

# Određivanje pomaka točaka statičkih sistema analitičkim i grafoanalitičkim postupkom

---

Lazić, Matija

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:391387>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-03**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Matija Lazić

**ODREĐIVANJE POMAKA TOČKA STATIČKIH  
SISTEMA ANALITIČKIM I GRAFOANALITIČKIM  
POSTUPKOM**

ZAVRŠNI ISPIT

Zagreb, 2024.



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Matija Lazić

**DETERMINATION OF DISPLACEMENTS OF  
POINTS OF STRUCTURAL SYSTEMS USING  
ANALYTICAL AND GRAPHOANALYTICAL  
PROCEDURES**

FINAL EXAM

Zagreb, 2024.



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Matija Lazić

**ODREĐIVANJE POMAKA TOČKA STATIČKIH  
SISTEMA ANALITIČKIM I GRAFOANALITIČKIM  
POSTUPKOM**

ZAVRŠNI ISPIT

Mentor : izv.prof.dr.sc. Petra Gidak

Zagreb, 2024.



OBRAZAC 3

POTVRDA O POZITIVNOJ OCJENI PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Student/ica :

<b>Matija Lazić</b> (Ime i prezime)	<b>0082065926</b> (JMBAG)
--	------------------------------

zadovoljio/la je na pisanom dijelu završnog ispita pod naslovom:

<b>Određivanje pomaka točaka statičkih sistema analitičkim i grafoanalitičkim postupkom</b> (Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)
--

<b>Determination of displacements of points of structural systems using analytical and grapho-analytical procedures</b> (Naslov teme završnog ispita na engleskom jeziku)
--

i predlaže se provođenje daljnjeg postupka u skladu s Pravilnikom o završnom ispitu i diplomskom radu Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta.

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu znanstvenog projekta: (upisati ako je primjenjivo)

  (Naziv projekta, šifra projekta, voditelj projekta)
---

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu stručne prakse na Fakultetu: (upisati ako je primjenjivo)

  (Ime poslodavca, datum početka i kraja stručne prakse)
--

Datum:

<b>17. rujna 2024.</b>
------------------------

Mentor:

<b>Petra Gidak</b>
--------------------

Potpis mentora:

--

Komentor:

------



Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet



OBRAZAC 5

### IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja:

Matija Kazió, 0082065026

(Ime i prezime, JMBAG)

student/ica Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta ovim putem izjavljujem da je moj pisani dio završnog ispita pod naslovom:

Određivanje pomaka statičkih sistema analitičkim i grafoanalitičkim postupkom

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

izvorni rezultat mogega rada te da se u izradi istoga nisam koristio/la drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

Datum:

17. rujna 2024.

Potpis:



OBRAZAC 6

IZJAVA O ODOBRENJU ZA POHRANU I OBJAVU PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Ja:

Matija Kazić, 04908354375

(Ime i prezime, OIB)

ovom izjavom potvrđujem da sam autor/ica predanog pisanog dijela završnog ispita i da sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti odgovara sadržaju dovršenog i obranjenog pisanog dijela završnog ispita pod naslovom:

Određivanje pomaka točaka statičkih sistema analitičkim i grafoanalitičkim postupkom

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

koji je izrađen na sveučilišnom prijediplomskom studiju Građevinarstvo Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta pod mentorstvom:

Petra Gidak

(Ime i prezime mentora)

i obranjen dana:

24. rujna 2024.

(Datum obrane)

Suglasan/suglasna sam da pisani dio završnog ispita bude javno dostupan, te da se trajno pohrani u digitalnom repozitoriju Građevinskog fakulteta, repozitoriju Sveučilišta u Zagrebu te nacionalnom repozitoriju.

Datum:

17. rujna 2024.

Potpis:

*ME*

## SAŽETAK

Ovaj završni rad baviti će se određivanjem pomaka točaka statički određenih ili neodređenih sistema analitičkim i grafoanalitičkim postupkom, odnosno usporedbom tih dviju metoda. Za početak će se obje procedure teorijski obraditi, a kasnije će se kao nastavak prikazati i broj različitih konkretnih primjera pomoću kojih će se teorijska podloga rada proširiti na praktičnu primjenu opisanih metoda. Metode koje će se uspoređivati su analitička metoda i grafoanalitička metoda (temeljena na Mohrovoj analogiji) određivanja progiba odnosno pomaka točke. Pomak željene točke prvo ćemo odrediti preko diferencijalne jednadžbe progibne linije, a zatim metodom jedinične sile. Dobiveni će se pomaci usporediti s iznosima određenim numerički odnosno primjenom grafoanalitičkog postupka.

**Ključne riječi:** momentni dijagram; analitička metoda; grafoanalitička metoda; Mohrova analogija; diferencijalna jednadžba progibne linije



## SUMMARY

This thesis will focus on determining the displacements of points in statically determinate or indeterminate systems using analytical and graphical-analytical methods, specifically by comparing these two approaches. Initially, both procedures will be theoretically examined, followed by the presentation of various concrete examples to extend the theoretical foundation of the work to practical application of the described methods. The methods to be compared are the analytical method and the graphical-analytical method (based on Mohr's analogy) for determining deflections or point displacements. One of the analytical methods will be used to determine the moment diagram values of a given static system, and the deflection will be obtained using the differential equation of the deflection curve. The calculated displacements will be compared with the values determined numerically, i.e., by applying the graphical-analytical method.

