

Kombinacija opterećenja savijanjem i torzijom

Čirjak, Marta

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:806230>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-13**

Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Marta Čirjak

**KOMBINACIJA OPTEREĆENJA SAVIJANJEM I
TORZIJOM**

ZAVRŠNI ISPIT

Zagreb, 2024.



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Marta Čirjak

**KOMBINACIJA OPTEREĆENJA SAVIJANJEM I
TORZIJOM**

ZAVRŠNI ISPIT

Mentorica: izv. prof. dr. sc. Ana Skender

Zagreb, 2024.



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Marta Čirjak

COMBINED BENDING AND TORSION

FINAL EXAM

Supervisor: Associate Prof. Ana Skender

Zagreb, 2024.



OBRAZAC 3

POTVRDA O POZITIVNOJ OCJENI PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Student/ica :

(Ime i prezime)

(JMBAG)

zadovoljio/la je na pisanom dijelu završnog ispita pod naslovom:

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

(Naslov teme završnog ispita na engleskom jeziku)

i predlaže se provođenje daljnjeg postupka u skladu s Pravilnikom o završnom ispitu i diplomskom radu Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta.

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu znanstvenog projekta: (upisati ako je primjenjivo)

(Naziv projekta, šifra projekta, voditelj projekta)

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu stručne prakse na Fakultetu: (upisati ako je primjenjivo)

(Ime poslodavca, datum početka i kraja stručne prakse)

Datum:

Mentor:

Potpis mentora:

Komentor:



OBRAZAC 5

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja :

Marta Čirjak, 0082061815

(Ime i prezime, JMBAG)

student/ica Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta ovim putem izjavljujem da je moj pisani dio završnog ispita pod naslovom:

Kombinacija opterećenja savijanjem i torzijom

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

izvorni rezultat mogega rada te da se u izradi istoga nisam koristio/la drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

Datum:

17.09.2024.

Potpis:

Marta Čirjak



OBRAZAC 6

IZJAVA O ODOBRENJU ZA POHRANU I OBJAVU PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Ja :

Marta Čirjak, 60350649987

(Ime i prezime, OIB)

ovom izjavom potvrđujem da sam autor/ica predanog pisanog dijela završnog ispita i da sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti odgovara sadržaju dovršenog i obranjenog pisanog dijela završnog ispita pod naslovom:

Kombinacija opterećenja savijanjem i torzijom

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

koji je izrađen na sveučilišnom prijediplomskom studiju Građevinarstvo Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta pod mentorstvom:

izv. prof. dr. sc. Ana Skender

(Ime i prezime mentora)

i obranjen dana:

24.09.2024.

(Datum obrane)

Suglasan/suglasna sam da pisani dio završnog ispita bude javno dostupan, te da se trajno pohrani u digitalnom repozitoriju Građevinskog fakulteta, repozitoriju Sveučilišta u Zagrebu te nacionalnom repozitoriju.

Datum:

17.09.2024.

Potpis:

Marta Čirjak

SAŽETAK

Ovaj rad bavi se analizom ponašanja štapova pod složenim opterećenjem koje uključuje kombinaciju savijanja i torzije. S obzirom na višeosno stanje naprezanja koje nastaje pod ovim opterećenjem, primijenjene su teorije čvrstoće za izračun ekvivalentnog naprezanja, što omogućuje optimalno dimenzioniranje konstrukcijskih elemenata. Poseban fokus stavljen je na tankostjene štapove otvorenog poprečnog presjeka, kod kojih je ključno odrediti središte posmika radi eliminacije torzijskih naprezanja. U radu su analizirani numerički primjeri, uključujući proračun dimenzija kružnog poprečnog presjeka i koeficijenta sigurnosti pomoću teorija čvrstoće te pozicioniranje središta posmika. Analiza tankostjenih štapova otvorenog poprečnog presjeka naglašava važnost preciznog određivanja središta posmika kod elemenata s malom torzijskom krutošću. Za izračun vrijednosti unutarnjih sila korišten je računalni program Tower.

Ključne riječi: Savijanje, torzija, kombinirano opterećenje, teorije čvrstoće, ekvivalentno naprezanje, središte posmika

SUMMARY

This paper analyses the behaviour of beams under complex loading, which involves a combination of bending and torsion. Given the multiaxial stress state arising from this loading, strength theories have been applied to calculate the equivalent stress, enabling optimal dimensioning of structural elements. Special focus is placed on thin-walled beams with open cross-sections, where it is crucial to determine the shear centre to eliminate torsional stresses. The paper includes numerical examples, such as calculating the dimensions of a circular cross-section and determining safety factors using strength theories, as well as positioning the shear centre. The analysis of thin-walled beams with open cross-sections highlights the importance of accurately determining the shear centre in elements with low torsional stiffness. The calculation of internal forces was performed using the Tower software.

Key words: Bending, torsion, combined loading, strength theories, equivalent stress, shear centre

SADRŽAJ

SAŽETAK	i
SUMMARY	ii
SADRŽAJ	iii
1. UVOD	1
2. KOMBINACIJA OPTEREĆENJA SAVIJANJEM I TORZIJOM	2
3. EKVIVALENTNO NAPREZANJE PREMA TEORIJAMA ČVRSTOĆE	5
3.1. Jednoosno stanje naprezanja.....	5
3.2. Višeosno stanje naprezanja.....	5
3.3. Teorija najvećih normalnih naprezanja.....	7
3.4. Teorija najvećih normalnih deformacija	8
3.5. Teorija najvećih posmičnih naprezanja.....	9
3.6. Teorija potencijalne energije deformacija.....	10
3.7. Teorija potencijalne energije promjene oblika.....	10
4. SREDIŠTE POSMIKA TANKOSTJENIH POPREČNIH PRESJEKA.....	11
5. PRIMJERI RAČUNSKIH ZADATAKA	13
5.1. Dimenzioniranje štapa kružnog poprečnog presjeka.....	13
5.2. Određivanje koeficijenata sigurnosti.....	17
5.3. Određivanje središta posmika tankostjenog poprečnog presjeka.....	26
6. ZAKLJUČAK.....	31
POPIS LITERATURE	32
POPIS SLIKA.....	33

1. UVOD

Pri složenom opterećenju štapova u poprečnom presjeku djeluju najmanje dvije komponente unutarnjih sila što dovodi do višeosnog stanja naprezanja. Jedan od čestih primjera složenog opterećenja je kombinacija istodobnog djelovanja savijanja i torzije. Zbog složenosti eksperimentalnog određivanja kritičnih vrijednosti glavnih naprezanja u takvim situacijama, primjenjuju se teorije čvrstoće kako bi se odredilo ekvivalentno naprezanje. Ekvivalentno naprezanje predstavlja ono naprezanje koje bi, kada bi djelovalo samo, uzrokovalo jednak slom kao i stvarna kombinacija djelovanja.

Tankostjeni profil definira se kao profil u kojem je debljina stijenke mala u odnosu na ostale dimenzije konture presjeka. Tankostjeni štapovi mogu biti otvorenog ili zatvorenog poprečnog presjeka. Zatvoreni profili obično imaju veću torzijsku krutost, dok su štapovi otvorenog poprečnog presjeka manje otporni na torzijska opterećenja [1]. Kada vanjsko opterećenje prolazi kroz središte posmika tankostjenog otvorenog poprečnog presjeka, eliminira se utjecaj torzije. Središte posmika je točka u ravnini poprečnog presjeka u kojoj je suma momenata svih unutarnjih posmičnih sila, pri savijanju bez torzije, jednaka nuli.

U ovom radu analizirat će se ponašanje štapova pod kombiniranim opterećenjem savijanja i torzije, uz primjenu teorija čvrstoće za izračun ključnih parametara. Kroz numeričke primjere istražiti će se dimenzioniranje kružnih poprečnih presjeka, koeficijenti sigurnosti te određivanje središta posmika kod tankostjenih otvorenih profila. Ove analize važne su za optimizaciju i sigurnost konstrukcija izloženih složenim mehaničkim opterećenjima.

2. KOMBINACIJA OPTEREĆENJA SAVIJANJEM I TORZIJOM

Kombinacija opterećenja savijanjem i torzijom predstavlja složen i važan aspekt u analizi i projektiranju konstrukcija. U mnogim praktičnim situacijama, konstrukcije su izložene istovremenom djelovanju savijanja i torzije, što zahtijeva detaljnu analizu kako bi se osigurala sigurnost i pouzdanost konstrukcije.

Ova vrsta složenog opterećenja nastaje kada se u poprečnom presjeku štapa pojavljuju momenti savijanja i momenti torzije kao dominantno djelovanje. Moment savijanja uzrokuje normalno naprezanje, dok moment torzije uzrokuje posmično naprezanje.

Za jednostavne presjeke, kao što su pravokutni ili kružni presjeci, postoje analitička rješenja koja omogućavaju precizno određivanje naprezanja i deformacija. Međutim, kako bi se obuhvatili složeniji oblici poprečnih presjeka i njihova ponašanja, često je potrebno koristiti numeričke metode, kao što je metoda konačnih elemenata (engl. *finite element method*, FEM), kako bi se dobili precizni rezultati.

