Matrična formulacija metode sila

Runjić, Šime

Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Šime Runjić

MATRIČNA FORMULACIJA METODE SILA

ZAVRŠNI RAD

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl, dipl. ing. građ.

Zagreb, 2024.

University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Šime Runjić

MATRIX FORMULATION OF THE FORCE METHOD

FINAL THESIS

Supervisor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl, dipl. ing. građ.

Zagreb, 2024.

SAŽETAK

U ovom radu ćemo detaljnije objasniti jednu od numeričkih metoda proračuna, metodu sila. Temelji se na rješavanju sustava linearnih jednadžbi, što računala mogu uraditi bez većih poteškoća. Te sustave zapisati ćemo matričnim zapisom, pojasniti neke od karakterističnih matrica koje se dobiju analizom sistema, npr. statičku i kinematičku matricu, pokazat ćemo klasifikaciju sistema ovisno o statičkoj (ne)određenosti i geometrijskoj (ne)promjenjivosti promatrajući rang matrica, njihove jezgre i ostalo..., sažeto reći o Gaussovom eliminacijskom postupku, te za kraj formulirati metodu sila u matričnom zapisu, izvesti jednadžbe kompatibilnosti, te sve to potkrijepiti primjerima.

Ključne riječi: matrica, metoda sila, ravnoteža, Gaussov eliminacijski postupak, kompatibilnost

SUMMARY

As part of this paper, we will explain in more detail one of the numerical calculation methods, the force method. It is based on solving systems of linear equations that computers can accomplish without much difficulty. We will write down these systems using matrix notation, clarify some of the characteristic matrices obtained by system analysis, e.g. static and kinematic matrix, we will show the classification of systems based on static (in)determinacy and geometric (in)variability by observing the rank of the matrices, their kernels and the like…, briefly talk about Gaussian elimination method, and finally formulate the force method in matrix notation, derive the compatibility equations, and support all of that with some examples.

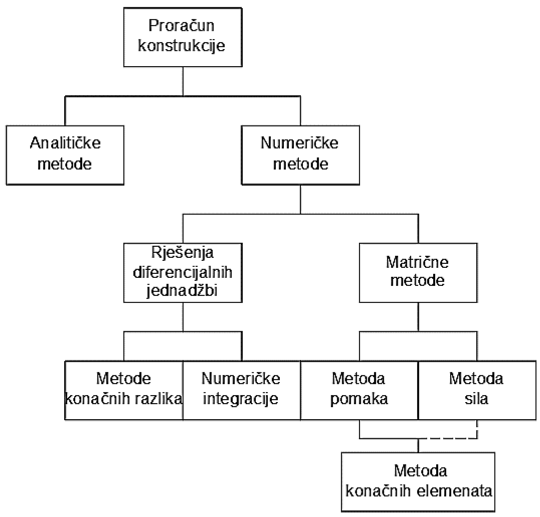
Key words: matrix, force method, equilibrium, Gaussian elimination method, compatibility

SADRŽAJ

1. UVOD

Razvitkom tehnologije građenja i samim napredovanjem računalne tehnologije potreba za točnijim i bržim načinima proračuna se znatno povećala. Uz to se i složenost samih konstrukcija povećala te je nastala potreba za formiranjem određene metode proračuna koja bi omogućila brze i točne rezultate neovisno o složenosti konstrukcije i djelovanjima na nju, uz pomoć digitalnih računala.

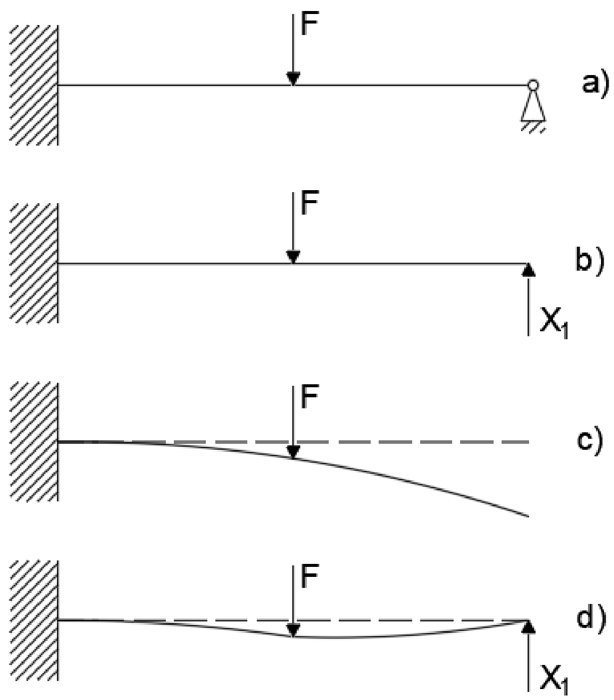
Dvije vrste metoda proračuna su uspostavljene (slika 1.): 1) Analitička metoda, koja je u svojoj srži jako ograničena zbog nemogućnosti formiranja zatvorenih rješenja (eng. *closed-form solutions*) kod kompleksnijih sistema, te 2) Numerička metoda, koja je znatno češće korištena zbog svog pristupa prema samoj konstrukciji (idealizacija konstrukcije u pojedine diskretne elemente), može se odnositi ili na rješenja određenih diferencijalnih jednadžbi pomoću aproksimacije (primjena većinom na manje sisteme), ili na matrične formulacije izgrađene *ab initio* od diskretnih elemenata povezanih u funkcionalnu cjelinu s potrebom da zadovoljavaju jednadžbe ravnoteže i kompatibilnosti, u spojevima, kao rubni uvjeti.



Slika 1. Metode proračuna konstrukcije

U sklopu ovoga rada, glavno „promatranje“ su matrične metode, od kojih se metoda pomaka (eng. *displacement method, stiffness method*) temelji na nepoznatim pomacima čvorova sistema, dok se metoda sila (eng. *force method, flexibility method*) temeljni na nepoznatim silama sistema. Obje metode imaju svoje prednosti i mane, npr. metoda pomaka je češće primjenjivana metoda zbog rezultata koji nam daju pomake konstrukcije, što nam je intuitivnije kada promatramo kako se konstrukcija ponaša pri opterećenju, nego dobivanje nepoznatih sila unutar elemenata koje se kasnije pretvaraju u pomake zbog lakšeg opisa učinaka na konstrukciju (uvjeti uporabljivosti). Metodom sila se u teoriji može bilo kakav sistem analizirati. Jedino je ograničenje mogućnost računala, stoga ćemo ovdje pokazati načine formiranja jednadžbi ravnoteže i kompatibilnosti u matričnom obliku, te dati neke od primjera samog određivanja sila u konstrukcijama te interpretacija rješenja. Uz to, korisno je spomenuti metodu konačnih elemenata (eng. *finite element method*), danas najzastupljeniju metodu. Temelji se na metodi pomaka, odnosno nepoznatim pomacima odabranih točaka sistema. Svaki element, koji se sastoji od bezbroj točaka, je sveden na dvije rubne točke, odnosno čvora i time kontinuirana sredina je svedena u diskretne točke. Samim time i diferencijalne jednadžbe koje opisuju neprekinutu sredinu, svedene su na algebarske jednadžbe, za koje je potrebna znatno manja količina komputacije. Ključ dobivanja smislenih i točnih rješenja odvija se na samim rubnim dijelovima elementa, gdje se postavljaju uvjeti neprekinutosti.

Bitna razlika kod proračuna metodom sila se odnosi na statičku neodređenost sistema. Kod statički određenih sistema, jednadžbe ravnoteže su dovoljne da se odrede sile u svim elementima (i reakcije), a iz toga se mogu odrediti pomaci i deformacije konstrukcije. Kod statički neodređenih sistema jednadžbe ravnoteže nisu dovoljne da se odrede sile u elementima, pa stoga moramo posegnuti za jednadžbama kompatibilnosti. Njihova je zamisao da se sa statički neodređenog sistema uklone prekobrojne veze u određenim točkama (slika 2.b)(pažnju posvetiti na to da se ne formira lokalni ili globalni mehanizam) formirajući osnovni sistem koji se, pomoću uvjeta kompatibilnosti na tim mjestima, natrag „vraća" u stvarno stanje prije raskidanja veza (slika 2.d). Detaljnije o ovome ćemo opisati u nastavku.



Slika 2. Primjer kompatibilnosti

2. STATIČKA I KINEMATIČKA MATRICA

U nastavku ćemo prikazati formulaciju statičke i kinematičke matrice za zglobne ravninske sisteme, iako je formulacija za sisteme sa savijanjem analogna.

2.1. Stupnjevi slobode sistema

Neka je n_f broj slobodnih čvorova sistema koji analiziramo (s oznakama $1, 2, \dots, n_f$), a $n - n_f$ je broj ležajnih čvorova sistema (s oznakama $n_f + 1, n_f + 2, \dots, n$). Uz to je element između čvorova *i* i *j* označen s {*i*, *j*}. Očito je $i \neq j$, te vrijedi {*i*, *j*} = {*j*, *i*}. Zbog jednostavnosti, pogodno je uzeti da su elementi numerirani uzastopnim brojevima od 1 do *b.* Poznato Maxwellovo pravilo jest da je zglobni ravninski sistem geometrijski nepromjenjiv ako vrijedi:

$$b = 2n_f \tag{1}$$

gdje je:

b – broj zglobnih štapova (uključujući štapove podloge),

n_f – broj slobodnih čvorova sistema.

Bitna napomena jest da ti štapovi moraju biti pravilno raspoređeni, odnosno da omoguće geometrijsku nepromjenjivost sistema.

Prema tome, možemo reći da se mogući broj stupnjeva slobode m_{min} može izračunati po formuli:

$$m_{min} = 2n_f - b$$

Ako je $m_{min} > 0$, onda je sustav u cijelosti, ili barem dio sustava mehanizam (geometrijski promjenjiv).

Ako je $m_{min} < 0$, onda je sustav u cijelosti, ili barem dio sustava statički neodređen.

U slučaju da se radi o sistemima sa savijanjem, u jednadžbi (1) broj štapova b zapravo označava neovisne sile u elementu, kojih u ovom slučaju ima tri (uzdužna, poprečna i moment). Taj treći stupanj slobode, moment, „izlazi“ iz ravnine (okomit je na ravninu) promatranog sistema, pa stoga nema rastav po komponentama. Jednakost (1) se sada može zapisati kao:

$$b = 3n_f \tag{2}$$

gdje je:

b – broj neovisnih sila u elementima (uključujući reakcije),

n_f – broj slobodnih čvorova sistema.

2.2. Ravnotežna ili statička matrica

Neka su zadana dva jedinična vektora uzduž osi štapa $\{i, j\}$ s oznakama $\overrightarrow{e_{i,j}}$ i $\overrightarrow{e_{j,i}}$, gdje je $\overrightarrow{e_{i,j}}$ orijentiran od čvora *i* prema čvoru *j* , a $\overrightarrow{e_{j,i}}$ obrnuto (slika 3.a.). Očito vrijedi $\overrightarrow{e_{j,i}} = -\overrightarrow{e_{i,j}}$. Ako zadamo da su ($x_i$, z_i) i (x_j , z_j) koordinate čvorova *i* i *j* , i ako je duljina štapa zadana s $L_{\{i,j\}}$:

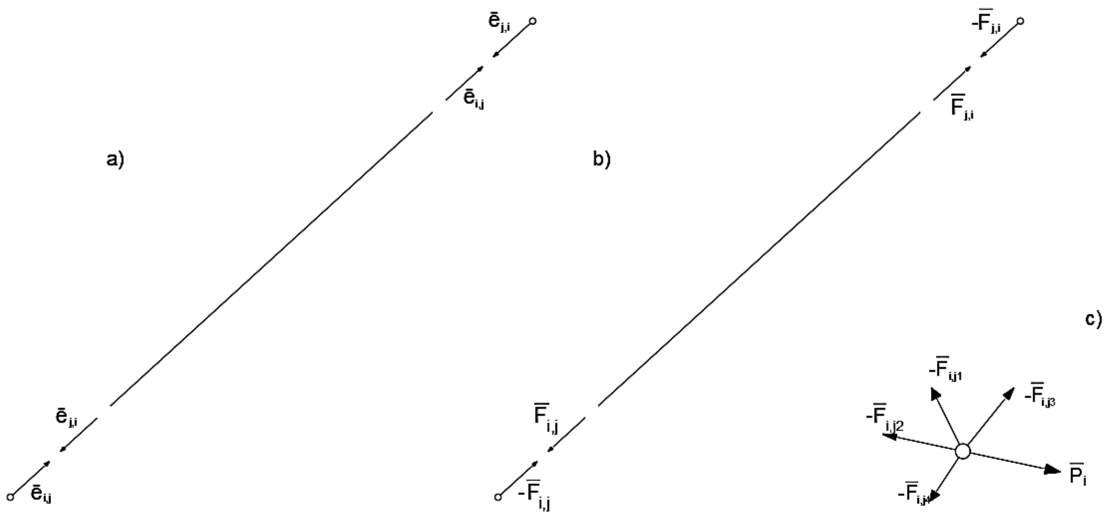
$$L_{\{i,j\}} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

Jedinični vektori $\overrightarrow{e_{i,j}}$ i $\overrightarrow{e_{j,i}}$ dani su jednadžbama:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_{i,j}} &= \frac{x_j - x_i}{L_{\{i,j\}}} \vec{i} + \frac{z_j - z_i}{L_{\{i,j\}}} \vec{j} \\ \overrightarrow{e_{j,i}} &= \frac{x_i - x_j}{L_{\{i,j\}}} \vec{i} + \frac{z_i - z_j}{L_{\{i,j\}}} \vec{j} \end{aligned} \tag{3}$$

Očito je da su skalarne komponente jediničnih vektora zapravo kosinusi smjera u odnosu na globalne koordinatne osi. Možemo pisati:

$$\overrightarrow{e_{i,j}} = e_{i,j}^x \vec{i} + e_{i,j}^z \vec{j} \qquad \qquad \overrightarrow{e_{j,i}} = e_{j,i}^x \vec{i} + e_{j,i}^z \vec{j}$$



Slika 3. Štap u ravnini

Uzdužna sila kojom čvor *i* djeluje na element je dana izrazom (slika 3.b.):

$$\overrightarrow{F_{i,j}} = F_{i,j} \cdot \overrightarrow{e_{j,i}}$$

A sila kojom čvor j djeluje na element jest:

$$\overrightarrow{F_{j,i}} = -\overrightarrow{F_{i,j}} = -\left(F_{i,j} \cdot \overrightarrow{e_{j,i}}\right) = F_{i,j} \cdot \overrightarrow{e_{i,j}}$$

S druge strane, štap {*i*, *j*} djeluje na čvor *i* s istom silom ali suprotne orijentacije:

$$-\overrightarrow{F_{i,j}} = -(F_{i,j} \cdot \overrightarrow{e_{j,i}}) = F_{i,j} \cdot \overrightarrow{e_{i,j}}$$

Očito je da za svaki slobodni čvor $i = 1,2,3, \dots, n_f$ možemo zapisati vektorske jednadžbe ravnoteže te ih rastaviti na skalarne jednadžbe za svaku koordinatnu os (slika 3.c.):

$$\sum_{j \in N_i} \left(-\overrightarrow{F_{i,j}}\right) + \overrightarrow{P_i} = 0$$

odnosno:

$$\sum_{j \in N_i} \left(F_{i,j} \cdot \overrightarrow{e_{i,j}}\right) + \overrightarrow{P_i} = 0 \tag{4}$$

Pri tome je N_i označava sve čvorove koji su svojim elementom povezani za čvor $i.$

Nadalje, jednadžbu (4) možemo raspisati po njenim komponentama te dobivamo:

$$\begin{gathered}\sum_{j \in N_i} e_{i,j}^{x} \cdot F_{i,j} + P_{i,x} = 0 \\ \sum_{j \in N_i} e_{i,j}^{z} \cdot F_{i,j} + P_{i,z} = 0\end{gathered} \tag{5}$$

gdje je $i \in \left[1, n_f\right]$.

Dobiveni sustav sadrži $2n_f$ jednadžbi i *b* sila. U slučaju da element je izložen savijanju, dodatna jednadžba bi morala biti formirana za momente u čvoru, dok bi poprečne i uzdužne sile se i dalje rastavljale po globalnim koordinatnim osima. Stoga bi taj sustav imao $3n_f$ jednadžbi i b sila. Sustav (5) zapisat ćemo u matričnom zapisu:

$$\overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{F}} + \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

odnosno:

$$\overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{F}} = -\mathbf{P} \tag{6}$$

U izrazu (6), $\overline{\mathbf{F}}$ predstavlja jednostupčanu matricu, tipa $M_{b\,x\,1}$, koja sadrži *b* redaka koji odgovaraju nepoznatim silama u elementima (ona sadrži sve statički određene i neodređene sile u elementima te komplemente reakcija koje se unose kao unutarnje sile elemenata). Ako elemente, koji nisu reakcije, numeriramo od 1 do ϕ, možemo pisati:

$$\overline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{b-1} \\ F_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{\varphi} \\ R_1 \\ \vdots \\ R_{b-\varphi} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Koeficijenti uz sile $\bar{\mathbf{F}}$ u jednadžbama čvora *i* su komponente matrice $\bar{\mathbf{A}}$ koji se nalaze u sjecištima redaka $2(i-1)+1,\ 2(i-1)+2$ sa stupcem q:

$$a_{2(i-1)+1,\ \mathrm{q}} = e_{i,j}^{x}$$

$$a_{2(i-1)+2,\ \mathrm{q}} = e_{i,j}^{z}$$

gdje:

q – označava određeni štap (silu) između čvorova {*i*, *j*}

Isto tako vrijednost određene promatrane sile F_{q} ulazi i u jednadžbu ravnoteže čvora *j* analogno prethodnom izrazu. Stoga se matrica $\bar{\mathbf{A}}$ sastoji od $2n_f$ redaka (sa savijanjem $3n_f$) i *b* stupaca (tip $M_{2n_f\,x\,b}$). Broj redaka odgovara broju jednadžbi koje se mogu postaviti za promatrane slobodne čvorove n_f, dok broj stupaca odgovara redcima matrice $\bar{\mathbf{F}}$ (traženim silama u elementima i reakcijama).

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdots & \mathrm{q} & \cdots & b \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 2(i-1)+1 \\ 2(i-1)+2 \\ \vdots \\ \vdots \\ 2(j-1)+1 \\ 2(j-1)+2 \\ \vdots \\ \vdots \\ 2(n_f-1)+1 \\ 2n_f \end{array} & \begin{bmatrix} & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & e_{i,j}^{x} & & \\ & & & e_{i,j}^{z} & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & e_{j,i}^{x} & \cdots & \cdots \\ & & & e_{j,i}^{z} & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \end{bmatrix} \end{array} \tag{8}$$

Matricu $\bar{\mathbf{A}}$ nazivamo *ravnotežnom* ili *statičkom matricom.* Jasno je da, kao u izrazu (7), matricu $\bar{\mathbf{A}}$ možemo podijeliti na komponente koje se odnose na sile u elementima $\mathbf{A_F}$ (kosinuse smjera za sile u elementima bez reakcija), te na komponente koje se odnose na reakcije $\mathbf{A_R}$. Stoga matricu $\bar{\mathbf{A}}$ možemo zapisati kao:

$$\bar{\mathbf{A}} = [\mathbf{A_F} \quad \mathbf{A_R}] \tag{9}$$

Matrica $\mathbf{P}$ predstavlja skalarne komponente vanjskih sila koje djeluju u promatranim čvorovima n_f, stoga ta matrica ima $2n_f$ komponenata:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{1,x} & P_{1,z} & \cdots & P_{i,x} & P_{i,z} & \cdots & \cdots & P_{j,x} & P_{j,z} & \cdots & \cdots & P_{n_f,x} & P_{n_f,z} \end{bmatrix}^{\boldsymbol{T}} \tag{10}$$

Sa savijanjem, matrica $\mathbf{P}$ se sastoji od skalarnih komponenata u smjerovima globalnih osi, te koncentriranih momenata u promatranom čvoru n_f:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{1,x} & P_{1,z} & \cdots & P_{i,x} & P_{i,z} & M_{i,y} & \cdots & P_{j,x} & P_{j,z} & M_{j,y} & \cdots & P_{n_f,z} & M_{n_f,y} \end{bmatrix}^{\boldsymbol{T}}$$

2.3. Kinematička matrica

Kinematičke jednadžbe povezuju promjene duljina elemenata i pomake čvorova sistema. Uzmimo da su pomaci čvorova *i* i *j* (slika 4.) zadani vektorima $\vec{p}_i$ i $\vec{p}_j$:

$$\vec{p}_i = a_i\vec{\imath} + b_i\vec{\jmath}$$

$$\vec{p}_j = a_j\vec{\imath} + b_j\vec{\jmath}$$

Nove koordinate čvorova će biti:

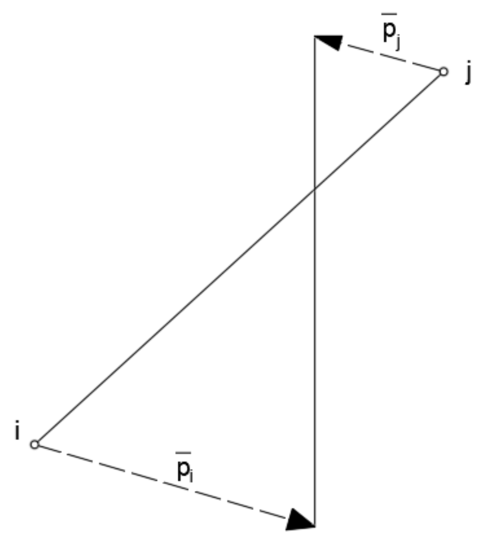
$$(x_i + a_i, z_i + b_i) \qquad\qquad (x_j + a_j, z_j + b_j)$$