**Key words:** moment diagram; analytical method; graphical-analytical method; Mohr's analogy; differential equation of the deflection curve

## SADRŽAJ

<b>SAŽETAK</b> .....	<b>i</b>
<b>SUMMARY</b> .....	<b>ii</b>
<b>SADRŽAJ</b> .....	<b>iii</b>
<b>1. UVOD</b> .....	<b>1</b>
<b>2. ODREĐIVANJE POMAKA TOČAKA STATIČKI ODREĐENIH SISTEMA ANALITIČKOM METODOM</b> .....	<b>2</b>
2.1. ODREĐIVANJE POMAKA TOČAKA NEODREĐENOG STATIČKOG SISTEMA ANALITIČKOM METODOM (METODOM JEDINIČNE SILE).....	7
2.1.1. ODREĐIVANJE POMAKA TOČAKA STATIČKIH SISTEMA GRAFOANALITIČKIM POSTUPKOM .....	17
2.1.1.1. USPOREDBA REZULTATA POMAKA DOBIVENOG RAZLIČITIM METODAMA.....	24
<b>3. ZAKLJUČAK</b> .....	<b>35</b>
<b>POPIS LITERATURE</b> .....	<b>37</b>
<b>POPIS SLIKA</b> .....	<b>38</b>

## 1. UVOD

Tema kojom će se ovaj završni rad baviti je usporedba određivanja pomaka točaka statičkih sistema analitičkim i grafoanalitičkim postupkom. Analitičkim metodama odrediti ćemo vrijednost progiba točke u statičkom sistemu. Dobiveni će se analitički pomaci usporediti s iznosima određenim numerički odnosno primjenom grafoanalitičkog postupka. Obje će se procedure teorijski obraditi. Ova je tema značajna zbog usporedbe preciznosti rezultata dobivenih na temelju primjene dvije prethodno navedene metode. Kada odredimo pomak npr. grafoanalitičkom metodom, jednostavno možemo provjeriti točnost našeg proračuna analitikom. Važno je dobro usporediti dvije metode, vidjeti koje su prednosti i mane svake, te na kraju uz praktičnu primjenu svake od njih dobiti tražene rezultate koje ćemo usporediti te ustvrditi kolika je razlika između njih.

## 2. ODREĐIVANJE POMAKA TOČAKA STATIČKI ODREĐENIH SISTEMA ANALITIČKOM METODOM

U ovome ćemo poglavlju objasniti postupak dobivanja pomaka u nekoj od promatranih točaka statički određenih nosača analitičkim putem. Za početak ćemo definirati što su to statički određeni sistemi, kako se kod njih računaju vanjske i unutarnje sile te zatim postupak konstrukcije momentnog dijagrama koji nam je potreban kako bi u konačnici preko diferencijalne jednadžbe progibne linije, koja je povezana s momentnom funkcijom, jednostavno mogli odrediti vrijednost pomaka. Način određivanja vanjskih i unutarnjih sila statičkog sustava analitičkim putem zavisi od toga da li je sustav određen ili neodređen. Kada bi govorili o statički određenom sustavu, to bi u prijevodu značilo da sve vanjske (reakcije na ležajevima) i unutarnje sile (momenti, poprečne i uzdužne sile) tog sustava možemo odrediti iz tri osnovne jednadžbe ravnoteže. Tri osnovne jednadžbe ravnoteže ravninskog sustava su :

$$(1) \quad \sum F_x = 0$$

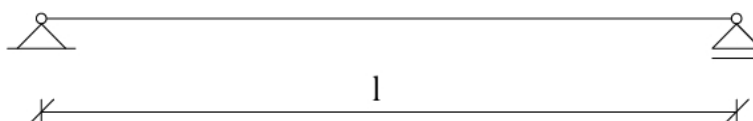
$$(2) \quad \sum F_y = 0$$

$$(3) \quad \sum M_K + \sum F_i * R_i = 0$$

Izraz (1) kaže kako suma svih sila koje djeluju na statički određeni sustav mora biti jednaka nuli kako bi tijelo bilo u ravnoteži. Izraz (2) predstavlja isto kao i izraz (1), samo se odnosi na sve sile u y smjeru. Izraz (3) kaže kako suma svih koncentriranih momenata i momenata uzrokovanih djelovanjem sila na određenoj udaljenosti, mora biti jednaka nuli.

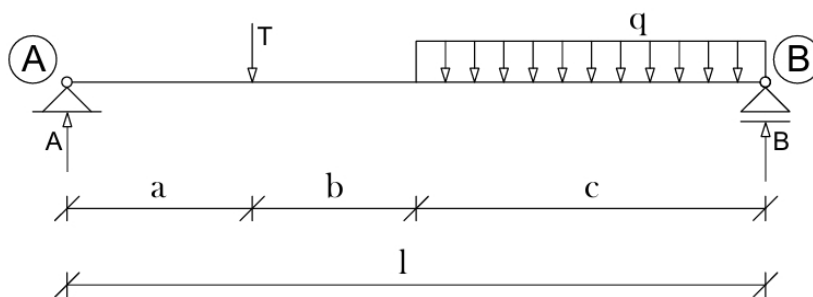
Dakle, statički određeni sistemi su konstruktivni sistemi kod kojih se vanjske i unutarnje sile mogu izračunati korištenjem isključivo uvjeta ravnoteže. Svako opterećenje statički određenog sistema dovodi do jednoznačnih rješenja za sve sile unutar sistema. Drugim riječima, ako se na bilo koji način izračunaju sile u sistemu koje zadovoljavaju jednadžbe ravnoteže za zadano opterećenje, to rješenje je točno i jedinstveno. (Veselin Simović, 1988.)

Sada ćemo jedan primjer statički određenog sistema. Na slici 1 prikazan je primjer statički određenog sustava.



**Slika 1.** : Statički određen sustav br.1 (prosta greda)

Dakle, kada bi na nosaču sa slike 1 djelovalo bilo kakvo vanjsko opterećenje, reakcijske sile na ležajevima nosača i unutarnje sile u nosaču mogli bi odrediti koristeći se jednačbama ravnoteže obzirom na to da se radi o statički određenom nosaču. Opteretimo li sada nosač sa slike 1 poprečnom silom ( $T$ ) u točki  $x = a$  i jednolikim kontinuiranim poprečnim opterećenjem ( $q$ ) koje djeluje na rasponu  $c$ , možemo započeti sa objašnjavanjem postupka određivanja dijagrama momenata koji nam je potreban za određivanje pomaka točaka nosača analitičkim putem. Uzdužna reakcijska sila u ležaju  $A$  jednaka je nuli jer nema zadanog vanjskog opterećenja u  $x$  smjeru, te obzirom da je u ležaju  $B$  oslobođen pomak u horizontalnom smjeru, što znači da taj ležaj ne preuzima nikakvu horizontalnu silu. Uslijed toga, kada bi horizontalna sila u ležaju  $A$  postojala, ne bi postojala sila koja ju može uravnotežiti, stoga zaključujemo da je  $A_x = 0$ . Prosta greda sa zadanim prethodno opisanim vanjskim opterećenjem prikazana je na slici 2.



