

# Metoda gustoća sila

---

Jurič, Marija

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:047794>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-13**

Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Marija Jurič

# METODA GUSTOĆA SILA

ZAVRŠNI ISPIT

Zagreb, 2024.



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Marija Jurič

# METODA GUSTOĆA SILA

ZAVRŠNI ISPIT

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl

Komentor: dr. sc. Elizabeta Šamec

Zagreb, 2024.



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Marija Jurič

## **FORCE DENSITY METHOD**

FINAL EXAM

Supervisor: professor, dr. sc. Krešimir Fresl

Supervisor: dr. sc. Elizabeta Šamec

Zagreb, 2024.



OBRAZAC 3

POTVRDA O POZITIVNOJ OCJENI PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Student/ica :

<b>Marija Jurič</b> (Ime i prezime)	<b>0082068842</b> (IMBAG)
--	------------------------------

zadovoljio/la je na pisanom dijelu završnog ispita pod naslovom:

<b>Metoda gustoća sila</b> (Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)
---

<b>Force density method</b> (Naslov teme završnog ispita na engleskom jeziku)
--

i predlaže se provođenje daljnjeg postupka u skladu s Pravilnikom o završnom ispitu i diplomskom radu Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta.

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu znanstvenog projekta: (upisati ako je primjenjivo)

 (Naziv projekta, šifra projekta, voditelj projekta)
---

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu stručne prakse na Fakultetu: (upisati ako je primjenjivo)

 (Ime poslodavca, datum početka i kraja stručne prakse)
--

Datum: **16. rujna 2024.**

Mentor: **Krešimir Fresl**

Potpis mentora:

Komentor: **Elizabeta Šamec**



OBRAZAC 5

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja :

Marija Jurič, 0082068842

(Ime i prezime, IMBAG)

student/ica Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta ovim putem izjavljujem da je moj pisani dio završnog ispita pod naslovom:

Metoda gustoća sila

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

izvorni rezultat mogega rada te da se u izradi istoga nisam koristio/la drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

Datum:

17. rujna 2024.

Potpis:

Marija Jurič



OBRAZAC 6

IZJAVA O ODOBRENJU ZA POHRANU I OBJAVU PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Ja:

Marija Jurič, 05911407087

(Ime i prezime, OIB)

ovom izjavom potvrđujem da sam autor/ica predanog pisanog dijela završnog ispita i da sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti odgovara sadržaju dovršenog i obranjenog pisanog dijela završnog ispita pod naslovom:

Metoda gustoća sila

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

koji je izrađen na sveučilišnom prijediplomskom studiju Građevinarstvo Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta pod mentorstvom:

Krešimira Fresla

(Ime i prezime mentora)

i obranjen dana:

24. rujna 2024.

(Datum obrane)

Suglasan/suglasna sam da pisani dio završnog ispita bude javno dostupan, te da se trajno pohrani u digitalnom repozitoriju Građevinskog fakulteta, repozitoriju Sveučilišta u Zagrebu te nacionalnom repozitoriju.

Datum:

17. 9. 2024

Potpis:

Marija Jurič

## SAŽETAK

Rad sadrži temeljne karakteristike kablskih mreža uz opisan povijesni razvoj vlačnih konstrukcija i opisane materijale za izvedbu. Naglasak je stavljen na proračun ovih konstrukcija budući da se bitno razlikuje od proračuna klasičnih masivnih konstrukcija. Uz navedene razne metode nalaženja oblika, detaljno je obrađena metoda gustoća sila i njezina iteracijska primjena. Uz teorijski dio dan je i praktičan primjer nalaženja oblika primjenom programskog paketa FALCON.

**Ključne riječi:** kablaska mreža, metoda gustoća sila, nalaženje oblika, čvorovi, kabeli



## SUMMARY

The paper contains the basic characteristics of cable networks, along with the described historical development of traction structures, as well as described materials for construction. Emphasis is placed on the calculation of these constructions since it differs significantly from the calculation of classic massive constructions. In addition to the mentioned various methods of finding the shape, the force density method and its iterative application are discussed in detail. In addition to the theoretical part, a practical example of form finding using the FALCON software package is given.

**Key words:** cable network, force density method, form finding, nodes, cables

## SADRŽAJ

SAŽETAK .....	I
SUMMARY .....	II
SADRŽAJ .....	III
1. UVOD [1], [2], [3] .....	1
2. KARAKTERISTIKE KABELSKIH MREŽA .....	3
2.1. OPĆENITO O KABELSKIM MREŽAMA .....	3
2.2. SVOJSTVA I VRSTE UŽADI .....	4
2.2.1. SPIRALNA UŽAD .....	4
2.2.2. PRAMENA UŽAD .....	5
2.3. POVEZIVANJE UŽADI .....	6
3. NALAŽENJE OBLIKA .....	7
3.1. PRORAČUNSKI MODEL MREŽE OD UŽADI .....	7
3.1. RAVNOTEŽA SLOBODNOG ČVORA .....	8
4. METODA GUSTOĆA SILA .....	10
4.1. PRIMJER PRIMJENE METODE GUSTOĆA SILA .....	11
5. ITERACIJSKA PRIMJENA METODE GUSTOĆA SILA .....	13
6. PRIMJER NALAŽENJA OBLIKA PRIMJENOM PROGRAMSKOG PAKETA FALCON .....	15
6.1. PRIMJER NALAŽENJA OBLIKA MREŽE PRIMJENOM FALCONA .....	15
7. ZAKLJUČAK .....	21
POPIS SLIKA .....	22
LITERATURA .....	23

## 1. UVOD [1], [2], [3]

Primjena konstrukcija od užadi seže u daleku čovjekovu prošlost. Gledajući današnje primjere primjene ovakovog načina gradnje nameće se pitanje na koji način i kada je sve počelo.

Već kod ranih početaka razvoja civilizacije javila se potreba za savladavanjem prepreka preko određenih raspona. U početku su to bila srušena stabla koja su mogla premostiti relativno male raspone (proste grede), no vrlo brzo dolazi do shvaćanja prednosti izgradnje visećih mostova od materijala iz prirode. Tadašnji čovjek koristi dostupni materijal i njegove prednosti za izradu pa su tako prvi viseći mostovi napravljeni korištenjem bijaka penjačica, tzv. lijana koje su međusobnim upletanjem imale svrhu nosivosti koju danas ima čelično uže. Daljnjim razvojem dolazi do naprednijih konstrukcijskih oblika ovakvih primitivnih mostova. Konstrukcija je sastavljena od dva nosiva užeta međusobno povezana debljim granjem koje kasnije zamjenjuju daske. Iz sigurnosnih razloga se postavlja zaštitna ograda na prihvatljivoj visinskoj razlici u odnosu na glavnu nosivu konstrukciju.



*Slika 1. : Viseći most drevnih Inka ( Izvor: [4] )*

Sličnu primjenu, ovog puta za stanovanje, razvila su pustinjačka nomadska plemena na području Arapskog poluotoka i Sjeverne Afrike. Živjeli su u šatorima napravljenim od životinjske kože, stupova od kostiju ili drva i užadi. Središnji stup bio je povezan užadima sidrenim u tlo u kružnom obliku. Preko užadi postavljana je koža većinom izrezana u obliku



trokuta koja je preuzimala vanjsko opterećenje prenoseći ga na užad i naposljetku u tlo. Prednost ovakvih konstrukcija leži u činjenici da su se mogle jako brzo rastaviti i prenijeti na drugo mjesto što je bilo izuzetno pogodno njihovu načinu života.