Uz to, zadat ćemo promjenu duljine elementa {*i*, *j*} sa $d_{i,j}$. Nova duljina štapa jest $L_{i,j} + d_{i,j}$. Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$\left(L_{i,j} + d_{i,j}\right)^2 = \left[\left(x_j + a_j\right) - (x_i + a_i)\right]^2 + \left[\left(z_j + b_j\right) - (z_i + b_i)\right]^2$$

Ako grupiramo početne koordinate te isto tako grupiramo pomake čvorova, dobivamo:

$$\left(L_{i,j} + d_{i,j}\right)^2 = \left[\left(x_j - x_i\right) + \left(a_j - a_i\right)\right]^2 + \left[\left(z_j - z_i\right) + \left(b_j - b_i\right)\right]^2$$



Slika 4. Pomaci čvorova štapa u ravnini

Sljedeći korak jest kvadriranje izraza te izjednačavanje i grupiranje pribrojnika s obje strane.

$$\begin{aligned} L_{i,j}^2 + 2L_{i,j}d_{i,j} + d_{i,j}^2 \\ &= \left(x_j - x_i\right)^2 + 2\left(x_j - x_i\right)\left(a_j - a_i\right) + \left(a_j - a_i\right)^2 + \left(z_j - z_i\right)^2 \\ &+ 2\left(z_j - z_i\right)\left(b_j - b_i\right) + \left(b_j - b_i\right)^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_{i,j}^2 + 2L_{i,j}d_{i,j} + d_{i,j}^2& \\
&= \left[\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(z_j - z_i\right)^2\right] + 2\left[\left(x_j - x_i\right)\left(a_j - a_i\right) + \left(z_j - z_i\right)\left(b_j - b_i\right)\right] \\
&+ \left[\left(a_j - a_i\right)^2 + \left(b_j - b_i\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

Prvi izraz s desne strane jednadžbe je identičan prvom izrazu s lijeve strane, tako da se mogu pokratiti. Posljednji izraz s desne strane jednadžbe jednak je kvadratu duljine razlike pomaka $\vec{p}_i$ i $\vec{p}_j$. S obzirom na to da su pomaci mali, i da je $d_{i,j} \ll L_{i,j}$ i $\|\vec{p}_i\| \ll L_{i,j}$, $\|\vec{p}_j\| \ll L_{i,j}$, vrijednosti $d_{i,j}^2$ i $\|\vec{p}_j - \vec{p}_i\|^2$ se mogu zanemariti, te preostaje:

$$2L_{i,j}d_{i,j} = 2\left[\left(x_j - x_i\right)\left(a_j - a_i\right) + \left(z_j - z_i\right)\left(b_j - b_i\right)\right]$$

Dijeljenje s $2L_{i,j}$ nam daje:

$$d_{i,j} = \frac{x_j - x_i}{L_{i,j}}\left(a_j - a_i\right) + \frac{z_j - z_i}{L_{i,j}}\left(b_j - b_i\right)$$

odnosno sažetije uz korištenje izraza (3):

$$d_{i,j} = -\left[\frac{x_j - x_i}{L_{i,j}}a_i + \frac{z_j - z_i}{L_{i,j}}b_i + \frac{x_i - x_j}{L_{i,j}}a_j + \frac{z_i - z_j}{L_{i,j}}b_j\right]$$

$$d_{i,j} = -\left[e_{i,j}^x a_i + e_{i,j}^z b_i + e_{j,i}^x a_j + e_{j,i}^z b_j\right] \tag{11}$$

Nadalje ćemo promjene duljina elemenata svrstati u jednostupčanu matricu $\bar{\mathbf{d}}$ (tip $M_{b\ x\ 1}$) tako da poredak promjena duljina elemenata odgovara vrijednosti sila u matrici $\bar{\mathbf{F}}$, a poredak pomaka čvorova po koordinatnim osima u matrici $\mathbf{p}$ (tip $M_{2n_f\ x\ 1}$) da odgovara komponentama vanjskih sila koje djeluju u čvoru rastavljenih po koordinatnim osima u matrici $\mathbf{P}$.

Sada možemo izraz (11) zapisati u matričnom obliku:

$$\bar{\mathbf{d}} = -\bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{p}$$

odnosno:

$$\bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{p} = -\bar{\mathbf{d}} \tag{12}$$

Matrica $\bar{\mathbf{B}}$ se sastoji od *b* redaka koji odgovaraju promatranim promjenama duljina elemenata sistem (s obzirom na to da se u analizu sistema uključuju i reakcije, one se smatraju nepopustljivima te ne dolazi do promjene duljina), i $2n_f$ stupaca.

Usporedba matrice $\bar{\mathbf{B}}$ i statičke matrica $\bar{\mathbf{A}}$ možemo zaključiti:

$$\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{A}}^T \tag{13}$$

Matricu $\bar{\mathbf{B}}$ nazivamo *kinematičkom matricom.*

3.POTPROSTORI MATRICA; ALGEBARSKA, GEOMETRIJSKA I STATIČKA INTERPRETACIJA POTPROSTORA

3.1. Matrice kao operatori

Neka je zadan linearni operator $\mathcal{L}$ kojem je vektorski prostor $\mathbb{D}^n$, dimenzije *n*, područje definicije i vektorski prostor $\mathbb{V}^m$, dimenzije *m*, područje vrijednosti. Operator $\mathcal{L}$ preslikava vektore područja definicije u vektore područja vrijednosti ($\mathcal{L}:\ \mathbb{D}^n \to \mathbb{V}^m$).

Prostori definicije i vrijednosti se mogu podudarati u slučaju da su jednakih dimenzija ($n = m$) ili mogu biti potprostori jedno drugog ($n \lesseqgtr m$). Odaberemo li u tim prostorima baze, koordinatni su zapisi vektora $\vec{d} \in \mathbb{D}^n$ i $\vec{v} \in \mathbb{V}^m$ jednostupčane matrice $\mathbf{d} = [d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_n]^T \in \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]^T \in \mathbb{R}^m$.

Za operator $\mathcal{L}$, kojemu odgovara matrica $\mathbf{L}$, tipa $M_{m\,x\,n}$, kojoj su $\boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2}, \dots, \boldsymbol{l_n} \in \mathbb{R}^m$ stupci i za vektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, koji je koordinatni zapis vektora $\vec{d} \in \mathbb{D}^n$, vrijedi:

$$\mathbf{Ld} = [\boldsymbol{l_1} \quad \boldsymbol{l_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{l_n}]\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{l_1}d_1 + \boldsymbol{l_2}d_2 + \cdots + \boldsymbol{l_n}d_n \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}} \tag{14}$$

U slučaju da je $\vec{d} = \vec{e_i}$, gdje je $\vec{e_i}$ *i*-ti vektor baze prostora definicije koordinatnog zapisa

$$\mathbf{e}_i = [e_{i,1} \quad e_{i,2} \quad \cdots \quad e_{i,n}]^T$$

$$e_{i,j} = \begin{cases} 1 & za\ i = j \\ 0 & za\ i \neq j \end{cases}$$

vrijedi

$$\mathbf{Le}_i = \boldsymbol{l_i} \tag{15}$$

Ukratko, matrica $\mathbf{L}$ zapravo preslikava *i*-ti bazni vektor područja definicije $\mathbb{D}^n$ u vektor područja vrijednosti $\mathbb{V}^m$ kojemu odgovara *i*-ti stupac matrice $\mathbf{L}$. Odnosno *i*-ti stupac operatora, l_i, jest koordinatni zapis preslikanog *i*-tog baznog vektora prostora definicije.

Za primjer, uzet ćemo matrice:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$$

Matrica $\mathbf{J}$ prikaz je operatora $\mathcal{J}:\ \mathbb{D}^2 \to \mathbb{V}^2$ koji bazne vektore $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ prostora $\mathbb{D}^2$ preslikava u vektore $\vec{J_1}$ i $\vec{J_2}$ (slika 5.a.):

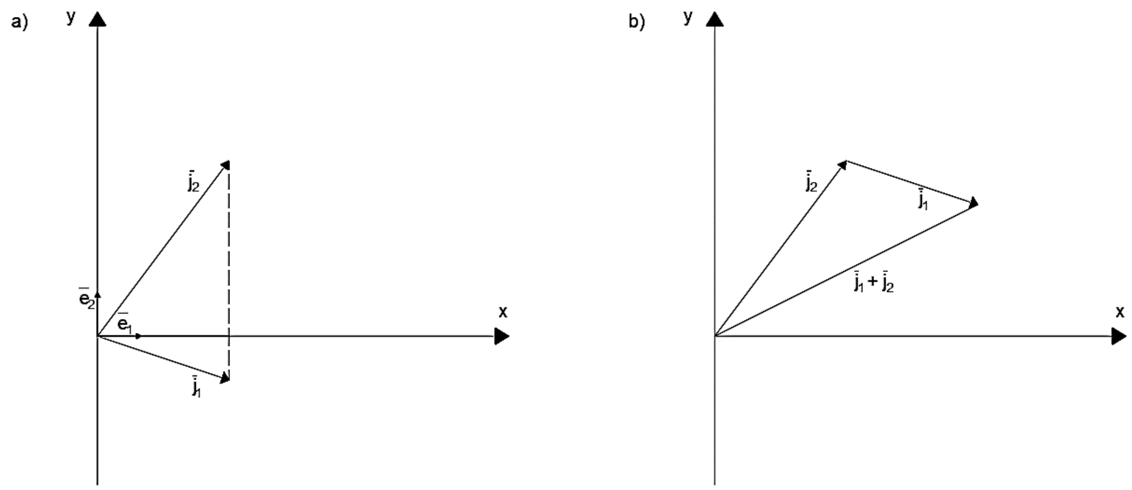
$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ \to \ \mathbf{j}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Očito je da su vektori $\overrightarrow{J_1}$ i $\overrightarrow{J_2}$ linearno nezavisni (ne postoji α takav da je $\overrightarrow{J_2} = \alpha\overrightarrow{J_1}$), te prema tome, vektori $\overrightarrow{J_1}$ i $\overrightarrow{J_2}$ pokrivaju cijelo područje vrijednosti ($\mathbb{V}^2$) operatora (slika[1] operatora $\mathcal{J}$ jest cijela ravnina). Pomoću izraza (14) možemo zapisati:

$$\mathbf{Jd} = [\mathbf{j}_1 \quad \mathbf{j}_2]\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \mathbf{j_1}d_1 + \mathbf{j_2}d_2$$

za bilo koji vektor područja $\mathbb{D}^2$ operatora $\mathcal{J}$. Kao primjer, vektor $\vec{d} = [1 \quad 1]^T$. Prvo se bazni vektori područja definicije $\mathbb{D}^2$ preslikaju u vektore $\overrightarrow{J_1}$ i $\overrightarrow{J_2}$, te primjenom (14) (slika 5.b.) dobivamo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Slika 5. Primjer operatora **J**

Matrica $\mathbf{I}$ prikaz je operatora $\mathcal{I}:\ \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{V}^2$ koji bazne vektore $\overrightarrow{e_1}$ i $\overrightarrow{e_2}$ prostora $\mathbb{D}^2$ preslikava u vektore $\overrightarrow{\iota_1}$ i $\overrightarrow{\iota_2}$ (slika 6.a):

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\ ,\ \ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ \rightarrow\ \ \mathbf{i}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}\ , \mathbf{i}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = 2\mathbf{i}_1$$

Možemo vidjeti da su vektori $\overrightarrow{\iota_1}$ i $\overrightarrow{\iota_2}$ linearno zavisni ($\overrightarrow{\iota_2} = 2\overrightarrow{\iota_1}$), te je prema (14):

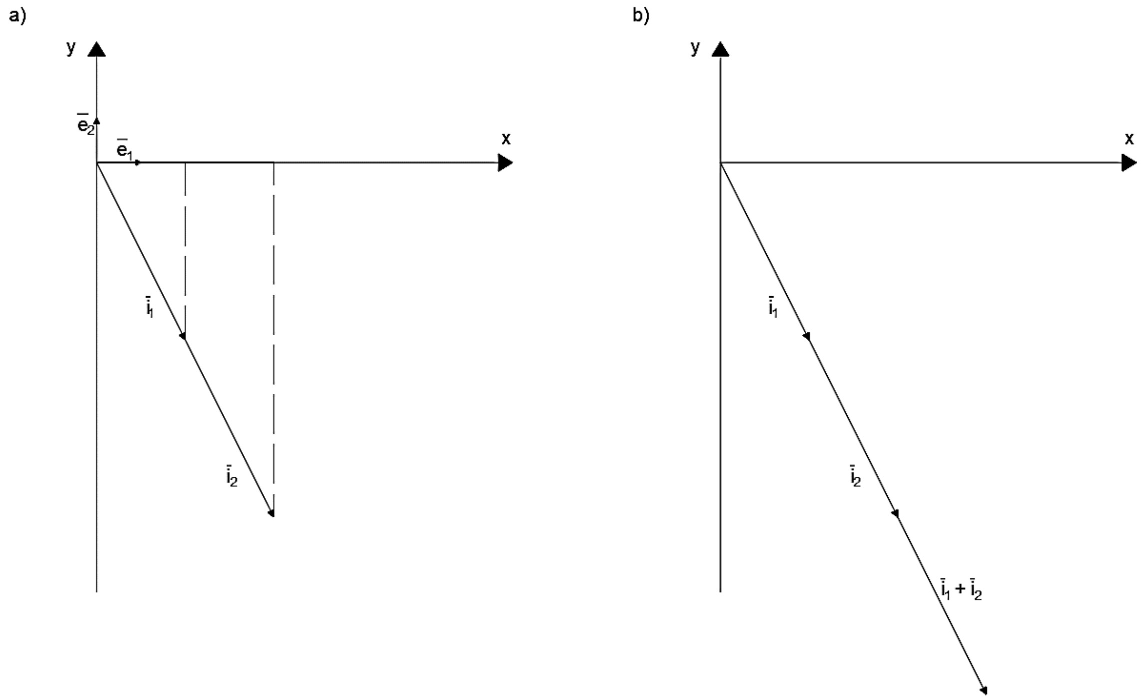
$$\mathbf{Id} = [\mathbf{i}_1 \quad \mathbf{i}_2]\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \mathbf{i_1}d_1 + \mathbf{i_2}d_2 = \mathbf{i_1}d_1 + 2\mathbf{i_1}d_2 = (d_1 + 2d_2)\mathbf{i_1}$$

Prema slici (6.b.) i prethodnom izrazu vidimo da je slika operatora $\mathcal{I}$ jednodimenzionalni potprostor dvodimenzionalnog prostora vrijednosti $\mathbb{V}^2$. Baza tog prostora može biti bilo koji vektor kolinearan s vektorom $\overrightarrow{\iota_1}$ ($\vec{\iota} = \alpha\overrightarrow{\iota_1}\,, \alpha \in \mathbb{R}$).

Geometrijski možemo shvatiti prostore definicije $\mathbb{D}^2$ operatora **J** i $\mathbf{I}$ kao ravnine, a njihova područja vrijednosti $\mathbb{V}^2$ isto kao ravnine s razlikom u tome što je slika operatora **J** cijela ravnina (slika 5.a.), dok je slika operatora $\mathbf{I}$ samo pravac u ravnini koji prolazi ishodištem (slika 6.a.). Usporedbom dva operatora i njihovih slika možemo reći da je operator $\mathbf{I}$ zapravo suzio svoje područje vrijednosti (ravninu) u pravac i time preslikao bezbroj točaka prostora definicije

1 – skup $\{\vec{w} = \mathcal{L}\vec{v} \in\ \mathbb{V}^m : \vec{v} \in \mathbb{D}^n\}$

$\mathbb{D}^2$ u iste točke slike.



Slika 6. Primjer operatora $\mathbf{I}$

3.2. Potprostori matrica

Prostor stupaca matrice jest vektorski (pot)prostor koji razapinju vektori kojima su koordinate dane stupcima matrice. Taj prostor odgovara slici operatora i samim time može biti cijeli prostor vrijednosti $\mathbb{V}^m$, kao u slučaju operatora $\mathbf{J}$ ili samo neki potprostor prostora $\mathbb{V}^m$, kao u slučaju operatora $\mathbf{I}$.

Svaki bazni vektor prostora stupaca dobiven je jednim linearno nezavisnim stupcem (vektorom) matrice operatora. Na primjeru matrice $\mathbf{J}$ to su $\mathbf{j}_1$ i $\mathbf{j}_2$, a matrice $\mathbf{I}$ to može biti ili stupac $\mathbf{i}_1$ ili $\mathbf{i}_2$.

Analogno, *prostor redaka matrice* jest vektorski (pot)prostor koji je razapet vektorima kojima su koordinate dane redcima matrice. Prostor redaka može biti cijeli prostor definicije $\mathbb{D}^n$ ili neki potprostor, a svaki bazni vektor prostora redaka definiran je jednim linearno nezavisnim retkom (vektorom) matrice operatora.

Jezgrom operatora nazivamo prostor okomit na prostor redaka. Taj prostor spada u potprostor prostora definicije $\mathbb{D}^n$. Prikazat ćemo ga na operatoru $\mathcal{I}$.

Vektori prostora redaka matrice $\mathbf{I}$ su:

$$\underline{\mathbf{i}}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{i}}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -2\underline{\mathbf{i}}_1$$

i vidimo da su linearno zavisni, stoga je prostor redaka matrice $\mathbf{I}$ jednodimenzionalan (pravac) s bazom koja se sastoji od, recimo, vektora $\underline{\mathbf{i}}_1$. Sada ćemo zadati neka dva vektori iz prostora redaka:

$$\mathbf{d}_1 = \frac{3}{2}\underline{\mathbf{i}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cdot 2 \\ \frac{3}{2} \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{d}_2 = \frac{7}{8}\underline{\mathbf{i}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} \cdot 2 \\ \frac{7}{8} \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/4 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

Množenjem vektora operatorom:

$$\mathbf{Id}_1 = \begin{bmatrix} 30 \\ -60 \end{bmatrix} = \frac{30}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{30}{2}\,\mathbf{i}_1, \qquad \mathbf{Id}_2 = \begin{bmatrix} 35/2 \\ -35 \end{bmatrix} = \frac{35}{4}\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{35}{4}\,\mathbf{i}_1$$

Kratkom opservacijom jasno je zaključiti da se različiti vektori prostora redaka, operatorom $\mathcal{I}$, preslikavaju u različite vektore prostora stupaca. Zadat ćemo sada vektor $\mathbf{k} = [-4 \quad 2]^T$ koji je okomit na bazni vektor prostora redaka $\underline{\mathbf{i}}_1$ ($\underline{\mathbf{i}}_1{}^{\boldsymbol{T}} \cdot \mathbf{k} = 0$). Provjeriti ćemo sada da li dodavanje vektora $\mathbf{k}$ vektorima prostora redaka mijenja konačni vektor u koji se preslikava promatrani vektor prostora redaka:

$$\mathbf{d}_3 = \mathbf{d}_1 + \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{d}_4 = \mathbf{d}_2 + \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 7/4 \\ 7/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9/4 \\ 11/2 \end{bmatrix}$$

Množenjem vektora operatorom:

$$\mathbf{Id}_3 = \begin{bmatrix} 30 \\ -60 \end{bmatrix} = \frac{30}{2}\,\mathbf{i}_1, \qquad \mathbf{Id}_4 = \begin{bmatrix} 35/2 \\ -35 \end{bmatrix} = \frac{35}{4}\,\mathbf{i}_1$$

vidimo da smo dobili iste vektore kao kod umnoška $\mathbf{Id}_1$ i $\mathbf{Id}_2$, stoga možemo reći da vektor $\mathbf{k}$ prilikom množenja s matricom $\mathbf{I}$ iščezava (to vrijedi za sve vektore $\alpha\mathbf{k}$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

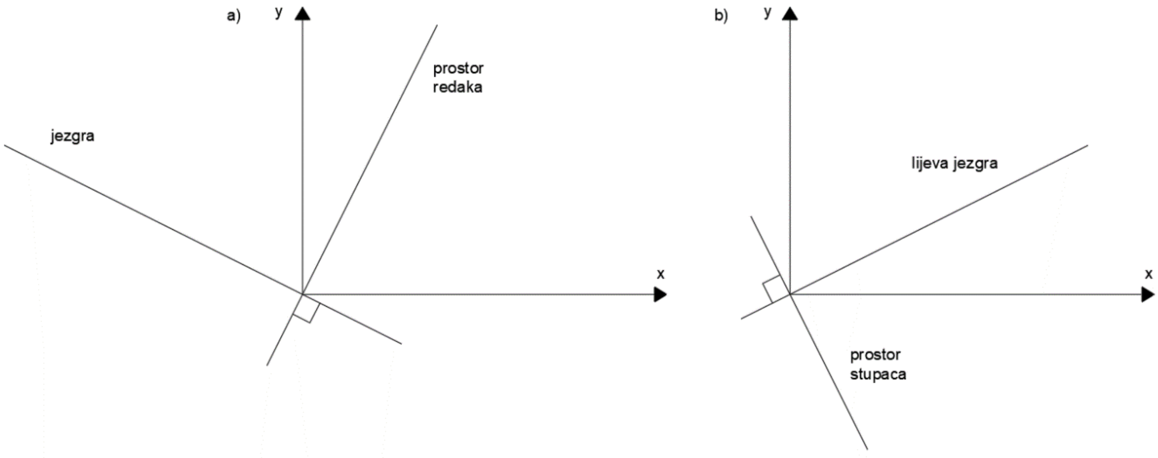
$$\mathbf{Id}_1 = \mathbf{Id}_3 = \mathbf{I}(\mathbf{d}_1 + \alpha\mathbf{k}) = \mathbf{Id}_1 + \mathbf{I}\alpha\mathbf{k} \rightarrow \alpha\mathbf{Ik} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{Ik} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Ik} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{i}}_1{}^{\boldsymbol{T}} \\ \underline{\mathbf{i}}_2{}^{\boldsymbol{T}} \end{bmatrix}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{i}}_1{}^{\boldsymbol{T}} \cdot \mathbf{k} \\ \underline{\mathbf{i}}_2{}^{\boldsymbol{T}} \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{i}}_1{}^{\boldsymbol{T}} \cdot \mathbf{k} \\ -2(\underline{\mathbf{i}}_1{}^{\boldsymbol{T}} \cdot \mathbf{k}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sada možemo definirati jezgru operatora $\mathcal{I}$ kao jednodimenzionalni potprostor prostora definicije kojemu je baza vektor $\mathbf{k}$. Jezgra je, kao i prostor redaka, pravac koji prolazi kroz ishodište (slika 7.a.). Svojstvo prostora redaka i jezgre je to da se svaki različiti vektor prostora redaka preslikava u različiti vektor prostora stupaca, a da se dodavanjem različitih vektora prostora jezgre vektoru prostora redaka ne mijenja konačni vektor u koji se preslikava početni odabrani vektor prostora redaka. Slikovito rečeno, pomicanjem po pravcu prostora redaka dobivamo različite vektore slike operatora, a pomicanjem iz neke točke prostora redaka paralelno s jezgrom dolazimo opet u istu preslikanu točku.