**Slika 2.** : Statički određen sustav br.1 sa zadanim vanjskim opterećenjem (Izvor : Simović, 1988.)

Za zadano vanjsko opterećenje potrebno je konstruirati momentni dijagram. Postupak ćemo objasniti na način da ćemo ići od početka nosača (čvor  $A$ ) prema kraju nosača (čvor  $B$ ) te ga podijeliti na intervale u kojima ćemo onda odrediti izraz momentne funkcije. Na prvom intervalu  $[0 \leq x \leq a]$  jednačba za moment savijanja glasi :

$$(4) \quad M_x = A * x$$

Reakcijska poprečna sila u ležaju  $A$  jedina je sila koja uzrokuje pojavu momenta savijanja u nosaču. Iz navedenog izraza za moment savijanja na prvom intervalu jasno je da je funkcija momenta na tom dijelu nosača linearna. To implicira da će dijagram momenta biti pravac koji spaja točke definirane vrijednostima momenata na granicama intervala. Te vrijednosti su za  $x = 0$ ;  $M_A = 0$  i za  $x = a$ ;  $M_A = A * a$ . Na drugom intervalu,  $[a \leq x \leq (a + b)]$ , jednačba momenata savijanja ima sljedeći oblik :

$$(5) \quad M_x = A * x - T * (x - a)$$

Na ovome je intervalu momentna funkcija također linearna, pa kontura dijagrama zadržava oblik pravca. Jasno je da je u početnoj točki ovoga intervala  $x = a$  vrijednost momenta  $M_1$

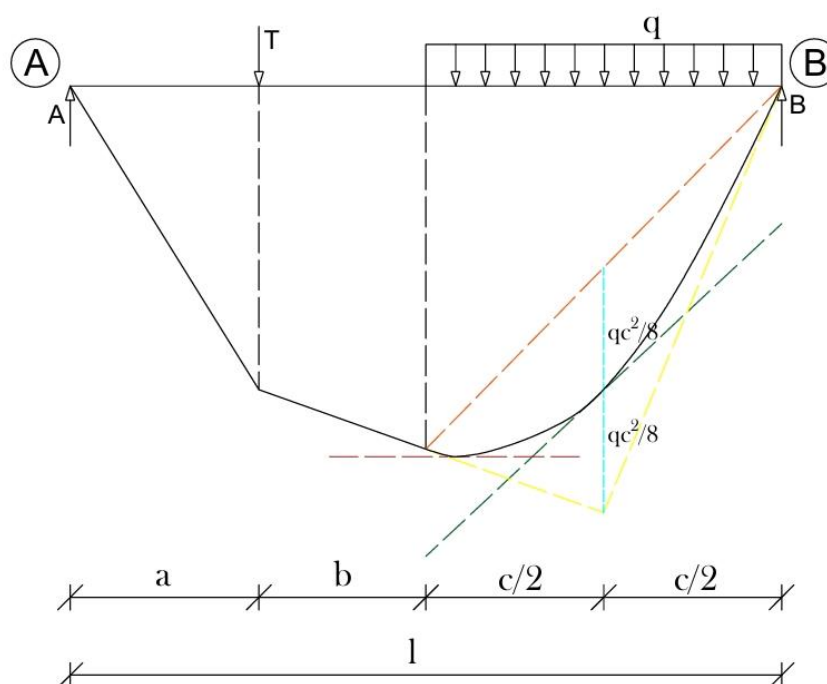
jednaka onome u krajnjoj točki prvom intervala. Vrijednost momenta savijanja u točki  $x = (a + b)$  iznosi :

$$(1) \quad M_2 = A * (a + b) - T * b$$

Za treći interval,  $[(a + b) \leq x \leq l]$ , funkcija momenata imati će oblik kvadratne funkcije :

$$(2) \quad M_x = B * (l - x) - \frac{q * (l - x)^2}{2}$$

Kako bismo pojednostavili izraz, jednadžba momenta savijanja je formulirana tako da se zbroj momenata svih sila koje djeluju s desne strane presjeka uzima u obzir. Stoga će na tom dijelu grede moment biti parabola drugog stupnja. S obzirom na to da su vrijednosti momenata na granicama područja poznate, a mogu se također izračunati iz prethodno navedene jednadžbe, grafički prikaz momenata savijanja dobiva se konstrukcijom parabole drugog stupnja koja prolazi kroz dvije zadane točke, s poznatom tangentom u jednoj od tih točaka (točka 2). Konstrukcija momentnog dijagrama za sustav zadan na slici 3 prema navedenim koracima prikazana je na slici 3. (Veselin Simović, 1988.)



