost za najnepovoljniji slučaj opterećenja je 2. To bi značilo da se tlačna linija može nacrtati u srednjoj polovini debljine luka.

Za prostorne zidane svodove teorem sigurnosti također dopušta ravnotežni pristup. Kod složenijih svodova to znači da se oni mogu zamisliti kao serija lukova, u svakom od kojih se onda traže tlačne linije. Također, teorem sigurnosti dopušta tehniku „rezanja“ kupola na meridijalne isječke, koji se onda analiziraju na isti način. Ono što se razlikuje u analizi lukova te kupola i svodova su mehanizmi sloma. Kod kupola su tipične meridijalne pukotine kao rezultat popuštanja tambura, što su još u 18. stoljeću primijetila „trojica matematičara“. Tlačna linija (zapravo tlačna ploha) time se pomiče i dodiruje ekstrados na određenoj udaljenosti od tjemena. Time zapravo nastaje „kapa“ kupole koju nose radijalni lukovi. Kod prostornih svodova dolazi do različitih oblika otvaranja pukotina ovisno o vrstama svodova. Primjerice, ako u križnom svodu uzdužna „bačva“ puca poput luka, i u poprečnoj se javljaju pukotine kao odgovor na te pomake (slika 16.). Ipak, kao i za lukove, i za svodove vrijedi da su pukotine način prilagođavanja zidane konstrukcije pomacima i, ako su pomaci mali, ne utječu na sigurnost svoda.



Slika 16.: Tipične pukotine gotičkog križnog svoda (Izvor: [19])

## 5. FIZIČKI MODELI

### 5.1. Gaudíjeva primjena visećih modela

Antoni Gaudí katalonski je arhitekt koji je djelovao u drugoj polovici 19. i prvoj četvrtini 20. stoljeća. Poznat je po originalnosti, osobito u oblikovanju svojih građevina. Naime, oblici koje rabi nisu samo estetski motivirani, već su odraz statičke ravnoteže. Arhitektonski oblikujući građevinu, on od samog početka oblikuje i nosivu konstrukciju. Svjestan statičkih svojstava lančanice, u dizajniranju građevine upotrebljava stabilne, uravnotežene oblike, što je inovativan pristup, jer je dotada analogija s visećim užetom korištena samo za provjeru stabilnosti postojećih građevina ili unaprijed određenih oblika.

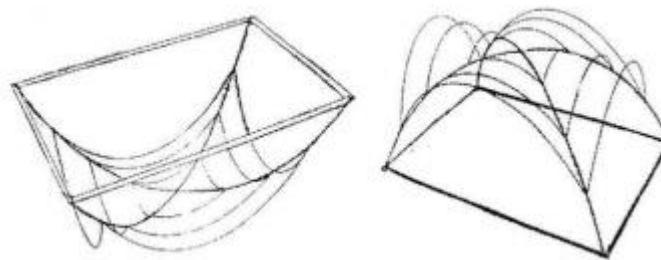
Kako lukovi u građevinama nikad ne nose isključivo sami sebe, sama lančanica nije uvijek idealni oblik za svako opterećenje. Čest problem je, na primjer, traženje idealnog oblika luka koji nosi teret proporcionalan vertikalnoj udaljenosti između intradosa i ekstradosa. Taj oblik možemo nazvati „transformiranom lančanicom“, prema Huerti [20]. Traženje tog oblika matematički je vrlo kompleksno pa matematička analiza nije prikladan način. Gaudíju je trebao alat s jednostavnim izračunima i mogućnošću brze prilagodbe. Zato je pribjegao uporabi visećih modela.



Slika 17.: Lukovi na tavanu Gaudíjeve Casa Mile (Izvor: [21])



Princip uporabe visećih modela je sljedeći: objesi se uže i izračunaju težine zida i eventualno poda gornje etaže koje luk nosi. One se podijele u određen broj diskretnih dijelova i utezi odgovarajućih težina objese se na uže. Ono tada poprima novi oblik, što znači da bi se promijenila i opterećenja. Izračunaju se nova opterećenja te se utezi njima prilagode. Dobiven oblik već je vrlo blizu traženom. Nedostatak metode je to što funkcionira samo ako su sva opterećenja vertikalna. Analogno, iteracija se može provesti i grafičkim postupkom, koji može nadomjestiti taj nedostatak. S druge strane, prednost metode visećih modela u odnosu na grafički postupak je jednostavna upotreba za trodimenzionalne oblike. Grafički postupak u tom slučaju postaje vrlo zamoran.



Slika 18.: Viseći model križnog svoda iz kojeg je vidljiva analogija s ravnotežnim pristupom podjele svoda na lukove (Izvor: [22])

Uz tavan Casa Mile (slika 17.), Gaudí je na visećim modelima bazirao i dizajn crkve u Coloniji Gúell. Njoj je posvetio čak 18 godina. Koristio je već opisani iterativni postupak s ovješanim nitima i utezima od pijeska. Kako bi pokazao volumen na modelu, fotografirao ga je i po fotografiji crtao gvašem ili bi na njega dodavao komade tkanine i papira. Nakon što je pronašao zadovoljavajući oblik, s modela je uzimao mjerenja kako bi mogao pripremiti nacрте. Nažalost, ta crkva nije izgrađena do kraja, već je izvedena samo kripta. Originalni model (slika 19.) uništen je, ali napravljena je reprodukcija (slika 20.).

Za svoje najpoznatije djelo, baziliku Sagrada Familia, koliko je poznato, Gaudí nije koristio viseće modele, već grafičku analizu s posebnim pristupom uravnoteženja blokova.



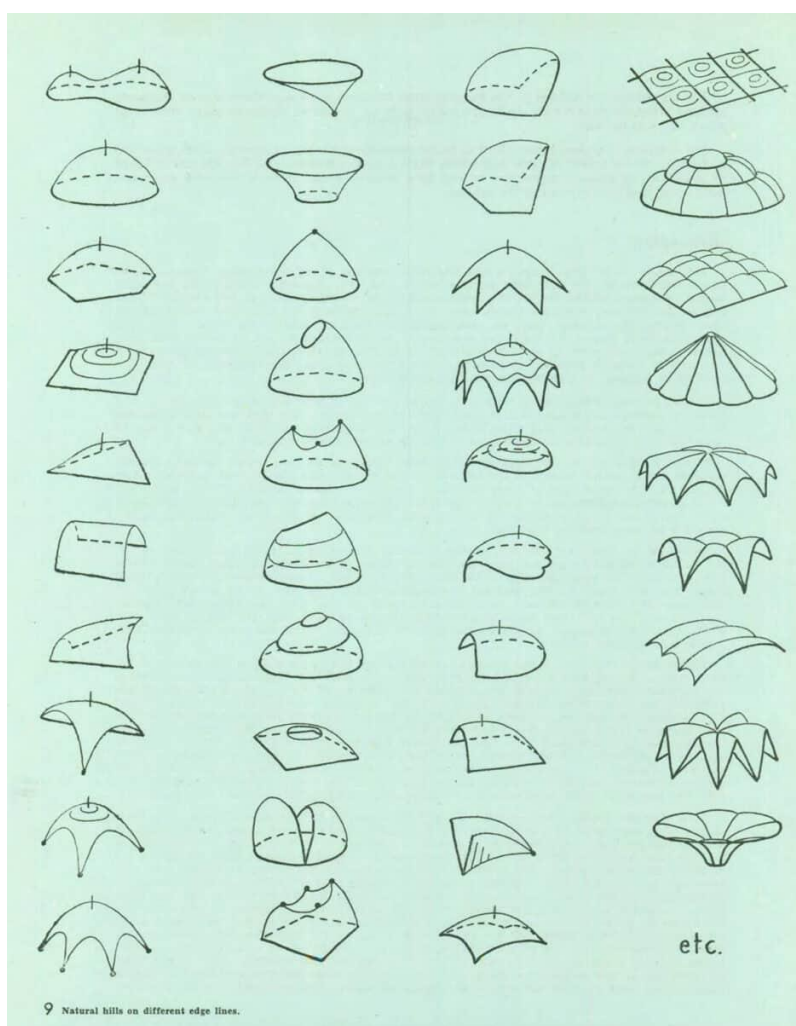
Slika 19.: Viseći model crkve u Coloniji Gúell, s ispunom od tkanine (Izvor: [23])



Slika 20.: Reprodukcijski model crkve u Coloniji Gúell (Izvor: [24])

## 5.2. Islerovi modeli za oblikovanje ljuski

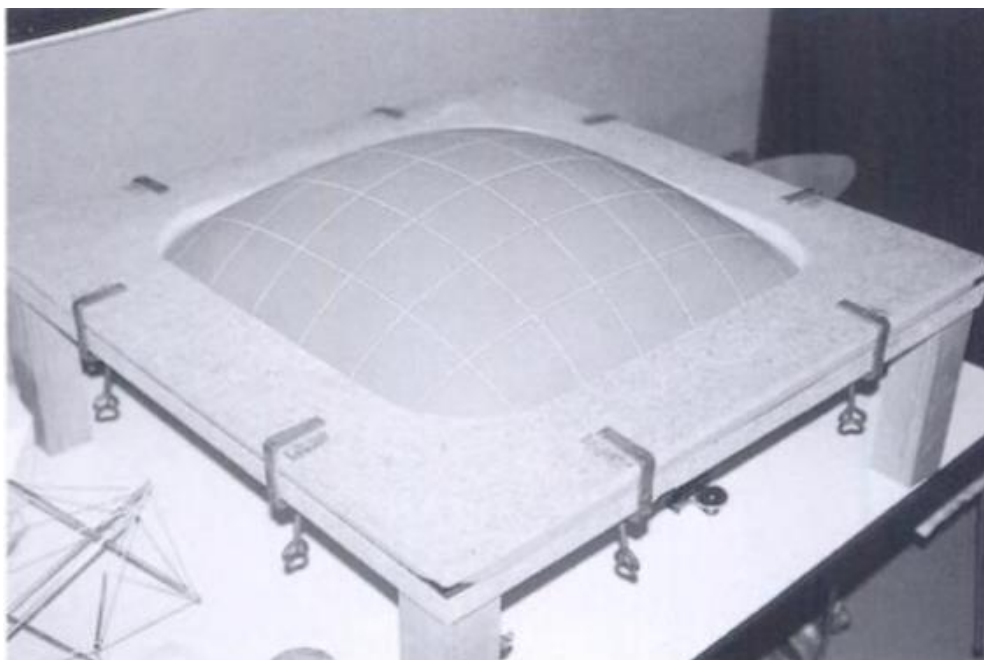
Iako je neka vrsta betona bila poznata još u antičkom svijetu, on se u upotrebu vraća tek u 19. stoljeću, a tek se u ranom 20. stoljeću kreću graditi betonske ljuske, zahvaljujući početku primjene armiranog betona. One su bile jeftinija alternativa čeliku, koji je već dotad uspješno korišten za neke kupole većih raspona. Svjesnost o dobrim tlačnim svojstvima betona poticala je na istraživanje po pitanju oblika. Ipak, do polovice stoljeća i dalje su se gradile ljuske samo matematički određenih pravilnih oblika (polusfere, polualjci, konoidi, paraboloidi i sl.) jer je elastična analiza iole kompleksnijih oblika bila neizvediva. Neki od poznatijih graditelja takvih ljusaka bili su Eduardo Torroja, Pier Luigi Nervi i Félix Candela.



Slika 21.: Skice samo nekih od mogućih oblika ljuski za koje Isler tvrdi da su izvedivi uz uporabu fizičkih modela (Izvor: [25])

Veliku novost u tome području donosi švicarski inženjer Heinz Isler koji u svome radu *New Shapes for Shells* (1959.) predlaže tri postupka fizičkog modeliranja ljuski. Oni su omogućili puno veću slobodu u oblikovanju ljuski (slika 21.), što je zapanjilo mnoge renomirane inženjere prisutne na prezentaciji. Te postupke opisuje Chilton [26]. Prvi predloženi postupak bilo je *freely-shaped hill*, čiji su koraci oblikovanje tla u određeni oblik na koji se onda nalijeva beton određene debljine. Na kraju se tlo iznutra iskopa. Ovaj postupak primjenjiv je samo za male raspone i sam Isler upotrijebio ga je samo nekoliko puta.