Otkriće čelika omogućilo je savladavanje dotad nezamislivih raspona. Dolazi do intenzivnog napretka i izgradnje visećih i ovješanih mostova primjenom vlačnih elemenata kao nosive konstrukcije. Jedan od problema s kojim su se susretali projektanti toga vremena bio je nepoznavanje metoda proračuna takvih konstrukcija i načina prenošenja opterećenja.

Mnogi inženjeri bavili su se ovom tematikom ostavljajući značajan doprinos razvitku samih konstrukcija, no jedan od njih, po imenu Frei Otto postavio je načela oblikovanja i nosivosti vlačnih sustava. Svoje zaključke temeljio je na prirodnim pojavama kao što su modeli od sapunice i njihovo formiranje mreža po načelu minimalnih udaljenosti. Najznačajnije djelo spomenutog inženjera je svakako krovna konstrukcija Olimpijskog stadiona u Münchenu 1972. godine. Otto i njegov tim su u suradnji s Hansom-Jörgeom Schekom i Klausom Linkwitzom razvili računalni program za pronalaženje oblika vlačnih konstrukcija temeljen na metodi za rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi koju će kasnije Schek i Linkwitz nazvati Metoda gustoća sila. Spomenuta metoda će kroz sljedeći period imati značajnu primjenu u izgradnji i razvoju vlačnih konstrukcija.



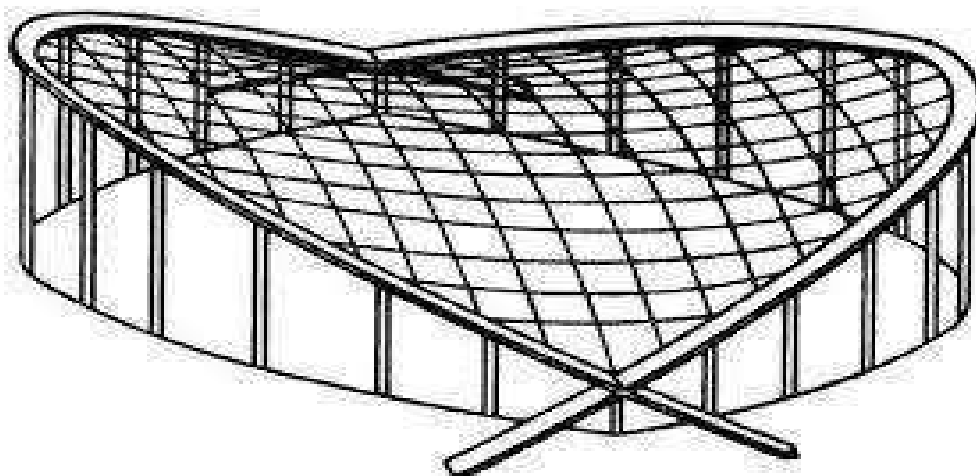
*Slika 2. : Olimpijski kompleks u Münchenu (Izvor: [5])*

## 2. KARAKTERISTIKE KABELSKIH MREŽA

Konstrukcije od užadi napravljene su međusobnim povezivanjem čeličnih užadi i njihovim sidrenjem u pogodnu temeljnu konstrukciju. Ovakve se konstrukcije većinom pokrivaju laganim materijalima kao što su razne tkanine, a u novije vrijeme, otkrićem i razvojem umjetnih materijala, sve češća je upotreba staklenih i PVC prevlaka.

### 2.1. OPĆENITO O KABELSKIM MREŽAMA

Uže je nosivi element koji ima sposobnost prenošenja samo vlačne sile dok se moment savijanja i torzijski moment ne mogu preuzeti zbog nedostatne fleksijske i torzijske krutosti. Kako bi se osigurala dovoljna krutost užad moraju biti prednapeta i sedlastog oblika. Pritom užad konkavnog oblika preuzima opterećenje u smjeru gravitacije dok užad konveksnog oblika ima svrhu stabilizacije. Uslijed nedostatnog prednapinjanja može doći do pomaka dijelova konstrukcije što dovodi do oštećenja membrane i u najgorem slučaju do sloma same konstrukcije. Za razliku od tlačnih konstrukcija, kod kojih do otkazivanja nosivosti može doći na dva načina (otkazivanje nosivosti kad tlačna naprezanja dosegnu tlačnu čvrstoću materijala i otkazivanje gubitkom stabilnosti), vlačno opterećen element će otkazati nosivost prekoračenjem vlačne čvrstoće na najslabijem presjeku.



*Slika 3. : Sedlasti oblik prednapete konstrukcije ( Izvor: [6] )*

## 2.2. SVOJSTVA I VRSTE UŽADI

Užad koja se koristi kod mrežnih konstrukcija su većinom snopovi različitih konfiguracija od visokovrijednog čelika. Prema načinu proizvodnje mogu se podijeliti na spiralnu (*engl. spiral strand*) i pramenu užad (*engl. strand rope*). Spiralna užad izvedena su od jednog ili nekoliko slojeva žice namotanih na jezgru. Postoje tri tipa spiralnih užadi: otvoreni, zatvoreni i poluzatvoreni tip.

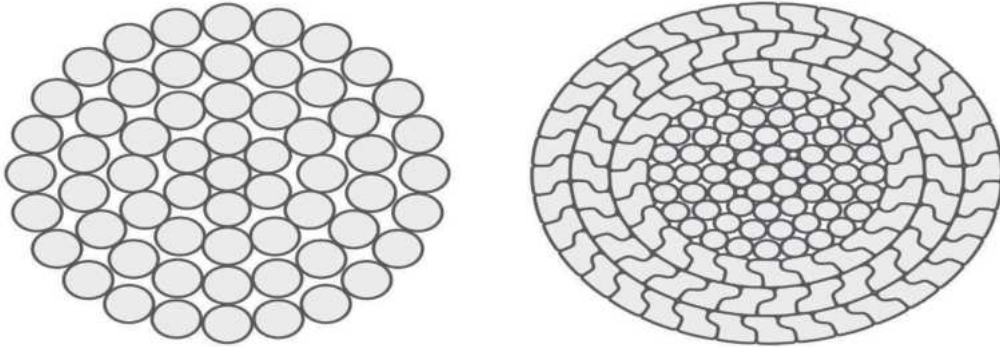
### 2.2.1. SPIRALNA UŽAD

Otvoreni tip spiralnih užadi sastoji se od čelične žice (jezgra) oko koje je namotano šest žica istog promjera čineći prvi sloj. Svaki sljedeći sloj izvodi se na isti način s tim da ima šest žica više od prethodnog. Glavne vrste su:

- snop s jednim slojem žica omotanih oko jezgre
- snop s dva sloja žica omotanih oko jezgre
- snop s dva sloja žica istog promjera i popunjujućim slojem (Filler)
- snop s dva sloja žica s različitim polumjerima u zadnjem vanjskom sloju (Warrington)
- snop s više slojeva (kombinirani)
- žičana užad s čeličnom jezgrom.

Ovakva užad imaju okrugli promjer. Modul elastičnosti iznosi  $170 \text{ GPa} \pm 5 \text{ GPa}$ , a nazivna vlačna čvrstoća iznosi od  $1770 \text{ kN/mm}^2$  do  $1860 \text{ kN/mm}^2$ . Ovisno o broju slojeva namotanih oko jezgre broj žica varira od 7 do 91. Zbog dobrih mehaničkih svojstava koriste se kod sidrenja kablskih mreža na stupove i također kod sidrenja visećih mostova.