Promatramo štap kružnog poprečnog presjeka promjera d koji je istovremeno opterećen momentom torzije M_t i momentom savijanja M_s . Koristeći princip neovisnosti djelovanja sila, najprije ćemo izračunati normalna naprezanja uzrokovana savijanjem:

$$\sigma_x = \frac{M_s}{I_y} \cdot z$$

σ_x – normalno naprezanje

M_s – moment savijanja

I_y – moment tromosti

a zatim posmična naprezanja uzrokovana torzijom:

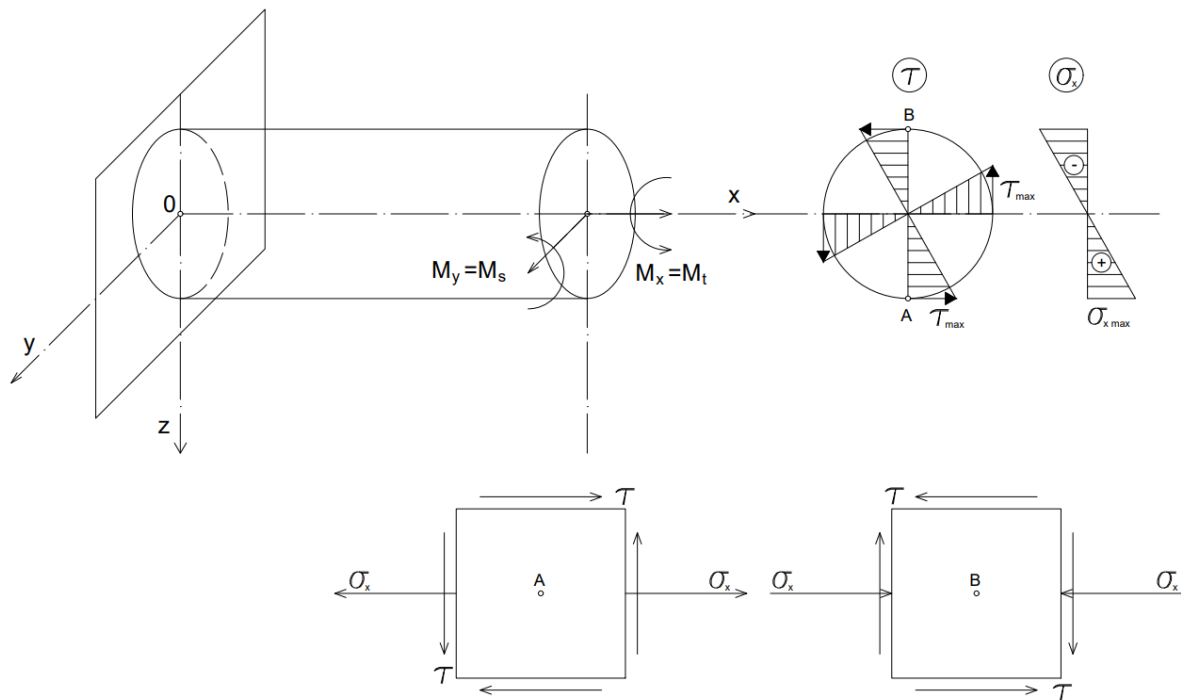
$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \cdot \rho$$

τ – posmično naprezanje

M_t – moment torzije

I_p – polarni moment tromosti

ρ – udaljenost točke kružnog poprečnog presjeka od središta



Slika 2.1. Štap kružnog poprečnog presjeka istovremeno opterećen momentom savijanja i momentom torzije [2]

Najveće normalno naprezanje javlja se u rubnim točkama presjeka (A i B), dok posmična naprezanja zbog torzije imaju najveću vrijednost po čitavom rubu poprečnog presjeka. Sukladno opisanome kritične točke su A i B. U točkama A i B postoji ravninsko stanje naprezanja.

Glavna naprezanja u točki A računamo prema sljedećim izrazima:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xA}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{xA}^2 + 4\tau_A^2}$$

Gdje je:

$$\sigma_{xA} = \frac{M_s}{W_y},$$

$$\tau_A = \frac{M_t}{W_p} = \frac{M_t}{2W_y}$$

i:

$$W_y = \frac{\pi d^3}{32},$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}$$

σ_{xA} – normalno naprezanje u točki A

M_s – moment savijanja

W_y – aksijalni moment otpora

M_t – moment torzije

W_p – polarni moment otpora

d – promjer kružnog poprečnog presjeka

Kada se štap kružnog poprečnog presjeka savija istovremeno u dvije međusobno okomite ravnine, moment savijanja je:

$$M_s = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

Kod istovremenog djelovanja poprečnog savijanja i torzije, posmična naprezanja od poprečne sile obično se zanemaruju jer su u odnosu na ostala naprezanja vrlo mala.

Kako bi odredili ekvivalentno naprezanje koje uzrokuje lom materijala pod kombiniranim opterećenjem pri višeosnom stanju naprezanja primjenjujemo teorije čvrstoće. Ove teorije ključne su za analizu i projektiranje konstrukcija koje su izložene složenim naprezanjima, kao što su kombinacije savijanja, torzije, istezanja i smicanja.

Ekvivalentno naprezanje je hipotetičko naprezanje koje, ako bi djelovalo samo, uzrokovalo isti efekt (npr. lom) kao kombinacija stvarnih naprezanja. Teorije čvrstoće pomažu inženjerima da predvide kada će materijal puknuti pod kombiniranim opterećenjima, što je važno za osiguranje sigurnosti i pouzdanosti konstrukcija.

3. EKVIVALENTNO NAPREZANJE PREMA TEORIJAMA ČVRSTOĆE

3.1. Jednoosno stanje naprezanja

Tehničke konstrukcije pri jednoosnom stanju naprezanja zadovoljavaju uvjete čvrstoće ukoliko je maksimalno naprezanje koje se pojavi u određenom dijelu konstrukcije manje od dopuštenog naprezanja [3].

Uvjet čvrstoće glasi:

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{dop}$$

Gdje je:

$$\sigma_{dop} = \frac{\sigma_K}{k}$$

σ_{max} – maksimalno naprezanje

σ_{dop} – dopušteno naprezanje

σ_K – kritično naprezanje

k – koeficijent sigurnosti, $k > 1$

Naprezanje pri kojem materijal prelazi u opasno (granično) stanje naziva se kritično naprezanje, σ_K , te se određuje eksperimentalno ispitivanjem materijala pri jednoosnom stanju naprezanja. Eksperimentalnim ispitivanjima utvrđeno je da je kritično naprezanje kod krhkih materijala jednako čvrstoći materijala, dok je kritično naprezanje kod elastoplastičnih materijala jednako granici tečenja.

3.2. Višeosno stanje naprezanja

Pri višeosnom stanju naprezanja čvrstoća pojedinih dijelova tehničkih konstrukcija ovisi o veličini glavnih naprezanja σ_1 , σ_2 i σ_3 i njihovoj kombinaciji. Zbog velike složenosti uređaja za ispitivanje i velikog broja mogućih kombinacija djelovanja eksperimentalno određivanje kritičnih vrijednosti glavnih naprezanja vrlo je teško radi čega se uvode teorije čvrstoće.

Pomoću teorija čvrstoće na temelju mehaničkih svojstava materijala pri jednoosnom stanju naprezanja prognoziramo mehanička svojstva materijala pri višeosnom stanju naprezanja. One pokušavaju odgovoriti na pitanje kada će dva elementa od istog materijala, neovisno o stanju naprezanja, imati jednaka mehanička svojstva. Višeosno stanje naprezanja svodi se na jednoosno stanje naprezanja ekvivalentno po opasnosti od pojave loma ili plastičnih deformacija [2].

Opasno stanje elementa na slici 3.1. prikazujemo u sljedećem obliku:

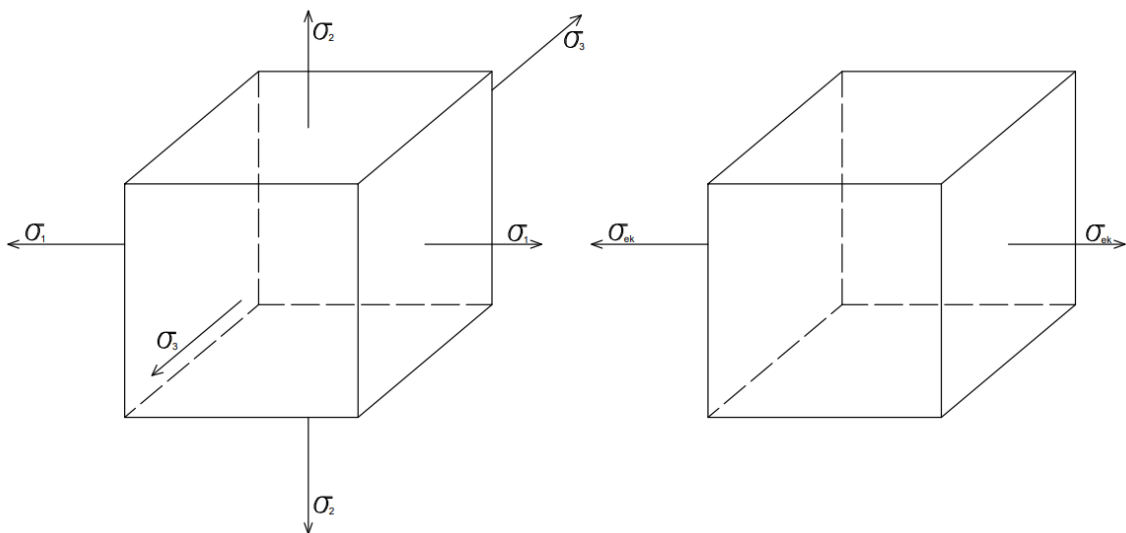
$$\sigma_{ek} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \lambda_0, \lambda_1, \dots) = \sigma_K$$

σ_{ek} – ekvivalentno naprezanje

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – glavna naprezanja ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$)

λ_0, λ_1 – parametri ovisni o mehaničkim svojstvima materijala

σ_K – kritično naprezanje pri jednoosnom stanju naprezanja



Slika 3.1. Troosno i ekvivalentno jednoosno stanje naprezanja

Veličina označena kao σ_{ek} naziva se kriterij loma ili kriterij plastičnosti, ovisno o tome promatramo li proces tečenja ili loma materijala. Teorije koje služe kao osnova za definiranje tih kriterija nazivaju se teorijama čvrstoće.

Ako je:

$$\sigma_{ek} \geq \sigma_K$$

u promatranom će elementu nastupiti tečenje ili lom materijala.

Ako je:

$$\sigma_{ek} < \sigma_K$$

Promatrani će element imati koeficijent sigurnosti:

$$k = \frac{\sigma_K}{\sigma_{ek}}$$

Uvjet čvrstoće glasi:

$$\sigma_{ek} \leq \sigma_{dop}$$

Zbog složenosti loma materijala, ne može se postaviti univerzalan kriterij čvrstoće za sve vrste materijala. S fizikalnog aspekta, lom nastaje uslijed djelovanja vlačnih naprezanja (odvajanje čestica) ili posmičnih naprezanja (smicanje čestica). Jedan materijal može se lomiti na različite načine ovisno o naprezanju i uvjetima ispitivanja – kao krhki ili elastoplastični.