Prostor redaka i prostor jezgre zajedno razapinju cijelo područje definicije operatora $\mathcal{L}$, odnosno zbroj dimenzija prostora redaka i prostora jezgre jednak je dimenziji prostora definicije $\mathbb{D}^n$. U našem primjeru operatora $\mathcal{I}$, dimenzija prostora redaka je 1, a dimenzija prostora jezgre je isto 1, stoga $1 + 1 = 2$, što se poklapa s prostorom definicije $\mathbb{D}^2$.

Operator $\mathcal{J}$ nema jezgru, stoga se prostor definicije poklapa s prostorom redaka. $(2 + 0 = 2)$



Slika 7. Potprostori operatora

Na slici 7.b. možemo vidjeti geometrijski prikaz prostora stupaca matrice $\mathbf{I}$ i okomito na njega, prostor lijeve jezgre. S obzirom da znamo da prostor stupaca odgovara slici operatora, *lijeva jezgra*, koja je potprostor prostora vrijednosti, okomit na prostor stupaca, definira vrijednosti koje su operatoru nedohvative. Baza prostora stupaca zajedno s bazom prostora lijeve jezgre razapinju cijeli prostor vrijednosti $\mathbb{V}^m$.

Prilikom transponiranja nekog operatora, prostor redaka transponiranog operatora jest prostor stupaca početnog, a prostor jezgre transponiranog operatora jest prostor lijeve jezgre početnog (i obratno), odnosno transponiranjem operatora prostori redaka i stupaca te jezgre i lijeve jezgre mijenjaju uloge. Naravno, sami prostori definicije $\mathbb{D}^n$ i prostori vrijednosti $\mathbb{V}^m$ ne moraju se poklapati kao u prethodnim slučajevima.

Rang matrice (operatora) je broj linearno nezavisnih redaka ili stupaca. S obzirom da operator $\mathcal{L}$ različite vektore prostora redaka preslikava u različite vektore prostora stupaca, možemo zaključiti da ta dva prostora moraju biti jednakih dimenzija. Ako definiramo rang operatora $\mathcal{L}: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{V}^m$ s r, onda je dimenzija njegove jezgre $j = n - r$, a dimenzija lijeve jezgre $l = m - r$.

Vektori baze jezgre ($\mathbf{k}$) matrice $\mathbf{M}$ mogu se odrediti rješavanjem homogenog sustava jednadžbi:

$$\mathbf{Mk} = \mathbf{0} \tag{16}$$

Dimenzija je jezgre jednaka broju slobodnih vektora, odnosno slobodnih koeficijenata koji mogu poprimiti bilo koje vrijednosti te i dalje biti rješenje sustava. Takva rješenja su parametarska, a sami broj parametara ukazuje na dimenziju jezgre. Slobodni vektori se dobiju uvrštavanjem unazad u jednadžbu (16) što je objašnjeno u kasnijim poglavljima.

Vektor baze lijeve jezgre matrice $\mathbf{M}$ možemo odrediti kao vektor baze jezgre matrice $\mathbf{M}^T$:

$$\mathbf{M}^T\mathbf{k} = \mathbf{0} \tag{17}$$

3.3. Potprostori ravnotežne i kinematičke matrice

Jednostupčane matrice $\bar{\mathbf{F}}$ i $\bar{\mathbf{d}}$ sadrže b redaka (komponenata) koji odgovaraju promatranim silama u elementima i promjenama duljina, stoga možemo te vektore svrstati u vektorski prostor $\mathbb{R}^b$. Prostor $\mathbb{R}^b$ nazvat ćemo *prostorom štapova* (općenitije *prostorom sila*). Slično tome, možemo jednostupčane matrice $\mathbf{P}$ i $\mathbf{p}$ koje sadrže $2n_f$ redaka (komponenata), koji odgovaraju vanjskim silama u čvorovima, svrstati u vektorski prostor $\mathbb{R}^{2n_f}$. Prostor $\mathbb{R}^{2n_f}$ nazvat ćemo *prostorom čvorova*.

Iz prethodnih definicija možemo statičku (ravnotežnu) matricu $\bar{\mathbf{A}}$ opisati kao linearni operator koji prostor štapova (sila) preslikava u prostor čvorova ($\bar{\mathbf{A}}: \mathbb{R}^b \to \mathbb{R}^{2n_f}$), a kinematičku matricu $\bar{\mathbf{B}}$ kao linearni operator koji prostor čvorova preslikava u prostor štapova (sila) ($\bar{\mathbf{B}}: \mathbb{R}^{2n_f} \to \mathbb{R}^b$).

S obzirom na to da matrica $\bar{\mathbf{A}}$ preslikava sile u elementima u komponente vanjskih sila u čvorovima, ravnoteža će biti jedino moguća ako komponente vanjskih sila leže u slici matrice $\bar{\mathbf{A}}$**,** što je zapravo prostor stupaca. Dovoljno je da samo jedna komponenta vanjskih sila u čvorovima leži u prostoru lijeve jezgre da ravnoteža ne bude moguća.

Jezgra matrice $\bar{\mathbf{B}}$ (što odgovara lijevoj jezgri matrice $\bar{\mathbf{A}}$) sadrži vektore $\mathbf{p}$ za koje vrijedi izraz (16):

$$\bar{\mathbf{B}}\mathbf{p} = \mathbf{0} \tag{18}$$

odnosno, sadrži vektore pomaka čvorova koji ne uzrokuju promjene duljina elemenata (sistem se ponaša kao kruto tijelo). Skup tih vektora možemo nazvati *pomakom mehanizma.* Naravno, u prostoru redaka kinematičke matrice (prostor stupaca $\bar{\mathbf{A}}$) nalaze se vektori pomaka čvorova koji nisu mogući bez promjena duljina elemenata. Uravnoteženjem sila iz prostora stupaca matrice $\bar{\mathbf{A}}$ dolazi do promjena duljina elemenata, pa tako i pomakom čvorova prikazanim vektorima prostora redaka matrice $\bar{\mathbf{B}}$**.**

Te promjene duljina moraju biti takve da omoguće „slaganje“ sistema s elementima promijenjenih duljina i pomaknutih čvorova, što nazivamo *kompatibilnim promjenama duljina*. Nastaju uravnoteženjem vanjskih sila, silama iz prostora redaka matrice $\bar{\mathbf{A}}$, odnosno silama u elementima, što je prostor stupaca matrice $\bar{\mathbf{B}}$, nazvan prostorom kompatibilnih promjena duljina elemenata. Prostor lijeve jezgre matrice $\bar{\mathbf{B}}$, što je prostor jezgre matrice $\bar{\mathbf{A}}$, prostor je nekompatibilnih promjena duljina elemenata, odnosno elemente je potrebno dodatno produljiti i time unijeti dodatnu silu u sami element. Ta sila će biti u ravnoteži s ostalim silama u elementima bez djelovanja vanjskih sila u čvorovima:

$$\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \tag{19}$$

Možemo reći da su sile u elementima u *unutarnjoj ravnoteži*.

3.4. Klasifikacija sistema uz pomoć potprostora

Prostor redaka i prostor stupaca matrice $\overline{\mathbf{A}}$ i $\overline{\mathbf{B}}$ su jednakih dimenzija, odnosno to je rang r. Dimenzije jezgre matrice $\overline{\mathbf{A}}$ i lijeve jezgre matrice $\overline{\mathbf{B}}$ su jednake i računaju se po formuli $j = b - r$. Dimenzije lijeve jezgre matrice $\overline{\mathbf{A}}$ i jezgre matrice $\overline{\mathbf{B}}$ isto su jednake te se računaju po formuli $l = 2n_f - r$.

Tablica 1. Statički određen i geometrijski nepromjenjiv sistem

$b = 2n_f$	$rang$	$Prostor\ redaka$	$Prostor\ stupaca$	$Jezgra\ b - r$	$Lijeva\ jezgra\ 2n_f - r$
Statički određen Geometrijski nepromjenjiv	$r = b = 2n_f$	$b = 2n_f$	$b = 2n_f$	0	0

Za statički određen i geometrijski nepromjenjiv sistem možemo vidjeti da jezgra i lijeva jezgra ne postoje. Nepostojanje jezgre ravnotežne matrice $\overline{\mathbf{A}}$ nam govori da ako u čvorovima ne djeluju vanjske sile, neće biti niti sila u elementima, odnosno unutarnja ravnoteža je jedino moguća ako su sve sile u elementima jednake nuli (19). Nepostojanje lijeve jezgre matrice $\overline{\mathbf{A}}$ nam pak govori da je za bilo koji sustav vanjskih sila u čvorovima ravnoteža moguća, odnosno da za bilo koji sustav vanjskih sila u čvorovima postoje neke sile u elementima koje nakon transformacije mogu uravnotežiti promatrani sustav vanjskih sila. Uz to, naravno, nepostojanje lijeve jezgre matrice $\overline{\mathbf{A}}$ ukazuje na nepostojanje jezgre matrice $\overline{\mathbf{B}}$, što pak znači da nisu mogući pomaci čvorova bez promjena duljina elemenata.

Tablica 2. Statički neodređen i geometrijski nepromjenjiv sistem

$b > 2n_f$	$rang$	$Prostor\ redaka$	$Prostor\ stupaca$	$Jezgra\ b - r$	$Lijeva\ jezgra\ 2n_f - r$
Statički neodređen Geometrijski nepromjenjiv	$r = 2n_f$	$2n_f$	$2n_f$	$b - 2n_f$	0

Statički neodređeni i geometrijski nepromjenjivi sistemi u statičkoj matrici $\overline{\mathbf{A}}$ nemaju lijevu jezgru, što znači da ne postoje vanjske sile u čvorovima koje sustav ne može uravnotežiti. Isto tako možemo vidjeti da nam postojanje jezgre matrice $\overline{\mathbf{A}}$ govori da je prostor u koji se preslikava manje dimenzije od početnog prostora, odnosno da se beskonačno vektora preslikava u iste točke prostora čvorova. Statičku neodređenost možemo definirati kao dimenziju jezgre koja je jednaka broju nezavisnih sustava sila u unutarnjoj ravnoteži (kada ne djeluju vanjske sile u čvorovima (19)). Za neki vektor prostora redaka $\bar{\mathbf{F}}_0$ matrice $\bar{\mathbf{A}}$ i za neki bazni vektor prostora jezgre $\bar{\mathbf{f}}_i$, $\bar{\mathbf{F}}_0$ će se transformacijom preslikati u različiti vektor prostora čvorova, dok će za bilo koji α vektor $\bar{\mathbf{F}}$ dan izrazom:

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_0 + \sum_{i=1}^{b-2n_f} \alpha_i \bar{\mathbf{f}}_i \tag{20}$$

preslikati u isti vektor prostora čvorova kao i $\bar{\mathbf{F}}_0$ (to slijedi iz činjenice da vektori $\bar{\mathbf{f}}_i$ leže u jezgri matrice $\bar{\mathbf{A}}$, pa je $\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{f}}_i = \mathbf{0}$, (19)). Da dobijemo jedinstveno rješenje potrebno je uvođenje jednadžbi kompatibilnosti.

Tablica 3. Statički određen i geometrijski promjenjiv sistem

$b < 2n_f$	$rang$	$Prostor$ $redaka$	$Prostor$ $stupaca$	$Jezgra$ $b - r$	$Lijeva\ jezgra$ $2n_f - r$
Statički određen Geometrijski promjenjiv	$r = b$	b	b	0	$2n_f - b$

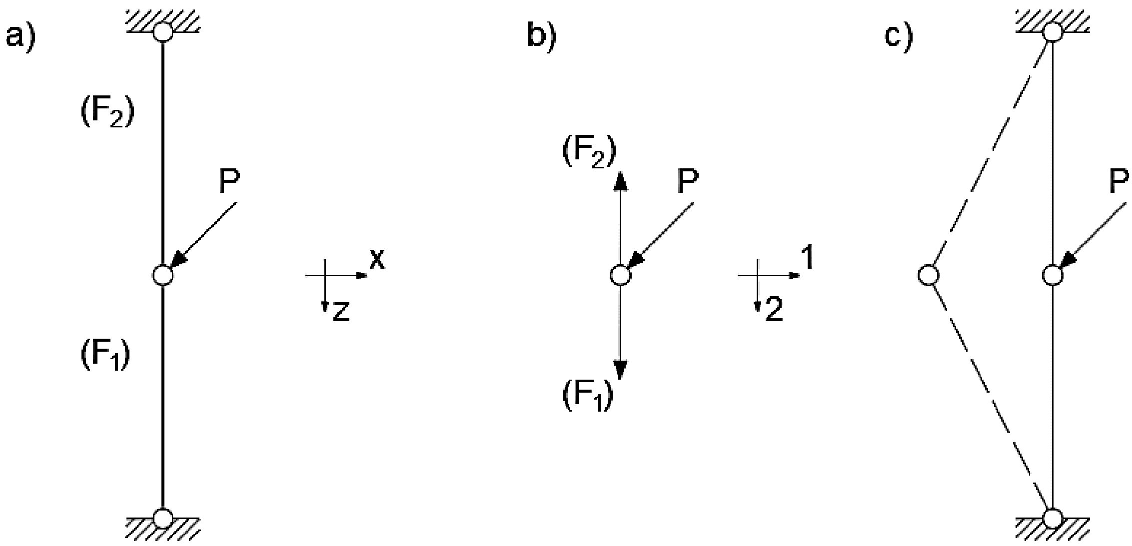
S obzirom na to da postoji lijeva jezgra matrice $\bar{\mathbf{A}}$ očito je da postoje sustavi vanjskih sila ili barem komponente sustava vanjskih sila koje ne leže u prostoru stupaca te ih se ne može uravnotežiti. Isto tako postojanje lijeve jezgre matrice $\bar{\mathbf{A}}$ ukazuje na postojanje jezgre matrice $\bar{\mathbf{B}}$ što nam govori da postoji $2n_f - b$ nezavisnih sustava pomaka mehanizma, odnosno postoje pomaci koji ne uzrokuju promjene duljina elemenata već samo pomake sistema ili barem dijela sistema kao krutog tijela. Zbog nepostojanja jezgre ravnotežne matrice, sustav vanjskih sila koji leži u prostoru stupaca ima jedinstveno rješenje, to jest svaka se sila (pošto je prostor definicije cijeli prostor redaka) preslikava u različiti vektor prostora čvorova.

Tablica 4. Statički neodređen i geometrijski promjenjiv sistem

$b \gtreqless 2n_f$	$rang$	$Prostor$ $redaka$	$Prostor$ $stupaca$	$Jezgra$ $b - r$	$Lijeva\ jezgra$ $2n_f - r$
Statički neodređen Geometrijski promjenjiv	$r < \min(b, 2n_f)$	r	r	$b - r$	$2n_f - r$

Statički neodređen i geometrijski promjenjiv sistem sadrži i jezgru i lijevu jezgru matrice $\overline{\mathbf{A}}$, odnosno postoje sustavi vanjskih sila u čvorovima koje elementi sistema ne mogu uravnotežiti, a isto tako za sustave vanjskih sila koje leže u prostoru stupaca ne postoji jedinstveno rješenje pošto postoje bazni vektori prostora jezgre (sile kojima je moguće ostvariti unutarnju ravnotežu) koji u kombinaciji s vektorima prostora redaka daju iste vektore prostora čvorova. Odnosno postoji beskonačno rješenja sustava.

Kratko ćemo prethodne definicije prikazati na ravninskom sistemu (slika 8.a.):



Slika 8. Primjer sistema

Način formiranja ravnotežne matrice objašnjen je na stranicama 4. i 5., no postoji način formiranje iste matrice pomoću matrice transformacije iz lokalnog u globalni sustav koji će biti objašnjen u kasnijim poglavljima. Formirana jednadžba (6) za sustav sa slike 8.a. je:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ -P_2 \end{bmatrix}$$

Iako se unutar prethodne jednadžbe mogu dodati još po 2 stupanja slobode za svaki ležajni čvor pa tako i po 2 reakcije, u ovom slučaju je dovoljno promatranje samo slobodnog čvora (reakcije će točno odgovarati silama u štapovima pa ih možemo izostaviti).

Lako je vidjeti da je rang ovakve ravnotežne matrice $r = 1$. Nadalje, broj štapova $b = 2$, čemu je jednak i broj neovisnih pomaka promatranog čvora (u ravnini je to 2). Prostor stupaca ravnotežne matrice, podsjetimo se, je prostor u kojem moraju ležati vektori vanjskih sila u čvorovima kako bi ravnoteža bila moguća. Ako barem jedna komponenta leži u prostoru lijeve jezgre, ravnoteža nije moguća. Bazni vektori prostora stupaca ravnotežne matrice su:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -1\,\mathbf{a}_1$$

Vidimo da su linearno zavisni, stoga se prostor vrijednosti „suzio“ u pravac, i to pravac koji je definiran baznim vektorom $\boldsymbol{e_1} = [0 \quad 1]^T$. To je pravac koji se poklapa s osi z. Lijeva jezgra je pravac okomit na taj pravac. Očito je da jedine vanjske sile koje sistem može uravnotežiti moraju biti paralelne s osi-z, u protivnom, ravnoteža nije moguća. Isto tako postojanje lijeve jezgre ravnotežne matrice $\overline{\mathbf{A}}$ znači postojanje jezgre kinematičke matrice $\overline{\mathbf{B}}$, odnosno postoje pomaci sistema koji ne uzrokuju promjene duljina štapova (slika 8.c.).

Vidimo da u čvoru postoji prekobrojna sila, jer se iz jednadžbi ravnoteže ne može odrediti vrijednost, recimo, sile F_2, što je očito i postojanjem jezgre matrice $\overline{\mathbf{A}}$**.** Da je štap sile F_2 izveden kraće, te je naknadno produljen i „zakvačen“ za čvor, sistem bi i dalje bio u ravnoteži, odnosno u unutarnjoj ravnoteži.

Jednadžba u smjeru osi 1 čvora je besmislena. Ne postoje sile u elementima koje bi uravnotežile zadano vanjsko opterećenje. S obzirom na to da je bazni vektor prostora redaka matrice $\overline{\mathbf{A}}$**:**

$$\underline{\mathbf{a}_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

sile koje bi uravnotežile vanjsko opterećenje moraju ležati na kosom pravcu koji je nemoguće ostvariti samo uzdužnim silama u elementima (u slučaju da ne postoji komponenta vanjske sile u smjeru osi 1, sustav bi postao statički neodređen i geometrijski nepromjenjiv).

Tablica 5. Sistem sa slike 8.

$b = 2n_f$ $2 = 2$	$rang$	$Prostor$ $redaka$	$Prostor$ $stupaca$	$Jezgra$ $b - r$	$Lijeva\ jezgra$ $2n_f - r$
Statički neodređen Geometrijski promjenjiv	$r = 1$	1	1	$2 - 1 = 1$	$2 - 1 = 1$

4. GAUSSOV ELIMINACIJSKI POSTUPAK

4.1. Postupak

Gaussovim eliminacijskim postupkom neku matricu $\mathbf{M}$ svodimo na gornjestepeničastu matricu pomoću elementarnih transformacija redaka, a to su:

1. Množenje retka skalarom različitim od 0,
2. Dodavanje jednog retka nekom drugom retku,
3. Zamjena dvaju redaka matrice.

Provođenjem ovoga postupka ne mijenjamo prostor koji razapinju redci izvorne matrice i redci reducirane matrice. Postupak možemo tumačiti kao način pronalaženje linearnih kombinacija vektora (zbrajanje, množenje…).

Tim postupkom zapravo želimo odrediti rang matrice, koji odgovara broju linearno nezavisnih redaka matrice, a nakon svođenja na gornjestepeničastu matricu, broju redaka matrice različitih od nul-redaka.

U postupku je bitno odrediti uporišne komponente (to je prva komponenta nekog retka, koja je jednaka 1), te postupkom uvrštavanja unazad, odrediti uporišne i slobodne članove. Isto tako je bitno da se unutar nekog stupca dijeli s najvećom komponentom tog stupca, te ona čini uporišnu komponentu (zbog stabilnosti samog proračuna, a i rješenja).