Zatvoreni tip spiralnih užadi karakterizira modul elastičnosti  $160 \text{ GPa} \pm 5 \text{ GPa}$ . Kružnog su poprečnog presjeka kao i otvoreni tip, no imaju veći nazivni promjer. Poprečni presjek žica u vanjskom sloju je u obliku slova Z čineći tako izuzetno kompaktnu i sigurnu vanjštinu jer sprječava prodiranje vanjskih negativnih utjecaja.



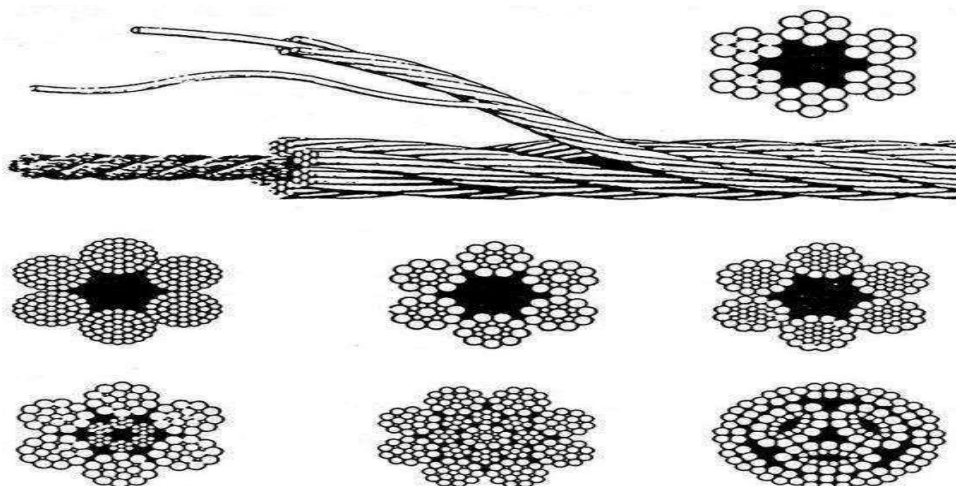
Slika 4. : Otvoreni i zatvoreni tip spiralnog užeta ( Izvor: [7], [8] )

### 2.2.2. PRAMENA UŽAD

Pramena užad mogu imati čeličnu homogenu jezgru ili vlaknastu strukturu (*engl. fiber*). Ovisno o načinu omatanja razlikuju se:

- istosmjerno upredena užad - pramenovi omotani u istom smjeru
- križno upredena užad - pramenovi omotani u suprotnom smjeru

Modul elastičnosti ovakvog užeta iznosi  $100 \text{ GPa} \pm 5 \text{ GPa}$  pa se stoga ne koriste kao nosiva užad, nego kao rubni kabeli membrana. Kod vlaknaste čelične jezgre povećana je elastičnost dok se kod pramenih kabela s čeličnom jezgrom povećava krutost pa u ovisnosti od toga varira i njihova primjena.

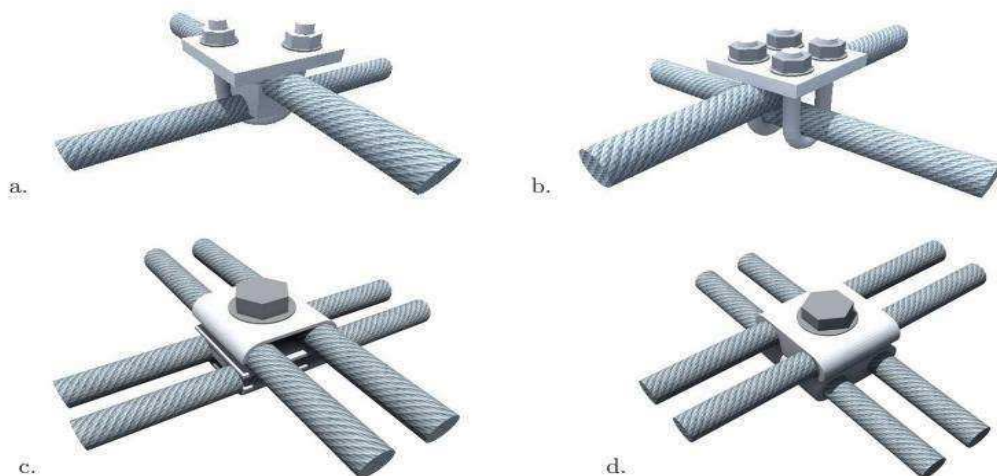


Slika 5. : Vrste pramene užadi ( Izvor: [9] )



### 2.3. POVEZIVANJE UŽADI

Mreža izvedena od čelične užadi može biti jednosmjernan ili pak višesmjernan sustav. Zbog jednostavnosti izvedbe i optimalnog načina prenošenja opterećenja u upotrebi su najčešće dvosmjerni sustavi. Užad nije moguće spojiti u jednu točku pa su stoga "položena" jedna preko drugih. Kako bi se spriječilo klizanje na mjestima gdje se želi osigurati nepomičnost postavlja se spojni element ("U" vijčana veza) koji će držati užad na zahtijevanom mjestu. Ukoliko je potrebno savladati veći raspon većinom se primjenjuju dva paralelna užeta manjeg promjera kako bi se izbjegla upotreba užadi velikog poprečnog presjeka i samim time povećala težina same konstrukcije.



Slika 6. : a) Jednostruka "U" vijčana veza b) Dvostruka "U" vijčana veza c) Spoj sustava kabela s po dva paralelna užeta d) Spoj sustava kabela s dva paralelna užeta s utisnutim spojem ( Izvor: [10])

Sile koje se javljaju u rubnim kabelima veće su od onih u unutarnjim kabelima pa su stoga i debljine takvih kabela veće. Čvorovi rubnih kabela teže klizanju u jednu točku što se ne može nikako spriječiti, ali se uz dovoljno povećanje sile može smanjiti na prihvatljivu razinu.

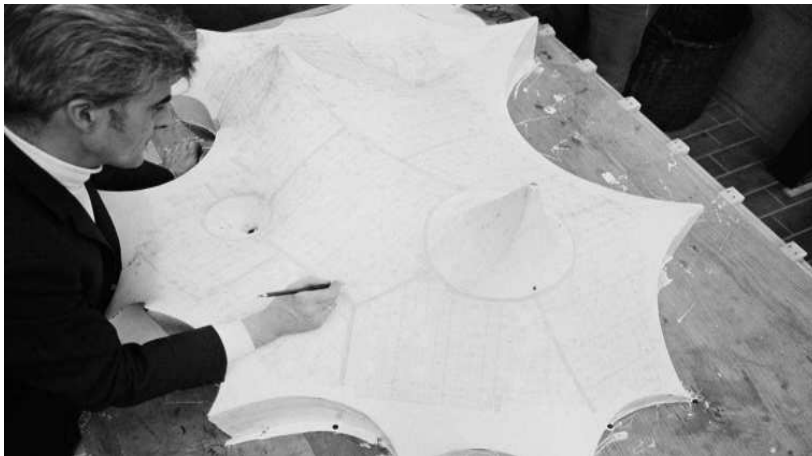
Izvedba mreže može se ostvariti i na tlu i u zraku ovisno o kojoj vrsti mreže se radi. Tako će kod mreža s rubnim kabelima radi jednostavnije izvedbe one prvo biti spojene na tlu pa zatim postavljene u projektirani položaj dok su kod mreža s krutim osloncima primjenjive obje varijante.