Na primjer, elastoplastični materijal može postati krhak pod troosnim vlačnim naprezanjem, dok se krhki materijal ponaša elastoplastično pod troosnim tlačnim naprezanjem. Kombinirani lom je također moguć, gdje se u jednoj zoni događa razdvajanje čestica, a u drugoj smicanje. Zbog različitih faktora koji utječu na čvrstoću, svaka teorija čvrstoće odabire neke od njih, dok ostale zanemaruje. Postoji više teorija čvrstoće.

3.3. Teorija najvećih normalnih naprezanja

Teorija najvećih normalnih naprezanja, poznata i kao Rankineova teorija, predviđa da će materijal puknuti kada najveće glavno naprezanje dostigne granicu čvrstoće materijala. Ova teorija se primjenjuje na krhke materijale koji se lome bez značajne plastične deformacije. Teorija najvećih normalnih naprezanja je jednostavna i intuitivna, ali nije uvijek precizna za sve vrste materijala i uvjete opterećenja.

Prema toj teoriji, dva elementa od istog materijala nalaze se u istom stanju ako imaju jednaka najveća apsolutna normalna naprezanja, bez obzira na stanje naprezanja [2].

Ekvivalentno naprezanje je:

$$\sigma_{ek} = |\sigma_1| \leq \quad \text{ili} \quad \sigma_{ek} = |\sigma_3|$$

Uvjet čvrstoće glasi:

$$\sigma_{ek} = |\sigma_1| \leq \sigma_{dop} \quad \text{za} \quad |\sigma_1| > |\sigma_3|$$

$$\sigma_{ek} = |\sigma_3| \leq \sigma_{dop} \quad \text{za} \quad |\sigma_1| < |\sigma_3|$$

Ako su dopuštena vlačna i tlačna naprezanja materijala različita pri jednoosnom naprezanju $\sigma_{v dop} \neq \sigma_{t dop}$, a glavna naprezanja imaju suprotne predznake, uvjeti čvrstoće glase:

$$\sigma_{ek} = \sigma_1 \leq \sigma_{v dop}$$

$$\sigma_{ek} = |\sigma_3| \leq \sigma_{t dop}$$

Oba uvjeta moraju biti istodobno ispunjena.

Prva teorija čvrstoće uzima u obzir najveće apsolutno glavno naprezanje, dok pretpostavlja da ostala dva glavna naprezanja ne utječu na čvrstoću materijala. Teorija najvećih normalnih naprezanja daje točne rezultate uglavnom za krhke materijale pod djelovanjem vlačnih naprezanja, što je potvrđeno eksperimentima.

3.4. Teorija najvećih normalnih deformacija

Prema toj teoriji, dva elementa od istog materijala, bez obzira na stanje naprezanja, nalaze se u istom stanju ako su im najveće apsolutne normalne deformacije jednake.

Ekvivalentno naprezanje je:

$$\sigma_{ek} = |\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)| \quad \text{za} \quad |\sigma_1| > |\sigma_3|$$

ili:

$$\sigma_{ek} = |\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)| \quad \text{za} \quad |\sigma_1| < |\sigma_3|$$

Po ovoj teoriji materijal prelazi u opasno stanje, kada je:

$$\sigma_{ek} = |\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)| = \sigma_K$$

ili:

$$\sigma_{ek} = |\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)| = \sigma_K$$

Uvjeti čvrstoće glase:

$$\sigma_{ek} = |\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)| \leq \sigma_{dop} \text{ za } |\sigma_1| > |\sigma_3|$$

$$\sigma_{ek} = |\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)| \leq \sigma_{dop} \text{ za } |\sigma_1| < |\sigma_3|$$

Ako su vlačna i tlačna naprezanja materijala različita pri jednoosnom naprezanju $\sigma_{v\,dop} \neq \sigma_{t\,dop}$, uvjeti čvrstoće su:

$$|\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)| \leq \sigma_{v\,dop}$$

$$|\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)| \leq \sigma_{t\,dop}$$

Oba uvjeta moraju biti istodobno ispunjena.

Teorija najvećih normalnih deformacija uzima u obzir sva tri glavna naprezanja. Iako se slaže s ispitivanjima krhkih materijala, često je u neskladu s rezultatima za elastoplastične materijale.

3.5. Teorija najvećih posmičnih naprezanja

Teorija najvećih posmičnih naprezanja temelji se na pretpostavci da materijal puca kada najveće posmično naprezanje (τ_{max}) u materijalu premaši dozvoljeno posmično naprezanje (τ_{dop}). Ovu teoriju, koja se još naziva i trećom teorijom čvrstoće postavili su Coulomb, Tresca i Guest.

Prema toj teoriji, dva elementa od istog materijala, bez obzira na stanje naprezanja, nalaze se u istom stanju ako imaju jednaka najveća posmična naprezanja.

Ekvivalentno naprezanje je:

$$\sigma_{ek} = \sigma_1 - \sigma_3$$

Uvjet čvrstoće glasi:

$$\sigma_{ek} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{dop}$$

Teorija se dobro podudara s eksperimentalnim rezultatima za elastoplastične materijale, ali ne daje zadovoljavajuće rezultate za krhke materijale. Njen nedostatak je što ne uzima u obzir utjecaj srednjeg glavnog naprezanja na čvrstoću materijala.

3.6. Teorija potencijalne energije deformacija

Prema toj teoriji, dva elementa od istog materijala, neovisno o naprezanju, nalaze se u istom stanju ako imaju jednaku specifičnu potencijalnu energiju deformacije.

Ekvivalentno naprezanje je:

$$\sigma_{ek} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}$$

Uvjet čvrstoće glasi:

$$\sigma_{ek} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leq \sigma_{dop}$$

Ova teorija nije eksperimentalno potvrđena i stoga se rijetko primjenjuje.

3.7. Teorija potencijalne energije promjene oblika

Teoriju potencijalne energije promjene oblika, odnosno petu teoriju čvrstoće, postavili su M. T. Huber, R. von Mises i H. Hencky. Prema toj teoriji, dva elementa od istog materijala nalaze se u istom stanju, neovisno o stanju naprezanja, ako imaju jednake specifične potencijalne energije promjene oblika.

Ekvivalentno naprezanje je:

$$\sigma_{ek} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

ili:

$$\sigma_{ek} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}$$

Uvjet čvrstoće glasi:

$$\sigma_{ek} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \sigma_{dop}$$

Teorija potencijalne energije promjene oblika uspješno odgovara eksperimentalnim rezultatima za elastoplastične materijale, dok za krhke materijale ne daje zadovoljavajuće rezultate.

4. SREDIŠTE POSMIKA TANKOSTJENIH POPREČNIH PRESJEKA

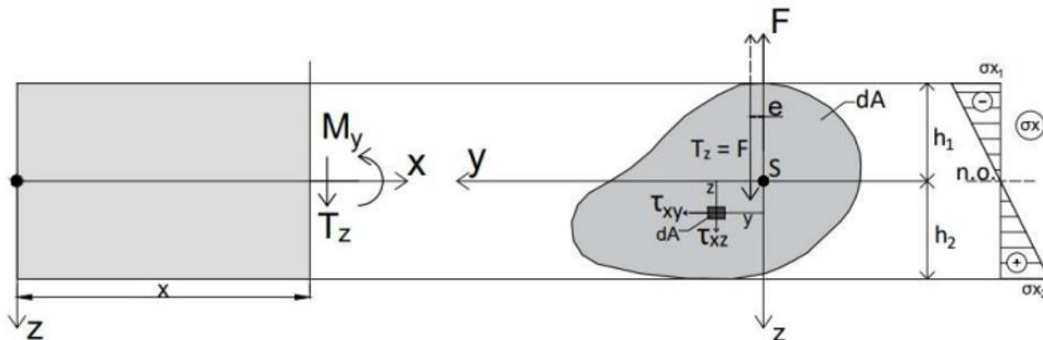
Središte posmika kod tankostjenih poprečnih presjeka je točka unutar presjeka kroz koju mora proći rezultatna sila posmika kako bi se izbjeglo uvijanje (torzija) presjeka [4].

Za razliku od punih presjeka, kod tankostjenih presjeka, središte posmika ne mora biti u centru geometrije presjeka. Njegova pozicija ovisi o raspodjeli mase i geometriji presjeka.

U praksi, središte posmika se koristi za analizu stabilnosti, vibracija i dinamičkog ponašanja konstrukcija. To je posebno važno u aeronautici, građevinarstvu i strojarstvu, gdje se koriste tankostjeni elementi za postizanje lakih i čvrstih struktura.

Razmotrimo savijanje ravnog štapa kada poprečna sila F djeluje u jednoj od glavnih ravnina koja nije u ravnini simetrije.

Ravnina opterećenja poklapa se s glavnom ravninom koja prolazi uzdužnom osi štapa i glavnom središnjom osi z , dok se neutralna os poklapa s drugom glavnom središnjom osi tromosti y .



Slika 4.1. Savijanje ravnog štapa (Izvor: [5])

Raspodjela normalnih naprezanja σ_x opisana je izrazom:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

Osim normalnih naprezanja σ_x , u poprečnom presjeku štapa pojavljuju se i posmična naprezanja τ_{xy} i τ_{xz} . Posmične sile na elementu dA izražene su umnoškom, stvarajući moment torzije oko osi x :

$$M_x = \int_A (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) \cdot dA$$

Dakle, prisutno je istodobno savijanje i uvijanje štapa.

U poprečnom presjeku možemo identificirati točku kroz koju prolazi rezultanta svih unutarnjih posmičnih sila – poprečna sila. Tu točku nazivamo središtem posmika ili središtem uvijanja, a ono se, u općem slučaju, ne poklapa s težištem presjeka.