**Slika 3.** : Momentni dijagram (Izvor : Simović, 1988.)

Konstrukcija linearnog dijela momentnog dijagrama lako se dobije iz navedenih formula. Konstrukcija paraboličnog dijela dijagrama provodi se na sljedeći način. Za početak, narančastom iscrtkanom linijom spojimo granične vrijednosti momenta savijanja na intervalu  $[(a + b) \leq x \leq l]$ . Zatim, na sredini područja djelovanja distribuirane sile ( $c/2$ ) od narančaste

linije dva puta nanosimo vrijednost  $\frac{q \cdot c^2}{8}$ . Kada smo to napravili, u točki kraja prve nanosene vrijednosti  $\frac{q \cdot c^2}{8}$  crtamo iscrtkanu zelenu liniju paralelnu narančastoj. Sa točkom kraja druge nanešene vrijednosti  $\frac{q \cdot c^2}{8}$  spajamo granične vrijednosti momenata na intervalu. To je naznačeno žutim linijama. Žuta linija s lijeve strane dijagrama biti će samo produljenje pravca momentnog dijagrama na drugom intervalu zato što u točki  $x = (a + b)$  ne djeluje nikakva koncentrirana poprečna sila koja bi prelomila tu tangentu. Sada smo konstruirali sve što je potrebno za crtanje krivulje drugog reda. Tangente naše krivulje biti će dvije žute i zelena iscrtkana linija. Dijagram momenata ima maksimalnu vrijednost  $M_{max}$  u točki gdje je poprečna sila jednaka nuli ( $P = 0$ ). U toj točki nagib tangente na dijagram jednak je nuli, odnosno tangenta je položena horizontalno u smjeru osi x. Na taj smo način u potpunosti konstruirali momentni dijagram koji nam je potreban za određivanje pomaka.

Kako bi odredili pomak u nekoj točki nosača, koristit ćemo se diferencijalnom jednačbom progibne linije. Izvod diferencijalne jednačbe proizlazi iz povezanosti zakrivljenosti grede  $\kappa(x)$  s progibom  $w(x)$  preko druge derivacije i iz izraza Hookeovog zakona za savijanje :

$$(6) \quad \kappa(x) = \frac{d^2 w(x)}{dx^2}$$

$$(7) \quad M(x) = EI * \kappa(x)$$

Izraz (6) predstavlja izraz za zakrivljenost nosača preko progiba, dok izraz (7) predstavlja Hookeov zakon za savijanje. Prema Hookeovom zakonu za savijanje (izraz 7), vidimo da je moment savijanja povezan s zakrivljenošću nosača. Član  $EI$  predstavlja fleksijsku krutost nosača, odnosno otpornost materijala od kojeg je nosač načinjen na savijanje. Vidimo kako u oba izraza imamo prisutnu zakrivljenost nosača  $\kappa(x)$ . Kada iz izraza (7) izrazimo zakrivljenost nosača, dobivamo :

$$(8) \quad \kappa(x) = \frac{M(x)}{EI}$$

Sada jednostavno izjednačimo dva različita izraza za zakrivljenost, izraz (6) i izraz (8), te dobivamo:

$$(9) \quad \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

Izraz (9) predstavlja diferencijalnu jednačbu progibne linije nosača. Dvostrukim integriranjem izraza (9) dobivamo izraz (10) za progib nosača :

$$(10) \quad w(x) = \frac{1}{EI} * \iint M(x) dx dx + C_1 x + C_2$$

pri čemu su :

- $M(x)$  – funkcija vrijednosti momenta po apscisi (x) ravnog nosača
- $EI$  – fleksijska krutost nosača

- $C_1, C_2$  – konstante integracije koje se određuju iz rubnih uvjeta grede (npr. progib na krajevima grede)
- $w(x)$  – progib nosača

Primjenjujući izraz (10) možemo za primjer odrediti progib nosača sa slike 3 u točki  $x = (a + b) + \frac{c}{2}$ . Kako bi odredili pomak, dvostruko integriramo funkciju momenta za treći interval po  $x$ . Funkcija momenata glasi :

$$(11) \quad M_x = B * (l - x) - \frac{q*(l-x)^2}{2}$$

Kada ju dvostruko integriramo dobivamo :

$$(12) \quad \iint M_x = B * \frac{(l-x)^3}{6} - \frac{q*(l-x)^4}{24} + C_5x + C_6$$

Kada uvrstimo  $x = (a + b) + \frac{c}{2}$ , dobivamo izraz za progib u toj točki :

$$(13) \quad w\left(a + b + \frac{c}{2}\right) = \frac{1}{EI} * \iint \left( B * \frac{(l-a+b+\frac{c}{2})^3}{6} - \frac{q*(l-a+b+\frac{c}{2})^4}{24} + C_5x + C_6 \right)$$

Detaljnije određivanje konstanti integracije pokazat ćemo u zadnjem poglavlju na konkretnom primjeru. Sada imamo opći izraz za vrijednost progiba u točki nosača  $x = (a + b) + \frac{c}{2}$ .



## 2.1. ODREĐIVANJE POMAKA TOČAKA NEODREĐENOG STATIČKOG SISTEMA ANALITIČKOM METODOM (METODOM JEDINIČNE SILE)

U ovome ćemo poglavlju objasniti postupak određivanja progiba u promatranoj točki statički neodređenog nosača analitičkim putem pomoću metode jedinične sile. Za početak ćemo definirati što je to statički neodređeni sistem, zatim ćemo nabrojiti neke od metoda pomoću kojih možemo dobiti iznose vanjskih, unutarnjih sila i pomaka u takvim sistemima. Zatim ćemo kroz primjer detaljnije objasniti primjenu metode jedinične sile kako bismo u konačnici došli do analitičke vrijednosti progiba na zadanom statički neodređenom sistemu.