### 3. NALAŽENJE OBLIKA

Početni korak kod projektiranja prednapetih konstrukcija od užadi i platna je pronalaženje oblika konstrukcije bez ikakvih opterećenja pa čak i uz zanemarivanje vlastite težine. Nalaženje oblika konstrukcije obuhvaća definiranje ravnotežne konfiguracije koja zapravo sadržava njezin oblik i raspodjelu sila prednapinjanja u užadi.

Tijekom 20. stoljeća jedini način pronalaska oblika bili su fizikalni modeli od žica i platna. Frei Otto je oblike za svoje najznačajnije konstrukcije dobio upravo na taj način. Mana ovakvog načina definiranja oblika leži u činjenici da je iz fizikalnih modela jako teško očitati stvarne koordinate čvorova i izračunati vrijednosti unutarnjih sila u užadi. Zbog svega navedenog vrlo brzo je došlo do razvoja prvih računalnih programa koji su olakšali projektiranje ovog tipa konstrukcija.



*Slika 7. : Frei Otto i njegov fizikalni model Olimpijskog stadiona u Münchenu ( Izvor: [11])*

#### 3.1. PRORAČUNSKI MODEL MREŽE OD UŽADI

Kod oblikovanja proračunskog modela uvedeno je nekoliko pretpostavki:

- Kabeli su potpuno savitljivi i bez težine
- Nema vanjskog opterećenja

- Točke u kojima kabeli prelaze jedan preko drugog smatraju se geometrijskim križištima

Na osnovu navedenih pretpostavki kabel između dva križišta možemo promatrati kao zglobni štap, a križišta kao zglobne čvorove.

Osnovne varijable u pronalaženju oblika mreže su: *topologija mreže*, *geometrija mreže*, *rubni uvjeti te vrijednosti prednaponskih sila*.

Topologija mreže opisuje međusobnu povezanost štapova i zglobova.

Geometrija mreže glavna je varijabla kod pronalaženja oblika. Oblik mreže mora biti takav da zadovolji konstrukcijske, funkcionalne i estetske zahtjeve. U proračunskom modelu određen je koordinatama čvorova.

Rubni uvjeti određeni su koordinatama ležajnih točaka pa tako projektant može utjecati na izgled konstrukcije razmještanjem ležajnih čvorova.

Vrijednosti prednaponskih sila mogu biti unaprijed zadane ili ih je pak potrebno pronaći.

Ovisno o tome koje su varijable zadane, a koje su nepoznanice tijekom proračuna se mijenja.

### 3.1. RAVNOTEŽA SLOBODNOG ČVORA

Temelj postupka nalaženja oblika mreža čine jednadžbe ravnoteže slobodnih čvorova u kojima djeluju samo sile prednapinjanja.

Kako bi čvor u prostoru bio u ravnoteži potrebno je zadovoljiti sljedeće jednažbe:

$$\begin{aligned}\sum S_{i,j} \cdot \vec{e}_{i,j} \cdot \vec{i} &= 0 \\ \sum S_{i,j} \cdot \vec{e}_{i,j} \cdot \vec{j} &= 0 \\ \sum S_{i,j} \cdot \vec{e}_{i,j} \cdot \vec{k} &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

pri čemu je  $S_{i,j}$  iznos sile u štapu  $i,j$ , a  $\vec{e}_{i,j}$  jedinični vektor usmjeren od čvora  $i$  prema čvoru  $j$ .

Za jedinični vektor vrijedi:

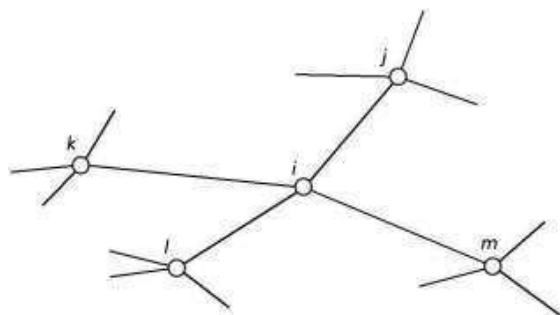
$$\vec{e}_{i,j} = \frac{x_j - x_i}{l_{i,j}} \cdot \vec{i} + \frac{y_j - y_i}{l_{i,j}} \cdot \vec{j} + \frac{z_j - z_i}{l_{i,j}} \cdot \vec{k} \quad (2)$$

pri čemu su u brojnima koordinate čvorova, a  $l_{i,j}$  je ukupna duljina štapa.

$$l_{i,j} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (3)$$

Uvrštavanjem izraza (2) i (3) u jednadžbu (1) dobijemo:

$$\begin{aligned} \sum S_{i,j} \cdot \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} \cdot \vec{i} &= 0 \\ \sum S_{i,j} \cdot \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} \cdot \vec{j} &= 0 \\ \sum S_{i,j} \cdot \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} \cdot \vec{k} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$



Slika 8. : Zglobno spojeni štapovi ( Izvor: [10] )

Uzmimo da je  $N$  broj slobodnih čvorova, a  $S$  broj štapova. Iz navedenog je moguće izvesti  $3N$  jednažbe ravnoteže pri čemu je broj nepoznanica jednak  $3N + S$ . Budući da je broj nepoznanica veći od broja jednažbi ne možemo ih jednoznačno odrediti. Sustav se može riješiti uvođenjem odabranog pravila eliminacije sila u štapovima.

Pravila koja se mogu primijeniti su:

- Kvizilaplaceovo pravilo (zadane su ravnotežne projekcije sila u svim štapovima u  $xy$  ravnini)
- Pravilo gustoća sila (zadan omjer između iznosa sile i duljine određenog štapa)
- Pravilo geodetske mreže (zadani iznosi sila u svim štapovima)
- Kombinirano pravilo (zadane su sile u nekim štapovima dok je u ostalima zadana ovisnost sile i deformacije)

#### 4. METODA GUSTOĆA SILA

Metoda gustoća sila razvijena je 60-ih godina 20. stoljeća kao računalno rješenje za projektiranje vlačnih konstrukcija. Osmislili su je znanstvenici Linkwitz i Schek za potrebe projektiranja Olimpijskog stadiona u Münchenu. Primjenom navedene metode nelinearne jednačbe koje se javljaju u postupku nalaženja oblika pretvaraju se u linearne čime se omogućuje rješenje spomenutih jednačbi i definiranje koordinata slobodnih čvorova. Temelji se na zadavanju odnosa između iznosa sila u kabelima i duljine samih kabela.

Izraze za ravnotežu slobodnih čvorova iz prethodnog poglavlja (4) možemo primjenom metode gustoće sila zapisati kao:

$$\begin{aligned}\sum \frac{S_{i,j}}{l_{i,j}}(x_j - x_i) &= 0 \\ \sum \frac{S_{i,j}}{l_{i,j}}(y_j - y_i) &= 0 \\ \sum \frac{S_{i,j}}{l_{i,j}}(z_j - z_i) &= 0\end{aligned}\quad (5)$$

Zatim zadajemo omjer sila u kabelima i duljine kabela. Taj izraz naziva se gustoćom ili koeficijentom sila i vrijedi:

$$q_{i,j} = \frac{S_{i,j}}{l_{i,j}}\quad (6)$$

Uvrštavanjem izraza (6) u izraz (5) dobijemo:

$$\begin{aligned}\sum q_{i,j}(x_j - x_i) &= 0 \\ \sum q_{i,j}(y_j - y_i) &= 0 \\ \sum q_{i,j}(z_j - z_i) &= 0\end{aligned}\quad (7)$$

Rješenja dobivena metodom gustoća sila su ravnotežne konfiguracije koje služe daljnjem nalaženju oblika. Ova metoda dosegla je široku primjenu zbog jednostavnosti samog proračuna. Naime, za dobivanje ravnotežne konfiguracije potrebno je poznavati samo koordinate rubnih točaka i pretpostaviti gustoću sila.