Drugi postupak bio je postupak napuhnete membrane (slika 22.). U njemu se gumena membrana fiksira između podloge i okvira s izrezanim oblikom planiranog krova. Napuhivanjem membrana stvara oblik takav da je u čistom vlaku, pa se zrcaljenjem može dobiti analogni oblik u čistom tlaku. Isler je takve modele mjerio s velikom preciznošću, čak i do 2 stotinke milimetra. Osim toga, mogao je na ovaj način praviti i stvrdnute gipsane modele tako da prekrije membranu tankim gipsanim slojem prije napuhivanja. Nedostatak ovog modela u odnosu na stvarne ljuske jest činjenica da pritisak zraka djeluje okomito na površinu membrane, dok u realnosti vlastita težina i snijeg, koji su najčešće u mjerodavnoj kombinaciji opterećenja, djeluju vertikalno prema dolje. Zato je ova metoda primjenjiva za manje raspone gdje se manje razlikuju slučajevi opterećenja.



Slika 22.: Postupak napuhnete membrane (Izvor: [27])

Treći postupak je postupak s ovješnom jutenom tkaninom. Ona se u tri dimenzije ponaša kao uža ili lanac u dvije: ne pruža otpor savijanju i mijenja oblik pod opterećenjem tako da se napreže samo vlačno. Prije vješanja ona se prekrije tekućim plastičnim materijalom. Kad on postigne odgovarajuću konzistenciju, takvu da ne klizi s tkanine i da se ne raspuca pri promjeni oblika, tkanina se ovjesi u točkama koje moraju odgovarati točkama gdje će na stvarnoj građevini biti oslonci. Ponovno, nakon stvrdnjavanja model se vrlo precizno mjeri. Važan faktor u ovoj metodi je količina, tj. površina tkanine kojom se model izrađuje. Naime, ako je ona premala, dobije se plitka ljuska s velikim naprezanjima. Ako je prevelika, tkanina se vješanjem može naborati, a velik omjer visine i raspona daje neekonomične građevine. Za pronalazak arhitektonski i konstrukcijski prihvatljivog i ekonomičnoga rješenja potrebno je iskustvo i vještina inženjera. Budući da se ovdje radi o vrlo tankim ljuskama u odnosu na raspon, fleksijska krutost betona može se smatrati dovoljno malom da bi se ponašao kao membrana. S druge strane, relativno visoka zapremninska težina betona dovoljno je dominantna u odnosu na druga opterećenja, npr. snijeg i vjetar, koja bi asimetričnim djelovanjem uzrokovala savijanje, da ljuska ostane u tlaku. Zanimljivost koju navodi Chilton [28] je da je Isler kao demonstraciju ove metode napravio ljusku od leda raspona od 3 metra, tako što je polijevao tkaninu tanju od jednog milimetra vodom i pustio da se smrzne.



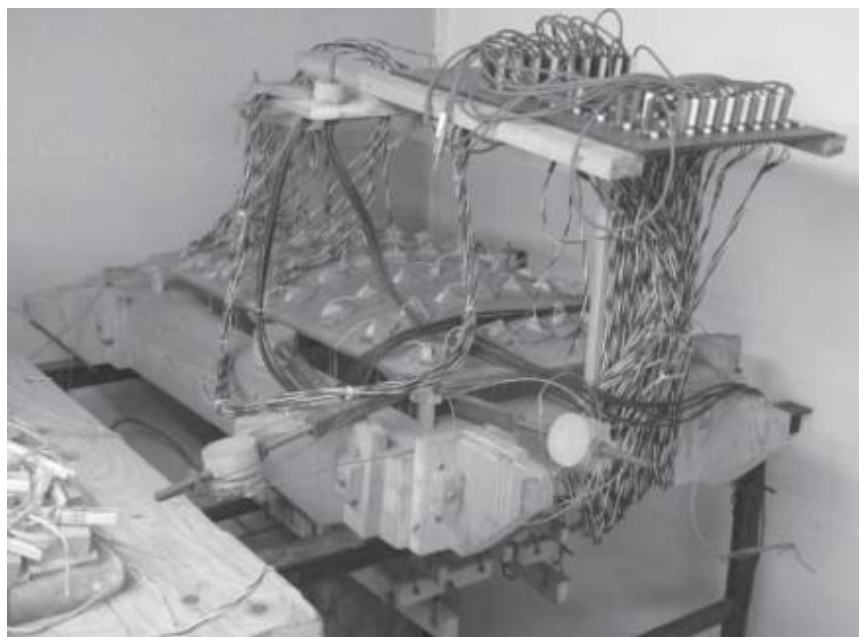
Slika 23.: Islerov viseći model (Izvor: [29])

Prema Chiltonu [26], Isler navodi tri važna pravila modeliranja, koja su, uz veliku preciznost pri izradi i mjerenju, presudna za uspješno oblikovanje. Model mora biti potpuno

proporcionalan stvarnoj ljuski. Radni dijagram materijala od kojeg je model mora biti sličnog oblika dijagramu stvarnog materijala izvedbe, za što kao primjer spominje pleksiglas i beton, kao par kompatibilnih materijala. Jednaka opterećenja u modelu i stvarnoj ljuski moraju izazivati jednaka naprezanja.

Na svojim modelima Isler je ispitivao i razne konstrukcijske ideje. Primjerice, brinula ga je opasnost izvijanja uz oslonce ljuskastog krova supermarketa u Bellinzoni, koji je projektirao. Ljuska je trebala biti debela samo 8 cm, a osim opasnosti od izvijanja, za neka opterećenja tlačna linija mogla je izaći izvan presjeka. Umjesto da podeblja ljusku, Isler je na modelu ispitao mogućnost dodavanja horizontalne prstenaste grede, prije nego što se odlučio za vertikalne potpore koje povezuju ljusku s podrumom. Za provjeru je izgradio model u mjerilu 1:10 od mikrobetona, koji je do vremena pisanja [26] i dalje stajao u okolini njegovog nekadašnjeg ureda. U izradi modela eksperimentirao je i s drugim materijalima poput lateksa.

Nakon pronalaženja odgovarajućeg oblika ljuske i mjerenja, idući korak bilo je ispitivanje modela pod opterećenjem kako bi se potvrdila njezina nosivost. Za taj korak Isler je izrađivao nove modele u krupnijem mjerilu, od pleksiglasa ili armiranog poliestera. Osim različitih slučajeva opterećenja, ispitivao ih je i s obzirom na pomake oslonaca te prednapinjanje. Važno je i pri izradi modela unijeti vlačna naprezanja u rubne grede (kod napuhnutih membrana) i vezne grede (kod točkasto oslonjenih ljuski), kako bi se osiguralo da ljuska ostane u tlaku pod svim opterećenjima. Pri samom ispitivanju, kako opisuje Chilton [26] za model dvorane Hotela Kreuz (slika 24.), na velikom broju točaka se preko gumenih pločica nanosi opterećenje kako bi se simulirala jednolika kontinuirana raspodjela. Također, u velikom broju točaka mjere se pomaci pomoću elektrootpornih mjerača. Prednapinjanje se unosi pomoću uljnih klipova u kabele. U tome primjeru, mjerenja su pokazala da se 90% opterećenja prenosi u kutove, a samo 10% na rubne grede, što je bilo suprotno Islerovim očekivanjima i navelo ga je na već spomenuti način pojačavanja kutova, kao kod supermarketa u Bellinzoni.



Slika 24.: Islerov uređaj za ispitivanje modela dvorane Hotela Kreuz u Langenthalu, jedan od njegovih najranijih uređaja (Izvor: [26])

U konačnici valja reći da, iako je najviše od Islerovih 1400 ljuski diljem Europe modelirano pomoću napuhivanja membrane, one najinovativnije i najelegantnije modelirane su pomoću visećih modela. Najkompleksnija od takvih je ljuska tvornice Sicli, proizvođača aparata za gašenje požara u Ženevi. Opisao ju je Chilton [30], a prikazana je na slikama 25. i 26. Sastoji se od dvije membrane s jednom zajedničkom točkom ovješanja. One stoje na ukupno 7 oslonaca. Debljina ljuske generalno je 9 cm (samo 1/500 raspona), dok je u kutovima debljine 30 cm zbog sprječavanja izvijanja. Ploha nije obrubljena rubnim gredama, već je zakrivljeni rub prirodno formiran na visećem modelu, što je dobro u estetskom smislu.



Slika 25.: Uređaj za ispitivanje modela ljuske tvornice Sicli (Izvor: [30])

U temelje su stavljani kabeli za prednapinjanje koji se odupiru bočnim silama iz ljuske. Kompleksnost plohe uvjetovala je visoku razinu stručnosti i preciznosti pri izvedbi. Korišten je beton visoke kvalitete. Kako je velika površina ljuske zahtijevala puno oplata, kao trajna oplata korištene su ploče od drvene vune debljine 5 cm. To je pomoglo i u trajnosti betona jer je gotovo pa eliminirana mogućnost otvaranja pukotina. Isler je gotovo 20 godina pratio deformacije na ljuski na šest mjernih točaka, pazeći pritom da se mjeri uvijek u sličnim vremenskim uvjetima zbog utjecaja temperature i vlažnosti.



Slika 26.: Islerova zgrada tvornice Sicli u Ženevi (Izvor: [31])

Isler je svojim inovativnim pristupom oblikovanju ljusaka imao velik utjecaj na razvoj arhitekture 20. stoljeća. I danas se njegovi načini izrade modela mogu upotrebljavati u kombinaciji s preciznijim mjerenjima koja automatski podatke ubacuju u računalne programe bazirane na metodi konačnih elemenata. Također, prema Chiltonu [26], treba istražiti i mogućnosti korištenja *3D-printingom* za izradu fizičkih modela u svrhu ocjene estetskih kvaliteta, a čak i fizičkih ispitivanja.



## 6. PREDNAPETE GIPKE KONSTRUKCIJE OD UŽADI

### 6.1. Općenito

Užad kao konstrukcijski element bitno se razlikuje od uobičajenih konstrukcijskih elemenata, kao što su stupovi, grede i ploče, po tome što ima zanemarivu fleksijsku krutost, što znači da ne može prenijeti opterećenje okomito na svoju os. Osim toga, ne može prenijeti ni tlačne sile u svojoj osi, te pod djelovanjem opterećenja mijenja svoj oblik tako da se opterećenje uravnoteži unutarnjim vlačnim silama. Uže je učinkovit vlačni nosač jer je poprečni presjek potpuno iskorišten, odnosno naprezanje je jednako u svim njegovim točkama.

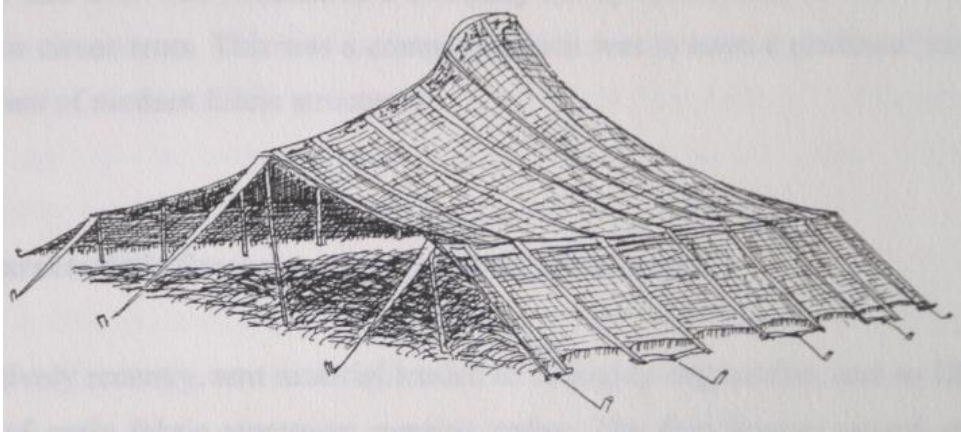
Kako uže pod različitim opterećenjima mijenja ravnotežni oblik, za održavanje oblika konstrukcije potrebne su dvije familije užadi, od kojih jedna, konkavna, nosi gravitacijska opterećenja, a druga, konveksna, služi kao stabilizacija. Stoga su mreže užadi uvijek plohe negativne Gaussove zakrivljenosti, što znači da na njima postoje sedlaste točke. Prednapinjanjem užadi postiže se da su sile u užadi vlačne za sve kombinacije opterećenja [1].