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}$$

Slika 9. Izvorna matrica svedena na gornjestepeničastu

Matricu $\mathbf{M}$ sveli smo u gornjestepeničasti oblik ako vrijedi:

- svi nulredci, ako ih ima, moraju se nalaziti ispod redaka koji imaju barem jednu komponentu različitu od 0,
- u svakom retku, koji nije nulredak, prva komponenta različita od nule je 1 te ju nazivamo i *uporišnom komponentom,*
- sve komponente stupca ispod uporišne komponente su 0,
- ako se uporišne komponente i-tog i $i+1$-tog retka nalaze u j_i i j_{i+1} stupcu, onda vrijedi $j_{i+1} > j_i$.

Proces je prikazan na matrici δ:

$$\delta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Prvo ćemo zamijeniti prvi i treći redak. Treća komponenta prvog stupca je veća od prve, stoga ćemo ih zbog stabilnosti zamijeniti:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathrm{I} \rightarrow \mathrm{III} \\ \cdot \\ \mathrm{III} \rightarrow \mathrm{I} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

U drugom koraku ćemo redak I. podijeliti s 2, te ga oduzeti od III. retka:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} /:2 \\ \cdot \\ \mathrm{III} - \mathrm{I}/:2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Treći korak je zamjena drugog i trećeg retka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot \\ \mathrm{II} \rightarrow \mathrm{III} \\ \mathrm{III} \rightarrow \mathrm{II} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Sada ćemo podijeliti drugi redak s 2, i treći redak s -2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot \\ /\cdot\frac{1}{2} \\ /\cdot\frac{1}{-2} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Konačna matrica je svedena na gornjestepeničastu matricu, te iz nje lako možemo odrediti rang. U našem slučaju rang je 3. Vidimo da se treći stupac može zapisati kao linearna kombinacija prvog i drugog, stoga je treći stupac linearno zavisan. Linearno zavisni stupci matrice odgovarat će prekobrojnim silama u nekome sistemu, stoga ih je potrebno pažljivo identificirati.

4.2. Dodatak Gaussovoj eliminaciji

Postupak Gaussove eliminacije primjenjuje se na proširene sustave:

$$\mathbf{Mx} = \mathbf{B} \rightarrow [\mathbf{M} \quad \vdots \quad \mathbf{B}]$$

koji se korištenjem elementarnih transformacija svode na:

$$[\widehat{\mathbf{M}} \quad \vdots \quad \widehat{\mathbf{B}}]$$

Prilikom određivanja vrijednosti sila za neki sustav, potrebno je formirati ravnotežnu matricu, te ju svesti na gornjestepeničastu matricu. Uvrštavanjem unazad možemo odrediti sile u osnovnom sistemu (sistemu s „raskinutim“ prekobrojnim vezama) pomoću jednadžbe:

$$\bar{\bar{\hat{\mathbf{A}}}}\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{0}} = -\hat{\mathbf{P}}$$

s tim da su prekobrojne sile uzete s vrijednosti 0. Time dobivamo da su promatrane statički određene sile u nekom osnovnom sistemu, uzrokovane vanjskim opterećenjem dane matricom $\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{0}}$.

Isto tako, vektori unutarnjih sila uzrokovani prekobrojnim silama leže u prostoru jezgre, stoga se oni dobiju rješenjem sustava:

$$\bar{\bar{\hat{\mathbf{A}}}}\bar{\mathbf{F}}_{x} = \mathbf{0}$$

uzimajući da je jedna od prekobrojnih sila jedinična dok su ostale 0, a sile osnovnog sistema su i dalje nepoznanice.

Ako neku proširenu ravnotežnu matricu, svedemo na gornjestepeničastu matricu:

$$[\hat{\mathbf{A}} \quad \vdots \quad -\hat{\mathbf{P}}]$$

te daljnjim Gaussovim transformacijama svedemo na jediničnu matricu u prostoru određenog sistema, dobivamo:

$$[\mathbf{I}_{\mathrm{nxn}} \quad \boldsymbol{T} \quad \vdots \quad \boldsymbol{O}]$$

U dobivenom sistemu, svaki stupac matrice $\boldsymbol{T}$ odgovara negativnim unutarnjim silama u elementima, uzrokovane promatranom jediničnom prekobrojnom silom, dok su ostale prekobrojne sile 0. To odgovara matrici $-\bar{\mathbf{F}}_{x}$.

Dobivena matrica $\boldsymbol{O}$ predstavlja unutarnje sile u osnovnom sistemu, dok su prekobrojne sile 0, uzrokovane vanjskim djelovanjem. Matrica $\boldsymbol{O}$ odgovara matrici $\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{0}}$.

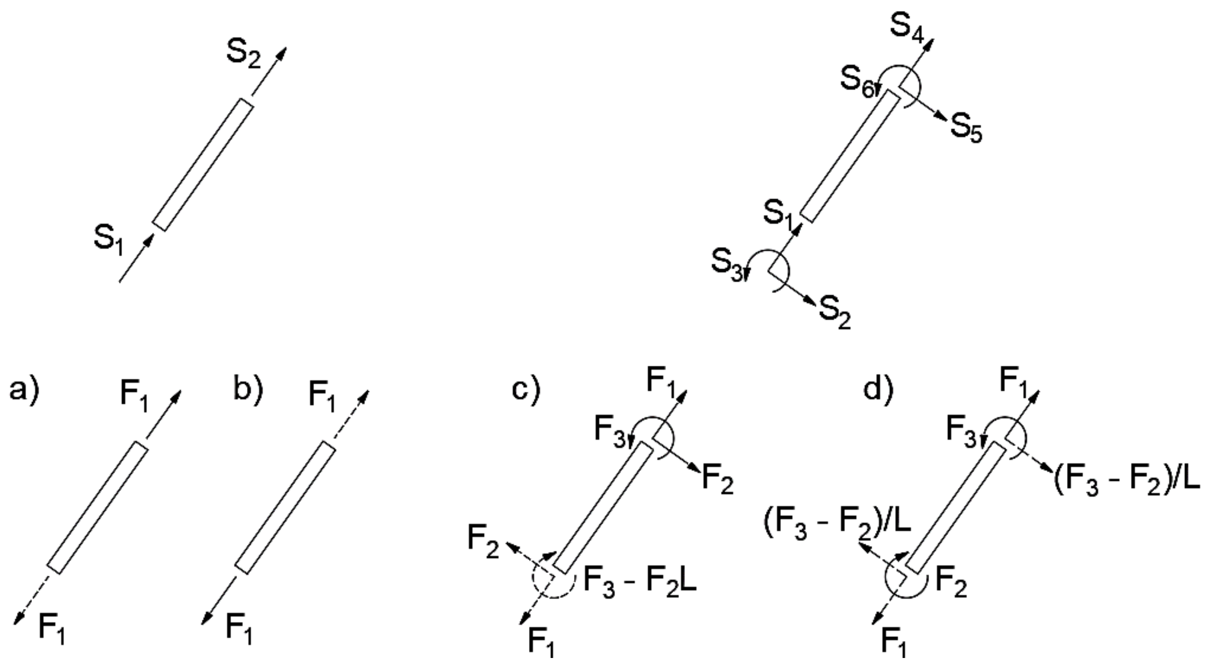
$$\begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \vdots & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \vdots & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \vdots & \blacksquare \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \vdots & \blacksquare \\ 0 & 1 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \vdots & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare & \blacksquare & \vdots & \blacksquare \end{bmatrix}$$

Slika 10.

5. METODA SILA

5.1. Formiranje ravnotežne matrice

Za formiranje ravnotežne matrice zadanog sistema možemo promatrati pojedine elementa od kojih je taj sustav sastavljen. Svaki element mora biti u statičkoj ravnoteži sa silama u njemu. Za primjer linijskog sustava, sila na *i*-tom kraju elementa se može odrediti poznavajući silu na *j*-tom kraju štapa. Pošto su neki od pomaka na elementu linearno zavisni sa ostalima, formiranje matrice popustljivosti za takav element (slobodan u prostoru) nije moguće. Potrebno je odrediti fiksne (referentne) točke na elementu u kojima će pomaci i zaokreti biti 0, te sile koje se u njima javljaju će biti linearno zavisne sa silama na slobodnom kraju. Na slici 11. prikazani su neki od načina odabira fiksnih točaka na štapovima i gredama.



Slika 11. Odabir referentnih sustava

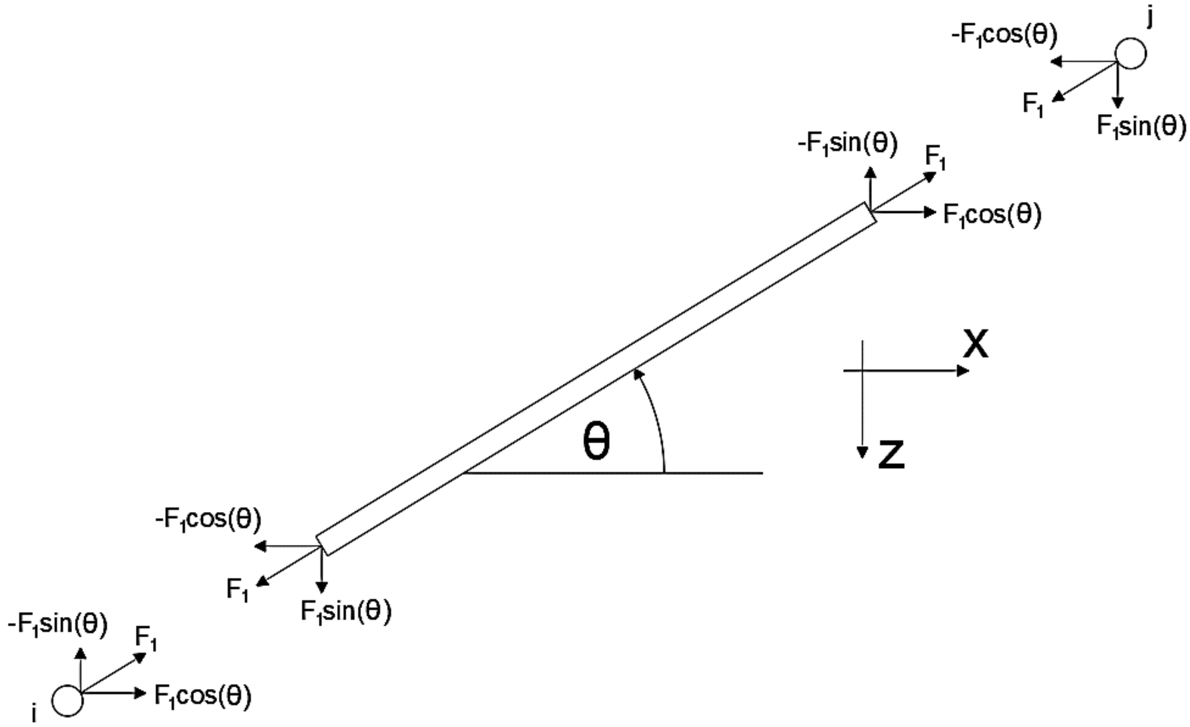
Prvo ćemo formirati ravnotežnu matricu za zglobne sisteme. Odnose sila u stanju prije određivanja fiksnih točaka (referentnog sistema) i nakon možemo odrediti iz jednadžbi ravnoteže. Sistem sa slike 11.a. fiksiran je u *i*-tom kraju, u lokalnom sustavu možemo pisati:

$$S_2 = F_1\,, \sum F_x = 0 \rightarrow\ , S_1 = -F_1$$

sažeto matrično:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} F_1 = \mathbf{T}_1 F_1 \tag{21}$$

Jednakost (21) vrijedi za sile na kraju elementa u lokalnom sustavu. Nama za proračun je potrebno te sile svesti u čvorove, te rastaviti po globalnim osima (slika 12.).



Slika 12. Ravnoteža štapnog elementa

Ako jednadžbu (21) pomnožimo s -1, sile s krajeva elemenata smo prebacili u čvorove. Sile su i dalje u lokalnom sustavu, stoga korištenje matrice transformacije iz lokalnog u globalni dane matricom:

$$\mathbf{R}^{l\to g} = \begin{array}{c} \\ x_i \\ z_i \\ x_j \\ z_j \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} S_1 & S_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} cos\theta & 0 \\ -sin\theta & 0 \\ 0 & cos\theta \\ 0 & -sin\theta \end{bmatrix} \end{array} \tag{22}$$

možemo odrediti komponente sila koje djeluju u promatranim globalnim osima.

Konačno, ravnotežna matrica za neki element *k* dana je matricom $\mathbf{A}^k$:

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{R}^{l\to g} \cdot (-\mathbf{T}_1)$$

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 \\ -sin\theta & 0 \\ 0 & cos\theta \\ 0 & -sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^k = \begin{array}{c} \\ x_i \\ z_i \\ x_j \\ z_j \end{array} \begin{array}{c} F_k \\ \begin{bmatrix} cos\theta \\ -sin\theta \\ -cos\theta \\ sin\theta \end{bmatrix} \end{array} \tag{23}$$

Kod štapnih sistema, dovoljno je bilo fiksirati uzdužne pomake, jer je jedina sila koja se javlja u osi elementa. Za gredne elemente (u kojima se javlja savijanje) potrebno je fiksirati dva neovisna translacijska i jedan rotacijski pomak. Neki od načina su pokazani na slici 11.c. i d., gdje je element pod c) konzola s fiksnim točkama u *i*-tom kraju, dok je element na slici d) prosta greda.

Sam proces određivanja ravnotežne matrice elementa je analogan štapnom sistemu. Za početak odabiremo referenti sistem sa slike 11.c., te lokalno određujemo matricu $\mathbf{T}$:

$$S_4 = F_1, \qquad \sum F_x = 0 \rightarrow \; S_1 = -F_1$$

$$S_5 = F_2, \qquad \sum F_z = 0 \rightarrow \; S_2 = -F_2$$

$$S_6 = F_3, \qquad \sum M_i = 0 \rightarrow \; S_3 = -F_3 + L \cdot F_2$$

sažeto matrično:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & L & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_3\mathbf{F} \tag{24}$$

Isto kao i kod štapnih elemenata, jednadžba (24) odnosi se na sile na krajevima elementa u lokalnom sustavu. Prebacivanje u čvor i rastavljanje sila u globalne komponente (slika 13.) radi se analogno štapnom izvodu, uz malu promjenu matrice transformacije iz lokalnog u globalni sustav:

$$\mathbf{R}^{l\rightarrow g} = \begin{array}{c} \\ x_i \\ z_i \\ y_i \\ x_j \\ z_j \\ y_j \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & & & \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & & \mathbf{0}_{3x3} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ & \mathbf{0}_{3x3} & & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{25}$$

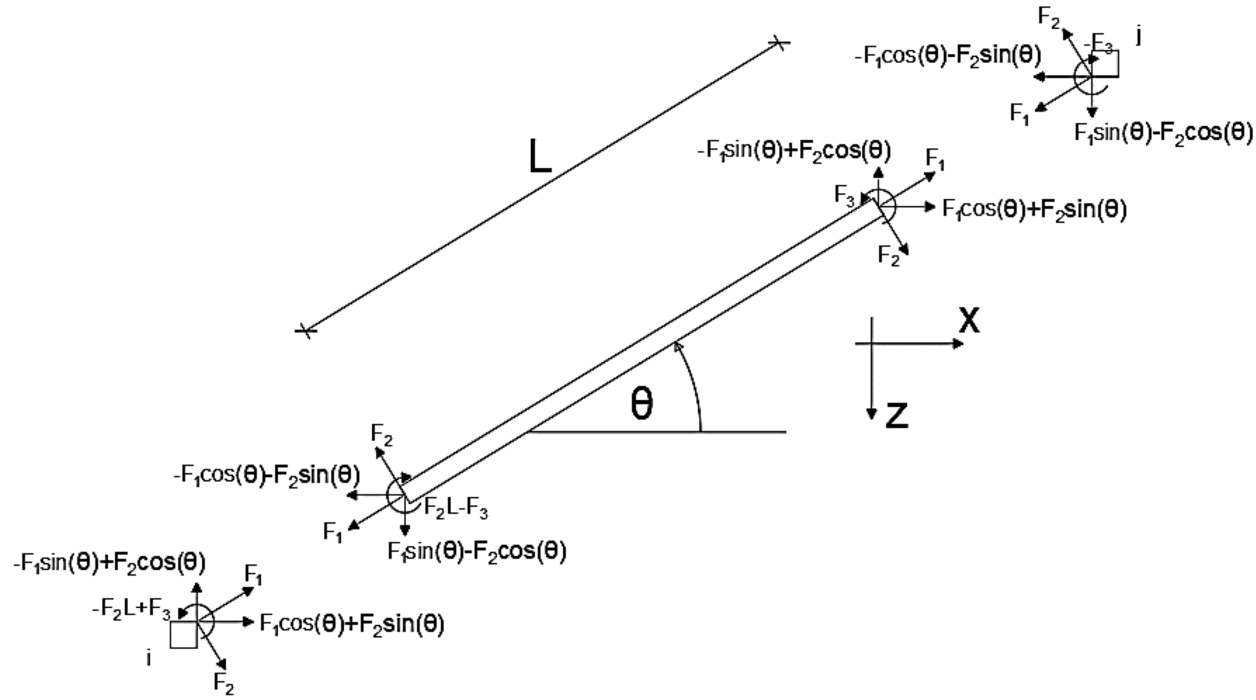
(ova matrica je analogna matrici transformacije za štapne sisteme ako se izostave sile (stupci) S_2, S_3, S_5, S_6, te rotacija čvora, donosno retci y_i i y_j.)

Sada možemo zapisati ravnotežnu matricu za neki element *k* :

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{R}^{l\rightarrow g} \cdot (-\mathbf{T}_3)$$

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & & & \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & & \mathbf{0}_{3x3} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ & \mathbf{0}_{3x3} & & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -L & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$
\mathbf{A}^k = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} F_{3(k-1)+1} & F_{3(k-1)+2} & F_{3(k-1)+3} \end{array} \\
\begin{array}{c} x_i \\ z_i \\ y_i \\ x_j \\ z_j \\ y_j \end{array} &
\begin{bmatrix}
cos\theta & sin\theta & 0 \\
-sin\theta & cos\theta & 0 \\
0 & -L & 1 \\
-cos\theta & -sin\theta & 0 \\
sin\theta & -cos\theta & 0 \\
0 & 0 & -1
\end{bmatrix}
\end{array} \tag{26}
$$



Slika 13. Ravnoteža grednog elementa

5.2. Matrice popustljivosti elemenata

Koeficijente popustljivosti ćemo izvesti pomoću metode jedinične sile. Uzet ćemo da se poprečni presjek ne mijena po duljini elementa $(A(x) = const.\ \ I(x) = const.)$ i da se modul elastičnosti ne mijenja $(E(x) = const.)$. Zglobnom sistemu sa slike 14.a. zadat ćemo desnu uzdužnu jediničnu silu (slika 14.b.), te za nju izračunati koeficijent popustljivosti[2] $\delta_{i,j}$.

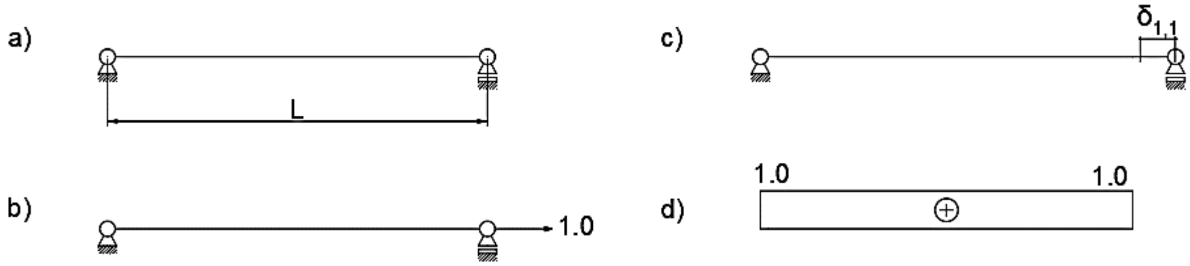
Koeficijent popustljivosti se računa po formuli:

$$\delta_{i,j} = \sum_k \int_0^{l_k} \left(\frac{m_i m_j}{EI} + \frac{n_i n_j}{EA}\right) dx \tag{27}$$

S obzirom na to da nam se od jedinične sile ne javlja momenti dijagrama, već samo dijagram uzdužnih sila (slika 14.d.), koeficijent popustljivosti računamo po formuli:

$$\delta_{i,i} = \int_0^{l} \frac{n_i^2}{EA} dx$$

[2] $\delta_{i,j}$ – pomak hvatišta sile *i* na pravcu njenog djelovanja uzrokovan jediničnom silom u hvatištu, na pravcu i u smjeru sile *j*



Slika 14. Popustljivost štapa

Uvrštavanjem pretpostavljenih parametara i pomoću Vereščaginovog teorema dolazimo do koeficijenta popustljivosti $\delta_{1,1}$:

$$\delta_{1,1} = \int_0^L \frac{n_i^2}{EA} dx = \frac{1}{EA}(1.0 \cdot L \cdot 1.0) = \frac{L}{EA} \tag{28}$$

Pošto je jedina sila u zglobnim elementima uzdužna sila, elementu kojemu znamo tu silu možemo izračunati produljenje izrazom:

$$d_k = \delta_k F_k \tag{29}$$

gdje je:

δ_k – koeficijent popustljivosti zglobnog štapa *k,*

F_k – sila u zglobnom štapu *k.*

Ako je sila $F_k > 0$, govorimo o produljenju, ako je sila $F_k < 0$ o skraćenju.