Za središte posmika vrijedi:

$$T_z \cdot e = M_x = \int_A (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) \cdot dA$$

ili:

$$e = \frac{M_x}{T_z}$$

Ako se ravnina djelovanja poprečnog opterećenja pomakne za e , može se izbjeći uvijanje štapa. U tom slučaju, vanjski moment torzije u ravnoteži je s momentom unutarnjih posmičnih sila. Za savijanje bez torzije, ravnina opterećenja mora prolaziti kroz središte posmika, gdje je moment posmičnih sila jednak nuli [2].

Središte posmika određujemo kao sjecište pravaca djelovanja dviju poprečnih sila T_z i T_y , koje su paralelne s glavnim središnjim osima tromosti presjeka.

Za poprečne presjeke štapa, posmično naprezanje definirano je kao:

$$\tau = \frac{T_z \cdot S_y}{I_y \cdot t}$$

T_z – poprečna sila,

S_y – statički moment površine,

I_y – moment tromosti,

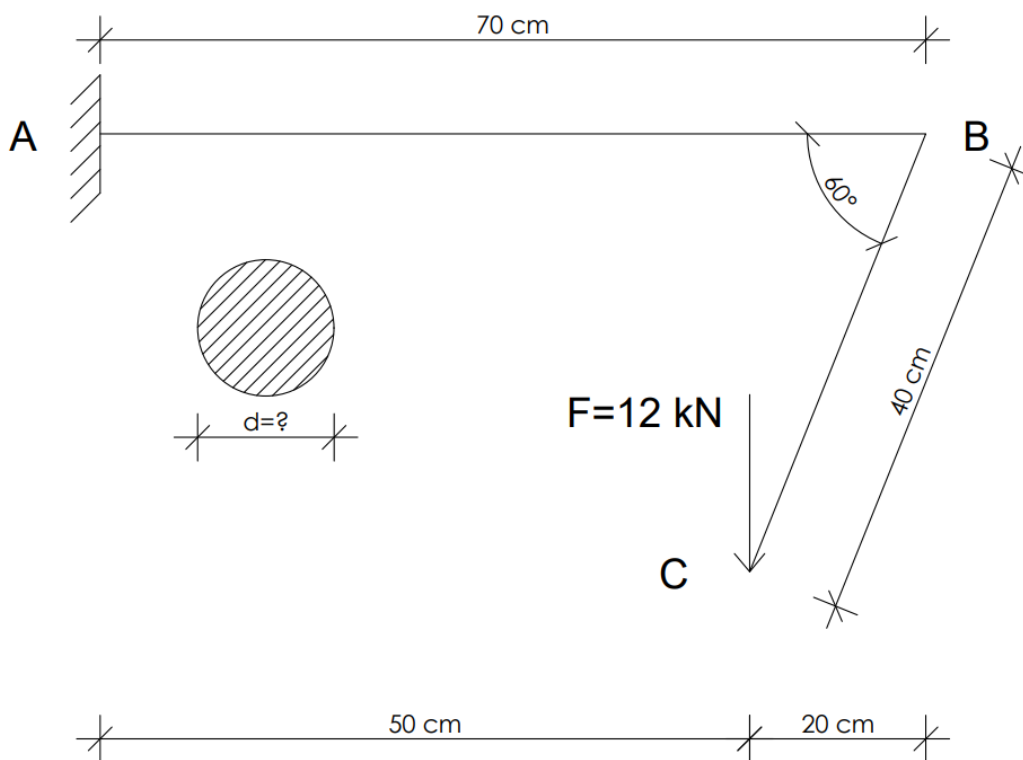
t – debljina stijenke presjeka.

Za simetrične presjeke, središte posmika leži na osi simetrije, a kod presjeka s dvije osi simetrije poklapa se s težištem. Središte posmika ovisi samo o geometriji presjeka, a ne o veličini ili smjeru poprečne sile. Kod zatvorenih šupljih presjeka, središte posmika je blizu težišta jer torzijska krutost smanjuje utjecaj torzije. Za tankostjene otvorene presjeke, središte posmika je ključan parametar jer ti presjeci imaju nisku torzijsku krutost.

5. PRIMJERI RAČUNSKIH ZADATAKA

5.1. Dimenzioniranje štapa kružnog poprečnog presjeka

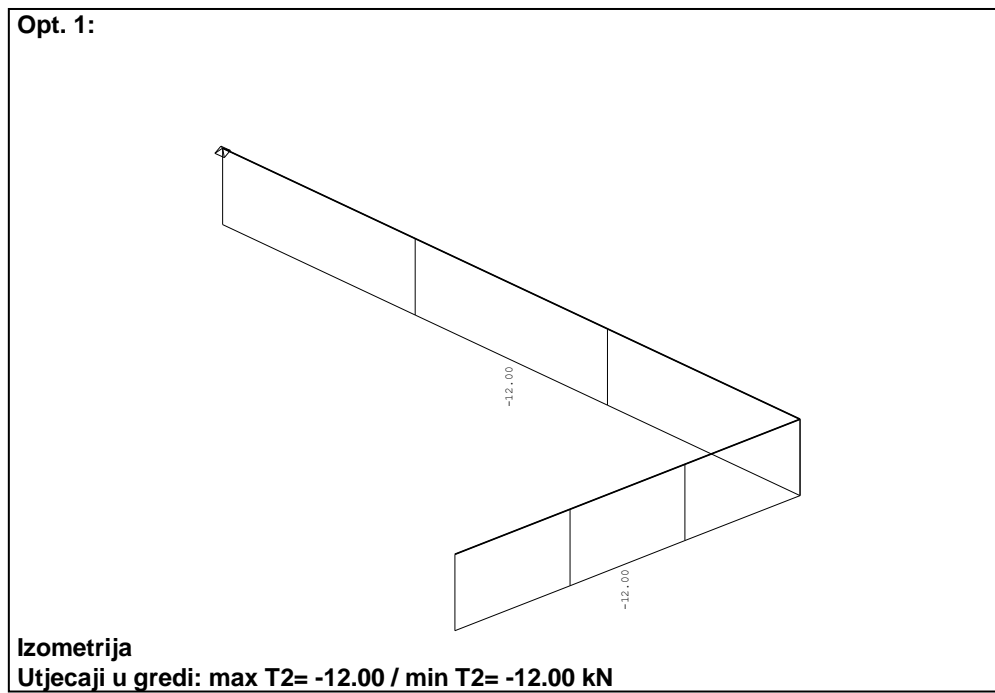
Štap okruglog poprečnog presjeka promjera d nalazi se u horizontalnoj ravnini i opterećen je s vertikalnim opterećenjem kao što je prikazano na slici. Treba dimenzionirati štap prema 3. teoriji čvrstoće, ako je dopušteno naprezanje $\sigma_{dop} = 120 \text{ MPa}$.



Slika 5.1. Numerički primjer 1

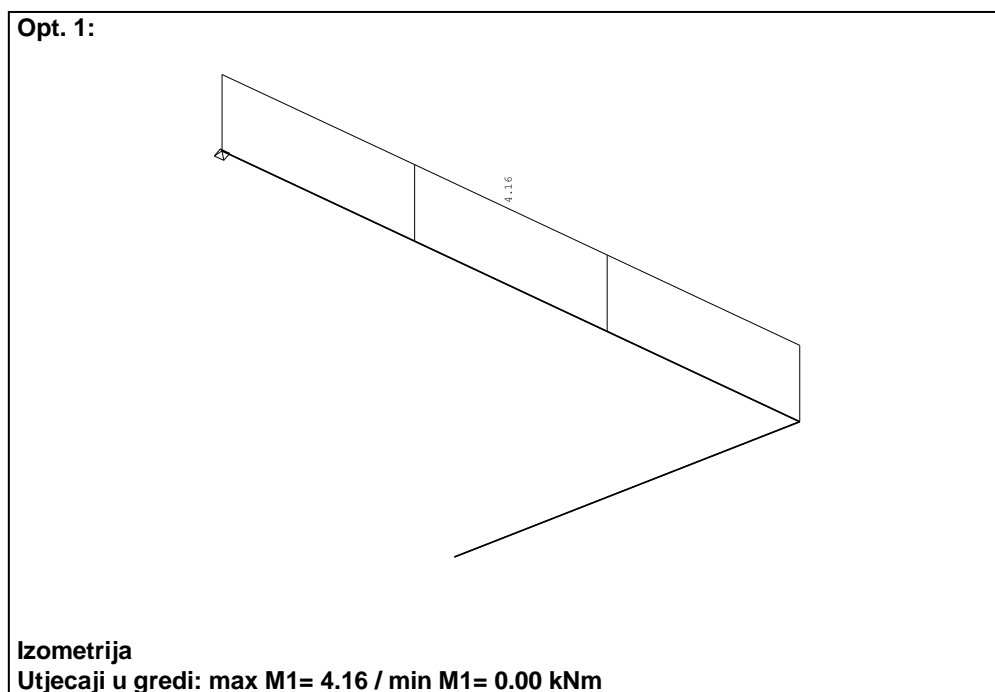
Na početku zadatka potrebno je odrediti dijagrame unutarnjih sila. Prikazani su dijagrami uzdužnih sila, torzijskih momenata te moment savijanja oko osi y .