Problematika konstrukcija od užadi leži u tome što je njihov oblik koji se postiže prednapinjanjem presudan za statičko i dinamičko ponašanje užadi, a s druge strane statika konstrukcije određuje njen oblik. Ta činjenica jasno je vidljiva i iz jednadžbi ravnoteže postavljenih na slobodan čvor.

### 6.2. Povijesni pregled

Strukture od tkanine vjerojatno su prvi oblik zaklona koji su ljudi počeli graditi još u vrijeme prije poljoprivrede i prelaska na sjedilački način života. Prema Harvieju [32], u Sibiru nađeni ostatci tkanine s naznakama korištenja u svrhu nastanjivanja procijenjeni su na starost od više od 40 tisuća godina. Najrašireniji oblici šatora su arapski crni šatori nomadskih plemena, koji se i danas upotrebljavaju (slika 27.). Valja spomenuti i jurte – cilindrične šatore sa stožastim krovovima nomadskih plemena središnje Azije (slika 28.) te stožaste indijanske tipije. Ti oblici, kakve ih danas poznajemo, produkt su tisućljetnog iskustva i praktičnih

spoznaja o održavanju temperature, provjetravanju i sl. Zbog prenosivosti i brzog sastavljanja šatore su često koristile i vojske antičkog svijeta, osobito rimske legije i bizantska vojska.



Slika 27.: Crni šator arapskih stočara (Izvor: [32])

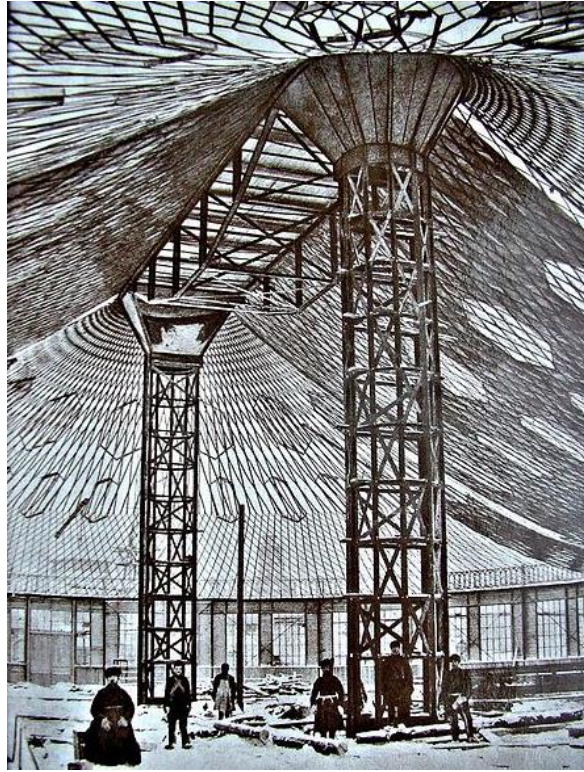


Slika 28.: Tradicionalna kirgiska jurta (Izvor: [33])

U srednjovjekovnoj Europi šatori su upotrebljavani na većim okupljanjima poput viteških turnira i sajмова. U 18. stoljeću u Londonu postavljen je prvi cirkuski šator, a početkom idućeg stoljeća trend putujućih cirkusa proširio se diljem Europe [32].

U uvodu su već spomenuti kineski viseći mostovi od bambusa, koje od 2. stoljeća mijenja kovano željezo. Europljani ga ponovno počinju upotrebljavati tek u 19. stoljeću, čijim ga

krajem miješta čelik, omogućujući još veće raspone. Jedan od najranijih primjera vlačnog krova izrađenog pomoću čeličnih kabela, prekrivenog čeličnim pločama je ovalni paviljon Vladimira Shukhova na izložbi u Nižnjem Novgorodu 1896. (slika 29.). On je potaknuo val interesa za vlačne rasponske konstrukcije u svijetu.



Slika 29.: Shukhovljev ovalni paviljon (Izvor: [34])

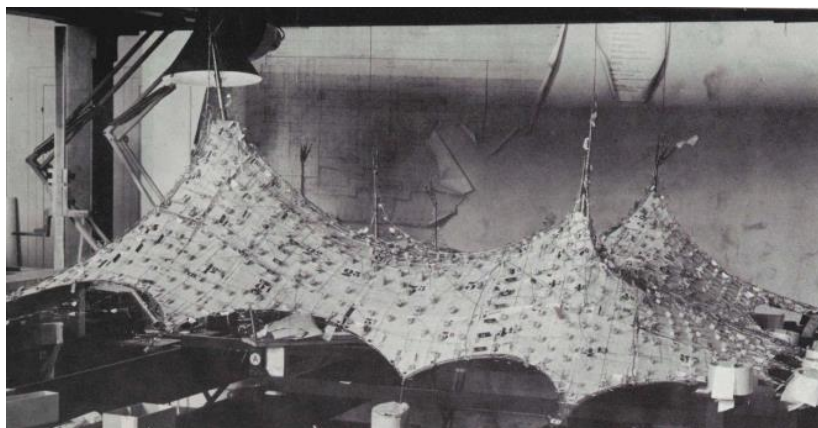
Sljedeći vrlo važan i utjecajan projekt bila je Dorton Arena u Raleighu, arhitekta Matthewa Nowickog i inženjera Freda Severuda, 1953. godine. Njezin krov sastoji se od dvije familije



Slika 30.: Čelični kabela u fazi izgradnje Dorton Arene (Izvor: [35])

čeličnih kabela koji tvore sedlastu mrežu, na način opisan u potpoglavlju 6.1., koja je prekrivena čeličnim limovima. Nakon ove Arene ubrzo su se i drugdje počele graditi njome inspirirane građevine.

Prvi inženjer koji se krenuo baviti tkaninom kao konstrukcijskim materijalom bio je Nijemac Frei Otto. Dobro je razumio povezanost arhitektonskog oblika i konstrukcije te činjenicu da tkanina na površini mora biti podatnija od nosive strukture. Međutim, tih 50-ih godina 20. stoljeća još nisu postojale tkanine dovoljnih čvrstoća, što je ograničilo moguće raspone. Da bi nadišao taj problem, Njemački paviljon na Svjetskoj izložbi u Montrealu 1967. (slika 31.) izveo je tako da tkanina ne prekriva čeličnu užad, nego je o nju ovješena. Nažalost, to je dovelo do gomilanja snijega i konstrukcija je nakon nekoliko godina srušena u snježnoj oluji [1].



Slika 31.: Ottov Njemački paviljon u Montrealu i model za ispitivanje istog (Izvor: [36])

Pri izgradnji sportskog kompleksa za Olimpijske igre 1972. u Múnchenu, Otto je odustao od gipkog pokrova pa je mreža prekrivena prozirnim akrilnim pločama (Slika 32.).



Slika 32.: Ottov Olimpijski sportski kompleks u Múnchenu (Izvor: [37])

Zbog recesije kasnih 70-ih, posebno u Europi, konstrukcije od tkanine izgubile su na popularnosti. Smatralo se da se suprotstavljaju recesijom izazvanom načelu gradnje dugotrajnih građevina. Međutim, kao odgovor na to u idućim desetljećima intenzivirala su se istraživanja i razvoj u industriji tkanina za gradnju, što je omogućilo nove dosege u veličini i kompleksnosti takvih građevina [32].



Slika 33.: Bergerova zračna luka u Denveru (Izvor: [38])

U tome novom valu razvoja prednjači Horst Berger, koji je projektirao i arhitekturu i konstrukciju svojih djela. Odličan primjer njegovog maštovitog oblikovanja je zračna luka u Denveru, iz 1994. godine (slika 33.).

### 6.3. Proračunski model mreže kabela

Prvi korak u projektiranju prednapetih gipkih konstrukcija od užadi je nalaženje oblika, što podrazumijeva početnu ravnotežnu konfiguraciju. Ona se sastoji od geometrije mreže i raspodjele sila prednapinjanja u užadi. Do kraja 60-ih godina 20. stoljeća jedini način za to bio je izrada fizičkih modela. Međutim, tom metodom bilo je vrlo teško precizno odrediti koordinate točaka, a pogotovo veličine unutarnjih sila, zbog čega su se rano počeli razvijati računalni modeli i metode proračuna.

Za proračunski model treba uvesti nekoliko pretpostavki. Prva je da se potpuno zanemaruje fleksijska krutost kabela i njihova težina. Za fazu nalaženja oblika ne uzima se ni vanjsko opterećenje, što znači da djeluju samo prednaponske vlačne sile. One djeluju normalno na dodirne plohe kabela ako klizanje kabela po kabeu nije spriječeno, a tangencijalnu komponentu imaju samo ako je klizanje spriječeno. Trenje klizanja se zanemaruje. Zbog pretpostavke potpune savitljivosti, kabeu su predstavljeni poligonalnim linijama. Te poligonalne linije u stvarnosti se mimoilaze, ali pretpostavka za model je da se sijeku. Stoga dijelove kabela možemo smatrati zglobnim čvorovima, koji su centrično priključeni. Navedene pretpostavke vrijede za sve unutarnje čvorove i čvorove na rubnim kabeuima. Osim toga, mreža ima i, najčešće krute, ležajne čvorove, kojima se spaja za konstrukcijske elemente koji nisu dio mreže i koji se smatraju nepomičnima. Njihovi položaji unaprijed su zadani.

Varijable u nalaženju oblika su topologija mreže, geometrija mreže, geometrijski rubni uvjeti i vrijednosti sila prednapinjanja, a formulacija problema ovisi o tome što je od toga zadano, a što se traži. Topologija mreže opisuje povezanost kabela, štapova i čvorova, i zadaje se unaprijed. Geometrija ili oblik mreže u proračunskom modelu određena je koordinatama čvorova, a mora zadovoljavati konstrukcijske, funkcionalne i estetske zahtjeve. Geometrijske rubne uvjete određuju zadane koordinate nepomičnih ležajeva, koje utječu na oblik mreže. Vrijednosti sila prednapinjanja mogu se unaprijed zadati ili biti nepoznanice koje se određuju iz ravnoteže čvorova ili dodatnih kinematičkih ograničenja.

Da bi se postavili uvjeti ravnoteže slobodnih čvorova uvode se oznake:

$N_f$  – niz slobodnih čvorova

$i$  – čvor na  $i$ -tom mjestu u nizu  $N_f$

$\{i, j\}$  – štap između čvorova  $i$  i  $j$

$N_i$  – niz čvorova spojenih sa čvorom  $i$

$l_{\{i,j\}} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$  – duljina štapa  $\{i, j\}$

$S_{\{i,j\}}$  – vrijednost sile u štapu  $\{i, j\}$ , za tlačnu silu negativna, a za vlačnu pozitivna

$\vec{e}_{\{i,j\}} = \frac{x_j - x_i}{l_{\{i,j\}}} \vec{i} + \frac{y_j - y_i}{l_{\{i,j\}}} \vec{j} + \frac{z_j - z_i}{l_{\{i,j\}}} \vec{k}$  – jedinični vektor u osi štapa  $\{i, j\}$ , orijentiran od štapa  $i$  prema štapu  $j$

Za svaki slobodni čvor  $i$  možemo napisati tri jednadžbe ravnoteže – jednadžbe projekcija sila u priključenim štapovima na tri koordinatne osi:

$$\sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \vec{e}_{\{i,j\}} \cdot \vec{i} = 0 \quad \sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \vec{e}_{\{i,j\}} \cdot \vec{j} = 0 \quad \sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \vec{e}_{\{i,j\}} \cdot \vec{k} = 0 \quad (3)$$

Uvrstimo li izraz za  $l_{\{i,j\}}$  u izraz za  $\vec{e}_{\{i,j\}}$  i potom izraz za  $\vec{e}_{\{i,j\}}$  u izraze (3), dobivamo za  $i \in N_f$  sljedeće izraze:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= 0 \\ \sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= 0 \\ \sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Označimo s  $n_f$  broj slobodnih čvorova, a  $n_b$  broj štapova. Izrazi (4) onda čine sustav  $3n_f$  nelinearnih algebarskih jednadžbi. Rješenje sustava je skup  $n_f$  trojki koordinata  $(x_i, y_i, z_i), i \in N_f$  i  $n_b$  vrijednosti sila  $S_{\{i,j\}}$ . Jednadžbe ne sadrže nikakve funkcije ili

koeficijente koji vežu produljenja kabelā s vrijednostima sila u njima. To znači da ravnotežna konfiguracija ne ovisi o ploštinama poprečnih presjeka i modulima elastičnosti kabelā, i statički je problem [1].