Statički neodređeni sustavi su geometrijski nepromjenjivi sustavi koji imaju više veza nego što je minimalno potrebno. U takvim sustavima sile se ne mogu izračunati samo pomoću jednadžbi ravnoteže, već je potrebno uzeti u obzir i jednadžbe koje povezuju deformacije i pomake. Iako kod statički neodređenih sustava postoji jednoznačnost rješenja, ispravnost rješenja ne može se provjeriti isključivo pomoću uvjeta ravnoteže. Potrebno je zadovoljiti i uvjete kompatibilnosti deformacija i pomaka. Iako postoji beskonačno mnogo rješenja koja zadovoljavaju uvjete ravnoteže, ispravno je samo ono koje zadovoljava i uvjete deformacija i pomaka. (Veselin Simović, Građevna statika 1)

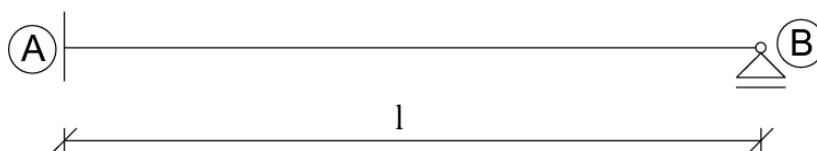
Formula za određivanje stupnja statičke neodređenosti sistema glasi :

$$(14) \quad m = 3k - 1z_2 - 2z_3 - 3z_4 - \dots$$

Pri čemu je :

- $k$  – broj zatvorenih struktura u sustavu
- $z_2, z_3, z_4, \dots$  – zglobovi koji povezuju 2, 3, 4, ... štapova ili diskova
- $m$  – broj prekobrojnih veza / stupanj statičke neodređenosti sustava (I.P. Prokofjev, 1968.)

Sada ćemo prokazati primjer jednog statički neodređenog sistema. Primjer je prikazan na slici 4.

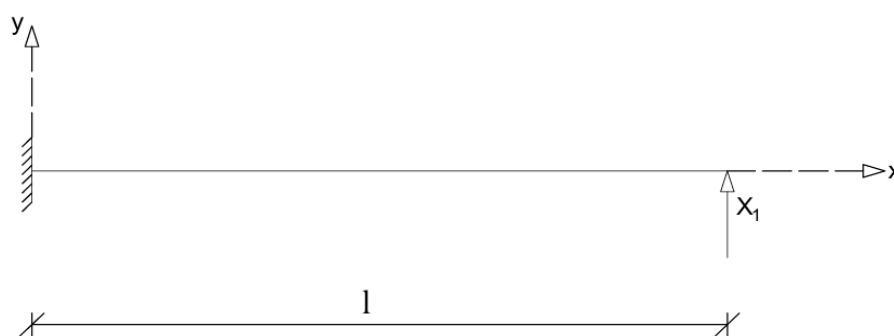


**Slika 4.** : Statički neodređen sustav br.1

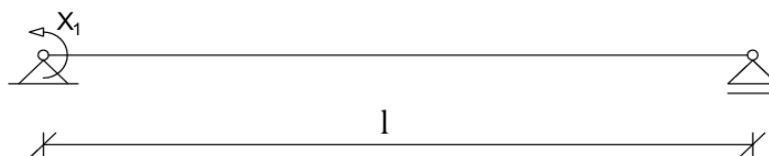
U slučaju sa slike 4 nam je zadan primjer statički neodređenog nosača sa stupnjem statičke neodređenosti  $m = 1$  (znači da ima jednu vezu više nego što je potrebno da bude statički određen). U ovom se slučaju uz jednadžbe ravnoteže moramo koristiti i nekom od

metoda koja u obzir uzima međuzavisnost deformacijske energije i pomaka. Takvih metoda postoji više, od kojih su neke metoda sila, metoda pomaka, metoda konačnih elemenata, iterativne metode i Ritzova metoda (metoda određivanja minimuma potencijalne energije u linearno elastičnom modelu). Mi ćemo se, za potrebe ovog završnog rada, pri određivanju momentnog dijagrama i pomaka statički neodređenih sistema koristiti metodom jedinične sile, čiju ćemo primjenu kroz primjer sa slike 4 detaljnije pojasniti.

Metoda analiza statički neodređenih konstrukcija putem metode sila temelji se na načelu stacionarne vrijednosti ukupne komplementarne energije. Drugi Castiglianov teorem odnosi se na svojstvo komplementarne deformacijske energije, gdje je derivacija te energije po vanjskoj sili jednaka pomaku točke primjene sile u smjeru djelovanja te sile. Kako bi se odredila komplementarna deformacijska energija, potrebno je poznavati unutarnje sile u štapu ili konstrukciji, kao i njihove geometrijske i fizikalne karakteristike. Te karakteristike su unaprijed definirane. Da bi se izračunala komplementarna deformacijska energija na statički neodređenoj konstrukciji, potrebno je transformirati tu konstrukciju u statički određenu uklanjajući viška veza. Dakle statički neodređeni sustav svodimo na statički određeni nepromjenjivi sustav. Uklanjanjem suvišnih veza oslobađaju se nepoznate sile u tim vezama, koje se označavaju kao  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ . Na taj način dobiven statički određeni sustav, koji ostaje nepromjenjiv, naziva se proračunskim ili osnovnim sustavom. Dakle, metoda sila predstavlja način rješavanja statički neodređenih konstrukcija tako što se oslobađaju sile u suvišnim vezama. Sada ćemo na primjeru statički neodređenog sustava sa slike 4 prikazati dva primjera moguće postavljenih osnovnih sistema. Prvi je primjer osnovnog sistema prikazan na slici 5, a drugi na slici 6. (Milutin Anđelić, 2005.)



**Slika 5.** : Osnovni sustav br.1



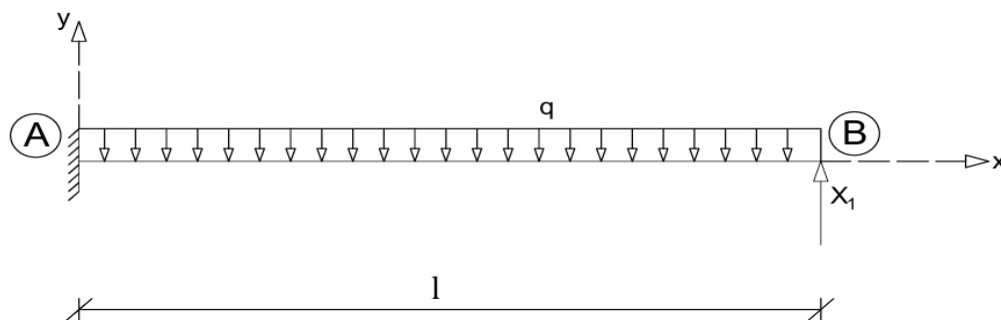
Slika 6. : Osnovni sustav br.2

U prvome smo slučaju uklonili ležaj koji je sprečavao vertikalni pomak na desnoj strani grede te ga zamjenili odgovarajućom silom  $X_1$  u y smjeru globalnog koordinatnog sustava. U slučaju sa slike 6 oslobodili smo moment na početnom ležaju nosača te ga zamijenili koncentriranim momentom  $X_1$  kako bi dobili pripadajući osnovni sustav.