Za svaki element opterećen samo uzdužnom silom možemo formirati jednadžbu (29), stoga:

$$\bar{\mathbf{d}} = \boldsymbol{\delta}\bar{\mathbf{F}} \tag{30}$$

gdje je:

$\bar{\mathbf{d}}$ – jednostupčana matrica promjena duljina štapova sistema $[d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_k]^T$,

$\bar{\mathbf{F}}$ **–** jednostupčana matrica unutarnjih sila štapova sistema $[F_1 \quad F_2 \quad \cdots \quad F_k]^T$,

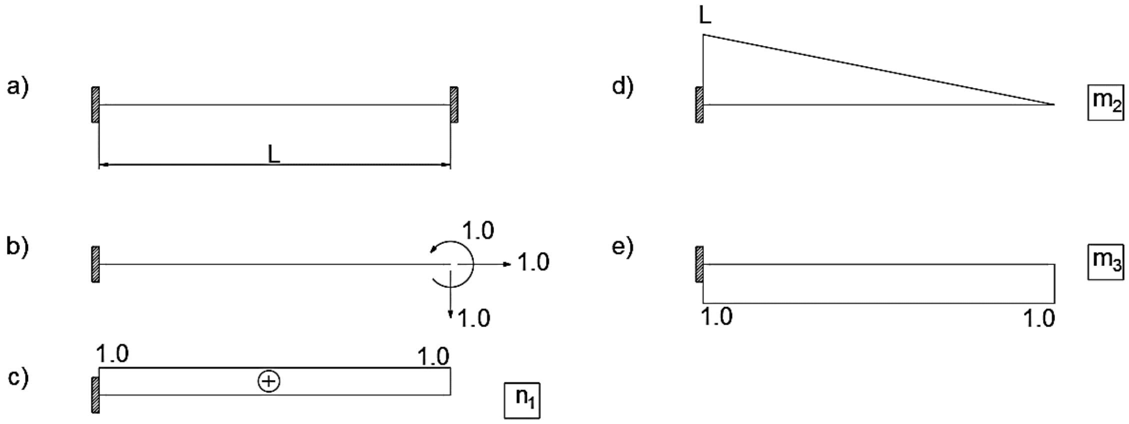
$\boldsymbol{\delta}$ **–** dijagonalna kvadratna matrica kojoj svaki koeficijent popustljivosti na glavnoj dijagonali odgovara sili u tom elementu, svi koeficijenti izvan glavne dijagonale su 0.

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_k \end{bmatrix} \tag{31}$$

Za obostrano upetu gredu sa slike 15.a. otpustit ćemo sile na *j*-tom kraju tako da odgovaraju silama sistema sa slike 11.c. te zadati jedinične sile na mjestu i u smjeru tih sila.

U ovom slučaju će se javiti sva tri dijagrama, stoga matrica popustljivosti će biti tipa $\boldsymbol{\delta_{3x3}}$. Pošto izraz (27) daje isti koeficijent popustljivosti neovisno o redoslijedu m_i, m_j te n_i, n_j

potrebno je odrediti 6 različitih koeficijenata u odnosu na 9.



Slika 15. Popustljivost grede

Sada računamo koeficijente popustljivosti:

$$\delta_{1,1} = \int_0^L \frac{n_1^2}{EA} dx = \frac{1}{EA}(1.0 \cdot L \cdot 1.0) = \frac{L}{EA}$$

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1} = \int_0^L \frac{n_1 m_2}{EA} dx = \frac{1}{EA}(1.0 \cdot L \cdot 0) = 0$$

$$\delta_{1,3} = \delta_{3,1} = \int_0^L \frac{n_1 m_3}{EA} dx = \frac{1}{EA}(1.0 \cdot L \cdot 0) = 0$$

$$\delta_{2,2} = \int_0^L \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{L \cdot L}{2} \cdot \frac{2}{3} L\right) = \frac{L^3}{3EI}$$

$$\delta_{2,3} = \delta_{3,2} = \int_0^L \frac{m_2 m_3}{EI} dx = -\frac{1}{EI}\left(\frac{L \cdot L}{2} \cdot 1.0\right) = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$\delta_{3,3} = \int_0^L \frac{m_3^2}{EI} dx = \frac{1}{EI}(1.0 \cdot L \cdot 1.0) = \frac{L}{EI}$$

Matrica popustljivosti ovako odabranog osnovnog sistema dana je izrazom:

$$\boldsymbol{\delta}_{3x3} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \tag{32}$$

Sada jednadžbom (29) računamo relativni uzdužni i poprečni pomak te zaokret *j*-tog kraja elementa. Naravno, to možemo zapisati za svaki element nekog zadanog sistema, stoga se jednadžba (30) može zapisati kao:

$$\bar{\bar{\mathbf{d}}} = \bar{\boldsymbol{\delta}}\bar{\bar{\mathbf{F}}} \tag{33}$$

gdje je:

$\bar{\bar{\mathbf{d}}}$ – jednostupčana matrica koja sadrži uzdužni i poprečni pomak, te zaokret *j*-tog kraja svih elemenata $[\boldsymbol{d_1} \quad \boldsymbol{d_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{d_k}]^T = [u_1 \quad v_1 \quad \varphi_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \cdots \quad u_k \quad v_k \quad \varphi_k]^T$,

$\bar{\bar{\mathbf{F}}}$ **–** jednostupčana matrica koja sadrži vrijednosti sila na *j*-tom kraju za svaki element u nekom sistemu $[\boldsymbol{F_1} \quad \boldsymbol{F_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{F_k}]^T = [n_1 \quad t_1 \quad m_1 \quad n_2 \quad t_2 \quad \cdots \quad n_k \quad t_k \quad m_k]^T$,

$\bar{\boldsymbol{\delta}}$ **–** predstavlja dijagonalnu matricu popustljivosti za svaki element, no u ovom slučaju za svaki element postoji 3x3 matrica popustljivosti dana izrazom (32)

$$\bar{\boldsymbol{\delta}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\delta_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\delta_k} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{matrix} \frac{L_1}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{{L_1}^3}{3EI} & -\frac{{L_1}^2}{2EI} \\ 0 & -\frac{{L_1}^2}{2EI} & \frac{L_1}{EI} \end{matrix} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{matrix} \frac{L_2}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{{L_2}^3}{3EI} & -\frac{{L_2}^2}{2EI} \\ 0 & -\frac{{L_2}^2}{2EI} & \frac{L_2}{EI} \end{matrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots \begin{matrix} \frac{L_k}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{{L_k}^3}{3EI} & -\frac{{L_k}^2}{2EI} \\ 0 & -\frac{{L_k}^2}{2EI} & \frac{L_k}{EI} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

5.3. Formiranje jednadžbi kompatibilnosti

Jednadžbe ravnoteže dane su izrazom (6):

$$\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{F}} = -\mathbf{P}$$

Ukupne promatrane sile u nekom sistemu dane su izrazom (20) koji matrično možemo zapisati kao:

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_0 + \bar{\mathbf{F}}_x \boldsymbol{X} \tag{34}$$

gdje je:

$\bar{\mathbf{F}}_0$ – matrica kojoj je stupac vrijednost unutarnjih promatranih sila u nekom osnovnom sistemu od vanjskih djelovanja, dok su prekobrojne sile jednake 0,

$\bar{\mathbf{F}}_x$ – matrica kojoj su stupci bazni vektori jezgre ravnotežne matrice $\bar{\mathbf{A}}$, odnosno, svaki stupac predstavlja unutarnje sile koje se javljaju u osnovnom sistemu od promatrane prekobrojne jedinične sile, dok su ostale prekobrojne sile 0,

$\boldsymbol{X}$ **–** matrica koja sadrži koeficijenti α_i.

Ako znamo da je $\bar{\mathbf{F}}_0$ neko rješenje sustava (6), tako da je $\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{F}}_0 = -\mathbf{P}$, tada je i $\bar{\mathbf{F}}$ rješenje istog sustava:

$$\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{A}} \cdot (\bar{\mathbf{F}}_0 + \bar{\mathbf{F}}_x \boldsymbol{X}) = \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{F}}_0 + \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{F}}_x \boldsymbol{X} = \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{F}}_0 = -\mathbf{P}$$

Izraz $\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{F}}_x \boldsymbol{X}$ iščezava jer $\bar{\mathbf{F}}_x \boldsymbol{X}$ leži u prostoru jezgre matrice $\bar{\mathbf{A}}$.

Kako bismo odredili matrice $\bar{\mathbf{F}}_x$ i $\bar{\mathbf{F}}_0$, Gaussovim ćemo eliminacijskim postupkom proširenu matricu $[\bar{\mathbf{A}} \quad \vdots \quad -\mathbf{P}]$ svesti na gornjestepeničastu matricu $[\widehat{\mathbf{A}} \quad \vdots \quad -\widehat{\mathbf{P}}]$.

Uporišni stupci matrice $\widehat{\mathbf{A}}$ odgovaraju silama statički određenog sistema, dok su ostale sile prekobrojne.

Ako uzmemo da su sile određenog sistema nepoznanice, a prekobrojne sile jednake nuli, sile određenog sistema možemo izračunati uvrštavanjem unazad u jednadžbu:

$$\widehat{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{F}}_0 = -\widehat{\mathbf{P}} \tag{35}$$

Vektor $\bar{\mathbf{F}}_x$ možemo odrediti uvrštavanjem u nazad u sustav:

$$\widehat{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{F}}_x = \mathbf{0} \tag{36}$$

s tim da su sile određenog sistema nepoznanice, promatrana prekobrojna sile je 1, a ostale prekobrojne sile 0.

Dobivena matrica $\bar{\mathbf{F}}_x$ pomnožena s koeficijentom $\boldsymbol{X}$, koji može poprimiti bilo koju vrijednost, daje rješenje sustava (6). Stoga, ako je stupanj neodređenosti *n*, postoji ∞^n rješenja sustava. Kako bismo iz toga odredili jedinstveno rješenje, koje daje fizikalno prihvatljive pomake i sile u elementima, potrebno je ukomponirati i kinematičke uvjete.

Traženi vektor, koji nam daje kompatibilne pomake krajeva elementa (30)(33), okomit je na prostor nekompatibilnih pomaka. Taj prostor nekompatibilnih pomaka krajeva elemenata je lijeva jezgra kinematičke matrice $\bar{\mathbf{B}}$, a znamo da je lijeva jezgra neke matrice jednaka jezgri transponirane matrice. Stoga lijeva jezgra matrice $\bar{\mathbf{B}}$ odgovara jezgri matrice $\bar{\mathbf{A}}$. Možemo pisati:

$$\bar{\mathbf{F}}_x{}^T \mathbf{d} = \mathbf{0} \tag{37}$$

vektor $\mathbf{d}$ dan je izrazima (30) i (33), zapisat ćemo ga u općem obliku:

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\delta} \bar{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\delta}(\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{0}} + \bar{\mathbf{F}}_x \boldsymbol{X}) \tag{38}$$

Uvrštavanjem (38) u (37) dobivamo:

$$\bar{\mathbf{F}}_x{}^T \boldsymbol{\delta}(\bar{\mathbf{F}}_\mathbf{0} + \bar{\mathbf{F}}_x \boldsymbol{X}) = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{F}}_x{}^T \boldsymbol{\delta}\bar{\mathbf{F}}_\mathbf{0} + \bar{\mathbf{F}}_x{}^T \boldsymbol{\delta}\bar{\mathbf{F}}_x \boldsymbol{X} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X} + \mathbf{d_0} = \mathbf{0} \tag{39}$$

Sustav (39) je *sustav jednadžbi kompatibilnosti*, gdje je:

$\boldsymbol{\Omega} = \bar{\mathbf{F}}_x{}^T \boldsymbol{\delta}\bar{\mathbf{F}}_x$ **-** matrica popustljivosti sistema,

$\mathbf{d_0} = \bar{\mathbf{F}}_x{}^T \boldsymbol{\delta}\bar{\mathbf{F}}_\mathbf{0}$ – vektor pomaka čvorova hvatišta prekobrojnih sila u osnovnom sistemu uzrokovan vanjskim djelovanjem.

5.4. Određivanje pomaka

Za određivanje pomaka ili zaokreta nekog dijela sistema potrebno je odrediti unutarnje sile koje se javljaju zbog jedinične sile na mjestu i u smjeru promatranog pomaka. Za statički neodređene sisteme, dovoljno je jedinične sile primijeniti na (bilo kojem) osnovnom sistemu. To vrijedi jer se prekobrojne sile na nekom statički neodređenom sistemu mogu promatrati kao opterećenja na nekom odabranom osnovnom sistemu, te iz toga dobijemo ukupne sile u tom osnovnom sistemu, pa možemo jediničnu silu primijeniti.

Pomaci točaka na mjestu i u smjeru zadane jedinične sile računaju se po formuli:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{f}_n^T \mathbf{d} = \mathbf{f}_n^T \boldsymbol{\delta}\bar{\mathbf{F}} \tag{40}$$

gdje je:

$\mathbf{r}_n$ – pomak na mjestu i u smjeru jedinične sile *n,*

$\mathbf{f}_n^T$ – unutarnje sile koje se javljaju zbog jedinične sile *n* na nekom osnovnom sistemu,

$\mathbf{d}$ **–** pomaci čvorova elemenata.

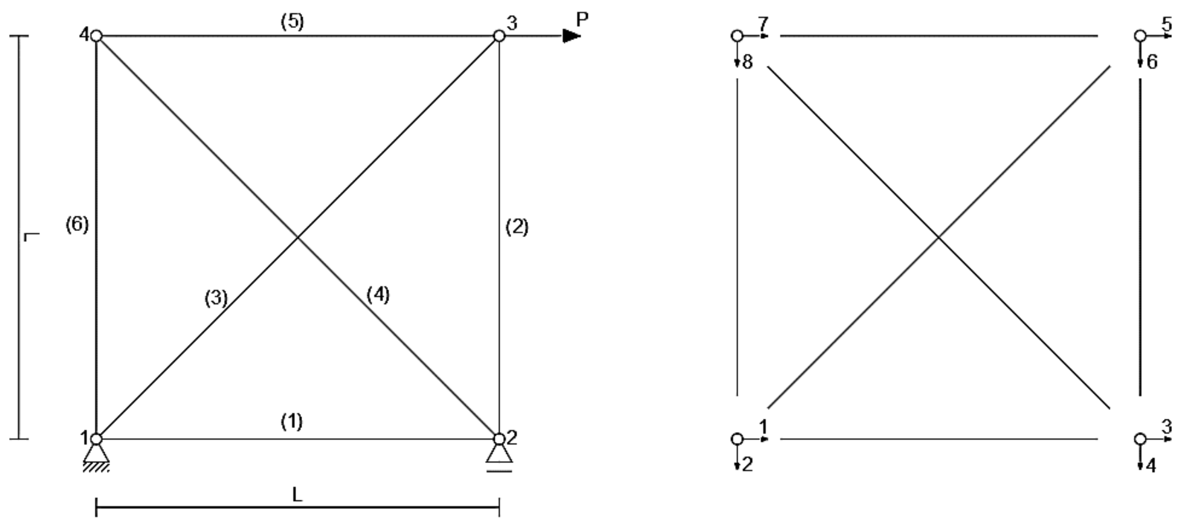
6. PRIMJERI

1. Zadan je rešetkasti sistem na slici 16. Odredite horizontalni pomak čvora 3.

$P = 10\ kN$

$EA = 10000\ kN$

$L = 3\ m$



Slika 16. Primjer 1.

Prvi korak jest formiranje ravnotežne matrice. Poslužit ćemo se izrazom (23) za svaki element:

Štap 1-2 (1)
$$(1) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} F_1 \\ \begin{bmatrix} \cos(0) \\ -\sin(0) \\ -\cos(0) \\ \sin(0) \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} F_1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Štap 2-3 (2)
$$(2) = \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} F_2 \\ \begin{bmatrix} \cos(90) \\ -\sin(90) \\ -\cos(90) \\ \sin(90) \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} F_2 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Štap 1-3 (3)
$$(3) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} F_3 \\ \begin{bmatrix} \cos(45) \\ -\sin(45) \\ -\cos(45) \\ \sin(45) \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} F_3 \\ \begin{bmatrix} 0.707 \\ -0.707 \\ -0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix} \end{array}$$

Štap 2-4 (4)

$$(4) = \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} F_4 \\ \begin{bmatrix} \cos(135) \\ -\sin(135) \\ -\cos(135) \\ \sin(135) \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} F_4 \\ \begin{bmatrix} -0.707 \\ -0.707 \\ 0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix} \end{array}$$

Štap 3-4 (5)

$$(5) = \begin{array}{c} \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} F_5 \\ \begin{bmatrix} \cos(180) \\ -\sin(180) \\ -\cos(180) \\ \sin(180) \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} F_5 \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Štap 1-4 (6)

$$(6) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} F_6 \\ \begin{bmatrix} \cos(90) \\ -\sin(90) \\ -\cos(90) \\ \sin(90) \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} F_6 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrica **P** vanjskih opterećenja je:

$$\mathbf{P} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 10\,kN \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

Reakcije ćemo zadati da se podudaraju sa stupnjevima slobode (1, 2 i 4). Ravnotežna matrica proširena negativnim vanjskim silama (zbog (6)) stoga jest:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.707 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Proširenu matricu ćemo Gaussovim eliminacijskim postupkom svesti u gornjestepeničastu matricu:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.707 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{\text{III+I}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.707 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & -0.707 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10\\
0 & 1 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]\end{array}
\xrightarrow[\text{VI}\leftrightarrow\text{II},\ \text{VI+IV}]{}
\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & -0.707 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10\\
0 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & -0.707 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10\\
0 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]\end{array}
\begin{array}{l}\text{IV-III} \longrightarrow\\ \text{V+III}\\ \text{VI+III}\end{array}
\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & -0.707 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -10\\
0 & 0 & 0 & -0.707 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & -0.707 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -10\\
0 & 0 & 0 & -0.707 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]\end{array}
\begin{array}{l}\text{III /:(0.707)}\\ \longrightarrow\\ \text{V+VII}\\ \text{VI+VII}\\ \text{VII}\leftrightarrow\text{IV}\\ \text{VIII - VII}\end{array}
\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -10\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -10\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]\end{array}
\begin{array}{l}\text{IV /:(0.707)}\\ \longrightarrow\\ \text{VI+VIII}\\ \\ \text{VIII}\leftrightarrow\text{V}\end{array}
\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -10
\end{array}\right]\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -10
\end{array}\right]\end{array}
\begin{array}{l}\text{V /:(-1)} \longrightarrow\\ \\ \text{VII+VI}\\ \text{VIII-VI}\end{array}
\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -10
\end{array}\right]\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -10
\end{array}\right]\end{array}
\begin{array}{l}\longrightarrow\\ \\ \text{VIII+VII}\end{array}
\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10
\end{array}\right]\end{array}$$

Nakon što smo sveli ravnotežnu matricu proširenu stupcem **P** na gornjestepeničastu matricu, vidimo da možemo uzeti silu F_6 kao prekobrojnu.

Sljedeći korak jest određivanje vektora $\bar{\mathbf{F}}_0$ uvrštavanjem unazad u jednadžbu (35). Uzimamo da je prekobrojna sila $F_6 = 0$, te iz reducirane matrice dobivamo sile u osnovnom sistemu od vanjskog opterećenja:

$$\boxed{R_3 = -10\ kN}$$

$$R_2 + R_3 = 0 \rightarrow R_2 = -R_3 = 10\ kN$$

$$\boxed{R_2 = 10\ kN}$$

$$R_1 + R_2 = 0 \rightarrow R_1 = -R_2 = -10\ kN$$

$$\boxed{R_1 = -10\ kN}$$

$$F_5 - F_6 = 0 \rightarrow F_5 = F_6 = 0$$

$$\boxed{F_5 = 0\ kN}$$

$$F_4 + 1.414F_5 = 0 \rightarrow F_4 = -1.414F_5 = 0$$

$$\boxed{F_4 = 0\ kN}$$

$$F_3 - F_4 + 1.414R_1 = 0 \rightarrow F_3 = F_4 - 1.414R_1 = 0 - 1.414 \cdot (-10) = 14.14$$

$$\boxed{F_3 = 14.14\ kN}$$

$$F_2 + 0.707F_3 = 0 \rightarrow F_2 = -0.707F_3 = -0.707 \cdot 14.14 = -10$$

$$\boxed{F_2 = -10\ kN}$$

$$F_1 + 0.707F_3 + R_1 = 0 \rightarrow F_1 = -0.707F_3 - R_1 = -0.707 \cdot 14.14 - (-10) = 0$$

$$\boxed{F_1 = 0\ kN}$$

Dobiveni vektor sila u osnovnom sistemu od vanjskog opterećenja glasi:

$$\bar{\mathbf{F}}_0 = \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ -10\ kN \\ 14.14\ kN \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10\ kN \\ 10\ kN \\ -10\ kN \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1.414 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot 10\ kN = \mathbf{f}_0\mathbf{P}$$

Drugi oblik zapisa vektora $\bar{\mathbf{F}}_0$ poslužit će za izračun horizontalnog pomaka čvora 3, jer matrica $\mathbf{f}_0$ odgovara silama u osnovnom sistemu uzrokovanih jediničnom horizontalnom silom u čvoru 3 u smjeru 5.