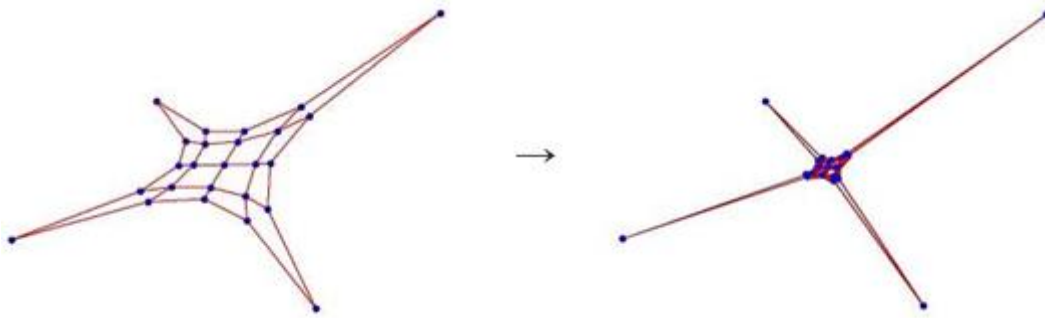
Ukupna duljina svih kabelā može se zapisati kao suma duljina svih štapova izraženih preko koordinata slobodnih čvorova. Ako se ta funkcija ukupne duljine derivira po koordinatama slobodnih čvorova i dobivene derivacije izjednače se s nulom, dobiva se sustav čije su rješenje koordinate čvorova za koje funkcija ukupne duljine poprima minimum. Međutim, taj sustav, uz dodatnu pretpostavku da je sila  $S_{\{i,j\}}$  konstantna, to jest jednaka za sve štapove, ekvivalentan je sustavu (4). Dakle, sustav (4) može se interpretirati kao iskaz uvjeta minimuma ukupne duljine užadi. Rješenje tog sustava su koordinate slobodnih čvorova koje za zadanu topologiju daju zbroj duljina štapova manji nego za ijedan drugi oblik koji mreža može poprimiti. Taj oblik naziva se minimalna ili geodetska mreža kabelā.

Mali broj nelinearnih jednadžbi i sustava može se analitički riješiti. One se stoga rješavaju iteracijskim postupcima postupnog približavanja kao što je Newton-Raphsonov postupak. Međutim, pokazano je ([1]) da i za najjednostavniju moguću mrežu kabelā taj postupak ne konvergira uvijek, odnosno da ne može jamčiti dolazak do približnog rješenja s dovoljnom točnošću.

Mreže u kojima sile u kabelima nisu međusobno jednake, ali su konstantne uzduž pojedinog kabela nazivaju se „prirodnim“ poopćenim minimalnim mrežama. Mreže dolaze u ovaj oblik ako se za prednapinjanja dozvoli klizanje kabelā. Za različita opterećenja ni sile uzduž kabela ne ostaju iste, ali su razlike dovoljno male u odnosu na sile prednapinjanja. Ako su pak sile u svim štapovima modela potpuno neovisne, riječ je o „apstraktnom“ poopćenju. Mogućnost uporabe „prirodnih“ poopćenih minimalnih mreža povećava skup ostvarivih oblika za ove vrste konstrukcija. Pritom su važni omjeri zadanih sila u kabelima, a ne njihove apsolutne vrijednosti.



Kod mreža s rubnim kabelima, u njima su sile znatno veće nego u unutarnjim kabelima. Zbog toga se dešava da dva ili više čvora na tim rubnim kabelima otkližu u istu točku (slika 34.), što se ne može spriječiti ni znatnim povećanjem zadanih sila u proračunskom modelu. Zato se uvode kinematička ograničenja štapova na rubnim kabelima, pomoću Lagrangeovih multiplikatora.



Slika 34.: Međusobno približavanje čvorova na rubnim kabelima (Izvor: [1])

#### 6.4. Metoda gustoće sile

Metodu gustoće sile početkom 70-ih godina prošlog stoljeća razvili su Klaus Linkwitz i Hans-Jörg Schek. U njoj je problem rješavanja sustava jednadžbi slobodnog čvora (4) lineariziran na način da se sustav zapiše kao:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_i} \frac{S_{\{i,j\}}}{l_{\{i,j\}}} (x_j - x_i) &= 0 \\ \sum_{j \in N_i} \frac{S_{\{i,j\}}}{l_{\{i,j\}}} (y_j - y_i) &= 0 \\ \sum_{j \in N_i} \frac{S_{\{i,j\}}}{l_{\{i,j\}}} (z_j - z_i) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Omjer vrijednosti sile  $S_{\{i,j\}}$  u štapu  $\{i,j\}$  i njegove duljine  $l_{\{i,j\}}$  nazvan je gustoćom sile, s oznakom  $q_{\{i,j\}}$ .

$$q_{\{i,j\}} = \frac{S_{\{i,j\}}}{l_{\{i,j\}}} \quad (6)$$

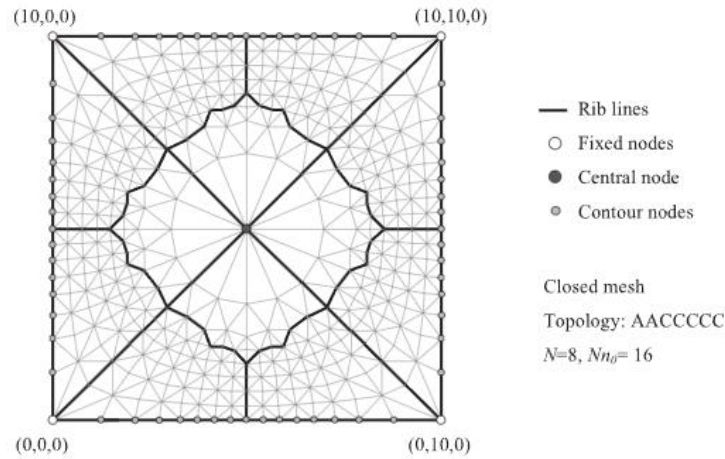
Uvrštavanjem izraza (6) u izraz (5) dobiva se sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_i} q_{\{i,j\}} (x_j - x_i) &= 0 \\ \sum_{j \in N_i} q_{\{i,j\}} (y_j - y_i) &= 0 \\ \sum_{j \in N_i} q_{\{i,j\}} (z_j - z_i) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Zadavanjem vrijednosti gustoće sila  $q_{\{i,j\}}$  nepoznanice su i dalje vrijednosti sila i koordinate čvorova, ali zato imamo još po jednu linearnu jednadžbu sa zadanim koeficijentom  $q_{\{i,j\}}$  za svaki štap. Sustav se zapravo raspada u 3 manja sustava, u svakom od kojih su nepoznanice koordinate slobodnih čvorova na jednoj od 3 koordinatne osi. Iz dobivenih koordinata prema izrazu za  $l_{\{i,j\}}$  lako je dobiti duljine štapova i nakon toga prema izrazu (6) i sile. Prema [1] Linkwitz ipak napominje da je oblik dobiven ovom metodom tek polazište u nalaženju oblika. Zbog toga postoji i iterativni oblik metode gustoće sila u kojem se gustoća sile u štapu za novi korak dobiva množenjem gustoće sile iz prethodnog koraka s kvocijentom tražene sile u štapu i sile u štapu dobivene prethodnim korakom. Analogno, postupak se može provesti i za tražene duljine štapova.

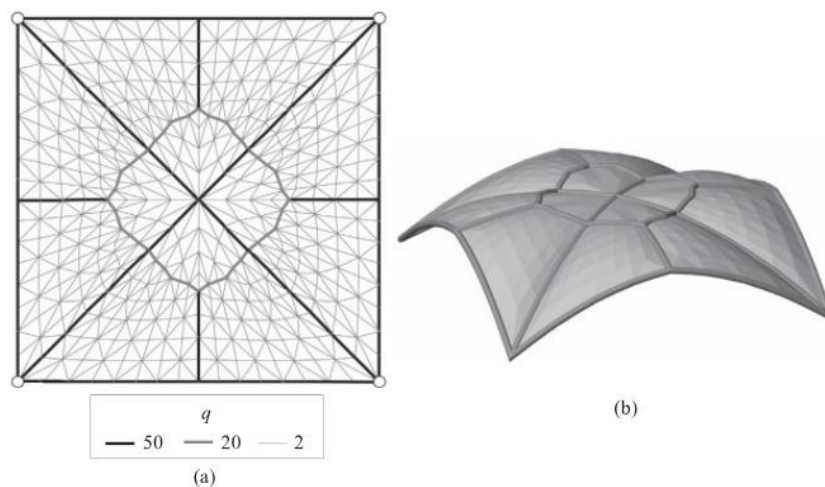
## 6.5. Primjena metode gustoće sila na tlačne konstrukcije s unutarnjim rebrima

Dosad je objašnjena primjena metode gustoće sila na gipke vlačne konstrukcije. Primjenom principa vlačno-tlačne analogije, ona se može upotrebljavati i za oblikovanje tlačnih konstrukcija kao što su, primjerice, svodovi, što je opisano u ovom potpoglavlju, prema [39]. Da bi se metoda gustoća sila primijenila na ovaj tip konstrukcija, potrebno je objasniti postupak topološkog mapiranja. To je postupak ravninske podjele traženog oblika tlocrta u mrežu trokuta, kao na slici 35. U [39], prema Hernandez-Montesu, autori navode da se to čini po nekim osnovnim topološkim pravilima, neovisno o traženoj geometrijskoj konfiguraciji. Ovdje taj postupak neće biti detaljno opisan, samo valja spomenuti da se podjela izvodi od središnjeg čvora prema van u koncentričnim prstenima, povezujući po nekom od 3 pravila čvorove jednog prstena sa čvorovima idućeg. Riječ je zapravo o izboru topologije štapova za traženje oblika mreže.



Slika 35.: Primjer topološkog mapiranja; Deblje crte predstavljaju pozicije rebara (Izvor: [39])

U idućem koraku, za sve grane mreže pretpostavlja se ista gustoća sila, određuju se fiksni čvorovi te se, bez uzimanja u obzir vlastite težine i ikakvih vanjskih opterećenja, metodom gustoće sila nalazi ravnotežna konfiguracija pomoću izraza (7). Nakon toga, na mreži se slobodno mogu odrediti pozicije rebara, što se može objasniti kao put sila kroz budući svod. Međutim, da bi se dobila ravnotežna konfiguracija, taj put sila mora imati fizikalnog smisla. Zato je potrebno razumijevanje puta sila u rebrastim svodovima (vidljivo iz crteža fizičkog modela na slici 18.). Na novodobivenoj ravnotežnoj konfiguraciji biraju se štapovi koji će predstavljati rebra, rubove te radijalne i prstenaste grane (slika 35.). Pritom treba veliku pažnju obratiti na očuvanje simetrije. Odabranim granama dodjeljuje se veća gustoća sila (slika 36.), u određenim omjerima. Ako je zahtjev, primjerice, da rubni lukovi svoda ostanu vertikalni, mogu se fiksirati s obzirom na x- ili y-os.