Uklanjanje suvišnih veza iz statički neodređenog sustava može se obaviti na nekoliko različitih načina. Stoga mogu postojati različiti osnovni sustavi, kao što je prikazano u prethodnom primjeru. Za izbor osnovnog sistema ne postoje čvrsta pravila. Mi sami biramo koje ćemo veze presjeći, ali je poželjno je odabrati osnovni sustav na način da pomaci duž pravaca oslobođenih veza budu istog reda veličine. Sile i momenti koje dodajemo u osnovni sistem umjesto prekobrojnih veza su nepoznate vrijednosti koje prvo moramo izračunati da bismo proveli statičku analizu sistema. Kako bismo našli te sile i momente sastavljamo dodatne jednadžbe temeljene na teoriji I. reda, odnosno postojanja linearnosti kod malih pomaka i deformacija. Naš osnovni sustav, na koji djeluju unaprijed zadana opterećenja i nepoznate veličine  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  koje su uvedene umjesto uklonjenih prekobrojnih veza, mora se ponašati identično kao zadani statički neodređeni sustav. Drugim riječima, sile i pomaci koji su prouzrokovani u njemu prisustvom opterećenja i navedenih nepoznatih veličina moraju biti istovjetni sa silama i pomacima koji se javljaju u zadatom statički neodređenom sustavu. Sljedeći izraz predstavlja ukupni pomak na mjestu, u pravcu i smjeru sile u prekobrojnoj vezi, koji je uzrokovan kako vanjskim djelovanjem tako i silama u prekobrojnim vezama. To je zapravo uvjet kompatibilnosti pomaka zadanog i osnovnog statičkog sustava (Milutin Anđelić, 2005) :

$$(15) \quad \sum_{j=1}^m X_j \delta_{ij} + \delta_{i0} = 0.$$

Obzirom da zadani osnovni sustav nema relativnih pomaka na mjestima uklonjenih prekobrojnih veza, prethodni izraz je jednak nuli. Sada ćemo, radi objašnjenja načina primjene metode jedinične sile, na naš osnovni sustav sa slike 5 zadati vanjsko distribuirano opterećenje  $q$  duž cijelog nosača. Osnovni sustav sada izgleda ovako :



**Slika 7.** : Osnovni sustav br.1 sa zadanim vanjskim opterećenjem  $q$

Fleksijska je krutost  $EI$  konstantna duž cijelog nosača. Kako bi za zadani primjer odredili dijagrame unutarnjih sila potrebno je poznavati reakcije na ležajevima  $A_x, A_y, M_A$  i  $M_y$ . Jednadžba kontinuiteta za zadani statički neodređeni sistem glasi :

$$(16) \quad X_1 * \delta_{11} + \delta_{10} = 0.$$

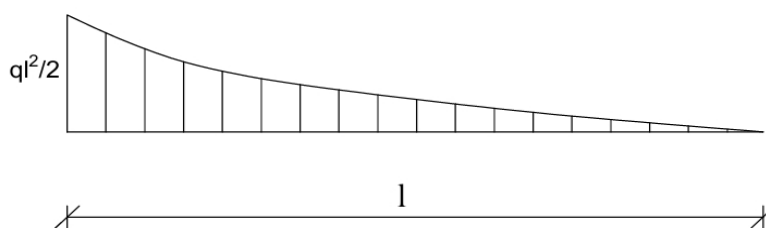
Član  $X_1 * \delta_{11}$  predstavlja vertikalni pomak točke  $B$  od sile  $X_1$ , a član  $\delta_{10}$  pomak na tom istom mjestu, ali uzrokovan vanjskim opterećenjem  $q$ . Funkcija momenta uzrokovanog vanjskim opterećenjem  $q$  glasi :

$$(17) \quad M_x^0 = -\frac{q * x^2}{2}.$$

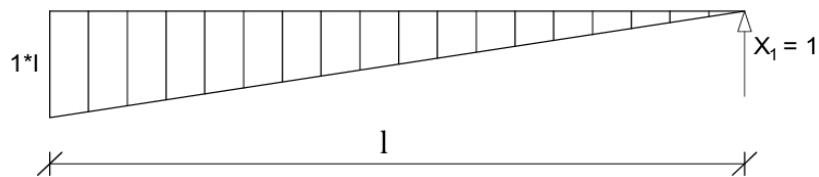
Funkcija je prikazana na način da je vrijednost momenta uzrokovana djelovanjem vanjskog opterećenja sa desne strane presjeka. Funkcija momenta uzrokovanog silom  $X_1 = 1$  je :

$$(18) \quad m_{x1} = 1 * x.$$

Momentni dijagram uzrokovan vanjskim opterećenjem  $q$  prikazan je na slici 8, a momentni dijagram uzrokovan silom  $X_1 = 1$  na slici 9.