Trebamo još odrediti vektor $\bar{\mathbf{F}}_x$ pomoću jednadžbe (36). Uzet ćemo da je prekobrojna sila F_6

jedinična, ostale prekobrojne (kojih nema) su 0, a sile osnovnog sistema su ponovno nepoznanice:

$$\boxed{R_3 = 0}$$

$$R_2 + R_3 = 0 \rightarrow R_2 = -R_3 = 0$$

$$\boxed{R_2 = 0}$$

$$R_1 + R_2 = 0 \rightarrow R_1 = -R_2 = 0$$

$$\boxed{R_1 = 0}$$

$$F_5 - F_6 = 0 \rightarrow F_5 = F_6 = 1$$

$$\boxed{F_5 = 1}$$

$$F_4 + 1.414F_5 = 0 \rightarrow F_4 = -1.414F_5 = -1.414$$

$$\boxed{F_4 = -1.414}$$

$$F_3 - F_4 + 1.414R_1 = 0 \rightarrow F_3 = F_4 - 1.414R_1 = -1.414 - 1.414 \cdot (0) = -1.414$$

$$\boxed{F_3 = -1.414}$$

$$F_2 + 0.707F_3 = 0 \rightarrow F_2 = -0.707F_3 = -0.707 \cdot (-1.414) = 1$$

$$\boxed{F_2 = 1}$$

$$F_1 + 0.707F_3 + R_1 = 0 \rightarrow F_1 = -0.707F_3 - R_1 = -0.707 \cdot (-1.414) - (0) = 1$$

$$\boxed{F_1 = 1}$$

Vektor $\bar{\mathbf{F}}_x$ jest:

$$\bar{\mathbf{F}}_x = \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1.414 \\ -1.414 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vidimo da sile mogu održavati unutarnju ravnotežu međusobno (bez reakcija), stoga postoji beskonačno vrijednosti **X** koje pomnožene s $\bar{\mathbf{F}}_x$ mogu održavati ravnotežu, stoga je još preostalo ukomponirati jednadžbe kompatibilnosti.

Prije toga, formirat ćemo matricu popustljivosti elemenata. Ležajeve ćemo smatrati nepopustljivima, pa su stoga njihovi koeficijenti 0. Koeficijente popustljivosti „slažemo" u dijagonalnu matricu:

$$\delta = \begin{bmatrix} L_1/EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2/EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3/EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_4/EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_5/EA & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_6/EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.24\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.24\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sada imamo sve za odrediti nepoznanice u jednadžbi (39). Prvo određujemo matricu popustljivosti sistema **Ω:**

$$\mathbf{\Omega} = \bar{\mathbf{F}}_x{}^T \boldsymbol{\delta} \bar{\mathbf{F}}_x$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1.414 & -1.414 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.24\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.24\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1.414 \\ -1.414 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1.414 & -1.414 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\cdot10^{-4} \\ 3\cdot10^{-4} \\ -5.99\cdot10^{-4} \\ -5.99\cdot10^{-4} \\ 3\cdot10^{-4} \\ 3\cdot10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.89397\cdot10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega} = 2.89397 \cdot 10^{-3}\ m/kN$$

Nadalje vektor pomaka čvorova $\mathbf{d_0}$:

$$\mathbf{d_0} = \bar{\mathbf{F}}_x{}^T \boldsymbol{\delta} \bar{\mathbf{F}}_\mathbf{0}$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1.414 & -1.414 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
3\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 4.24\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4.24\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 14.14 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1.414 & -1.414 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 \\ -3\cdot10^{-3} \\ 5.99\cdot10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} -0.01147 \end{bmatrix}
$$

$$\mathbf{d_0} = -0.01147\ m$$

Konačno možemo odrediti koeficijent (prekobrojnu silu) **X:**

$$\mathbf{\Omega X} + \mathbf{d_0} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{X} = F_6 = -\frac{\mathbf{d_0}}{\mathbf{\Omega}} = -\frac{-0.01147}{2.89397\cdot10^{-3}} = 3.963\ kN$$

Sada možemo odrediti ukupne sile u zadanome sistemu jednadžbom (34):

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_0 + \bar{\mathbf{F}}_x \boldsymbol{X}$$

$$
\bar{\mathbf{F}} = \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}
\begin{bmatrix} 0 \\ -10\ kN \\ 14.14\ kN \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10\ kN \\ 10\ kN \\ -10\ kN \end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1.414 \\ -1.414 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 3.963\ kN =
\begin{bmatrix} 3.963 \\ -6.037 \\ 8.536 \\ -5.604 \\ 3.963 \\ 3.963 \\ -10 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix} kN
$$

Kao što je u zadatku zadano, odredit ćemo horizontalni pomak čvora 3 pomoću metode jedinične sile dane izrazom (40):

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{f}_0^T \mathbf{d} = \mathbf{f}_0^T \boldsymbol{\delta} \bar{\mathbf{F}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.24\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.24\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.963 \\ -6.037 \\ 8.536 \\ -5.604 \\ 3.963 \\ 3.963 \\ -10 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.1889\cdot10^{-3} \\ -1.8111\cdot10^{-3} \\ 3.6193\cdot10^{-3} \\ -2.3761\cdot10^{-3} \\ 1.1889\cdot10^{-3} \\ 1.1889\cdot10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.92879\cdot10^{-3} \end{bmatrix} \mathrm{m}$$

Dobiveni horizontalni pomak čvora 3 jest:

$$\mathbf{r}_0 = 6.92879 \cdot 10^{-3}\, m \;\approx 6.9\, mm$$

Pošto je predznak pomaka pozitivan, pomak je u smjeru sile **P**.

---

2. Zadan je gredni sistem sa slike 17. Odredite horizontalni pomak i kut zaokreta čvora 2.

$P = 100\, kN \qquad M = 100\, kNm$

$E = 210\,000\, MPa$

$L = 5\, m$

$h/b\ = 300mm/100mm$

Prvo ćemo odrediti fleksijsku (EI) i aksijalnu (EA) krutost. Za zadane dimenzije poprečnog presjeka računamo moment tromosti I i površinu A:

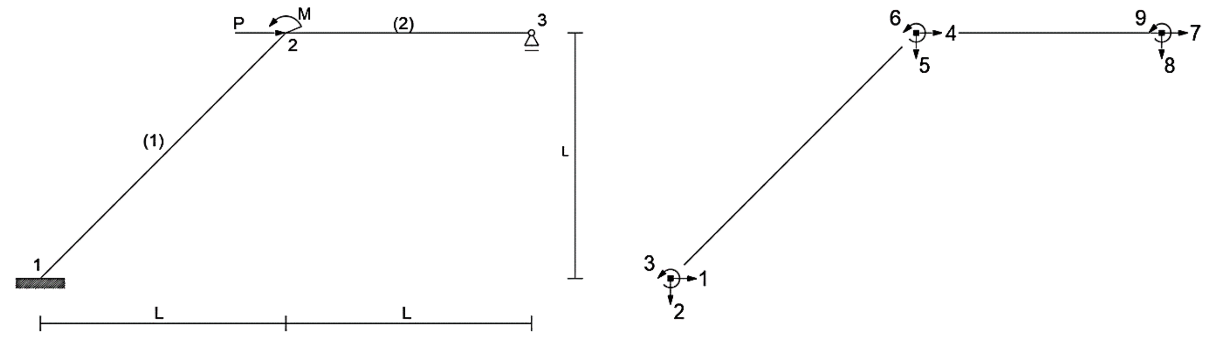
$A = 100 \cdot 300 = 30000\, mm^2$

$I = \dfrac{b \cdot h^3}{12} = \dfrac{100 \cdot 300^3}{12} = 2.25 \cdot 10^8\, mm^4$

$EA = 210\,000 \cdot 30000 = 6.3 \cdot 10^9\, N = 6.3 \cdot 10^6\, kN$

$EI = 210\,000 \cdot 2.25 \cdot 10^8 = 4.725 \cdot 10^{13}\, Nmm^2 = 47250\, kNm^2$

Sljedeći korak jest formiranje ravnotežne matrice. Izraz (26) primjenjujemo za oba elementa:



Slika 17. Primjer 2.

Element 1-2 (1)

$$(1)=\begin{array}{c}\\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}F_1 & F_2 & F_3\end{array}\\ \begin{bmatrix}\cos(45) & \sin(45) & 0\\ -\sin(45) & \cos(45) & 0\\ 0 & -7.071 & 1\\ -\cos(45) & -\sin(45) & 0\\ \sin(45) & -\cos(45) & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}\\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}F_1 & F_2 & F_3\end{array}\\ \begin{bmatrix}0.707 & 0.707 & 0\\ -0.707 & 0.707 & 0\\ 0 & -7.071 & 1\\ -0.707 & -0.707 & 0\\ 0.707 & -0.707 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\end{array}$$

Element 2-3 (2)

$$(2)=\begin{array}{c}\\ 4\\5\\6\\7\\8\\9\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}F_4 & F_5 & F_6\end{array}\\ \begin{bmatrix}\cos(0) & \sin(0) & 0\\ -\sin(0) & \cos(0) & 0\\ 0 & -5 & 1\\ -\cos(0) & -\sin(0) & 0\\ \sin(0) & -\cos(0) & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}\\ 4\\5\\6\\7\\8\\9\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}F_4 & F_5 & F_6\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\end{array}$$

Reakcije ćemo, kao u prethodnom primjeru, zadati u smjeru stupnjeva slobode (1,2,3,8),

Vektor vanjskih opterećenja **P** dan je matricom:

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\100\ kN\\0\\100\ kNm\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\\100\ kN & 0\\0 & 0\\0 & 100\ kNm\\0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

Prilikom proširenja ravnotežne matrice vektorom **P** korisno ga je razdvojiti u dva stupca koji odgovaraju sili P i sili M zasebno. U zadatku je zadano izračunati pomake točno u smjerovima djelovanja vanjskih opterećenja, za što su nam potrebni vektori sila od jediničnog opterećenja na mjestu i u smjeru sila P i M. Ako razdvojimo vektor **P**, u konačnici ćemo dobiti unutarnje sile od jediničnih opterećenja zasebno, što je i potrebno za odrediti svaki pomak zasebno. Ravnotežna matrica stoga glasi:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & P & M \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccc|cc}
0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -7.071 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-0.707 & -0.707 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \\
0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Dalje je svodimo na gornjestepeničastu Gaussovim transformacijama:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & P & M \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccc|cc}
0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -7.071 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-0.707 & -0.707 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \\
0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \mathrm{II+I} \\ \\ \mathrm{IV+I} \\ \mathrm{V-I} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & P & M \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccc|cc}
0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -7.071 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \\
0 & -1.414 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & P & M \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccc|cc}
0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -7.071 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \\
0 & -1.414 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} \mathrm{I\ /{:}(0.707)} \\ \\ \mathrm{III+5II} \\ \\ \mathrm{V+II} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & P & M \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccc|cc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & P & M \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccc|cc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \mathrm{II\ /{:}(1.414)} \\ \\ \\ \\ \mathrm{VI+III} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & P & M \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccc|cc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & -100 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & P & M \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccc|cc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & -100 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \mathrm{VII+IV} \\ \\ \\ \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & P & M \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccc|cc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & -100 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$\begin{array}{r|cccccccccc|cc|l}
 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & P & M & \\ \hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 & \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & -100 & VI+5V \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 & \\
8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & VIII+V \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|cccccccccc|cc}
 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & P & M \\ \hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 10 & 1 & 0 & 0 & -100 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \\
8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|cccccccccc|cc|l}
 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & P & M & \\ \hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 & \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 10 & 1 & 0 & 0 & -100 & \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 & \\
8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & IX+VI
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|cccccccccc|cc}
 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & P & M \\ \hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 10 & 1 & 0 & 0 & -100 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \\
8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 10 & 1 & 0 & 0 & -100
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|cccccccccc|cc|l}
 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & P & M & \\ \hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 & \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 10 & 1 & 0 & 0 & -100 & \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 & \\
8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 10 & 1 & 0 & 0 & -100 & IX-5VII
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|cccccccccc|cc}
 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & P & M \\ \hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 10 & 1 & 0 & 0 & -100 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \\
8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 500 & -100
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|cccccccccc|cc|l}
 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & P & M & \\ \hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 & \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 10 & 1 & 0 & 0 & -100 & \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 & \\
8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 500 & -100 & IX-10VIII
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|cccccccccc|cc}
 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & P & M \\ \hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 10 & 1 & 0 & 0 & -100 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \\
8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & 500 & -100
\end{array}$$

Nakon svođenja na gornjestepeničastu matricu vidimo da je sila R_4 prekobrojna. Uvrštavanjem unazad u jednadžbu (35) dobivamo sile na osnovnom sistemu od sile P i od momenta M, s tim da je prekobrojna reakcija $R_4 = 0$:

$$R_3 - 10R_4 = 500 - 100 = 400$$

$$\boxed{R_3 = 400\ kNm}$$

$$R_2 + R_4 = 0$$

$$\boxed{R_2 = 0\ kN}$$

$$\boxed{R_1 = -100\ kN}$$

$$F_6 + 5R_1 + 10R_2 + R_3 = -100$$

$$F_6 = -100 - 5 \cdot (-100) - 10 \cdot 0 - 400 = 0$$

$$\boxed{F_6 = 0\ kNm}$$

$F_5 + R_2 = 0$

$$\boxed{F_5 = 0\ kN}$$

$F_4 + R_1 = -100$

$F_4 = -100 - (-100) = 0$

$$\boxed{F_4 = 0\ kN}$$

$F_3 + 5R_1 + 5R_2 + R_3 = 0$

$F_3 = -5 \cdot (-100) - 5 \cdot 0 - 400 = 100$

$$\boxed{F_3 = 100\ kNm}$$

$F_2 + 0.707R_1 + 0.707R_2 = 0$

$F_2 = -0.707 \cdot (-100) - 0.707 \cdot 0 = 70.7$

$$\boxed{F_2 = 70.7\ kN}$$

$F_1 + F_2 + 1.414R_1 = 0$

$F_1 = -70.7 - 1.414 \cdot (-100) = 70.7$

$$\boxed{F_1 = 70.7\ kN}$$

Dobiveni vektor sila u osnovnom sistemu od vanjskog opterećenja jest:

$$\bar{\mathbf{F}}_\mathbf{0} = \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \begin{bmatrix} 70.7\ kN \\ 70.7\ kN \\ 100\ kNm \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100\ kN \\ 0 \\ 400\ kNm \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ako uvrštavanje unazad izvedemo prvo za silu P, pa za silu M, dobivamo vektore sila u osnovnom sistemu za svako opterećenje posebno, te ako „izvučemo“ faktor vrijednosti vanjskih sila, dobivamo sile u osnovnom sistemu od jediničnih opterećenja:

$$\bar{\mathbf{F}}_\mathbf{0} = \mathbf{f}_0\mathbf{P} = \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \begin{bmatrix} 0.707 & 0 \\ 0.707 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100\ kN \\ 100\ kNm \end{bmatrix}$$

Sada ćemo odrediti vektor $\bar{\mathbf{F}}_x$ uvrštavanjem u nazad. Sila $R_4 = 1$, te rješavamo sustav (36):

$R_3 - 10R_4 = 0$

$\boxed{R_3 = 10}$

$R_2 + R_4 = 0$

$\boxed{R_2 = -1}$

$\boxed{R_1 = 0}$

$F_6 + 5R_1 + 10R_2 + R_3 = 0$

$F_6 = -5 \cdot 0 - 10 \cdot (-1) - 10 = 0$

$\boxed{F_6 = 0}$

$F_5 + R_2 = 0$

$\boxed{F_5 = 1}$

$F_4 + R_1 = 0$

$\boxed{F_4 = 0}$

$F_3 + 5R_1 + 5R_2 + R_3 = 0$

$F_3 = -5 \cdot 0 - 5 \cdot (-1) - 10 = -5$

$\boxed{F_3 = -5}$

$F_2 + 0.707R_1 + 0.707R_2 = 0$

$F_2 = -0.707 \cdot 0 - 0.707 \cdot (-1) = 0.707$

$\boxed{F_2 = 0.707}$

$F_1 + F_2 + 1.414R_1 = 0$

$F_1 = -0.707 - 1.414 \cdot 0 = -0.707$

$\boxed{F_1 = -0.707}$

Vektor $\bar{\mathbf{F}}_x$ jest:

$$\bar{\mathbf{F}}_x = \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \begin{bmatrix} -0.707 \\ 0.707 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sada formiramo matricu popustljivosti izrazom (33). Ta matrica je isto dijagonalna, ali po dijagonali ima blok matrice (32) za svaki element. I dalje se reakcije smatraju nepopustljivima:

$$\delta = \begin{bmatrix} L_1/EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1^3/3EI & -L_1^2/2EI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L_1^2/2EI & L_1/EI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_2/EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_2^3/3EI & -L_2^2/2EI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_2^2/2EI & L_2/EI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1.122\cdot10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.494\cdot10^{-3} & -5.291\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5.291\cdot10^{-4} & 1.497\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.937\cdot10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8.818\cdot10^{-4} & -2.646\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.646\cdot10^{-4} & 1.058\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Prvo izračunavamo matricu popustljivosti sistema $\mathbf{\Omega}$:

$$\mathbf{\Omega} = \bar{\mathbf{F}}_x{}^T \boldsymbol{\delta} \bar{\mathbf{F}}_x$$

$$\begin{bmatrix} -0.707 & 0.707 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.122\cdot10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.494\cdot10^{-3} & -5.291\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5.291\cdot10^{-4} & 1.497\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.937\cdot10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8.818\cdot10^{-4} & -2.646\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.646\cdot10^{-4} & 1.058\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.707 \\ 0.707 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.707 & 0.707 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7.933\cdot10^{-7} \\ 4.409\cdot10^{-3} \\ -1.123\cdot10^{-3} \\ 0 \\ 8.818\cdot10^{-4} \\ -2.646\cdot10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.6145\cdot10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega} = 9.6145 \cdot 10^{-3}\ m/kN$$

Vektor pomaka čvora prekobrojne sile od vanjskog opterećenja $\mathbf{d_0}$**:**

$$\mathbf{d_0} = \bar{\mathbf{F}}_x{}^T \boldsymbol{\delta} \bar{\mathbf{F}}_\mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -0.707 & 0.707 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.122\cdot10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.494\cdot10^{-3} & -5.291\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5.291\cdot10^{-4} & 1.497\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.937\cdot10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8.818\cdot10^{-4} & -2.646\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.646\cdot10^{-4} & 1.058\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70.7 \\ 70.7 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ 400 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.707 & 0.707 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.933\cdot10^{-5} \\ 0.1234 \\ -0.0224 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.19919 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d_0} = 0.19919\ m$$

Sada možemo odrediti vrijednost prekobrojne sile (reakcije) R_4 iz (39):

$$\mathbf{\Omega X} + \mathbf{d_0} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{X} = R_4 = -\frac{\mathbf{d_0}}{\mathbf{\Omega}} = -\frac{0.19919}{9.6145\cdot10^{-3}} = -20.718\ kN$$

Ukupne sile u zadanome sistemu jednadžbom (34) su:

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_0 + \bar{\mathbf{F}}_x \boldsymbol{X}$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \begin{bmatrix} 70.7\ kN \\ 70.7\ kN \\ 100\ kNm \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100\ kN \\ 0 \\ 400\ kNm \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.707 \\ 0.707 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (-20.718\ kN) = \begin{bmatrix} 85.35\ kN \\ 56.05\ kN \\ 203.6\ kNm \\ 0 \\ -20.72\ kN \\ 0 \\ -100\ kN \\ 20.72\ kN \\ 192.8\ kNm \\ -20.72\ kN \end{bmatrix}$$

Horizontalni pomak i kut zaokreta čvora 2 računamo metodom jedinične sile (40):

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{f}_0^T \mathbf{d} = \mathbf{f}_0^T \boldsymbol{\delta} \bar{\mathbf{F}}$$

$$\begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.122\cdot10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.494\cdot10^{-3} & -5.291\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5.291\cdot10^{-4} & 1.497\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.937\cdot10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8.818\cdot10^{-4} & -2.646\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.646\cdot10^{-4} & 1.058\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 85.35 \\ 56.05 \\ 203.6 \\ 0 \\ -20.72 \\ 0 \\ -100 \\ 20.72 \\ 192.8 \\ -20.72 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.576 \cdot 10^{-5} \\ 0.03206 \\ 8.2286 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ -0.01827 \\ 5.4825 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02273 \\ 8.2286 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r_P} \\ \boldsymbol{r_M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02273\ m \\ 0.00083\ m^0 \end{bmatrix}$$

Predznaci su pozitivni, pa su stoga pomaci u smjerovima vanjskih sila.

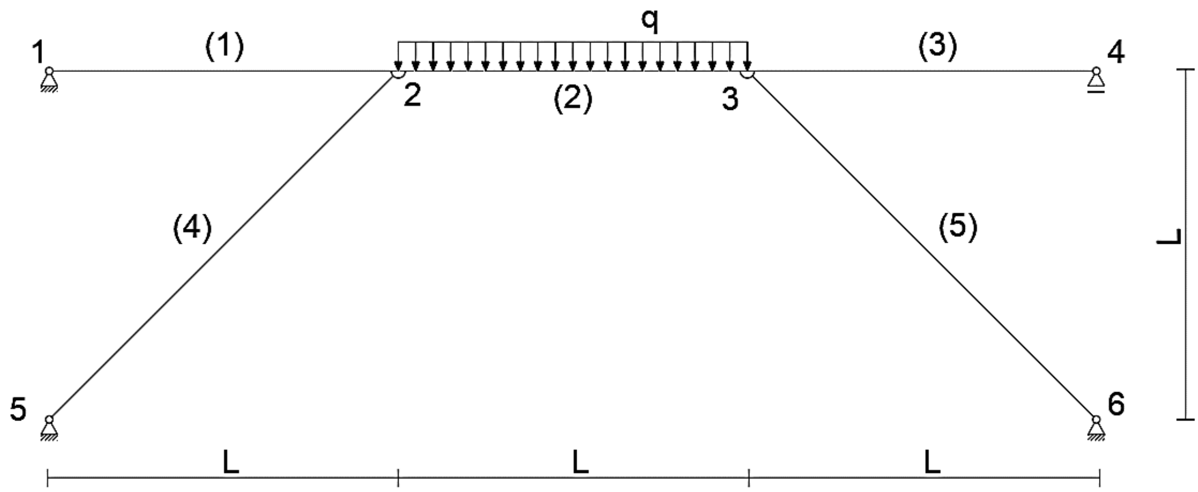
3. Zadan je gredni sistem sa slike 18. Nacrtajte M, T i N dijagram.