Slika 36.: a) Raspodjela gustoća sila na topološkoj mreži; b) konačni oblik dobiven provedbom proračuna (Izvor: [39])

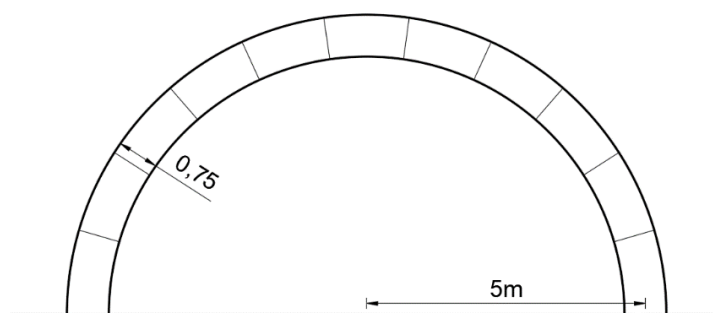
Slijedi proračun pomoću metode gustoće sila, ali s razlikom u odnosu na primjenu kod vlačnih konstrukcija. Za njih je jedna od pretpostavki proračunskog modela glasila da se vlastita težina užadi zanemaruje jer je mala u odnosu na sile prednapinjanja. Međutim, kod tlačnih svodova to nije tako. U izraz (7) za smjer z-osi dodaju se vlastite težine. Za tjeme svoda (centralnu točku mreže), kao opterećenje se stavlja trećina težine svakog trokuta koji je okružuje i polovina težine svake grane koja je dio rebara, a koja ga dodiruje. Vlastite težine svoda izražene su po jedinici površine, a vlastite težine rebara po jedinici duljine. Površina svakog trokuta računa se kao polovica norme vektorskog produkta dvaju stranica koje se spajaju u točki za koju se računa opterećenje. Duljine štapova dobivene su u prethodnom proračunu. Zbog vlastite težine problem više nije linearan pa se rješava iteracijskim postupkom. Nakon iteracije dobiva se nova ravnotežna konfiguracija, iz koje se računaju nove vlastite težine za iduću iteraciju. Iteracija prestaje kada je razlika z-koordinata dvaju uzastopnih iteracija po apsolutnoj vrijednosti manja od kriterija konvergencije, koji određuje inženjer. Ako proračun divergira, došlo je do greške u izboru vrijednosti gustoća sila ili u rasporedu rebara.

Kao i za gipke vlačne konstrukcije, za koje je inicijalno predviđena, i u ovom postupku metoda gustoće sila koristi se iterativno, dajući drugačije oblike za drugačije izabrane vrijednosti i rasporede gustoće sila, s ciljem zadovoljavanja konstrukcijskih i estetskih zahtjeva.

## 7. PRIMJERI

### 7.1. Crtanje tlačne linije pomoću verižnog poligona

Zadan je kameni polukružni luk radijusa 5 m i debljine 75 cm, kao na slici 37. Potrebno je naći tlačnu liniju.



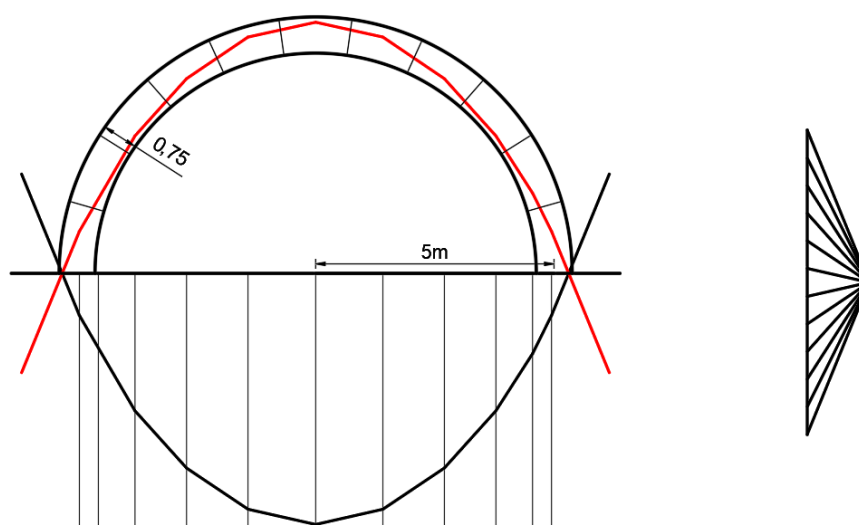
Slika 37.: Polukružni luk (nacrtano u AutoCAD-u)

U AutoCAD-u su izmjerene površine kamenih blokova i iznose  $A = 1,071 \text{ m}^2$ .

Za zapremninsku težinu kamena uzeta je vrijednost za vapnenac od  $\gamma = 27,1 \text{ kN/m}^3$ .

Težina svakog kamenog bloka iznosi  $W = A \cdot \gamma = 29,02 \text{ kN/m'}$ .

Težine kamenih blokova stavljene su u plan sila. Za iznos horizontalnog potiska uzeto je  $H = 65 \text{ kN/m'}$ , što je približno 20% ukupne težine luka.



Slika 38.: Postupak verižnog poligona za dobivanje tlačne linije luka (nacrtano u AutoCAD-u)

Grafički su pronađena težišta svakog kamenog bloka, a zrake iz plana sila prenesene su na način da se dobije verižni poligon, koji je zrcaljen po načelu vlačno-tlačne analogije da se dobije tlačna linija. Budući da se tlačna linija nalazi unutar debljine luka, ne dolazi do pojave pukotina i luk je siguran.

## 7.2. Analiza mosta Puente del Diablo u Martorellu

Kod gotičkih šiljastih lukova, zbog manje granične debljine, zaglavni se kamen bogato ukrašava ili se na neki drugi način dodaje teret u toj točki. Time se postiže bolje oblikovanje tlačne linije u odnosu na debljinu luka i bolja stabilnost.

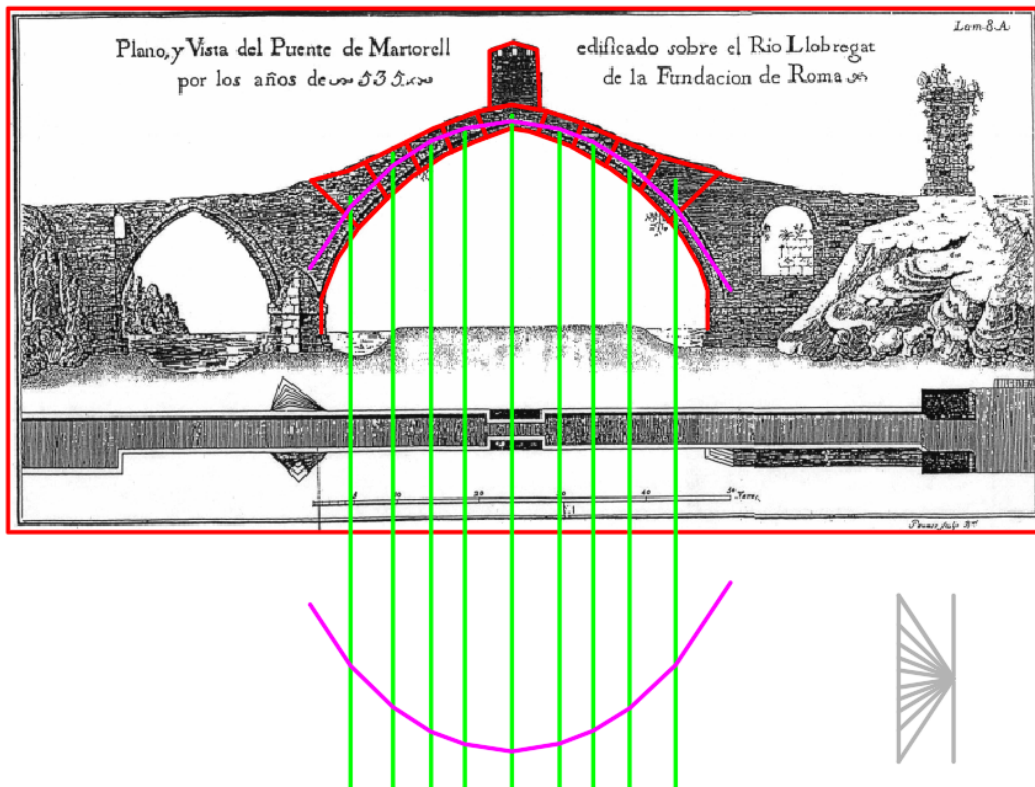
Jedan od takvih primjera je i Puente del Diablo u katalonskom gradiću Martorellu, na čijem se tjemenu nalazi mali toranj za kontrolu prolaska preko i ispod mosta, koji ima i konstrukcijsku funkciju, što se pokušalo dokazati u ovom primjeru. Most je visok 21 metar, a raspona je 43 metra.

Prvo je iscrtana kontura glavnog raspona. Radi pojednostavljenja, most je podijeljen na devet odsječaka, što pravokutnih, što trapeznih. U AutoCAD-u su nađene njihove površine i težišta. Horizontalni potisak uzet je kao 33% ukupne težine mosta.

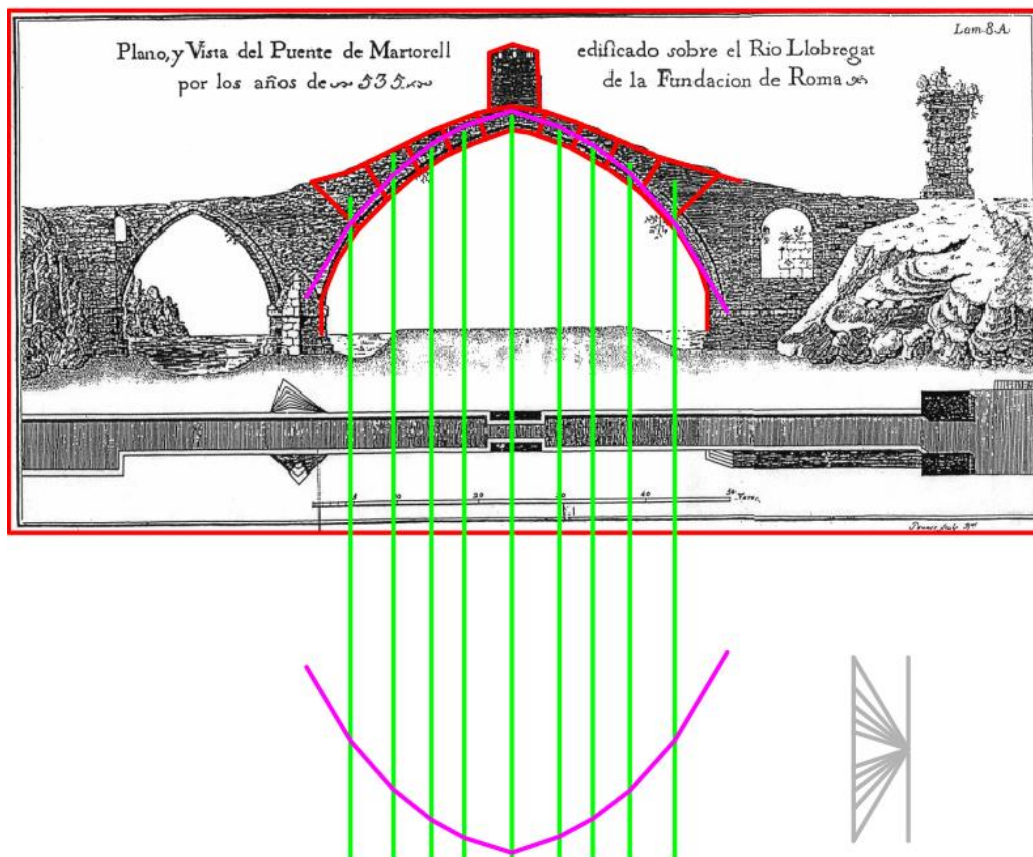
Za prvi primjer, radi usporedbe, most je zamišljen bez tornjića na vrhu i on nije uzet kao opterećenje u planu sila. (slika 39.). Verižni poligon nacrtan je po uobičajenom postupku te je zrcaljenjem dobivena tlačna linija.

Za drugi primjer (slika 40.), tornjić je uzet u obzir, ali kako je on zapravo dobrim dijelom šupalj, uzet je s polovinom vrijednosti površine pri računanju težine po metru širine, što bi bilo približno tako da se računalo s volumenima.

Zaključak ove, ipak prilično grube analize, jest da je most siguran, kako s tornjićem tako i bez njega, jer tlačne linije za oba slučaja leže unutar debljine mosta.