T dijagram:



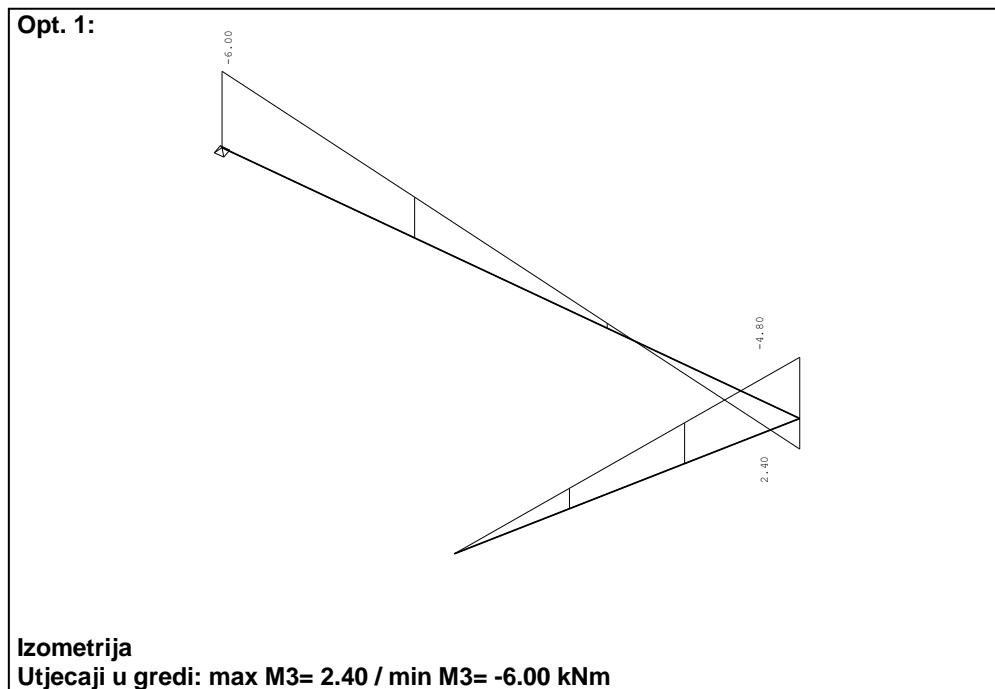
Slika 5.2. Prikaz T dijagrama

M_t dijagram:



Slika 5.3. Prikaz M_t dijagrama

M_y dijagram:



Slika 5.4. Prikaz M_y dijagrama

Dijagrami unutarnjih sila dobiveni su pomoću računalnog programa Tower. Nakon izračuna unutarnjih sila potrebno je izračunati geometrijske karakteristike poprečnog presjeka i primjenom 3. teorije čvrstoće odrediti dimenzije poprečnog presjeka.

Vrijednost unutarnjih sila u presjeku A:

$$M_t = 4,16 \text{ kNm}$$

$$M_y = 6,0 \text{ kNm}$$

Geometrijske karakteristike i naprezanja poprečnog presjeka:

$$A = \frac{d^2 \pi}{4}$$

$$I_y = I_z = \frac{d^4 \pi}{64}$$

$$W_y = W_z = \frac{d^3 \pi}{32}$$

3. teorija čvrstoće:

$$\sigma_{ek} = |\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_{dop}$$

$$\sigma_{ek} = \frac{1}{W_y} \cdot \sqrt{M_t^2 + M_y^2} \leq \sigma_{dop}$$

$$\frac{1}{\frac{d^3 \pi}{32}} \cdot \sqrt{(4,16 \cdot 10^6)^2 + (6,0 \cdot 10^6)^2} \leq 120$$

$$d^3 \geq \frac{32 \cdot \sqrt{(4,16 \cdot 10^6)^2 + (6,0 \cdot 10^6)^2}}{120 \cdot \pi}$$

$$d \geq 85,26 \text{ mm}$$

ODABRANO:

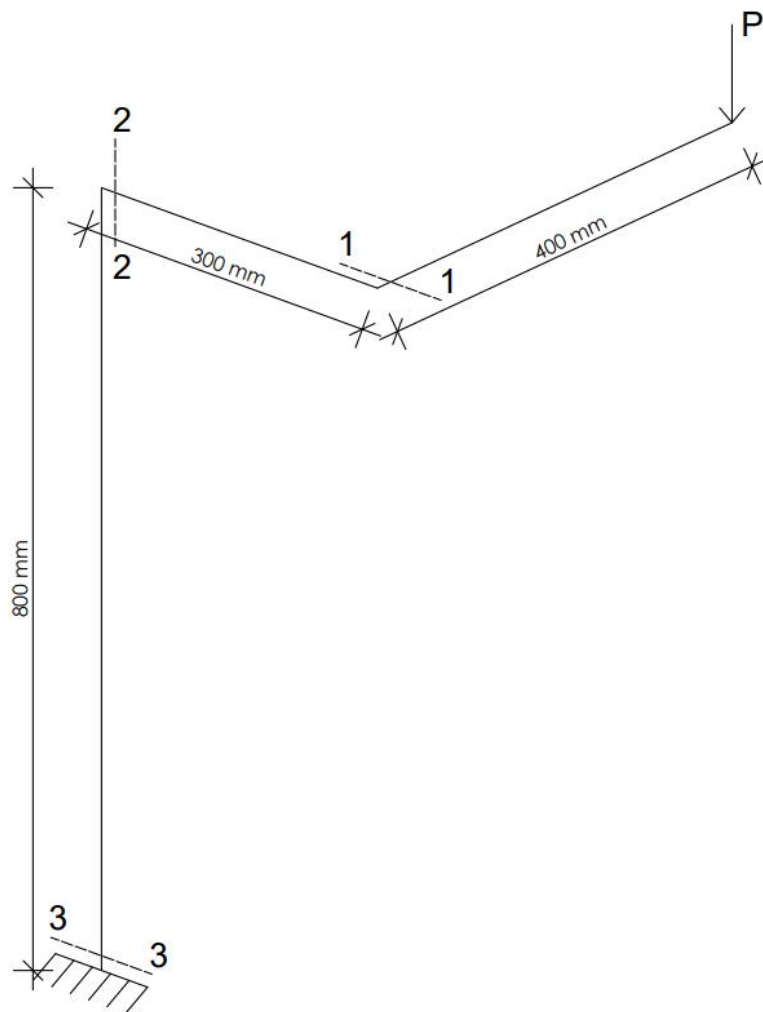
$$d = 90 \text{ mm}$$

5.2. Određivanje koeficijenta sigurnosti

Na sustav prikazan na slici djeluje vertikalna sila $P = 2 \text{ kN}$. Štap je kružnog poprečnog presjeka. Prema 3. i 5. teoriji čvrstoće treba odrediti koeficijente sigurnosti u presjecima 1-1, 2-2 i 3-3.

$$\sigma_T = 240 \text{ MPa}$$

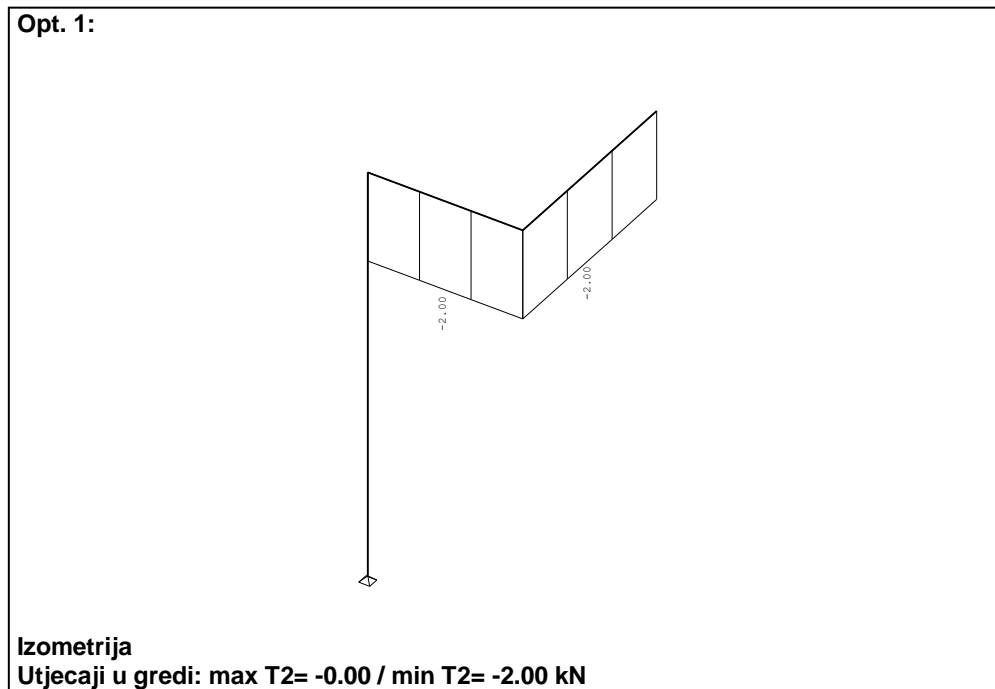
$$d = 40 \text{ mm}$$



Slika 5.5. Numerički primjer 2

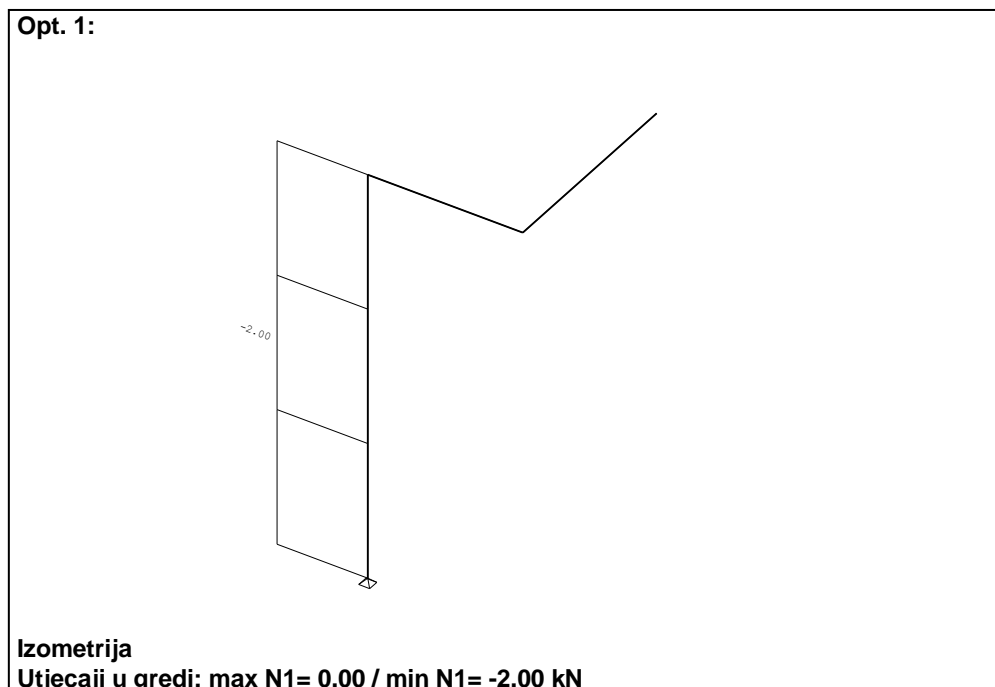
Da bi odredili koeficijente sigurnosti ponajprije je potrebno odrediti dijagrame unutarnjih sila nastalih pod zadanim opterećenjem.