$q = 20\ kN/m$

$E = 210\ 000\ MPa$

$L = 6\ m$

$\dfrac{h}{b} = 300mm/100mm$

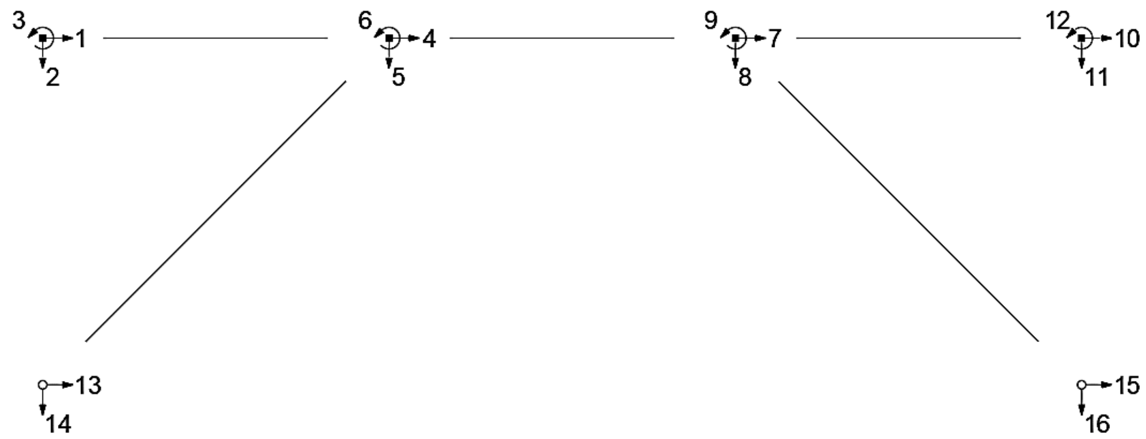


Slika 18. Primjer 3.

Za početak, možemo vidjeti da se poprečni presjek i modul elastičnosti poklapaju s prethodnim zadatkom, stoga znamo:

$EA = 6.3 \cdot 10^9\ N = 6.3 \cdot 10^6\ kN$ $\qquad$ $EI = 4.725 \cdot 10^{13}\ Nmm^2 = 47250\ kNm^2$

Sada formiramo ravnotežnu matricu za svaki element, uz to da ćemo odbaciti stupnjeve slobode 13, 14, 15, 16 i njihove predviđene reakcije jer će se poklapati sa silom u elementima (4) i (5).



Slika 19. Stupnjevi slobode čvorova sistema primjera 3.

Element 1-2 (1)
$$(1) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} F_1 & F_2 & F_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos(0) & \sin(0) & 0 \\ -\sin(0) & \cos(0) & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ -\cos(0) & -\sin(0) & 0 \\ \sin(0) & -\cos(0) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} F_1 & F_2 & F_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Element 2-3 (2)
$$(2) = \begin{array}{c} \\ 4\\5\\6\\7\\8\\9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} F_4 & F_5 & F_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos(0) & \sin(0) & 0 \\ -\sin(0) & \cos(0) & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ -\cos(0) & -\sin(0) & 0 \\ \sin(0) & -\cos(0) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ 4\\5\\6\\7\\8\\9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} F_4 & F_5 & F_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

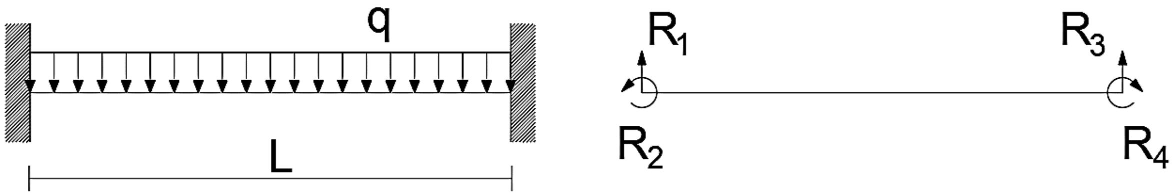
Element 3-4 (3)
$$(3) = \begin{array}{c} \\ 7\\8\\9\\10\\11\\12 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} F_7 & F_8 & F_9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos(0) & \sin(0) & 0 \\ -\sin(0) & \cos(0) & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ -\cos(0) & -\sin(0) & 0 \\ \sin(0) & -\cos(0) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ 7\\8\\9\\10\\11\\12 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} F_7 & F_8 & F_9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Za štapne elemente, sile ćemo nazvati S_1 i S_2 kako bismo ih razlikovali od sila grednih elemenata.

Štap 5-2 (4)
$$(4) = \begin{array}{c} \\ 13\\14\\4\\5 \end{array} \begin{array}{c} S_1 \\ \begin{bmatrix} \cos(45) \\ -\sin(45) \\ -\cos(45) \\ \sin(45) \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ 13\\14\\4\\5 \end{array} \begin{array}{c} S_1 \\ \begin{bmatrix} 0.707 \\ -0.707 \\ -0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix} \end{array}$$

Štap 6-3 (5) $$(5) = \begin{array}{c} \\ 15 \\ 16 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} S_2 \\ \begin{bmatrix} \cos(135) \\ -\sin(135) \\ -\cos(135) \\ \sin(135) \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ 15 \\ 16 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} S_2 \\ \begin{bmatrix} -0.707 \\ -0.707 \\ 0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix} \end{array}$$

Za vanjska opterećenja zadano je kontinuirano opterećenje preko elementa (2). Ako na obostrano upetoj gredi zadamo kontinuirano konstantno opterećenje q, te izračunamo reakcije, dobivamo (slika 20.):



Slika 20. Reakcije obostrano upete grede od kontinuiranog opterećenja

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qL/_2 \\ qL^2/_{12} \\ qL/_2 \\ qL^2/_{12} \end{bmatrix}$$

Dobivene vrijednosti reakcija odgovaraju zadanim smjerovima na slici 20., koje, da bismo ih prenijeli na sistem, moramo zadati suprotno (slika 21.). Sistemu sa slike 21. će u svim elementima unutarnje sile odgovarati sistemu sa slike 18. osim u elementu (2). Pošto je opterećenje tog elementa svedeno na opterećenje u čvorovima, da bismo odredili sile elementa (2) potrebno je, nakon određivanja sila u svim ostalim elementima, odrediti ih ravnotežom čvora 2 i 3, izbacivanjem „fiktivnih" opterećenja R_{1-4} (u zadanom sistemu, u čvorovima 2 i 3 ne djeluju nikakve koncentrirane sile, već su samo djelovanja na elementu).

U našem slučaju, sile R_{1-4}, koje ćemo nazvati P_1, M_1, P_2, M_2 su:

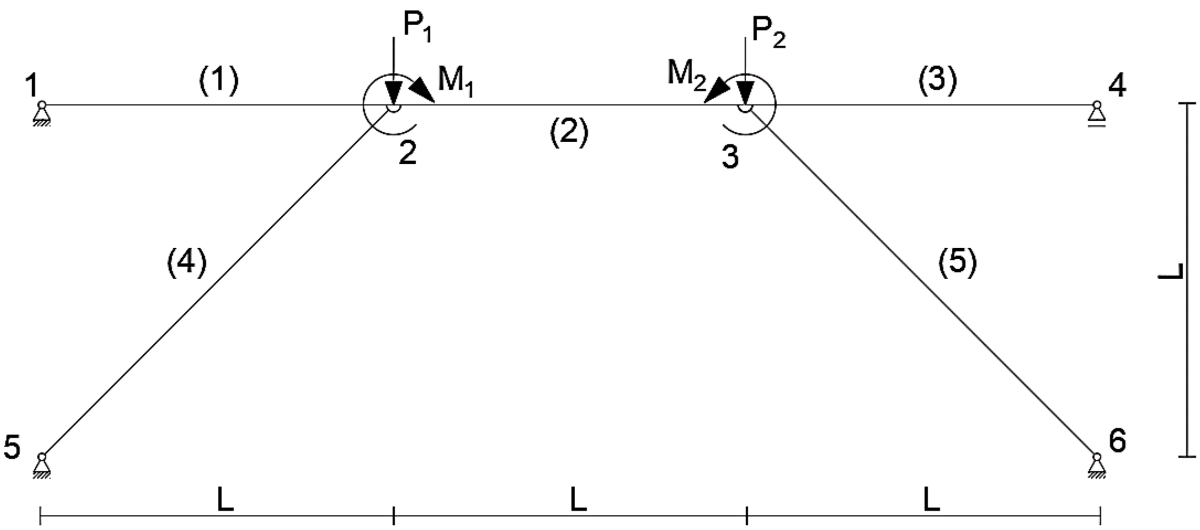
$$\begin{bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qL/_2 \\ qL^2/_{12} \\ qL/_2 \\ qL^2/_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60\ kN \\ 60\ kNm \\ 60\ kN \\ 60\ kNm \end{bmatrix}$$

Reakcije početnog sistema ćemo zadati da se poklapaju sa stupnjevima slobode 1,2 i 11.

Vektor vanjskog opterećenja stoga jest, prema slici 21.:

$$\mathbf{P} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 60\ kN \quad -60\ kNm \quad 0 \quad 60\ kN \quad 60\ kNm \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

Ravnotežna matrica, proširena stupcem $-\mathbf{P}$ stoga jest:



Slika 21. Reducirani (fiktivni) sustav sistema primjera 3.

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	S_1	S_2	R_1	R_2	R_3	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
3	0	-6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.707	0	0	0	0	0
5	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0.707	0	0	0	0	-60
6	0	0	-1	0	-6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	60
7	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0.707	0	0	0	0
8	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0.707	0	0	0	-60
9	0	0	0	0	0	-1	0	-6	1	0	0	0	0	0	-60
10	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0

Sada, Gaussovim eliminacijskim postupkom, ravnotežnu matricu svodimo na gornjestepeničastu:

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	S_1	S_2	R_1	R_2	R_3	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
3	0	-6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.707	0	0	0	0	0
5	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0.707	0	0	0	0	-60
6	0	0	-1	0	-6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	60
7	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0.707	0	0	0	0
8	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0.707	0	0	0	-60
9	0	0	0	0	0	-1	0	-6	1	0	0	0	0	0	-60
10	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0

IV+I $\longrightarrow$

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	S_1	S_2	R_1	R_2	R_3	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
3	0	-6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.707	0	1	0	0	0
5	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0.707	0	0	0	0	-60
6	0	0	-1	0	-6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	60
7	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0.707	0	0	0	0
8	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0.707	0	0	0	-60
9	0	0	0	0	0	-1	0	-6	1	0	0	0	0	0	-60
10	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	S_1	S_2	R_1	R_2	R_3		
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
3	0	-6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	III+6II
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.707	0	1	0	0	0	
5	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0.707	0	0	0	0	-60	V+II
6	0	0	-1	0	-6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	60	
7	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0.707	0	0	0	0	
8	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0.707	0	0	0	-60	
9	0	0	0	0	0	-1	0	-6	1	0	0	0	0	0	-60	
10	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	
11	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	
12	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	S_1	S_2	R_1	R_2	R_3	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.707	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.707	0	0	1	0	-60
6	0	0	-1	0	-6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	60
7	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0.707	0	0	0	0
8	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0.707	0	0	0	-60
9	0	0	0	0	0	-1	0	-6	1	0	0	0	0	0	-60
10	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	S_1	S_2	R_1	R_2	R_3		
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.707	0	1	0	0	0	
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.707	0	0	1	0	-60	
6	0	0	-1	0	-6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	60	VI+III
7	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0.707	0	0	0	0	
8	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0.707	0	0	0	-60	
9	0	0	0	0	0	-1	0	-6	1	0	0	0	0	0	-60	
10	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	
11	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	
12	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	S_1	S_2	R_1	R_2	R_3	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.707	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.707	0	0	1	0	-60
6	0	0	0	0	-6	1	0	0	0	0	0	0	6	0	60
7	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0.707	0	0	0	0
8	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0.707	0	0	0	-60
9	0	0	0	0	0	-1	0	-6	1	0	0	0	0	0	-60
10	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	S_1	S_2	R_1	R_2	R_3		
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.707	0	1	0	0	0	
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.707	0	0	1	0	-60	
6	0	0	0	0	-6	1	0	0	0	0	0	0	6	0	60	
7	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0.707	0	0	0	0	VII+IV
8	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0.707	0	0	0	-60	
9	0	0	0	0	0	-1	0	-6	1	0	0	0	0	0	-60	
10	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	
11	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	
12	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	S_1	S_2	R_1	R_2	R_3	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.707	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.707	0	0	1	0	-60
6	0	0	0	0	-6	1	0	0	0	0	0	0	6	0	60
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-0.707	0.707	1	0	0	0
8	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0.707	0	0	0	-60
9	0	0	0	0	0	-1	0	-6	1	0	0	0	0	0	-60
10	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	S_1	S_2	R_1	R_2	R_3		
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.707	0	1	0	0	0	
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.707	0	0	1	0	-60	
6	0	0	0	0	-6	1	0	0	0	0	0	0	6	0	60	VI+6V
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-0.707	0.707	1	0	0	0	
8	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0.707	0	0	0	-60	VIII+V
9	0	0	0	0	0	-1	0	-6	1	0	0	0	0	0	-60	
10	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	
11	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	
12	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	S_1	S_2	R_1	R_2	R_3	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.707	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.707	0	0	1	0	-60
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	4.242	0	0	12	0	-300
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-0.707	0.707	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.707	0.707	0	1	0	-120
9	0	0	0	0	0	-1	0	-6	1	0	0	0	0	0	-60
10	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	S_1	S_2	R_1	R_2	R_3		
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.707	0	1	0	0	0	
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.707	0	0	1	0	-60	
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	4.242	0	0	12	0	-300	
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-0.707	0.707	1	0	0	0	
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.707	0.707	0	1	0	-120	
9	0	0	0	0	0	-1	0	-6	1	0	0	0	0	0	-60	IX+VI
10	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	X+VII
11	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	
12	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	S_1	S_2	R_1	R_2	R_3	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.707	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.707	0	0	1	0	-60
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	4.242	0	0	12	0	-300
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-0.707	0.707	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.707	0.707	0	1	0	-120
9	0	0	0	0	0	0	0	-6	1	4.242	0	0	12	0	-360
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.707	0.707	1	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	S_1	S_2	R_1	R_2	R_3		
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.707	0	1	0	0	0	
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.707	0	0	1	0	-60	
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	4.242	0	0	12	0	-300	
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-0.707	0.707	1	0	0	0	
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.707	0.707	0	1	0	-120	
9	0	0	0	0	0	0	0	-6	1	4.242	0	0	12	0	-360	IX+6VIII
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.707	0.707	1	0	0	0	
11	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	XI+VIII
12	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	S_1	S_2	R_1	R_2	R_3	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.707	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.707	0	0	1	0	-60
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	4.242	0	0	12	0	-300
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-0.707	0.707	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.707	0.707	0	1	0	-120
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	8.484	4.242	0	18	0	-1080
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.707	0.707	1	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.707	0.707	0	1	1	-120
12	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & F_9 & S_1 & S_2 & R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 1 & 0 & -60 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4.242 & 0 & 0 & 12 & 0 & -300 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 1 & 0 & -120 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8.484 & 4.242 & 0 & 18 & 0 & -1080 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 1 & 1 & -120 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \mathrm{XII+IX} \end{array}
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & F_9 & S_1 & S_2 & R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 1 & 0 & -60 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4.242 & 0 & 0 & 12 & 0 & -300 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 1 & 0 & -120 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8.484 & 4.242 & 0 & 18 & 0 & -1080 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 1 & 1 & -120 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.484 & 4.242 & 0 & 18 & 0 & -1080
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & F_9 & S_1 & S_2 & R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 1 & 0 & -60 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4.242 & 0 & 0 & 12 & 0 & -300 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 1 & 0 & -120 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8.484 & 4.242 & 0 & 18 & 0 & -1080 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 1 & 1 & -120 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.484 & 4.242 & 0 & 18 & 0 & -1080
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \mathrm{XI+X} \\ \mathrm{XII+12X} \end{array}
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & F_9 & S_1 & S_2 & R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 1 & 0 & -60 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4.242 & 0 & 0 & 12 & 0 & -300 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 1 & 0 & -120 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8.484 & 4.242 & 0 & 18 & 0 & -1080 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.414 & 1 & 1 & 1 & -120 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.726 & 12 & 18 & 0 & -1080
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & F_9 & S_1 & S_2 & R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 1 & 0 & -60 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4.242 & 0 & 0 & 12 & 0 & -300 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 1 & 0 & -120 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8.484 & 4.242 & 0 & 18 & 0 & -1080 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.414 & 1 & 1 & 1 & -120 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.726 & 12 & 18 & 0 & -1080
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ /{:}(-0.707) \\ \\ \mathrm{XII-9XI} \end{array}
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & F_9 & S_1 & S_2 & R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 1 & 0 & -60 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4.242 & 0 & 0 & 12 & 0 & -300 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 1 & 0 & -120 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8.484 & 4.242 & 0 & 18 & 0 & -1080 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1.414 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.414 & 1 & 1 & 1 & -120 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & -9 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & F_9 & S_1 & S_2 & R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 1 & 0 & -60 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4.242 & 0 & 0 & 12 & 0 & -300 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 1 & 0 & -120 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8.484 & 4.242 & 0 & 18 & 0 & -1080 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1.414 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.414 & 1 & 1 & 1 & -120 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & -9 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ /{:}(1.414) \\ /{:}(3) \end{array}
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & F_9 & S_1 & S_2 & R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 1 & 0 & -60 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4.242 & 0 & 0 & 12 & 0 & -300 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 1 & 0 & -120 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8.484 & 4.242 & 0 & 18 & 0 & -1080 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1.414 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.707 & 0.707 & 0.707 & -84.866 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Prvo izvodimo vektor $\bar{\mathbf{F}}_0$ uvrštavanjem u nazad u (35). Prekobrojne sile R_2 i R_3 su nula dok su sile osnovnog sistema nepoznanice:

$$R_1 + 3R_2 - 3R_3 = 0$$

$$\boxed{R_1 = 0\ kN}$$

$$S_2 + 0.707R_1 + 0.707R_2 + 0.707R_3 = -84.866$$

$$\boxed{S_2 = -84.866\ kN}$$

$$S_1 - S_2 - 1.414R_1 = 0$$

$$S_1 = S_2 = -84.866$$

$$\boxed{S_1 = -84.866\ kN}$$

$F_9 + 8.484S_1 + 4.242S_2 + 18R_2 = -1080$

$F_9 = -8.484 \cdot (-84.866) - 4.242 \cdot (-84.866) - 1080 = 0$

$\boxed{F_9 = 0\ kNm}$

$F_8 + 0.707S_1 + 0.707S_2 + R_2 = -120$

$F_8 = -0.707 \cdot (-84.866) - 0.707 \cdot (-84.866) - 120 = 0$

$\boxed{F_8 = 0\ kN}$

$F_7 - 0.707S_1 + 0.707S_2 + R_1 = 0$

$F_7 = 0.707 \cdot (-84.866) - 0.707 \cdot (-84.866) = 0$

$\boxed{F_7 = 0\ kN}$

$F_6 + 4.242S_1 + 12R_2 = -300$

$F_6 = -4.242 \cdot (-84.866) - 300 = 60$

$\boxed{F_6 = 60\ kNm}$

$F_5 + 0.707S_1 + R_2 = -60$

$F_5 = -0.707 \cdot (-84.866) - 60 = 0$

$\boxed{F_5 = 0\ kN}$

$F_4 - 0.707S_1 + R_1 = 0$

$\boxed{F_4 = -60\ kN}$

$F_3 + 6R_2 = 0$

$\boxed{F_3 = 0\ kNm}$

$F_2 + R_2 = 0$

$\boxed{F_2 = 0\ kN}$

$F_1 + R_1 = 0$

$\boxed{F_1 = 0\ kN}$

Vektor $\bar{\mathbf{F}}_0$, prateći poredak sila u ravnotežnoj matrici, stoga jest:

$$\bar{\mathbf{F}}_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -60\ kN \quad 0 \quad 60\ kNm \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -84.866\ kN \quad -84.866\ kN \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

Sada je potrebno odrediti vektor $\bar{\mathbf{F}}_x$ uvrštavanjem u nazad u jednadžbu (36). Matrica $\bar{\mathbf{F}}_x$ sadrži jedan stupac za svaku prekobrojnu silu, stoga je potrebno uvrštavanje u nazad provesti dok je sila $R_2 = 1$, $R_3 = 0$ i obratno, uzimajući da su sile osnovnog sistema nepoznanice.