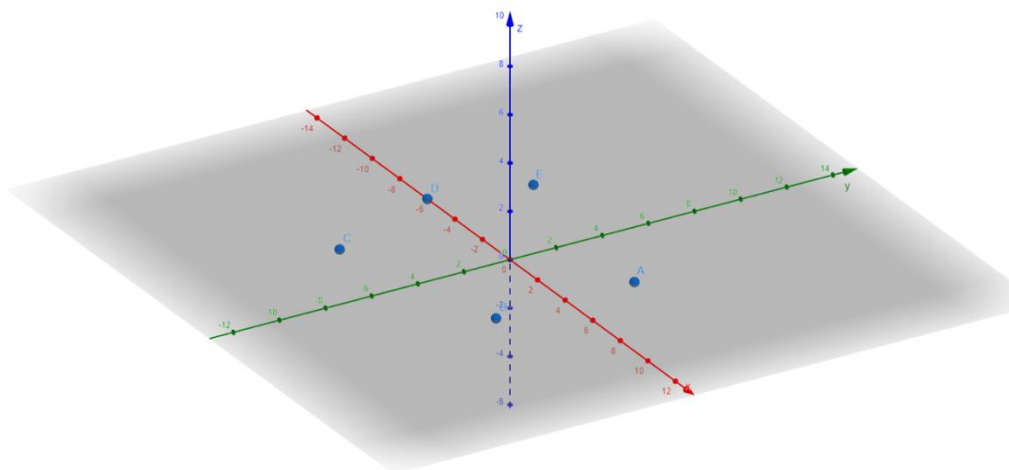
Slika 39.: Tlačna linija mosta zamišljenog bez tornjića (Izvor crteža: [40], analiza nacrtana u AutoCAD-u)



Slika 40.: Tlačna linija mosta s tornjićem (Izvor crteža: [40], analiza nacrtana u AutoCAD-u)

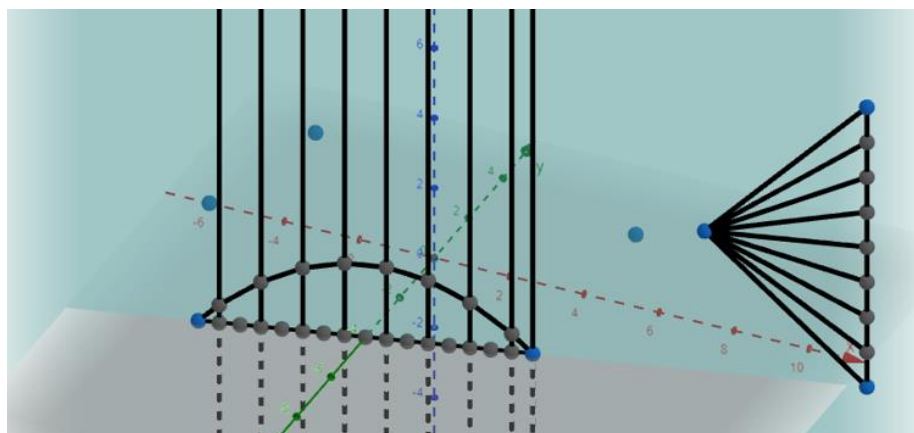
### 7.3. Oblikovanje ljuske pomoću verižnog poligona

U alatu GeoGebra demonstriran je način primjene verižnog poligona za pojednostavljeno oblikovanje tlačne ljuske, prema Saliklisu [41]. Zadan je peterokutni raspored oslonaca prikazan na slici 41.



Slika 41.: Raspored oslonaca za ljusku (GeoGebra)

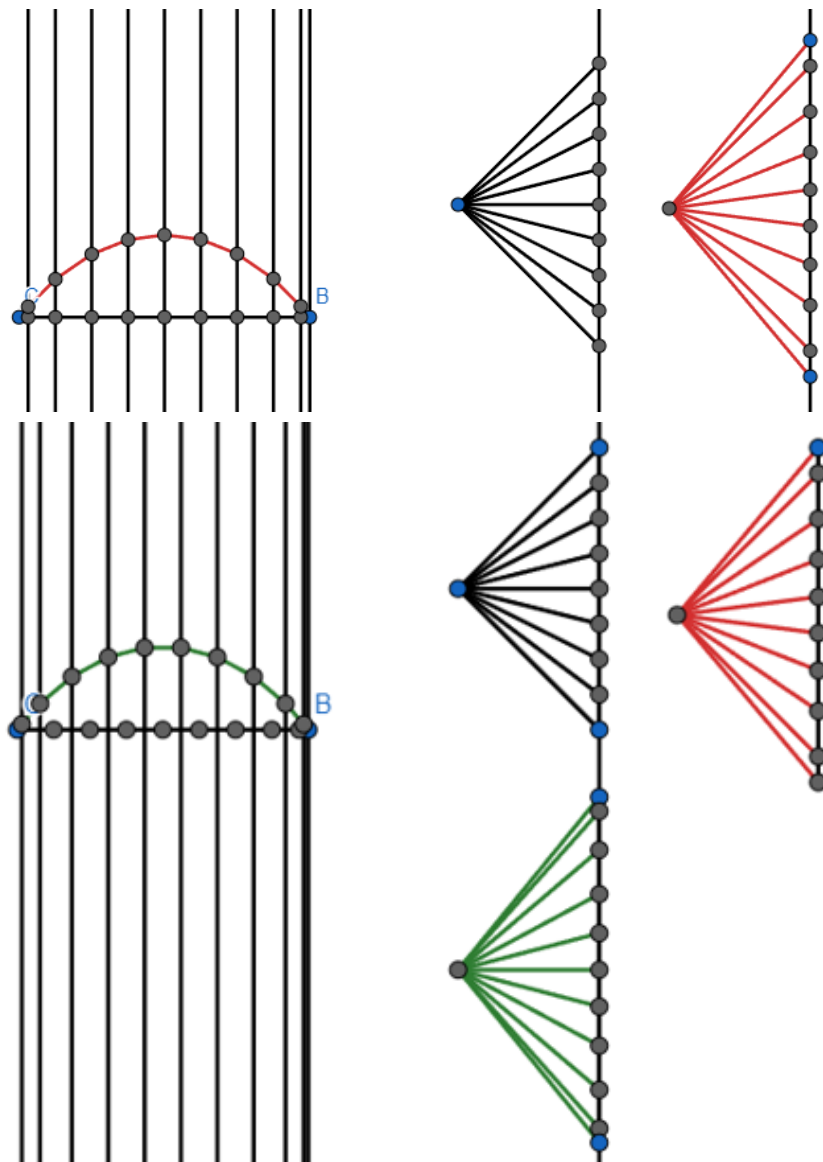
Odlučeno je da će nad njima biti konstruirano 5 lukova oblika lančanice, koja će se aproksimirati iteracijskom metodom verižnog poligona. Uz pretpostavku da je cijela ljuska od istog materijala i jednake debljine, težinom trake betona može se smatrati duljina linije koja ju u ravninskoj konstrukciji predstavlja. Pritom se u iteraciju kreće s pretpostavkom da su svi odsječci jednake težine (slika 42.)



Slika 42.: Prvi korak iteracije za luk BC (GeoGebra)

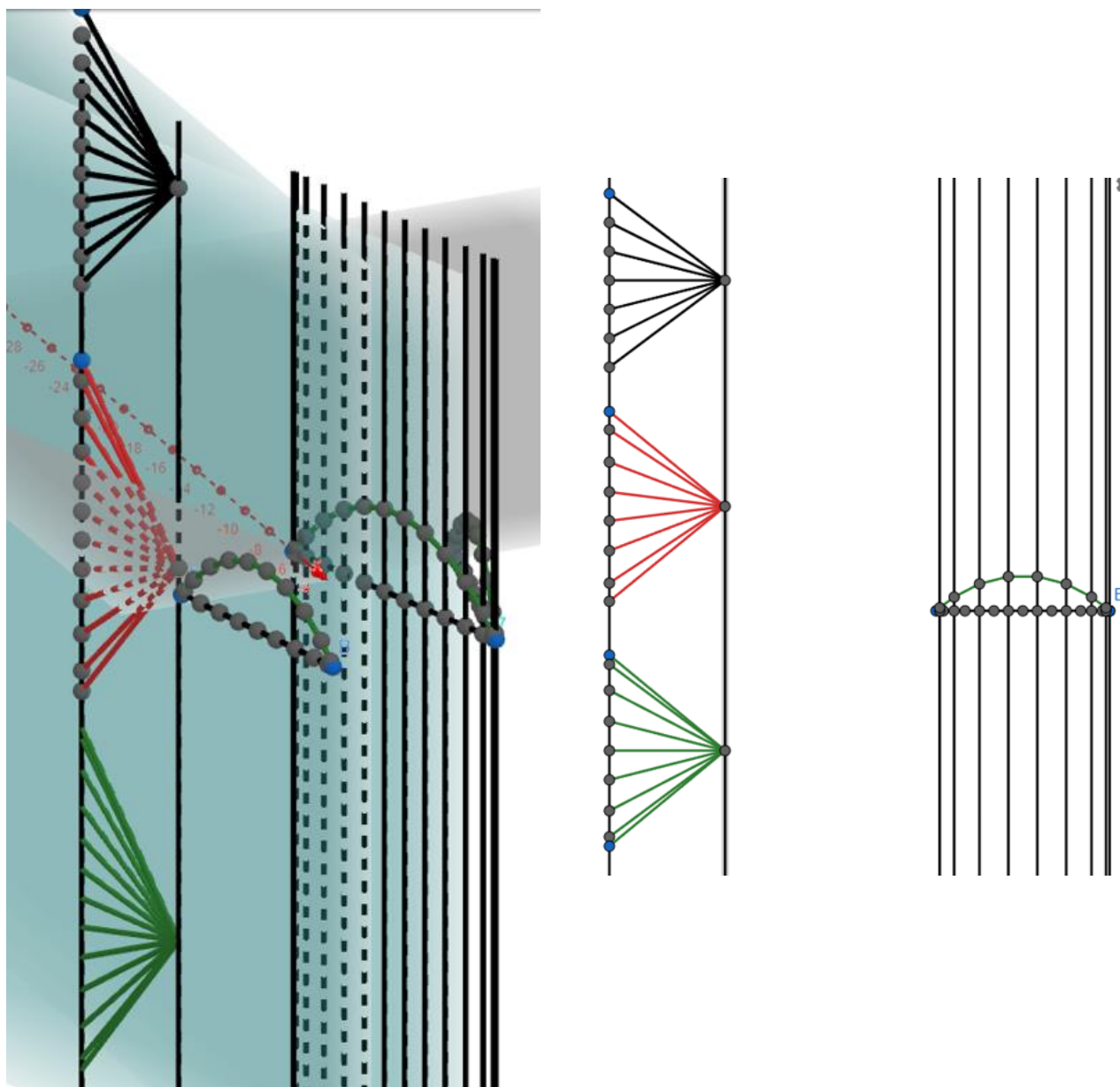


U drugom koraku iteracije za težine odsječaka uzimaju se duljine dijelova verižnog poligona iz prvog koraka, te se ponovno s novim planom sila crta verižni poligon. Duljine njegovih odsječaka predstavljaju težine za treću i zadnju iteraciju.