#### 4.1. PRIMJER PRIMJENE METODE GUSTOĆA SILA

U ovom primjeru prikazano je nalaženje oblika mreže sastavljene od pet kabela koji imaju jedan zajednički čvor. Poznate su koordinate rubnih čvorova kabela :  $P_1(3, 7, 7)$ ,  $P_2(1, 6, 4)$ ,  $P_3(0, 8, 2)$ ,  $P_4(3, 0, 3)$ ,  $P_5(4, 10, 4)$ . Vrijednost gustoće sila je proizvoljno izabrana i iznosi 5. Primjenom izraza razvijenih u sklopu metode gustoća sila odredimo koordinate nepoznatog čvora označenog s  $P_6$ .

Primjenom izraza metode gustoća sila imamo sljedeći sustav jednadžbi:

$$q_{1,6} \cdot (x_1 - x_6) + q_{2,6} \cdot (x_2 - x_6) + q_{3,6} \cdot (x_3 - x_6) + q_{4,6} \cdot (x_4 - x_6) + q_{5,6} \cdot (x_5 - x_6) = 0$$

$$q_{1,6} \cdot (y_1 - y_6) + q_{2,6} \cdot (y_2 - y_6) + q_{3,6} \cdot (y_3 - y_6) + q_{4,6} \cdot (y_4 - y_6) + q_{5,6} \cdot (y_5 - y_6) = 0$$

$$q_{1,6} \cdot (z_1 - z_6) + q_{2,6} \cdot (z_2 - z_6) + q_{3,6} \cdot (z_3 - z_6) + q_{4,6} \cdot (z_4 - z_6) + q_{5,6} \cdot (z_5 - z_6) = 0$$

Nakon sređivanja izraza dobijemo:

$$x_6 = \frac{q_{1,6} \cdot x_1 + q_{2,6} \cdot x_2 + q_{3,6} \cdot x_3 + q_{4,6} \cdot x_4 + q_{5,6} \cdot x_5}{q_{1,6} + q_{2,6} + q_{3,6} + q_{4,6} + q_{5,6}}$$

$$y_6 = \frac{q_{1,6} \cdot y_1 + q_{2,6} \cdot y_2 + q_{3,6} \cdot y_3 + q_{4,6} \cdot y_4 + q_{5,6} \cdot y_5}{q_{1,6} + q_{2,6} + q_{3,6} + q_{4,6} + q_{5,6}}$$

$$z_6 = \frac{q_{1,6} \cdot z_1 + q_{2,6} \cdot z_2 + q_{3,6} \cdot z_3 + q_{4,6} \cdot z_4 + q_{5,6} \cdot z_5}{q_{1,6} + q_{2,6} + q_{3,6} + q_{4,6} + q_{5,6}}$$

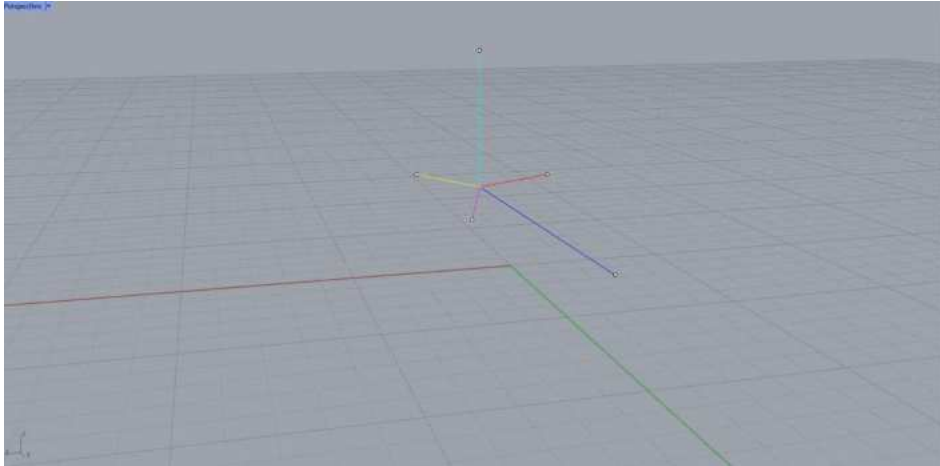
Uvrštavanjem koordinata rubnih čvorova i iznosa gustoća sila dobijemo izraze za koordinate nepoznatog čvora:

$$x_6 = \frac{5 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{5 + 5 + 5 + 5 + 5} = 3$$

$$y_6 = \frac{5 \cdot 7 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 8 + 5 \cdot 0 + 5 \cdot 10}{5 + 5 + 5 + 5 + 5} = 7$$

$$z_6 = \frac{5 \cdot 7 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{5 + 5 + 5 + 5 + 5} = 4$$

Rješenje sustava su koordinate nepoznatog čvora  $P_6(3, 7, 4)$ .



Slika 9. : Grafički prikaz traženog rješenja

## 5. ITERACIJSKA PRIMJENA METODE GUSTOĆA SILA

Za proračunavanje mreže minimalne duljine koristimo iteracijski postupak. Iteracijska primjena metode gustoća sila temelji se na nizu koraka u proračunu čiji rezultati omogućuju približavanje najpovoljnijem obliku.

Općenito vrijedi, u k-tom koraku iteracije gustoća sila računa se:

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \frac{\bar{S}}{S_{i,j}^{(k-1)}} \quad (8)$$

pri čemu je  $S_{i,j}^{(k-1)}$  iznos sile izračunat u prethodnom koraku, a  $\bar{S}$  iznos tražene sile.

U prethodnom koraku definirali smo gustoću sila kao  $q_{i,j} = \frac{S_{i,j}}{l_{i,j}}$  iz čega možemo zaključiti da je gustoća sila proporcionalna iznosu sile pa je omjer iznosa sila u dva koraka iteracije jednak omjeru gustoće sila:

$$\frac{S_{i,j}^{(k)}}{S_{i,j}^{(k-1)}} = \frac{q_{i,j}^{(k)}}{q_{i,j}^{(k-1)}} \quad (9)$$

U prethodnom izrazu  $S_{i,j}^{(k)}$  predstavlja  $\bar{S}$  iz čega slijedi (8) = (9). Problem se javlja kada se promjenom gustoće sila mijenja ravnotežni položaj, a samim time i duljine kabela.

Ukoliko želimo oblikovati poopćenu minimalnu mrežu sile u štapovima moraju biti jednakog iznosa. Kako bismo to postigli zadajemo jednake iznose sila u kabelima.