T dijagram:



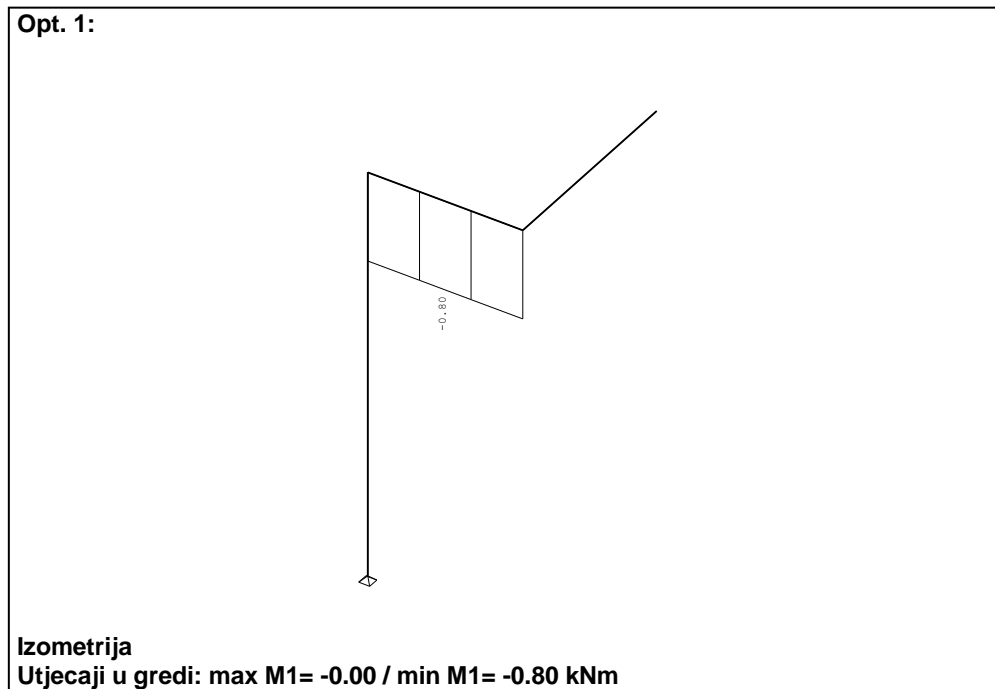
Slika 5.6. Prikaz T dijagrama

N dijagram:



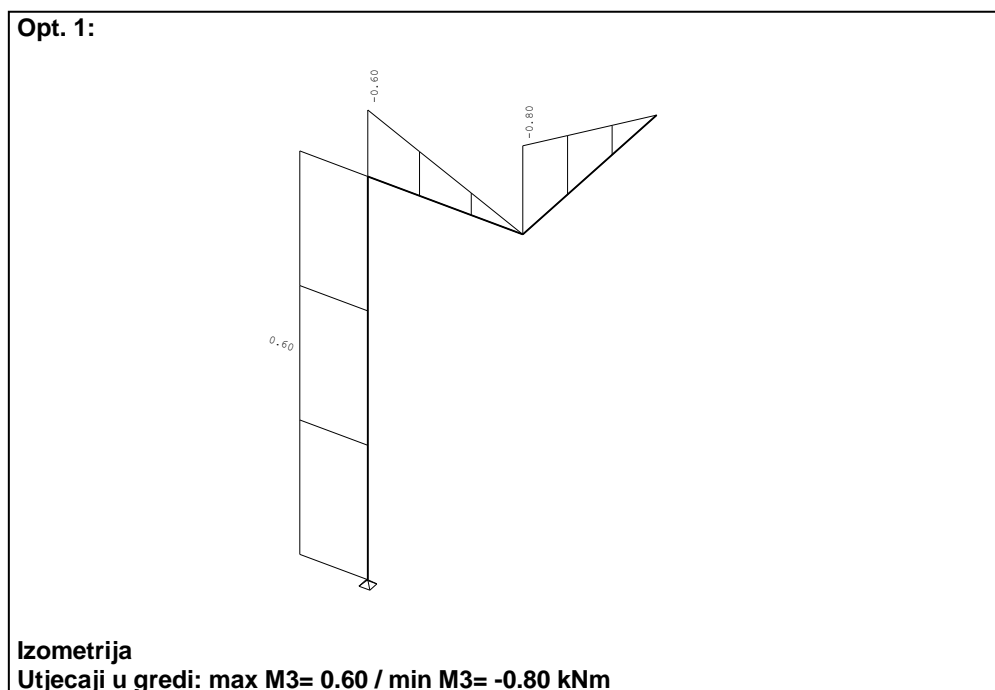
Slika 5.7. Prikaz N dijagrama

M_t dijagram:



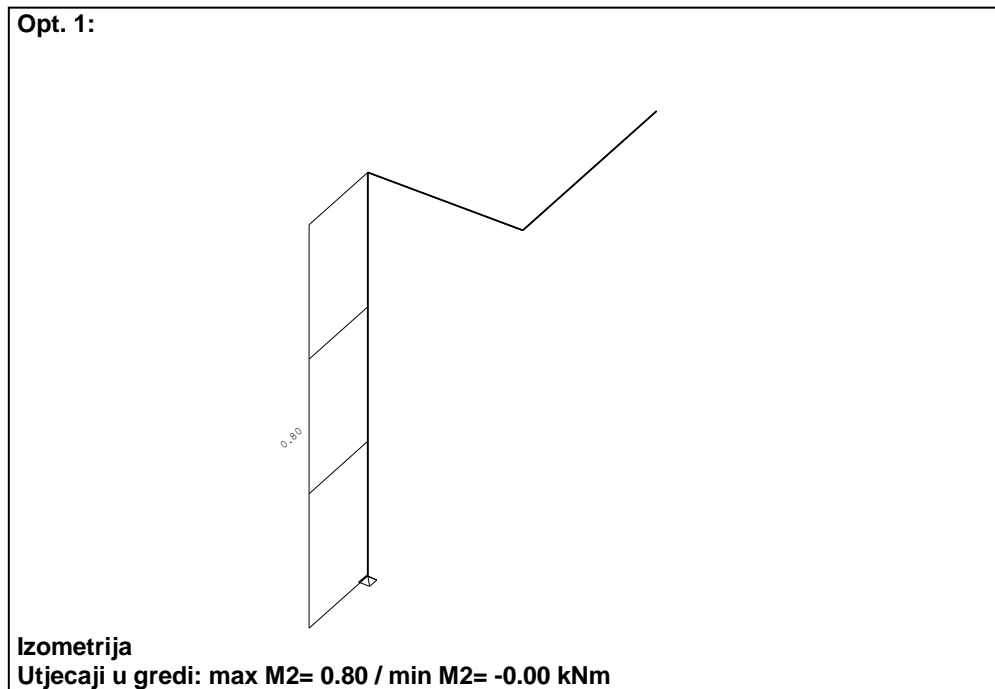
Slika 5.8. Prikaz M_t dijagrama

M_y dijagram:



Slika 5.9. Prikaz M_y dijagrama

M_z dijagram:



Slika 5.10. Prikaz M_z dijagrama

Kao i u prethodnom zadatku, dijagrami su dobiveni pomoću računalnog programa Tower. Zatim je potrebno odrediti geometrijske karakteristike kružnog poprečnog presjeka, te ekvivalentno naprezanje prema 3. i 5. teoriji čvrstoće za svaki zadani presjek.

Geometrijske karakteristike:

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = 1257 \text{ mm}^2$$

$$I_y = I_z = \frac{d^4 \pi}{64} = 125663,7 \text{ mm}^4$$

$$W_y = W_z = \frac{d^3 \pi}{32} = \frac{40^3 \pi}{32} = 6283 \text{ mm}^3$$

$$W_p = \frac{d^3 \pi}{16} = 12566 \text{ mm}^3$$

3. TEORIJA ČVRSTOĆE

Ekvivalentno naprezanje :

$$\sigma_{ek} = |\sigma_1 - \sigma_2|$$

Presjek 1-1:

Vrijednosti unutarnjih sila:

$$M_y = M_s = 0,8 \text{ kNm}$$

Glavna naprezanja:

$$\sigma_{1,2} = \frac{M_s \pm M_s}{2W_y}$$

$$\sigma_1 = \frac{0,8 \cdot 10^6}{6283} = 127,33 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0 \text{ MPa}$$

Ekvivalentno naprezanje:

$$\sigma_{ek} = 127,33 \text{ MPa}$$

Presjek 2-2:

Vrijednosti unutarnjih sila:

$$M_y = M_s = 0,6 \text{ kNm}$$

$$M_t = 0,8 \text{ kNm}$$

Glavna naprezanja:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2W_y} \left(M_s \pm \sqrt{M_s^2 + M_t^2} \right) = \frac{1}{2 \cdot 6283} \cdot \left(0,6 \cdot 10^6 \pm \sqrt{(0,6 \cdot 10^6)^2 + (0,8 \cdot 10^6)^2} \right)$$

$$\sigma_1 = 127,33 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -31,83 \text{ MPa}$$

Ekvivalentno naprezanje:

$$\sigma_{ek} = |\sigma_1 - \sigma_2| = |127,33 - (-31,83)| = 159,16 \text{ MPa}$$

Presjek 3-3:

Vrijednosti unutarnjih sila:

$$N = 2 \text{ kN}$$

$$M_y = 0,6 \text{ kNm}$$

$$M_z = 0,8 \text{ kNm}$$

$$M_s = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{0,6^2 + 0,8^2} = 1 \text{ kNm}$$

Ekvivalentno naprezanje:

$$\sigma_{ek} = |\sigma_1 - \sigma_2| = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma$$

$$\sigma_{ek} = \frac{M_s}{W_y} + \frac{N}{A} = \frac{1,0 \cdot 10^6}{6283} + \frac{2 \cdot 10^3}{1257} = 160,75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ek} = 160,75 \text{ MPa}$$