$R_1 + 3R_2 - 3R_3 = 0$

$R_1 = -3 \cdot 1 = -3$

$\boxed{R_1 = -3}$

$$S_2 + 0.707R_1 + 0.707R_2 + 0.707R_3 = 0$$

$$S_2 = -0.707 \cdot (-3) - 0.707 \cdot 1 = 1.414$$

$\boxed{S_2 = 1.414}$

$$S_1 - S_2 - 1.414R_1 = 0$$

$$S_1 = 1.414 + 1.414 \cdot (-3) = -2.828$$

$\boxed{S_1 = -2.828}$

$$F_9 + 8.484S_1 + 4.242S_2 + 18R_2 = 0$$

$$F_9 = -8.484 \cdot (-2.828) - 4.242 \cdot (1.414) - 18 \cdot 1 = 0$$

$\boxed{F_9 = 0}$

$$F_8 + 0.707S_1 + 0.707S_2 + R_2 = 0$$

$$F_8 = -0.707 \cdot (-2.828) - 0.707 \cdot (1.414) - 1 = 0$$

$\boxed{F_8 = 0}$

$$F_7 - 0.707S_1 + 0.707S_2 + R_1 = 0$$

$$F_7 = 0.707 \cdot (-2.828) - 0.707 \cdot (1.414) + 3 = 0$$

$\boxed{F_7 = 0}$

$$F_6 + 4.242S_1 + 12R_2 = 0$$

$$F_6 = -4.242 \cdot (-2.828) - 12 \cdot 1 = 0$$

$\boxed{F_6 = 0}$

$$F_5 + 0.707S_1 + R_2 = -60$$

$$F_5 = -0.707 \cdot (-2.828) - 1 = 1$$

$\boxed{F_5 = 1}$

$$F_4 - 0.707S_1 + R_1 = 0$$

$$F_4 = 0.707 \cdot (-2.828) + 3 = 1$$

$\boxed{F_4 = 1}$

$$F_3 + 6R_2 = 0$$

$\boxed{F_3 = -6}$

$$F_2 + R_2 = 0$$

$$\boxed{F_2 = -1}$$

$$F_1 + R_1 = 0$$

$$\boxed{F_1 = 3}$$

Isto tako izvodimo za $R_2 = 0$ i $R_3 = 1$, te je konačna matrica $\bar{\mathbf{F}}_x$:

$$\bar{\mathbf{F}}_x = \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ S_1 \\ S_2 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 0 \\ -6 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2.828 & 1.414 \\ 1.414 & -2.828 \\ -3 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sada je potrebno odrediti matricu popustljivosti svih elemenata, tako da po glavnoj dijagonali slažemo koeficijente popustljivosti za svaki element, s tim da se reakcije smatraju nepopustljivima. Za određivanje ukupnih sila sistema sa slike 21., potrebno je odrediti vrijednosti prekobrojnih sila izrazom (39).

$$\delta = \begin{bmatrix}
L_1/EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & L_1^3/3EI & -L_1^2/2EI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -L_1^2/2EI & L_1/EI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & L_2/EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & L_2^3/3EI & -L_2^2/2EI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -L_2^2/2EI & L_2/EI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_3/EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_3^3/3EI & -L_3^2/2EI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L_3^2/2EI & L_3/EI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_4/EA & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_5/EA & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$
\begin{bmatrix}
9.524\cdot10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1.524\cdot10^{-3} & -3.809\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -3.809\cdot10^{-4} & 1.270\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 9.524\cdot10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1.524\cdot10^{-3} & -3.809\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3.809\cdot10^{-4} & 1.270\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9.524\cdot10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.524\cdot10^{-3} & -3.809\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.809\cdot10^{-4} & 1.270\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.347\cdot10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.347\cdot10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$\mathbf{\Omega X} + \mathbf{d_0} = \mathbf{0}$$

Prvo određujemo matricu popustljivosti sistema $\mathbf{\Omega}$:

$$\mathbf{\Omega} = \bar{\mathbf{F}}_x{}^{T}\boldsymbol{\delta}\bar{\mathbf{F}}_x$$

$$
\begin{bmatrix}
3 & -1 & -6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.828 & 1.414 & -3 & 1 & 0 \\
-3 & 0 & 0 & -2 & -1 & -6 & 0 & 1 & 0 & 1.414 & -2.828 & 3 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
9.524\cdot10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1.524\cdot10^{-3} & -3.809\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -3.809\cdot10^{-4} & 1.270\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 9.524\cdot10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1.524\cdot10^{-3} & -3.809\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3.809\cdot10^{-4} & 1.270\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9.524\cdot10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.524\cdot10^{-3} & -3.809\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.809\cdot10^{-4} & 1.270\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.347\cdot10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.347\cdot10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
3 & -3 \\
-1 & 0 \\
-6 & 0 \\
1 & -2 \\
1 & -1 \\
0 & -6 \\
0 & 0 \\
0 & 1 \\
0 & 0 \\
-2.828 & 1.414 \\
1.414 & -2.828 \\
-3 & 3 \\
1 & 0 \\
0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
3 & -1 & -6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.828 & 1.414 & -3 & 1 & 0 \\
-3 & 0 & 0 & -2 & -1 & -6 & 0 & 1 & 0 & 1.414 & -2.828 & 3 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
2.857\cdot10^{-6} & -2.857\cdot10^{-6} \\
7.614\cdot10^{-4} & 0 \\
-3.811\cdot10^{-4} & 0 \\
9.524\cdot10^{-7} & -1.905\cdot10^{-6} \\
1.524\cdot10^{-3} & 7.614\cdot10^{-4} \\
-3.809\cdot10^{-4} & -3.811\cdot10^{-4} \\
0 & 0 \\
0 & 1.524\cdot10^{-3} \\
0 & -3.809\cdot10^{-4} \\
-3.809\cdot10^{-6} & 1.905\cdot10^{-6} \\
1.905\cdot10^{-6} & -3.809\cdot10^{-6} \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0
\end{bmatrix}
\longrightarrow
\begin{bmatrix}
3.0722\cdot10^{-3} & 7.4015\cdot10^{-4} \\
7.4015\cdot10^{-4} & 3.0750\cdot10^{-3}
\end{bmatrix}
$$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 3.0722\cdot10^{-3} & 7.4015\cdot10^{-4} \\ 7.4015\cdot10^{-4} & 3.0750\cdot10^{-3} \end{bmatrix} m/kN$$

Sada računamo matricu pomaka čvorova hvatišta prekobrojnih sila od vanjskih opterećenja $\mathbf{d_0}$:

$$\mathbf{d_0} = \bar{\mathbf{F}}_x{}^{T}\boldsymbol{\delta}\bar{\mathbf{F}}_\mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.828 & 1.414 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -2 & -1 & -6 & 0 & 1 & 0 & 1.414 & -2.828 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.524\cdot10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.524\cdot10^{-3} & -3.809\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.809\cdot10^{-4} & 1.270\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9.524\cdot10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.524\cdot10^{-3} & -3.809\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.809\cdot10^{-4} & 1.270\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9.524\cdot10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.524\cdot10^{-3} & -3.809\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.809\cdot10^{-4} & 1.270\cdot10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.347\cdot10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.347\cdot10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -60 \\ 0 \\ 60 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -84.866 \\ -84.866 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.828 & 1.414 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -2 & -1 & -6 & 0 & 1 & 0 & 1.414 & -2.828 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5.7144\cdot10^{-5} \\ -0.02285 \\ 7.62\cdot10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.143\cdot10^{-4} \\ -1.143\cdot10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -0.02275 \\ -0.02259 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d_0} = \begin{bmatrix} -0.02275 \\ -0.02259 \end{bmatrix} m$$

Jednadžba kompatibilnosti (39) sada glasi:

$$\mathbf{\Omega X} + \mathbf{d_0} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 3.0722\cdot10^{-3} & 7.4015\cdot10^{-4} \\ 7.4015\cdot10^{-4} & 3.0750\cdot10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02275 \\ 0.02259 \end{bmatrix}$$

Prekobrojne sile su stoga:

$$R_2 = 5.98\ kN \qquad R_3 = 5.91\ kN$$

Kako su predznaci pozitivni, prekobrojne sile se poklapaju s pretpostavljenim smjerovima.

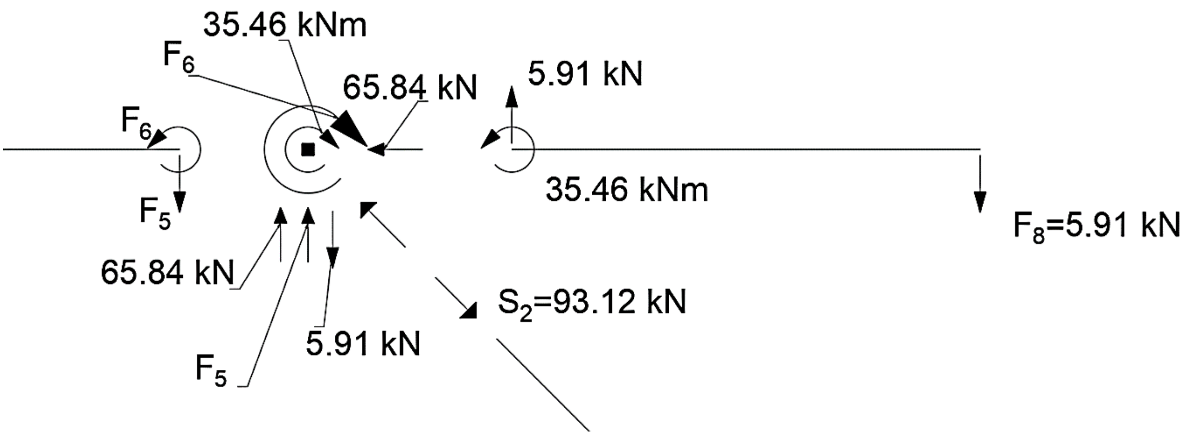
Ukupne sile sistema sa slike 21. sada određujemo jednadžbom (34):

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_0 + \bar{\mathbf{F}}_x \boldsymbol{X}$$

Sile F_5 i F_6, kao što smo prethodno napomenuli, ne odgovaraju sistemu sa slike 18., stoga ćemo ih morati odrediti ravnotežom čvora 2 i 3.

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ F_5\\ F_6\\ F_7\\ F_8\\ F_9\\ S_1\\ S_2\\ R_1\\ R_2\\ R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ -60\ kN\\ 0\\ 60\ kNm\\ 0\\ 0\\ 0\\ -84.866\ kN\\ -84.866\ kN\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3\\ -1 & 0\\ -6 & 0\\ 1 & -2\\ 1 & -1\\ 0 & -6\\ 0 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ -2.828 & 1.414\\ 1.414 & -2.828\\ -3 & 3\\ 1 & 0\\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5.98\ kN\\ 5.91\ kN \end{bmatrix} = \begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ F_5\\ F_6\\ F_7\\ F_8\\ F_9\\ S_1\\ S_2\\ R_1\\ R_2\\ R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 0.21\ kN\\ -5.98\ kN\\ -35.88\ kNm\\ -65.84\ kN\\ 0.07\ kN\\ 24.54\ kNm\\ 0\\ 5.91\ kN\\ 0\\ -93.42\ kN\\ -93.12\ kN\\ -0.21\ kN\\ 5.98\ kN\\ 5.91\ kN \end{bmatrix}$$

Ravnoteža čvora 3 (slika 22.), sile P_2 i M_2 uklanjamo te su nepoznate sile F_5 i F_6:



Slika 22. Ravnoteža čvora 3

$$\sum F_z = 0 \ \rightarrow 0 = -F_5 - 65.84 + 5.91 \rightarrow F_5 = -59.93\ kN$$

$$\sum M_y = 0 \ \rightarrow 0 = -F_6 - 35.46 \rightarrow F_6 = -35.46\ kNm$$

Sile na drugom kraju elementa možemo izračunati jednadžbama ravnoteže, uzimajući u obzir i kontinuirano opterećenje preko grede. Stoga:

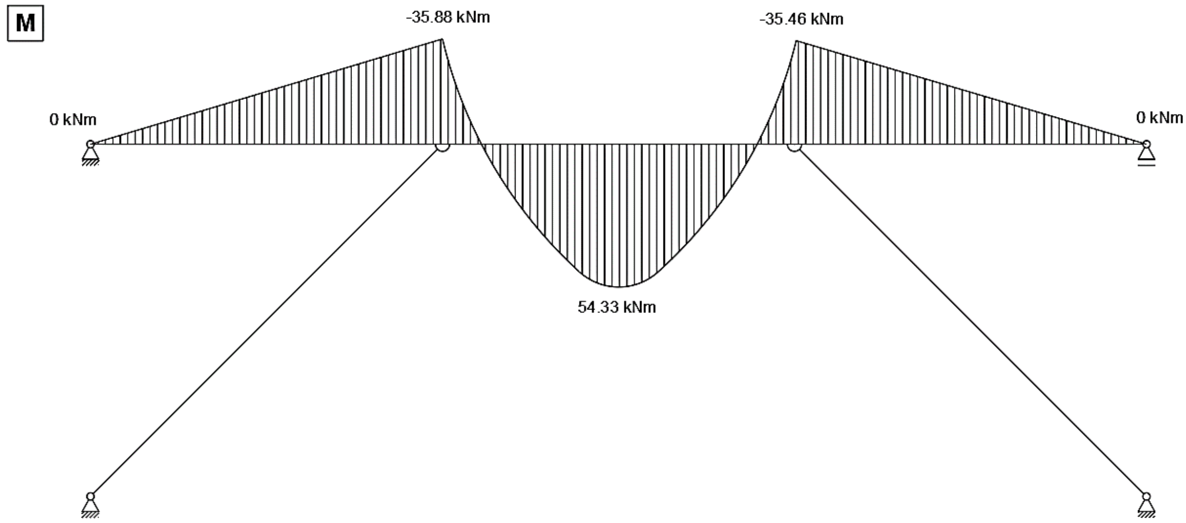
$$\sum F_z = 0 \ \rightarrow 0 = F_5 - F_5^L + 20 \cdot 6 \rightarrow F_5^L = 60.07\ kN$$

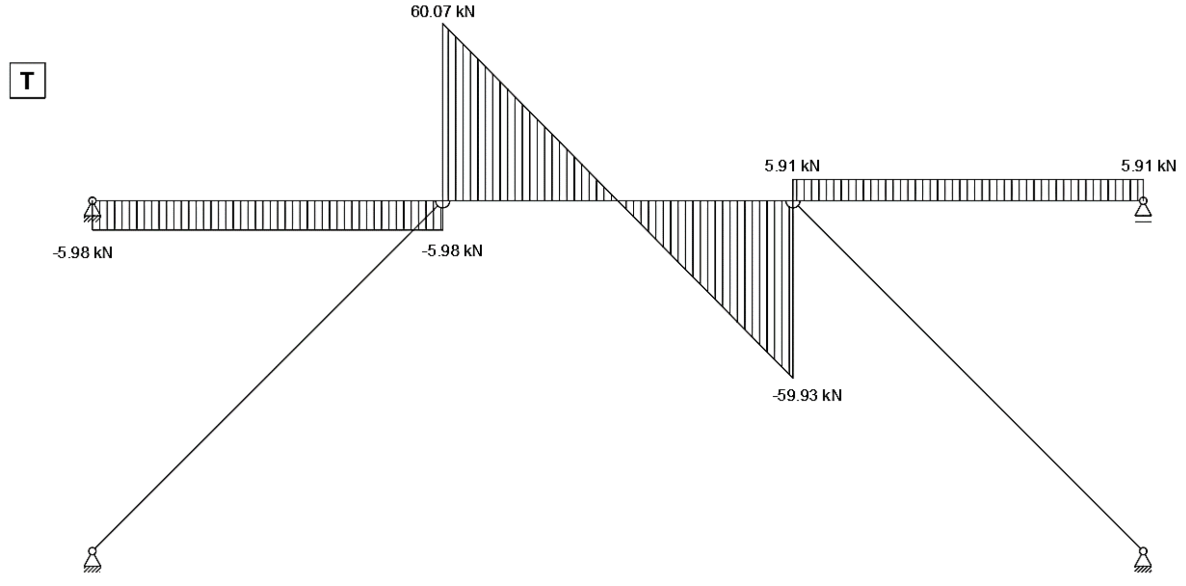
$$\sum M_y^L = 0 \ \rightarrow 0 = F_6 - F_6^L - 6 \cdot F_5 - 3 \cdot 6 \cdot 20 \rightarrow F_6^L = -35.88\ kNm$$

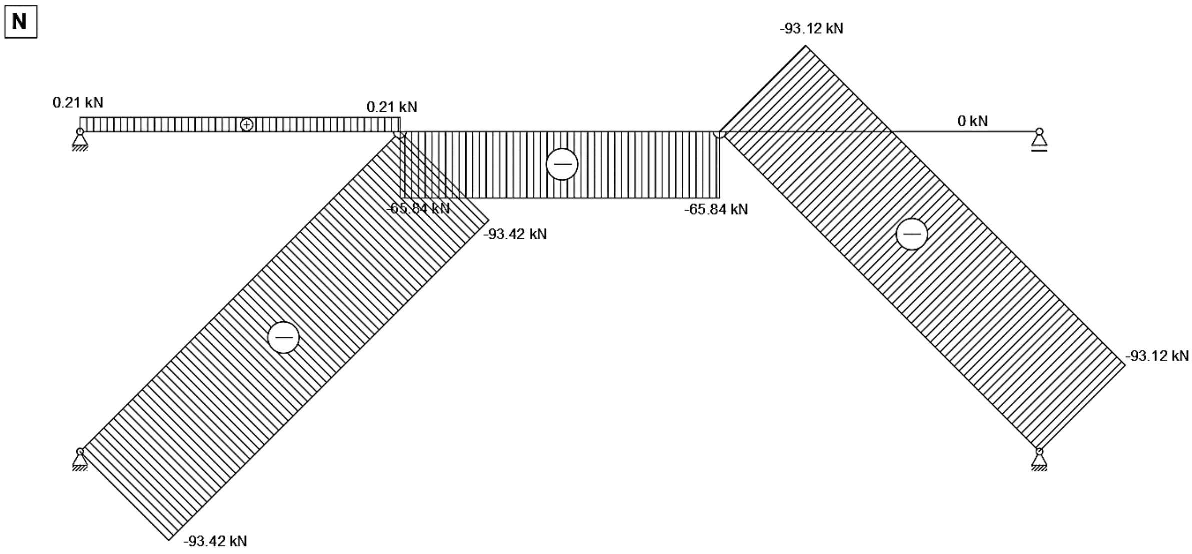
Moment na lijevoj strani elementa (2) se poklapa s silom F_3 elementa (1), što bi i trebao jer u tom čvoru ne djeluju nikakvi koncentrirani momenti.

Sada možemo konstruirati M, T i N dijagrame za sistem sa slike 18., odnosno naš zadani sistem, s tim da su ukupne sile nama zadanog sistema:

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ S_1 \\ S_2 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 0.21\ kN \\ -5.98\ kN \\ -35.88\ kNm \\ -65.84\ kN \\ -59.93\ kN \\ -35.46\ kNm \\ 0 \\ 5.91\ kN \\ 0 \\ -93.42\ kN \\ -93.12\ kN \\ -0.21\ kN \\ 5.98\ kN \\ 5.91\ kN \end{bmatrix}$$






N
-93.12 kN
0.21 kN
0.21 kN
0 kN
-65.84 kN
-65.84 kN
-93.42 kN
-93.12 kN
-93.42 kN

7. ZAKLJUČAK

Prilikom analize i izvedbe bilo kakvog graditeljskog pothvata, neophodne su statičke i dinamičke podloge, odnosno proračuni ponašanja konstrukcije tijekom njezinog eksploatacijskog vijeka. U ovom radu prikazali smo jednu od metoda proračuna, metodu sila, formuliranu u matričnom zapisu. Takav zapis nam je omogućio lakše razumijevanje i prepoznavanje nekih od glavnih karakteristika nekog promatranog sustava kao što su određivanje da li je sustav mehanizam, postoji li rješenje sustava i slično… Isto tako, kod rješavanja znatno većih sustava, jasno je da veliki opseg jednadžbi i koraka za dolazak do rješenja ručno predstavlja dosta zahtjevan pothvat, ali koji je, ako ga „predamo" računalima, gotovo trivijalan. Primjerima ovoga rada smo pokazali dio postupka koji računala provode kako bi formirali ravnotežnu matricu, riješili je Gaussovim eliminacijskim postupkom, te ukomponirali jednadžbe kompatibilnosti, sve s ciljem dobivanja smislenih i (koliko je moguće) točnih rješenja. Najčešći uzrok pogrešaka u proračunu ili dobivanja besmislenih rješenja proizlazi iz ljudske greške, naime, s obzirom da se računalo, za rješavanje nekog zadanog sustava, služi nizom radnji koje sukcesivno obavlja (primjer jest svođenje ravnotežne matrice na gornjestepeničastu), najčešća greška se dogodi u netočnosti zadavanja ili geometrije ili rubnih uvjeta ili nečeg trećeg. Uz to, jedna od češćih grešaka pri ručnom odabiru prekobrojnih sila jest formiranje mehanizma umjesto geometrijski nepromjenjivoga sistema. Svođenjem ravnotežne matrice na gornjestepeničastu odabir se provodi „automatski". Daljnjim napretkom računalne tehnologije i načina proračuna konstrukcije takve je greške moguće umanjiti, pa čak i ukloniti.

8. LITERATURA

[1] T. Došlić, N. Sandrić: *Matematika 1.*, skripta, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2008.

[2] K. Fresl: *Građevna statika 1.: Predavanja,* skripta, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu*,* 2017.

[3] K. Fresl: *Nelinearna statika štapnih konstrukcija,* skripta, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2023.

[4] S. Pellegrino, C. R. Calladine: *Matrix Analysis of Statically and Kinematically Indeterminate Frameworks*, International Journal of Solids and Structures, 22(1986)4, pp. 409-428

[5] J. S. Przemieniecki: *Theory of Matrix Structural Analysis,* McGraw-Hill, New York, 1968.

[6] H. Werner: *Prepoznavanje spojenih sustava,* Građevinar, 44(1992)10, str. 651-659

9. POPIS SLIKA

10. POPIS TABLICA