Budući da vrijedi  $\frac{q_{i,j}}{S_{i,j}} = \frac{1}{l_{i,j}}$  gustoću sile možemo izračunati prema izrazu:

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{\bar{S}_{i,j}}{l_{i,j}^{(k-1)}} \quad (10)$$

Na isti način duljinu štapa  $\bar{l}_{i,j}$  možemo osigurati ukoliko gustoću sile u pripadajućem štapu računamo po izrazu:

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{S_{i,j}^{(k-1)}}{\bar{l}_{i,j}} \quad (11)$$

pri čemu je  $\bar{l}_{i,j}$  duljina štapa izračunata u prethodnom koraku. Iz izraza (11) možemo zaključiti da je duljina štapa obrnuto proporcionalna gustoći sila pa je uz konstantan iznos sile:

$$\frac{q_{i,j}^{(k)}}{q_{i,j}^{(k-1)}} = \frac{l_{i,j}^{(k-1)}}{l_{i,j}^{(k)}} \quad (12)$$

Uz jednakost  $l_{i,j}^{(k)} = \bar{l}_{i,j}$  možemo izvesti izraz:

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \frac{l_{i,j}^{(k-1)}}{\bar{l}_{i,j}} \quad (13)$$

Nakon uvrštavanja  $S_{i,j} = q_{i,j}l_{i,j}$  dobijemo izraz (11).

Mijenjanjem gustoće sila doći će do promjene duljina štapova pa će za željeni oblik biti potrebno provesti nekoliko iteracija.

Iteracija se prekida kada vrijedi:

$$r_S^{(k)} = \max_{i,j} \left( |S_{i,j}^{(k)} - \bar{S}_{i,j}| \right) < \tau_S \quad \text{i} \quad r_l^{(k)} = \max_{i,j} \left( |l_{i,j}^{(k)} - \bar{l}_{i,j}| \right) < \tau_l$$

pri čemu su  $\tau_S$  i  $\tau_l$  tražene točnosti.

Jedna od prednosti iteracijske primjene metode, u usporedbi s drugim metodama, je to što se primjenom postupka uvijek dobiju ravnotežne konfiguracije što znači da će se i ukoliko se postupak iteracije prekine prije zadovoljenja tražene točnosti ipak dobiti mreža u ravnoteži. Kod drugih iteracijskih metoda samo konačno rješenje je u ravnoteži dok su svi pokušaji prije toga neuravnoteženi. Uvođenjem gustoće sila sustavi jednadžbi postaju linearni što omogućuje direktno rješavanje istih uz dovoljnu brzinu.



## 6. PRIMJER NALAŽENJA OBLIKA PRIMJENOM PROGRAMSKOG PAKETA FALCON

FALCON (Form-finding Algorithm for Linear Constrained Optimisation of Networks) je skup specijaliziranih komponenti za traženje oblika i određivanje unutarnjih sila kod vlačnih i tlačnih konstrukcija. Program radi po principu iteracijske primjene metode gustoća sila. Algoritam se može primjenjivati interaktivno direktno u CAD alatu *Rhinoceros* uz pomoć programa za vizualizaciju izgleda *Grasshopper*. Korisniku je omogućeno mijenjanje položaja rubnih uvjeta, unošenje različitih iznosa gustoće sila u elementima, uvođenje raznih ograničenja (sila u elementu, duljina elementa itd.).

### 6.1. PRIMJER NALAŽENJA OBLIKA MREŽE PRIMJENOM FALCONA.

Ispis podataka iz programa označen je plavom bojom.

Traži se oblik mreže dizemnzija 8x8. Mreža ima 11 kabela u x smjeru, 11 kabela u y smjeru i 121 čvor. Čvorovi su pravilno raspoređeni i na međusobnoj su udaljenosti 0,8m. Broj rubnih kabela je 4, a broj unutarnjih kabela je 18. Mreža je napravljena korištenjem komponente *Net with edge cables*. Zadane su gustoće sila iznosa 4 i 10 u rubnim kabelima (gustoća sila u unutarnjim kabelima ostaje ista i iznosi 1) te će se nakon nalaženja oblika prikazati kako promjena gustoće sile u rubnim kabelima utječe na oblik mreže.

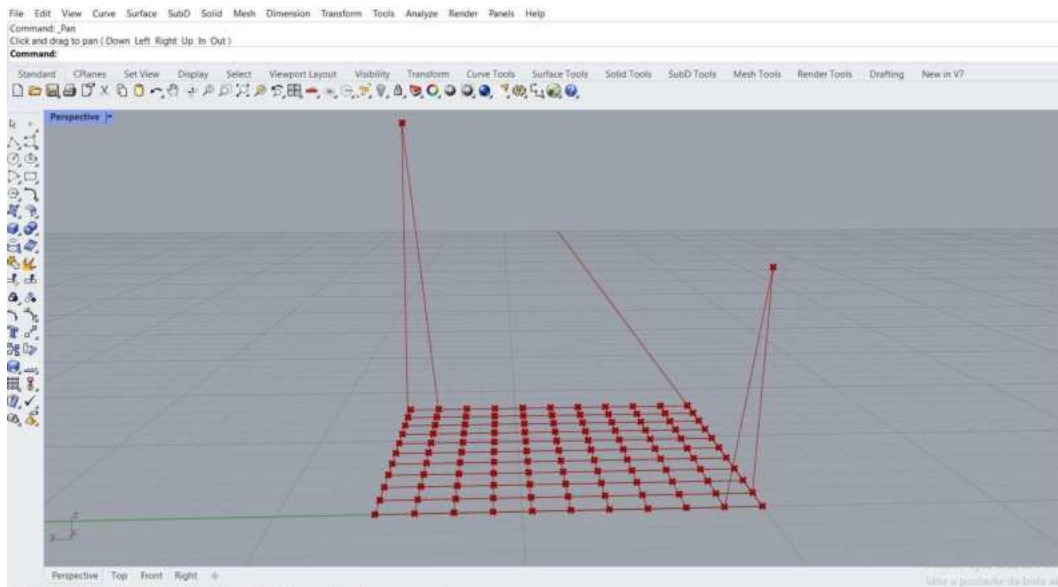
Koordinate početnih čvorova (*engl. initial anchors*) su:

- 0. {0, 0, 0}
- 1. {8, 0, 0}
- 2. {8, 8, 0}
- 3. {0, 8, 0}

Definirana je razlika u visini u nasuprotnom paru čvorova jednaka 3.

Koordinate čvorova (*anchors*):