5. TEORIJA ČVRSTOĆE

Ekvivalentno naprezanje :

$$\sigma_{ek} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$$

Presjek 1-1:

Vrijednosti unutarnjih sila:

$$M_y = M_s = 0,8 \text{ kNm}$$

Ekvivalentno naprezanje:

$$\sigma_{ek} = \frac{M_s}{W_y} = \frac{0,8 \cdot 10^6}{6283} = 127,33 \text{ MPa}$$

Presjek 2-2:

Vrijednosti unutarnjih sila:

$$M_y = M_s = 0,6 \text{ kNm}$$

$$M_t = 0,8 \text{ kNm}$$

Glavna naprezanja:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_x = \frac{M_s}{W_y} = \frac{0,6 \cdot 10^6}{6283} = 95,5 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{M_t}{W_p} = \frac{0,8 \cdot 10^6}{12566} = 63,66 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{95,5}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{95,5^2 + 4 \cdot 63,66^2}$$

$$\sigma_1 = 127,33 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -31,83 \text{ MPa}$$

Ekvivalentno naprezanje:

$$\sigma_{ek} = \sqrt{127,33^2 + (-31,83)^2 - 127,33 \cdot (-31,83)}$$

$$\sigma_{ek} = 145,87 \text{ MPa}$$

Presjek 3-3:

Vrijednosti unutarnjih sila:

$$N = 2 \text{ kN}$$

$$M_y = 0,6 \text{ kNm}$$

$$M_z = 0,8 \text{ kNm}$$

$$M_s = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{0,6^2 + 0,8^2} = 1 \text{ kNm}$$

Ekvivalentno naprezanje:

$$\sigma_{ek} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sigma$$

$$\sigma_{ek} = \frac{M_s}{W_y} + \frac{N}{A} = \frac{1,0 \cdot 10^6}{6283} + \frac{2 \cdot 10^3}{1257} = 160,75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ek} = 160,75 \text{ MPa}$$

Nakon što smo odredili ekvivalentna naprezanja možemo izračunati koeficijente sigurnosti.

KOEFICIJENTI SIGURNOSTI

$$k = \frac{\sigma_T}{\sigma_{ek}}$$

Koeficijenti sigurnosti za ekvivalentna naprezanja dobivena prema 3. teoriji čvrstoće:

Presjek 1-1:

$$k = \frac{240 \text{ MPa}}{127,33 \text{ MPa}} = 1,88$$

Presjek 2-2:

$$k = \frac{240 \text{ MPa}}{159,16 \text{ MPa}} = 1,51$$

Presjek 3-3:

$$k = \frac{240 \text{ MPa}}{160,75 \text{ MPa}} = 1,49$$

Koeficijenti sigurnosti za ekvivalentna naprezanja dobivena prema 5. teoriji čvrstoće:

Presjek 1-1:

$$k = \frac{240 \text{ MPa}}{127,33 \text{ MPa}} = 1,88$$

Presjek 2-2:

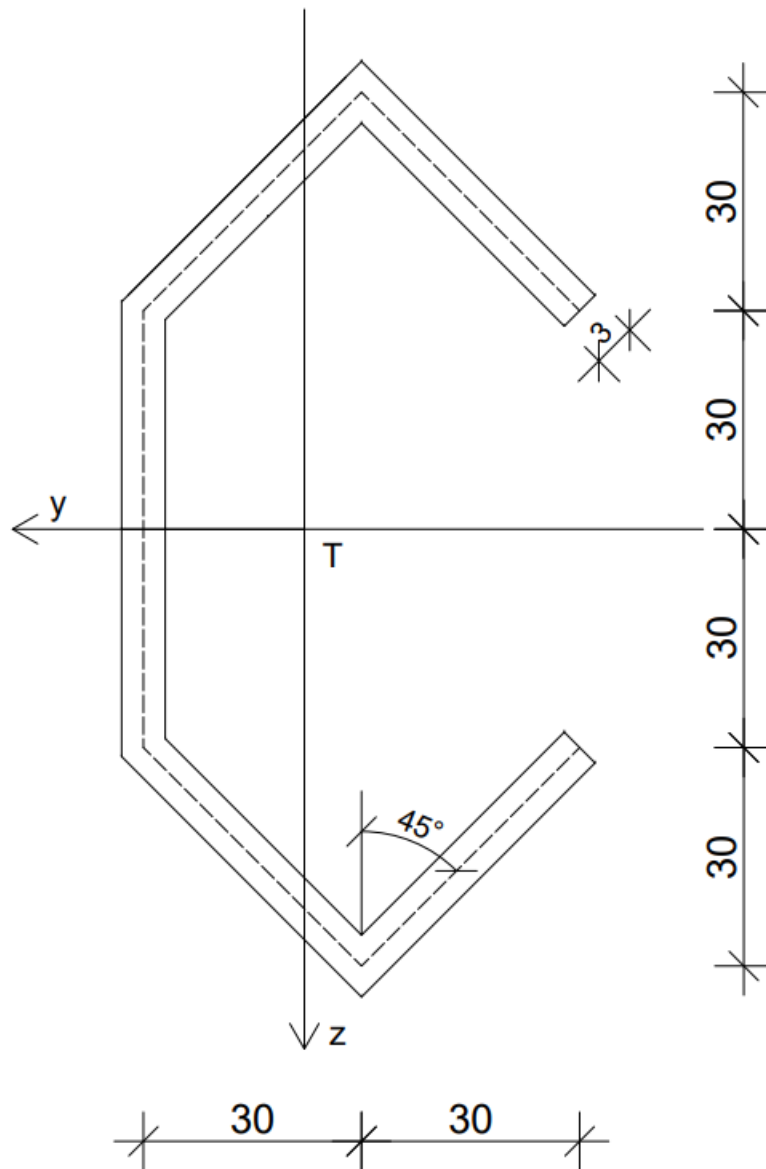
$$k = \frac{240 \text{ MPa}}{145,87 \text{ MPa}} = 1,65$$

Presjek 3-3:

$$k = \frac{240 \text{ MPa}}{160,75 \text{ MPa}} = 1,49$$

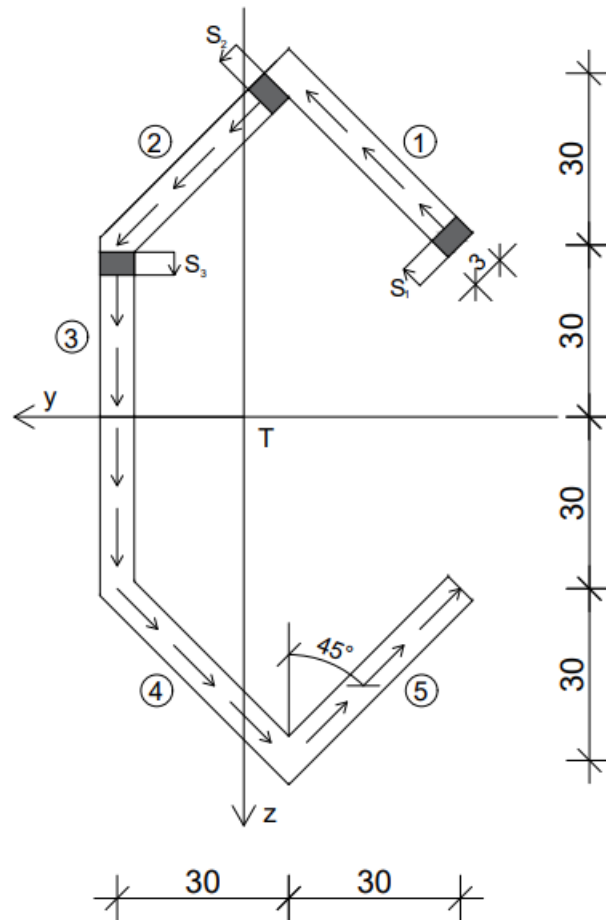
5.3. Određivanje središta posmika tankostjenog poprečnog presjeka

Za zadani tankostjeni profil potrebno je odrediti središte posmika i nacrtati dijagram posmičnih naprezanja.



Slika 5.11. Numerički primjer 3

Kako bi riješili zadatak prvo trebamo odrediti rezultante posmičnih naprezanja po dijelovima poprečnog presjeka (S_i).



Slika 5.12. Prikaz rezultanti posmičnih naprežanja po dijelovima poprečnog presjeka

Posmična naprežanja računamo po izrazu:

$$\tau = \frac{T_z \cdot S_y}{I_y \cdot t}$$

T_z – poprečna sila

S_y – statički moment površine

I_y – moment tromosti poprečnog presjeka

t – debljina stijenke poprečnog presjeka

Određivanje aksijalnog momenta tromosti:

$$I_y = 4 \cdot \left[\frac{3}{\sin 45^\circ} \cdot \frac{30^3}{12} + 3 \cdot 42,45 \cdot (45)^2 \right] + \frac{3 \cdot 60^3}{12} = 1,123 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Dio 1:

$$S_y^1 = t \cdot s_1 \cdot \left(30 + \frac{s_1 \cdot \sin 45^\circ}{2} \right) = t \cdot s_1 (30 + 0,354s_1)$$

$$\tau_1 = \frac{T_z}{I_y \cdot t} \cdot t \cdot s_1 (30 + 0,354s_1)$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_0^a \tau_1 t ds_1 = \int_0^a \frac{T_z}{I_y} (90 \cdot s_1 + 1,06s_1^2) ds_1 = \frac{T_z}{I_y} \left(90 \frac{a^2}{2} + 1,06 \frac{a^3}{3} \right) \\ &= \frac{T_z}{1,123 \cdot 10^6} \left(90 \frac{42,43^2}{2} + 1,06 \frac{42,43^3}{3} \right) = 0,0943T_z \end{aligned}$$