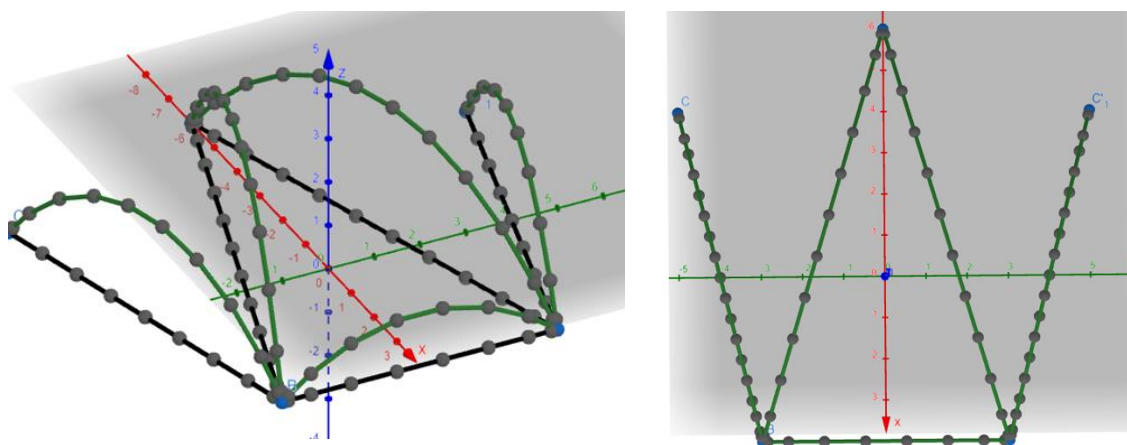
Slika 43.: Oblici luka nakon druge i treće iteracije i planovi sila, luk BC (GeoGebra)

Luk BC zrcaljen je da se dobije luk AE. Iteracijski postupak na identičan način ponovljen je za luk AD, koji je zrcaljen u luk BD, te za luk AB. Njihovi konačni oblici vidljivi su na slici 44.

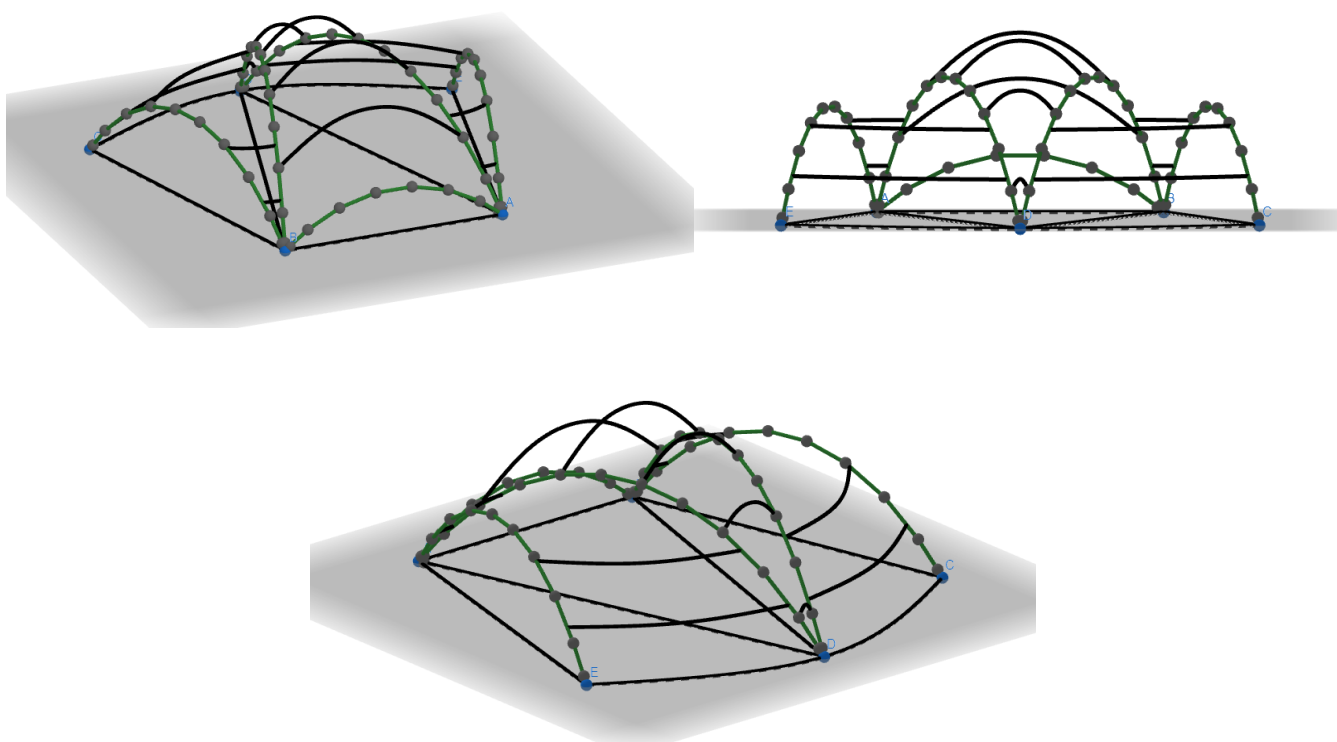


Slika 44.: Konstrukcija luka AD prikazana u prostoru (lijevo); Konstrukcija luka AB prikazana u ravni (desno) (GeoGebra)

Kad su dobiveni svi lukovi, nastao je oblik sa slike 45. Nakon toga, taj oblik je „pokriven“ pomoću funkcije *spline* da se dobije konačan oblik ljuske (slika 46.). Zahvaljujući oblikovanju pomoću lančanice, ljuska bi trebala uvijek biti u tlaku, zbog čega može biti napravljena od vrlo tankog sloja armiranog betona.



Slika 45.: Konačni oblici svih pet lančanica (lijevo); njihov tlocrtni raspored (desno) (GeoGebra)



Slika 46.: Konačni izgled ljuske sa različitih strana (lančanice dobivene iteracijom su zelene, a krivulje dobivene funkcijom *spline* su crne) (GeoGebra)

## 8. ZAKLJUČAK

Hookeovo otkriće vlačno-tlačne analogije otvorilo je vrata razumijevanju ponašanja zidanih konstrukcija. Iako se nije naglo raširilo po Europi, jer Hooke nije opisao kako bi se ono primjenjivalo u praksi, zajedničkim radom brojnih znanstvenika i inženjera došlo se do metode koja danas omogućuje ispravnu analizu zidanih građevina. Dugo se smatralo da elastična teorija drži odgovor na pitanje stvarne tlačne linije. Međutim, Heymanovo uklapanje analize zidanih lukova i svodova u modernu graničnu analizu dalo je konačno prednost ravnotežnom pristupu, koji je do polovice 20. stoljeća praktički bio zaboravljen, a već nekoliko stoljeća prije je uspješno korišten. Danas se više uglavnom više ne gradi od kamena, ali nova znanja treba upotrebljavati i razvijati radi očuvanja arhitektonske baštine. Potvrdom validnosti ravnotežnog pristupa, tj. uporabe tlačne linije, na važnosti dobiva grafička statika kao njegov važan alat. Iz primjera je vidljiva jednostavnost njezine primjene u donošenju zaključaka o sigurnosti materijala. Ipak, njome se treba koristiti oprezno jer pri analizi starih građevina svaka postavlja nove izazove za inženjere.

Osim kod povijesnih zidanih građevina, vlačno-tlačna analogija našla je primjenu i u modernoj arhitekturi pojavom ljuski. Primjena, između ostalog, visećih fizičkih modela očit je primjer, a arhitektima je otvorila gotovo neograničene mogućnosti oblikovanja. Ponovno zahvaljujući vlačno-tlačnoj analogiji moguće je povezati proračunske metode vlačnih i tlačnih konstrukcija kao što je to učinjeno s metodom gustoće sila.

## POPIS LITERATURE

- [1] Fresl K. *Građevna statika 2. Predavanja*, 2017. Dostupno na: <https://master.grad.hr/nastava/gS/gS2/gS2.pdf>
- [2] Huerta S. The Analysis of Masonry Architecture: A Historical Approach. *Architectural Science Review*. 2008;51(4): 297-328. Dostupno: doi: 10.3763/asre.2008.5136 [Pristupljeno: 27. kolovoza 2024.]
- [3] Palomo M. Describing Reality: Bernoulli's Challenge of the Catenary Curve and its Mathematical Description by Leibniz and Huygens. U: Fichant M, Bussoti P, Oliveira A, Pisano R. (ur.) *Leibniz and the Dialogue between Sciences, Philosophy and Engineering, 1646-2016. New Historical and Epistemological Insights*. London: College Publications; 2017, 00-00
- [4] De Matteis G., Cacace D. Structural behaviour of masonry vault according to architectural types. U: Bello G., Ciambrone A., Di Bernardo M. L. (ur.) *World Heritage and Knowledge: Representation, Restoration, Redesign, Resilience, Le Vie dei Mercanti \_ XVI International Forum di Studi, Napoli, 14.-16. lipnja 2018. Monumental Complex of Santa Chiara, Naples*, Rome: Gangemi editore; 2018. str. 925.
- [5] Calter P. Gateway to Mathematics: Equations of the St. Louis Arch. *Nexus Network Journal* 2006;8(2): 53-66. Dostupno: doi: 10.1007/s00004-006-0017-7 [Pristupljeno: 28. kolovoza 2024.]
- [6] *Encyclopaedia Britannica Online*. Chicago: Encyclopaedia Britannica, Inc.; 2023. [Pristupljeno 31. kolovoza 2024.]. Dostupno: <https://www.britannica.com/place/Ctesiphon-ancient-city-Iraq#ref27030>
- [7] Farrokh K. Master Builders: Influence of Sassanid Architecture Reached far Beyond their Borders. *Dr. Kaveh Farrokh*. Dostupno: <https://www.kavehfarrokh.com/ancient-prehistory-651-a-d/sassanians/master-builders-influence-of-sassanid-architecture-reached-far-beyond-their-borders/> [Pristupljeno: 31. kolovoza 2024.]
- [8] Embassy of the Republic of Iraq in Washington, D.C. *Iraq to restore ancient arch to woo back tourists*. Dostupno: <https://www.iraqiembassy.us/in-the-news/iraq-to-restore-ancient-arch-to-woo-back-tourists> [Pristupljeno: 31. kolovoza 2024.]
- [9] Heyman J. Hooke's Cubico-Parabolical Conoid. *Notes and Records of the Royal Society of London*. 1998;52(1): 39-50. Dostupno: doi: 10.1098/rsnr.1998.0033

- 
- [10] Le Seur T., Jacquier F., Bošković R. G. *Parere di tre matematici sopra i danni, che si sono trovati nella cupola di S. Pietro*. Rim: N.P.; 1742. Dostupno: <https://bibdig.museogalileo.it/tecanew/opera?bid=958646&seq=35> [Pristupljeno: 3. rujna 2024.]
- [11] Lopez G. M. Poleni's Manuscripts about the Dome of Saint Peter's. U: Dunkeld M., Campbell J. W. P., Louw H., Tutton M., Addis B., Thorne R. (ur.) *Proceedings of the Second International Congress on Construction History [Volume 2], 29. ožujka – 2. travnja 2006*. Queens' College, Cambridge University, Exeter: Shoer Run Press; 2006. str. 1957-1979.
- [12] National Park Service. *Gateway Arch National Park*. Dostupno: <https://www.nps.gov/jeff/index.htm> [Pristupljeno: 3. rujna 2024.]
- [13] Ungewitter G. *Lehrbuch der gotischen Konstruktionen, 3. izd.* Leipzig: Chr. Herm. Tauchnitz; 1890.  
Dostupno: [https://books.google.hr/books?id=JXpZAAAAYAAJ&pg=PA162-IA1&hl=hr&source=gbs\\_selected\\_pages&cad=1#v=onepage&q&f=false](https://books.google.hr/books?id=JXpZAAAAYAAJ&pg=PA162-IA1&hl=hr&source=gbs_selected_pages&cad=1#v=onepage&q&f=false)  
[Pristupljeno: 8. rujna 2024.]
- [14] Acces Mallorca. Palma Cathedral La Seu. *Acces Mallorca*. Dostupno: <https://accesmallorca.com/attractions/palma-cathedral-la-seu/> [Pristupljeno: 8. rujna 2024.]
- [15] Varignon P. *Nouvelle mecanique ou statique, dont le projet fut donné, 1. izd.* Paris: Claude Jombert; 1687. Dostupno: <https://books.google.hr/books?id=o-IWAAAACAAJ&printsec=frontcover&hl=hr#v=onepage&q&f=false> [Pristupljeno: 9. rujna 2024.]
- [16] Block P., De Jong M., Ochendorf J. As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches. *Nexus Network Journal* 2006;8(2): 13-24. Dostupno: doi: 10.1007/s00004-006-0015-9 [Pristupljeno: 9. rujna 2024.]
- [17] Heyman J. *The Stone Skeleton, Structural Engineering of Masonry Architecture*. Cambridge: Press Syndicate of the University of Cambridge; 1995. Dostupno: <https://archive.org/details/stoneskeletonstr0000heym/page/n9/mode/2up>  
[Pristupljeno: 9. rujna 2024.]