- 0. {0, 0, 5}
- 1. {8, 0, 0}
- 2. {8, 8, 8}
- 3. {0, 8, 0}



Slika 10. : Izgled mreže nakon izdizanja čvorova

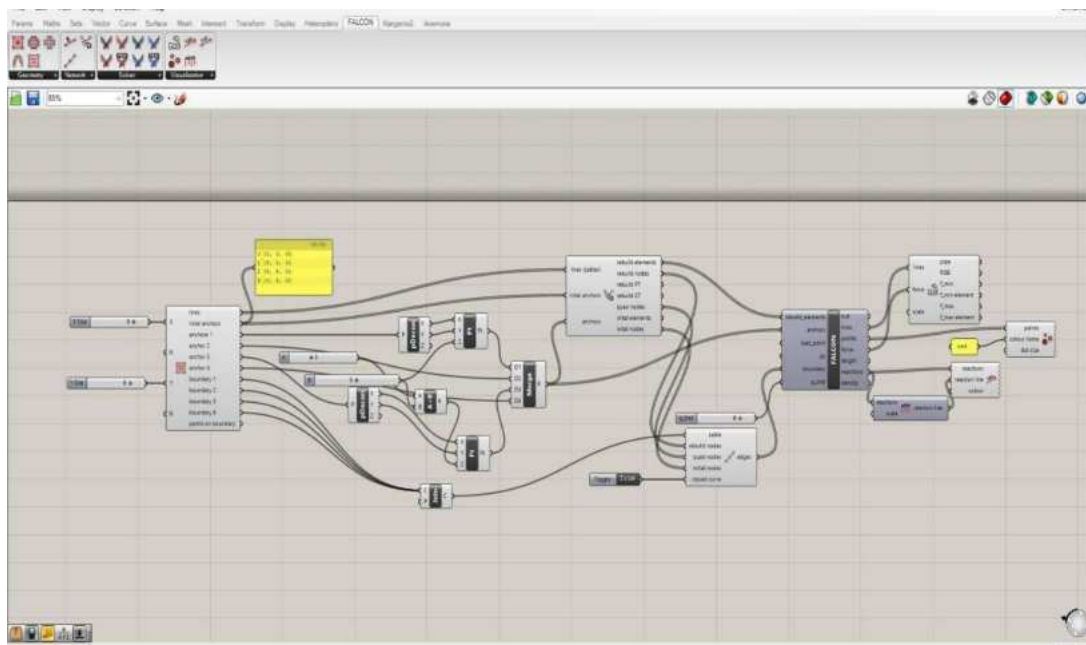
Nakon izdizanja čvorova spajanjem ulaznih podataka ( *lines, initial anchors, anchors*) u komponentu *Interactive net* generira se mreža.

Konačan oblik mreže pronalazimo pomoću FALCON komponente FDM.

Vizualizacija rješenja ostvaruje se preko komponenata iz kartice za vizualizaciju.

U ovom primjeru su korištene komponente:

- *Force visualisation* - prikaz sila u kabelima
- *Reaction value* – prikaz iznosa vanjskih reakcija
- *Reaction vector* – prikaz vektora vanjskih reakcija
- *Node display* – raspodjela čvorova po visini u boji



Slika 11. : Izgled primjera u Grasshopperu

Nakon generiranja oblika uz pomoć FDM komponente vrijednosti su za usporedbu izlistane u nastavku:

a) Gustoća sila  $q_{bnd}=4$

Duljine elemenata:

Vrijednosti sila:

0. 0.709829

0. 0.709829

1. 0.544919

1. 0.544919

2. 0.806657

2. 0.806657

3. 0.488812

3. 0.488812

4. 0.783413

4. 0.783413

5. 0.674189

5. 0.674189

6. 0.84302

6. 3.372078

7. 0.41595

7. 0.41595

8. 1.065664

8. 4.262657

9. 0.911645

9. 0.911645

10. 0.478953

10. 0.478953

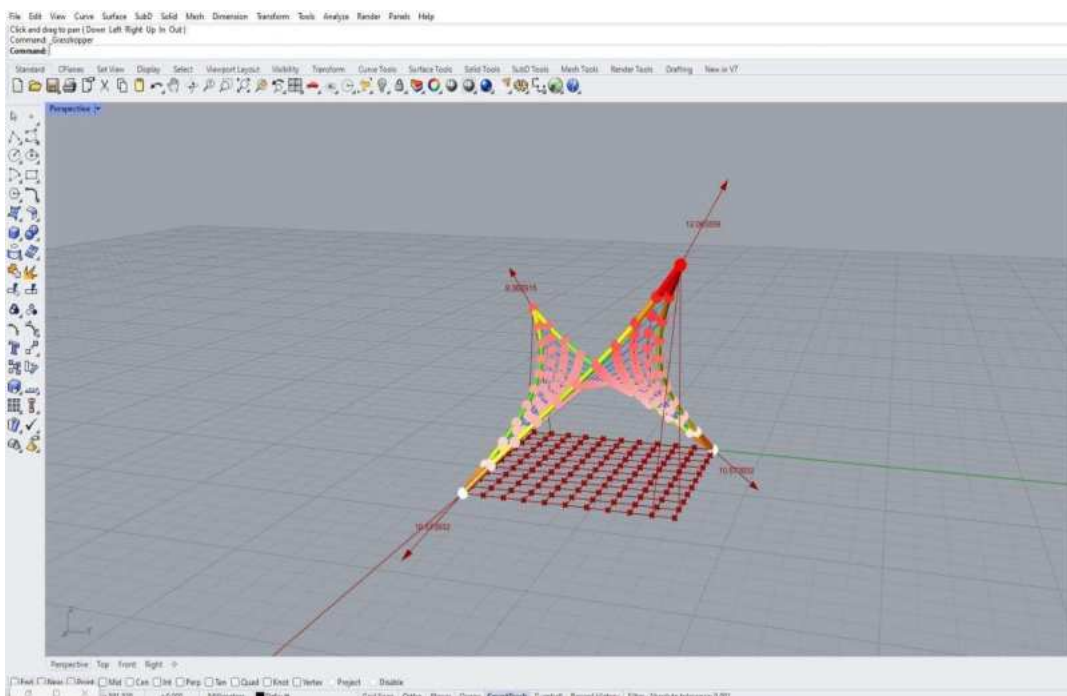
.....	.....
210. 0.67677	210. 0.67677
211. 0.67677	211. 0.67677
212. 0.544919	212. 0.544919
213. 0.709829	213. 0.709829
214. 0.766503	214. 0.766503
215. 0.493975	215. 0.493975
216. 0.596698	216. 0.596698
217. 0.596698	217. 0.596698
218. 1.016832	218. 4.06733
219. 1.195003	219. 4.780013

**b) Gustoća sila  $q_{bnd}=10$**

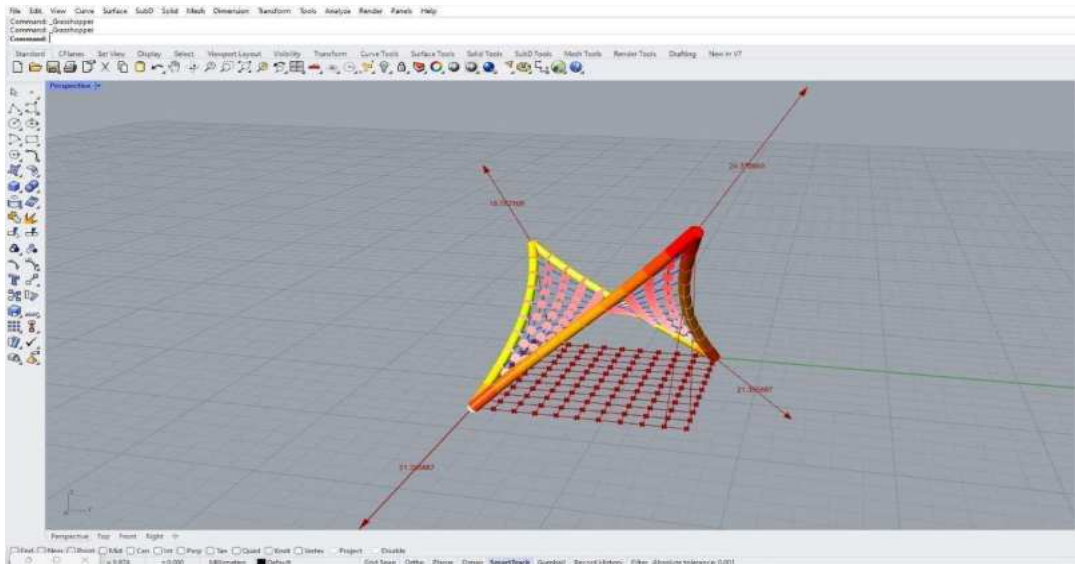
Duljine elemenata:	Vrijednosti sila:
0. 0.803062	0. 0.803062
1. 0.6701	1. 0.6701
2. 0.888906	2. 0.888906
3. 0.637876	3. 0.637876
4. 0.868959	4. 0.868959
5. 0.743671	5. 0.743671
6. 0.9058	6. 0.9058
7. 0.589729	7. 0.589729
8. 1.111424	8. 1.111424
9. 0.981487	9. 0.981487
10. 0.627027	10. 0.627027
.....	.....
210. 0.750207	210. 0.750207
211. 0.750207	211. 0.750207