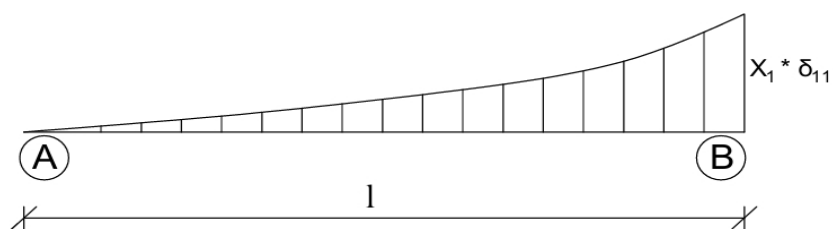


**Slika 8.** : Momentni dijagram  $M_x^0$

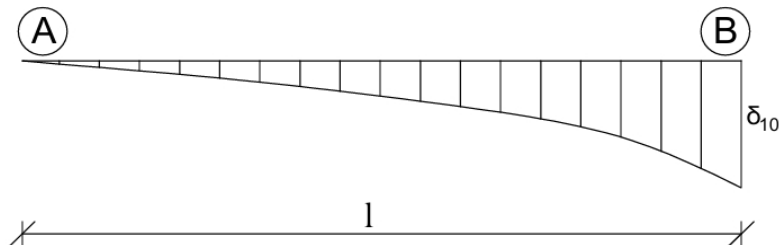


Slika 9. : Momentni dijagram  $m_{x1}$

Skica pretpostavljenog pomaka od sile  $X_1$  prikazan je na slici 10, a od opterećenja  $q$  na slici 11.

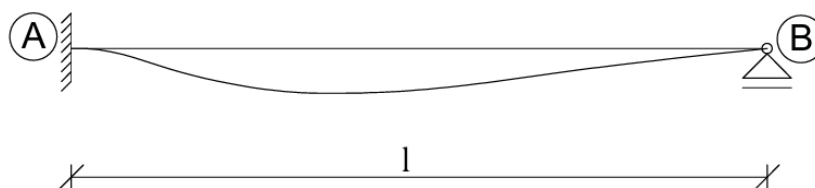


Slika 10. : Pretpostavljeni pomak nosača od sile  $X_1$



Slika 11. : Pretpostavljeni pomak nosača od opterećenja  $q$

Pretpostavka konačnog progiba uzrokovanog silom  $X_1$  i vanskim opterećenjem  $q$  prikazana je na slici 12.



Slika 12. : Pretpostavka konačnog pomaka nosača

Izrazi pomoću kojih dobivamo iznose pomaka  $\delta_{ij}$  i  $\delta_{i0}$  u općem obliku glase :

$$(19) \quad \delta_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_0^{L_k} \left( \frac{n_{xj} * n_{xi}}{E_k A_k} + \frac{m_{xj} * m_{xi}}{E_k I_k} \right) * dx$$

$$(20) \quad \delta_{i0} = \sum_{k=1}^n \int_0^{L_k} \left( \frac{N_x^0 * n_{xi}}{E_k A_k} + \frac{M_x^0 * m_{xi}}{E_k I_k} \right) * dx$$

Kada primjenimo navedene izraze u našem slučaju dobivamo sljedeće :

$$(21) \quad \delta_{11} = \int_0^l \frac{m_{x1}}{E * I} * m_{x1} * dx$$

$$(22) \quad \delta_{10} = \int_0^l \frac{M_x^0}{E * I} * m_{x1} * dx.$$

Kada uvrstimo sve što nam je iz primjera poznato, dobivamo :

$$(23) \quad \delta_{11} = - \int_0^l \frac{1 * l}{E * I} * 1 * l * dx$$

$$(24) \quad \delta_{10} = \int_0^l \frac{q * l^2}{2 * E * I} * 1 * l * dx.$$

Nakon što izraze integriramo, dobivamo :

$$(25) \quad \delta_{11} = - \frac{l^3}{3 * E * I}$$

$$(26) \quad \delta_{10} = \frac{q * l^4}{8 * E * I}$$

(Milutin Anđelić, 2005.)

Uz direktnu integraciju, vrijednosti koeficijenta fleksibilnosti možemo dobiti pomoću Vereščaginova teorema. Vereščaginov teorem predstavlja umnožak dvije podintegralne funkcije od kojih je jedna uvijek prvog stupnja zbog toga što predstavlja funkciju unutarnje sile zbog djelovanja jedinične sile ili momenta. Stupanj druge funkcije ovisiti će o kakvom se tipu vanjskog opterećenja radi (koncentrirane sile, distribuirana sila, koncentrirani momenti, ...). „Prema Vereščaginovom teoremu integral umnoška dvije funkcije od kojih je (barem) jedna prvog stupnja može se odrediti na temelju izraza :

$$(27) \quad I_{1,2} = \int_a^b g_1(x) * g_2(x) dx = G_1 * g_2(x_T(G_1))$$

Gdje je površina između  $g_1(x)$  i osi  $x$  u granicama od  $x = a$  do  $x = b$ ,  $(x_T(G_1))$  je apscisa težišta površine  $G_1$ , a  $g_2(x_T(G_1))$  je vrijednost funkcije  $g_2(x)$  za  $x = x_T(G_1)$ .“ (Petra Gidak, Elizabeta Šamec, 2022.)

Zatim jednostavnom pretvorbom izraza uvjeta kompatibilnosti dobivamo izraz za vrijednosti sile  $X_1$ .

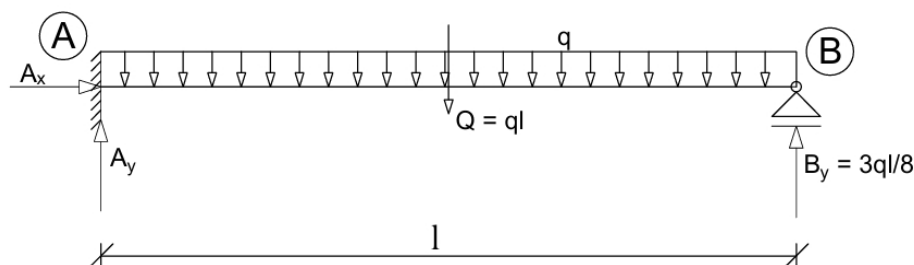
$$(28) \quad X_1 = - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

Uvrštavajući dobivene vrijednosti  $f_{11}$  i  $f_{10}$  za  $X_1$  dobivamo :

$$(29) \quad X_1 = \frac{\frac{q * l^4}{8 * E * I}}{\frac{l^3}{3 * E * I}} = \frac{3ql}{8}$$

Obzirom da smo dobili pozitivan predznak  $X_1$ , znači da smo na početku dobro pretpostavili njezin smjer. Sada kada nam je poznata vrijednost sile  $X_1$ , preko jednadžbi ravnoteže jednostavno bi mogli izračunati nepoznate reakcijske sile koje su nam potrebne za određivanje momentnog dijagrama zadanog statički neodređenog nosača. Sada kada nam je poznata

vrijednost sile  $X_1$ , preko jednadžbi ravnoteže jednostavno možemo izračunati nepoznate reakcijske sile koje su nam potrebne za određivanje momentnog dijagrama zadanog statički neodređenog nosača.