Rezultanta na dijelu 1. Simetrija! $T_1 = T_5$

Dio 2:

$$S_y^1 = 90 \cdot 42,43 + 1,06 \cdot 42,43^2 = 5727 \text{ mm}^3$$

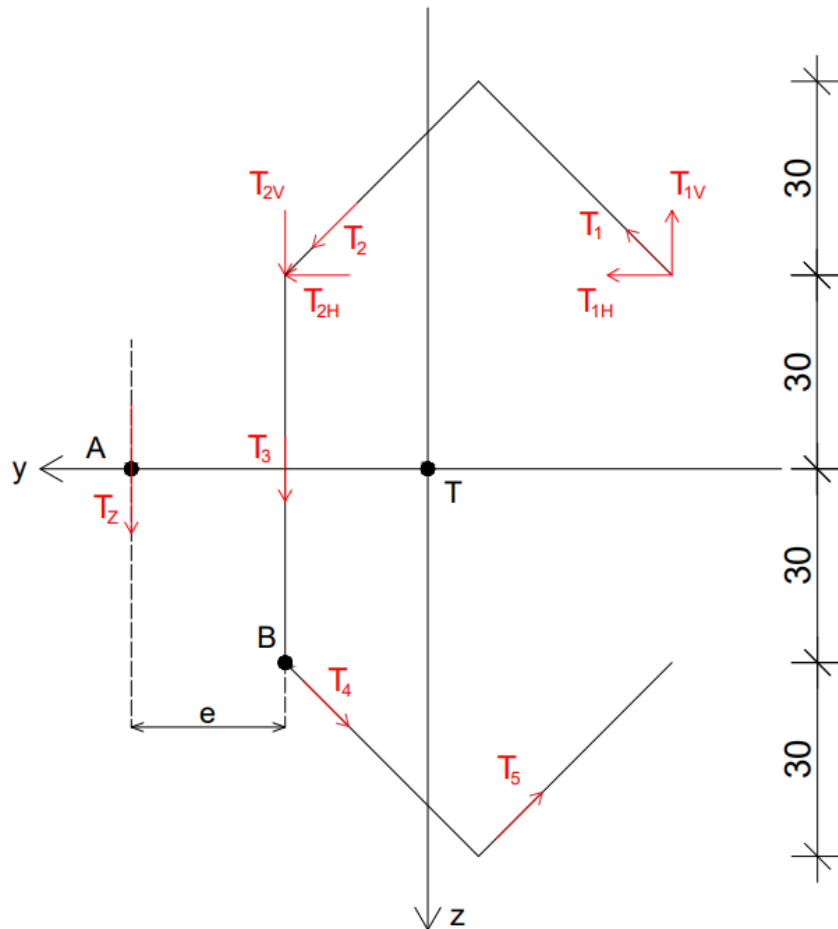
$$S_y^2 = S_y^1 + 3 \cdot s_2 \cdot \left(60 - \frac{s_2 \cdot \sin 45^\circ}{2} \right) = 5727 + 180 \cdot s_2 - 1,06s_2^2$$

$$\tau_2 = \frac{T_z}{I_y \cdot t} (5727 + 180 \cdot s_2 - 1,06s_2^2)$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_0^a \tau_2 t ds_2 \\ &= \int_0^a \frac{T_z}{I_y} (5727 + 180 \cdot s_2 - 1,06s_2^2) ds_2 \\ &= \frac{T_z}{I_y} \left(5727 \cdot a + 180 \frac{a^2}{2} - 1,06 \frac{a^3}{3} \right) \\ &= \frac{T_z}{1,123 \cdot 10^6} \left(5727 \cdot 42,43 + 180 \frac{42,43^2}{2} - 1,06 \frac{42,43^3}{3} \right) = 0,337T_z \end{aligned}$$

Rezultanta na dijelu 2. Simetrija! $T_2 = T_4$

Određivanje unutarnjih sila:



Slika 5.13. Shema unutarnjih posmičnih sila T_i i poprečne sile T_z

$$T_z \cdot e = T_{2H} \cdot 60 + T_{1H} \cdot 60 + T_{1V} \cdot 60 \cdot 2$$

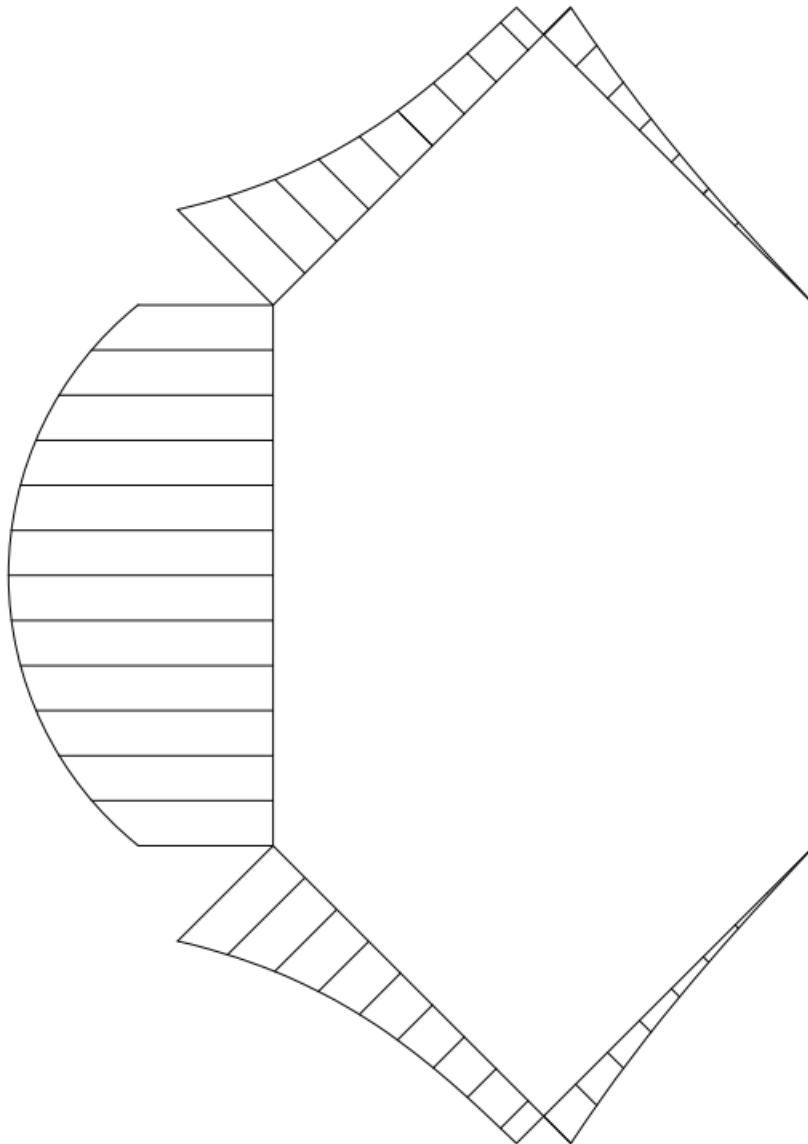
$$T_z \cdot e = T_2 \cdot \cos 45^\circ \cdot 60 + T_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot 60 + T_1 \cdot \cos 45^\circ \cdot 60 \cdot 2$$

$$T_z \cdot e = 0,337T_z \cdot \cos 45^\circ \cdot 60 + 0,0943T_z \cdot \sin 45^\circ \cdot 60 + 0,0943T_z \cdot \cos 45^\circ \cdot 60 \cdot 2 \quad / (T_z)$$

$$e = 26,35 \text{ mm}$$

Pozitivan predznak e znači da je položaj sile T_z dobro pretpostavljen.

Dijagram posmičnih naprezanja:



Slika 5.14. Prikaz dijagrama posmičnih naprezanja

6. ZAKLJUČAK

U ovom radu analizirano je ponašanje štapova pod kombiniranim opterećenjem savijanja i torzije uz primjenu teorija čvrstoće te središte posmika tankostjenog poprečnog presjeka. Rezultati pokazuju da kružni poprečni presjeci, uz primjenu teorija čvrstoće, omogućuju precizno određivanje sigurnosnih parametara i otpornosti na kombinirana opterećenja. Kod tankostjenih štapova otvorenog presjeka, određivanje središta posmika ključno je za smanjenje djelovanja torzije, što omogućuje pojednostavljene stanja naprezanja. Analiza tankostjenih štapova otvorenog poprečnog presjeka naglašava važnost preciznog određivanja središta posmika kod elemenata s malom torzijskom krutošću.

POPIS LITERATURE

- [1] Brčić, V., Otpornost materijala, Građevinska knjiga, Beograd, 1982.
- [2] Šimić, V., Otpornost materijala II, I izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1995.
- [3] Šimić, V., Otpornost materijala I, Školska knjiga, Zagreb, 2002.
- [4] Alfirević, I., Nauka o čvrstoći I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
- [5] »Repozitorij kolegija Otpornost materijala 2,« [Mrežno].
https://www.grad.unizg.hr/_download/repository/Predavanje%205.pdf

POPIS SLIKA

Slika 2.1. Štap kružnog poprečnog presjeka istovremeno opterećen momentom savijanja i momentom torzije [2].....	3
Slika 3.1. Troosno i ekvivalentno jednoosno stanje naprezanja	6
Slika 4.1. Savijanje ravnog štapa (Izvor: [5]).....	11
Slika 5.1. Numerički primjer 1	13
Slika 5.2. Prikaz T dijagrama.....	14
Slika 5.3. Prikaz M_t dijagrama.....	14
Slika 5.4. Prikaz M_y dijagrama.....	15
Slika 5.5. Numerički primjer 2	17
Slika 5.6. Prikaz T dijagrama.....	18
Slika 5.7. Prikaz N dijagrama	18
Slika 5.8. Prikaz M_t dijagrama.....	19
Slika 5.9. Prikaz M_y dijagrama.....	19
Slika 5.10. Prikaz M_z dijagrama.....	20
Slika 5.11. Numerički primjer 3.....	26
Slika 5.12. Prikaz rezultanti posmičnih naprezanja po dijelovima poprečnog presjeka	27
Slika 5.13. Shema unutarnjih posmičnih sila T_i i poprečne sile T_z	29
Slika 5.14. Prikaz dijagrama posmičnih naprezanja.....	30