212. 0.6701	212. 0.6701
213. 0.803062	213. 0.803062
214. 0.830807	214. 0.830807
215. 0.634083	215. 0.634083
216. 0.700202	216. 0.700202
217. 0.700202	217. 0.700202
218. 1.090209	218. 10.902093
219. 1.013381	219. 10.133811

Na slikama ispod te razlike u iznosima sila i duljina kabela mogu se uočiti po debljini rubnog kabela i po iznosu vanjskih reakcija.



Slika 12. : Oblik mreže s gustoćom sila u rubnim kabelima  $q_{bnd}=4$



Slika 13. : Oblik mreže s gustoćom sila u rubnim kabelima  $q_{bnd}=10$

## 7. ZAKLJUČAK

Kod projektiranja vlačnih konstrukcija ponekad je potrebno uvažiti geometrijsku pa i materijalnu nelinearnost. U usporedbi s klasičnim masivnim konstrukcijama kod kojih su dimenzije i položaj unaprijed određeni i proračun proveden na već ustaljenim postupcima, zadaća projektanta je kod vlačnih konstrukcija pronaći njihov oblik, koji ovisi o unutarnjim silama, primjenom jedne od razvijenih metoda za nalaženje oblika.

U radu je opisan razvoj vlačnih konstrukcija paralelno s razvojem metoda i postupaka za njihovo projektiranje. Jedna od prvih programskih varijacija rješenja nalaženja oblika je metoda gustoća sila koju su za potrebe izgradnje Olimpijskog kompleksa razvili inženjeri Linkwitz i Schek. Metoda se zasniva na rješavanju nelinearnog sustava jednadžbi uvođenjem koeficijenta sile čime sustav postaje linearan i samim time lakše rješiv.

Nadalje, obrađena je iteracijska primjena metode gustoća sila koja omogućuje stvaranje minimalnih i pooptčenih minimalnih mreža kod kojih su vrijednosti sila u kabelima približno jednake. Proračun se radi u nekoliko koraka, a svaki se korak zasniva na rezultatima iz prethodnog i provodi se sve do nalaženja oblika koji odgovara traženoj točnosti. Također u sklopu ove metode mogu se uvesti i određena kinematička ograničenja koja sprječavaju klizanje čvorova i ostale neželjene pojave.

Prikazan je i primjer nalaženja oblika primjenom programskog paketa FALCON u kojem se može vidjeti međuovisnost duljine kabela, vrijednosti sila i gustoće sila.



## POPIS SLIKA

Slika 1. : Viseći most drevnih Inka ( Izvor: [4] ).....	1
Slika 2. : Olimpijski kompleks u Münchenu ( Izvor: [5] ).....	2
Slika 3. : Sedlasti oblik prednapete konstrukcije ( Izvor: [6] ).....	3
Slika 4. : Otvoreni i zatvoreni tip spiralnog užeta ( Izvor: [7], [8] ).....	5
Slika 5. : Vrste pramene užadi ( Izvor: [9] ).....	5
Slika 6. : a) Jednostruka "U" vijčana veza b) Dvostruka "U" vijčana veza c) Spoj sustava kabela s po dva paralelna užeta d) Spoj sustava kabela s dva paralelna užeta s utisnutim spojem ( Izvor: [10] ).....	6
Slika 7. : Frei Otto i njegov fizikalni model Olimpijskog stadiona u Münchenu ( Izvor: [11] )	7
Slika 8. : Zglobno spojeni štapovi ( Izvor: [10] ).....	9
Slika 9. : Grafički prikaz traženog rješenja .....	12
Slika 10. : Izgled mreže nakon izdizanja čvorova .....	16
Slika 11. : Izgled primjera u Grasshopperu .....	17
Slika 12. : Oblik mreže s gustoćom sila u rubnim kabelima $q_{bnd}=4$ .....	19
Slika 13. : Oblik mreže s gustoćom sila u rubnim kabelima $q_{bnd}=10$ .....	20



## LITERATURA

- [1] Stamač, D. : Konstrukcije od užadi, završni rad, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2018. , Dostupno: <http://grad.hr/nastava/g/sr/pku-ds.pdf> (Pristupljeno: 27. kolovoza 2024. ).
- [2] Vrančić, R. : Iteracijska primjena metode gustoća sila u oblikovanju konstrukcija od užadi, rad predan na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2014. , Dostupno: <http://grad.hr/nastava/g/sr/ipmgs.pdf> (Pristupljeno 27. kolovoza 2024. ).
- [3] Vukadin, J. : Konstrukcije od platna, završni rad, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2021. , Dostupno: <http://grad.hr/nastava/g/sr/mem.pdf> (Pristupljeno 27. kolovoza 2024. ).
- [4] [https://www.getyourguide.com/peru-l168997/from-cusco-inka-hanging-bridge-of-qeswachaca-t538649/?ranking\\_uid=d2ba822a-777c-46ae-8f37-ada6527e8e76](https://www.getyourguide.com/peru-l168997/from-cusco-inka-hanging-bridge-of-qeswachaca-t538649/?ranking_uid=d2ba822a-777c-46ae-8f37-ada6527e8e76) (Pristupljeno 2. rujna 2024. ).
- [5] [https://hr.wikipedia.org/wiki/Olimpijski\\_stadion\\_u\\_M%C3%BCnchenu#/media/Datoteka:Olympiastadion\\_Muenchen.jpg](https://hr.wikipedia.org/wiki/Olimpijski_stadion_u_M%C3%BCnchenu#/media/Datoteka:Olympiastadion_Muenchen.jpg) (Pristupljeno 2. rujna 2024. ).
- [6] Šajn, S. : Prednapete konstrukcije od užadi, završni rad, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2013. , Dostupno: <https://master.grad.hr/nastava/g/sr/pku.pdf> (Pristupljeno 2. rujna 2024. ).
- [7] <https://www.teci.it/en/ropes/open-spiral-and-locked-coil/full-locked-coil/> (Pristupljeno 2. rujna 2024. ).
- [8] <http://www.aulone.com/index.php/product/index/g/e/id/393.html> (Pristupljeno 2. rujna 2024. ).
- [9] uže. Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krlež, 2013. -2024. , Dostupno: <https://www.enciklopedija.hr/clanak/uze> (Pristupljeno: 5. rujna 2024. ).
- [10] Fresl, K. : Građevna statika 2. , Predavanja, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2017. , Dostupno : <http://grad.hr/nastava/g/s2/g2.pdf> (Pristupljeno: 5. rujna 2024.) .
- [11] <https://architectureofthegames.net/wp-content/uploads/2016/12/Exhibition-Frei-Otto-Thinking-in-Models.jpg> (Pristupljeno: 5. rujna 2024. ).