- [18] Huerta S. The use of simple models in the teaching of the essentials of masonry arch behaviour. U: Mochi G. (ur.) *Theory and practice of constructions: knowledge, means and models. Didactic and research experiences*. Ravenna: Fondazione Flaminia; 2005, str. 747-761
- [19] The University of Edinburgh. Failure mechanism of Gothic Cross Vaults. *The Failure of Gothic Cross-Vaults*. Dostupno: <https://gothic-vaults-edinburgh-thesis.weebly.com/failure-mechanism-of-gothic-cross-vaults.html> [Pristupljeno: 10. rujna 2024.]
- [20] Huerta S. Structural Design in the Work of Gaudí. *Architectural Science Review*. 2006;49(4): 324-339. Dostupno: doi: 10.3763/asre.2006.4943 [Pristupljeno: 10. rujna 2024.]
- [21] Dos de Arte Ediciones. La Pedrera – Casa Milá. *Dosde*. Dostupno: <https://www.dosde.com/discover/en/la-pedrera-casa-mila/> [Pristupljeno: 10. rujna 2024.]
- [22] Beranek W.J., Understanding of Structures. U: Lemaire R.M., Van Balen K. (ur.) , *Stable-Unstable? Structural Consolidation of Ancient Buildings*. Leuven: Leuven University Press; 1988, str. 29-44
- [23] Gaudi Designer. Colonia Güell. *Gaudi Designer*. Dostupno: <https://www.gaudidesigner.com/uk/colonia-guell.html> [Pristupljeno: 10. rujna 2024.]
- [24] Baptiste Darbois Texier. Colonia Güell. *My research in fluid dynamics*. Dostupno: <https://baptistedarboistexier.wordpress.com/2015/03/15/colonia-guell/> [Pristupljeno: 10. rujna 2024.]
- [25] Isler H. New Shapes for Shells. *Bulletin of the International Association for Shell Structures*. 1961;8: 123-130. Dostupno: doi: 10.3763/asre.2006.4943 [Pristupljeno: 10. rujna 2024.]
- [26] Chilton J. Heinz Isler and his use of physical models. U: Addis B. (ur.) *Physical models*. Berlin: Wilhelm Ernst & Sohn; 2020, str. 613-637 Dostupno: doi: 10.1002/9783433609613.ch21 [Pristupljeno: 11. rujna 2024.]
- [27] Chilton J. *Heinz Isler: The Engineer's Contribution to Contemporary Architecture*. London: Thomas Telford; 2000.
- [28] Chilton J. Heinz Isler: Natural Hills on Different Edge Lines. *Drawing Matter*. Dostupno: <https://drawingmatter.org/heinz-isler-natural-hills-on-different-edge-lines/> [Pristupljeno: 11. rujna 2024.]

- [29] Aalto University. Design of Structures. Common Ground. *Exhibitions*. Dostupno: <https://www.ads-aalto.fi/common-ground/> [Pristupljeno: 11. rujna 2024.]
- [30] Chuang C., Chilton J. Design and Modelling of Heinz Isler's Sicli Shell. U: Kawaguchi K., Ohsaki M., Takeuchi T. (ur.) *Proceedings of the IASS Annual Symposium 2016 „Spatial Structures in the 21st Century“*; 26. – 30. rujna 2016. Tokyo, Tokyo: IASS; 2016.
- [31] Genève, Usine Sicli. 1969 (Heinz Isler, Burgdorf). Dostupno: Genève, Usine Sicli [Pristupljeno: 11. rujna 2024.]
- [32] Harvie G. The history of fabric structures. *Institute of Historic Building Conservation: Conservation Wiki*. Dostupno: [https://www.designingbuildings.co.uk/wiki/The\\_history\\_of\\_fabric\\_structures](https://www.designingbuildings.co.uk/wiki/The_history_of_fabric_structures) [Pristupljeno: 12. rujna 2024.]
- [33] Žváček O. A traditional Kyrgyz yurt. *Media Viewer*. Dostupno: [https://en.wikipedia.org/wiki/Yurt#/media/File:Kyrgyzsk%C3%A1\\_jurta,\\_Song-k%C3%B6l.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Yurt#/media/File:Kyrgyzsk%C3%A1_jurta,_Song-k%C3%B6l.jpg) [Pristupljeno: 12. rujna 2024.]
- [34] Karelin A. O. Trudy po istorii tehniki, AN SSSR, 8, 1954. Dostupno: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Oval\\_pavilion\\_by\\_Vladimir\\_Shukhov\\_1896.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Oval_pavilion_by_Vladimir_Shukhov_1896.jpg) [Pristupljeno: 12. rujna 2024.]
- [35] Knight J. J. S. Dorton Arena, Raleigh, North Carolina, USA, 1952. *Album of Spatial Structures*. Dostupno: <https://www.arcaro.org/tension/album/dorton.htm> [Pristupljeno: 12. rujna 2024.]
- [36] Glaeser L. *The Work of Frei Otto*. New York: The Museum of Modern Art; 1972. Dostupno: [https://assets.moma.org/documents/moma\\_catalogue\\_2662\\_300299029.pdf](https://assets.moma.org/documents/moma_catalogue_2662_300299029.pdf)
- [37] Monto T. Olympiapark in München mit Olympiastadion, Olympiahalle und Olympiaschwimmhalle. *Media Viewer*. Dostupno: [https://de.wikipedia.org/wiki/Frei\\_Otto#/media/Datei:Munich\\_-\\_Olympiapark\\_3.jpg](https://de.wikipedia.org/wiki/Frei_Otto#/media/Datei:Munich_-_Olympiapark_3.jpg) [Pristupljeno: 12. rujna 2024.]
- [38] Airlines. *Denver International Airport*. Dostupno: <https://www.flydenver.com/airlines/> [Pristupljeno: 12. rujna 2024.]
- [39] Huerta S. Galileo was Wrong: The Geometrical Design of Masonry Arches. *Nexus Network Journal*. 2006;8(2): 25-52. Dostupno: doi: 10.1007/s00004-006-0016-8 [Pristupljeno: 12. rujna 2024.]



- [40] Fernández-Ruiz M.A., Hernández-Montes E., Carbonell-Márquez J.F., Gil-Martín L.M. Patterns of force:length ratios for the design of compression structures with inner ribs. *Engineering Structures*. 2017;148: 878-889. Dostupno: doi: 10.1016/j.engstruct.2017.07.027 [Pristupljeno: 13. rujna 2024.]
- [41] Saliklis E. *Structures: A Geometric Approach; Graphical Statics and Analysis*. Cham: Springer Nature Switzerland AG; 2019. Dostupno: doi: 10.1007/978-3-319-98746-0

## POPIS SLIKA

Slika 1.: Oblici visećeg užeta i analognog luka (Izvor: [4]).....	3
Slika 2.: Sile koje djeluju na odsječak užeta (Izvor: [5]).....	4
Slika 3.: Usporedba lančanice (crveno) i kvadratne parabole (zeleno).....	6
Slika 4.: Palača Tāq Kīsrā u Ktezifontu (Izvor: [8]).....	7
Slika 5.: Presjek kupole katedrale Sv. Pavla u Londonu (Izvor: [9]).....	8
Slika 6.: Crtež iz analize Le Seura, Jacquiera i Boškovića sa skicama virtualnih pomaka (Izvor: [10]).....	9
Slika 7.: Polenijev crtež Hookeove analogije i tlačne linije u presjeku kupole bazilike Sv. Petra (Izvor: [11]).....	9
Slika 8.: Gateway Arch, St. Louis, Missouri, SAD (Izvor: [12]).....	10
Slika 9.: Wittmanova grafička analiza ravnoteže križnog svoda (Izvor: [2]).....	13
Slika 10.: Mohrmannova analiza kontrafornog sustava (Izvor: [13]).....	13
Slika 11.: Katedrala u Palma de Mallorci, s jednim od najvećih gotičkih kontrafornih sustava (Izvor: [14]).....	14
Slika 12.: Varignonovi crteži verižnog poligona i poligona sila (Izvor: [15]).....	15
Slika 13.: Primjer grafičke metode crtanja tlačne linije (Izvor: [16]).....	16
Slika 14.: Stabilno stanje luka s pukotinama (Izvor: [17]).....	17
Slika 15.: Demonstracija mehanizma sloma sa četiri zgloba na fizičkom modelu (Izvor: [18]).....	18
Slika 16.: Tipične pukotine gotičkog križnog svoda (Izvor: [19]).....	19
Slika 17.: Lukovi na tavanu Gaudíjeve Casa Mile (Izvor: [21]).....	20
Slika 18.: Viseći model križnog svoda iz kojeg je vidljiva analogija s ravnotežnim pristupom podjele svoda na lukove (Izvor: [22]).....	21
Slika 19.: Viseći model crkve u Coloniji Gúell, s ispunom od tkanine (Izvor: [23]).....	22
Slika 20.: Reprodukcijski model crkve u Coloniji Gúell (Izvor: [24]).....	22
Slika 21.: Skice samo nekih od mogućih oblika ljuski za koje Isler tvrdi da su izvedivi uz uporabu fizičkih modela (Izvor: [25]).....	23
Slika 22.: Postupak napuhnuće membrane (Izvor: [27]).....	24
Slika 23.: Islerov viseći model (Izvor: [29]).....	25

Slika 24.: Islerov uređaj za ispitivanje modela dvorane Hotela Kreuz u Langenthalu, jedan od njegovih najranijih uređaja (Izvor: [26]).....	26
Slika 25.: Uređaj za ispitivanje modela ljuske tvornice Sicli (Izvor: [30]).....	27
Slika 26.: Islerova zgrada tvornice Sicli u Ženevi (Izvor: [31]).....	28
Slika 27.: Crni šator arapskih stočara (Izvor: [32]).....	30
Slika 28.: Tradicionalna kirgiska jurta (Izvor: [33]).....	30
Slika 29.: Shukhovljev ovalni paviljon (Izvor: [34]).....	31
Slika 30.: Čelični kabeli u fazi izgradnje Dorton Arene (Izvor: [35]).....	31
Slika 31.: Ottov Njemački paviljon u Montrealu i model za ispitivanje istog (Izvor: [36]).....	32
Slika 32.: Ottov Olimpijski sportski kompleks u Múchnenu (Izvor: [37]).....	33
Slika 33.: Bergerova zračna luka u Denveru (Izvor: [38]).....	33
Slika 34.: Međusobno približavanje čvorova na rubnim kabelima (Izvor: [1]).....	36
Slika 35.: Primjer topološkog mapiranja; Deblje crte predstavljaju pozicije rebara (Izvor: [39]).....	38
Slika 36.: a) Raspodjela gustoća sila na topološkoj mreži; b) konačni oblik dobiven provedbom proračuna (Izvor: [39]).....	39
Slika 37.: Polukružni luk (nacrtano u AutoCAD-u).....	41
Slika 38.: Postupak verižnog poligona za dobivanje tlačne linije luka (nacrtano u AutoCAD-u).....	41
Slika 39.: Tlačna linija mosta zamišljenog bez tornjića (Izvor crteža: [40], analiza nacrtana u AutoCAD-u).....	43
Slika 40.: Tlačna linija mosta s tornjićem (Izvor crteža: [40], analiza nacrtana u AutoCAD-u).....	43
Slika 41.: Raspored oslonaca za ljusku (GeoGebra).....	44
Slika 42.: Prvi korak iteracije za luk BC (GeoGebra).....	44
Slika 43.: Oblici luka nakon druge i treće iteracije i planovi sila, luk BC (GeoGebra).....	45
Slika 44.: Konstrukcija luka AD prikazana u prostoru (lijevo); Konstrukcija luka AB prikazana u ravnini (desno) (GeoGebra).....	46

---

Slika 45.: Konačni oblici svih pet lančanica (lijevo); njihov tlocrtni raspored (desno) (GeoGebra).....	47
Slika 46.: Konačni izgled ljuske s različitih strana (lančanice dobivene iteracijom su zelene, a krivulje dobivene funkcijom spline su crne) (GeoGebra).....	47