**Slika 13.** : Zadani neodređeni sustav sa određenom reakcijom  $B_y$

Započeti ćemo sa određivanjem vrijednosti koncentriranog momenta u upetom ležaju A. Ukoliko pretpostavimo smjer koncentriranog momenta u ležaju A kao obrnut od smjera kretanja kazaljke na satu, suma momenata na tu točku, prema shemi na slici 13, glasi :

$$(30) \quad \sum M_A = -B_y * l + Q * \frac{l}{2} - M_A = 0.$$

Nakon toga, kada izrazimo  $M_A$  i uvrstimo sve što nam je poznato, dobivamo konačnu vrijednost koncentriranog momenta u točki A :

$$(31) \quad M_A = -\frac{3 * q * l^2}{8} + \frac{q * l^2}{2} = \frac{1}{2} * q * l^2 * \left(-\frac{3}{4} + 1\right) = \frac{q * l^2}{8}$$

Iz gore ispisane formule lako se povlači zaključak da će uvrštavanjem nekih vrijednosti  $q$  i  $l$  vrijednost momenta  $M_A$  u konačnici biti pozitivna. Obzirom na tu činjenicu, znači da smo dobro pretpostavili smjer koncentriranog momenta, obrnut od smjera kretanja kazaljke na satu, što znači da će na dijagramu momenata u ležaju A vrijednost momenta biti negativna (prema gore). Za silu  $A_x$  nije se niti potrebno koristiti jednadžbama ravnoteže kako bi se odredila njena vrijednost jer je iz sheme nosača jasno da kada bi ona postojala ne bi postojala sila koja bi ju mogla uravnotežiti, jer je u ležaju B dopušten horizontalni pomak, a nema zadane vanjske horizontalne sile. Prema tome, sila  $A_x = 0$ . Jedina reakcija koja nam preostaje za izračunati je sila  $A_y$  u ležaju A. Nju jednostavno možemo dobiti iz sume vertikalnih sila koje djeluju na sustav koji se mora nalaziti u stanju ravnoteže. Suma vertikalnih sila glasi :  $\sum F_y = A_y - Q + B_y = 0$ . Kada iz tog izraza izvučemo traženu silu  $A_y$  te uvrstimo poznate sile  $Q$  i  $B_y$ , dobivamo :

$$(32) \quad A_y = Q - B_y = q * l - \frac{3}{8} q * l = \frac{5}{8} q * l$$

Vidimo da je vertikalna reakcijska sila u ležaju a za  $\frac{2}{8}$  veća od one u ležaju B. Sada su nam poznate sve vrijednosti koje su nam potrebne za određivanje dijagrama unutarnjih sila, odnosno konkretnije za naše potrebe momentnog dijagrama i momentnih funkcija. Vidimo da se preko čitavog raspona zadanog nosača proteže distribuirano opterećenje, što znači da će čitav momentni dijagram biti paraboličnog oblika. Funkcija momenta savijanja, gledano od lijeve prema desnoj strani nosača, glasi :

$$(33) \quad M(x) = -M_A + A_y * x - \frac{q * x^2}{2}$$

Za pravilnu je konstrukciju momentnog dijagrama potrebno još odrediti u kojoj će točki nosača vrijednost momenta biti jednaka nuli i u kojoj će točki vrijednost momentnog dijagrama biti maksimalna. Kao što smo to rekli u poglavlju sa statički određenim nosačima, maksimalna će vrijednost biti u točki u kojoj je poprečna sila jednaka nuli. Kada bi to išli zapisati u obliku funkcije, to bi glasilo :

$$(34) \quad \sum F_y = \frac{5}{8} q * l - q * x = 0.$$

Iz tog izraza lako dobivamo da je tražena točka  $x = \frac{5}{8} l$ . Kako bi odredili u kojoj točki nosača, osim u ležaju B, moment iznosi nula, napisat ćemo funkciju momenata, ali ovaj puta tako da gledamo sa desne prema lijevoj strani nosača. Takva funkcija glasi :

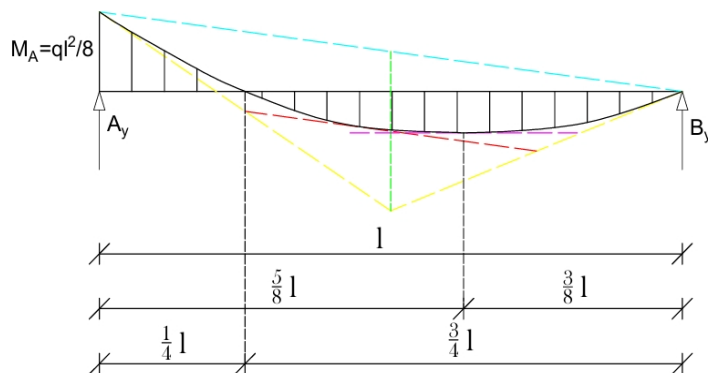
$$(35) \quad M(x) = B_y * x - \frac{q * x^2}{2} = \frac{3}{8} * q * l * x - \frac{q * x^2}{2}$$

Sada tu funkciju izjednačimo s nulom i dobivamo :

$$(36) \quad M(x) = \frac{3}{8} * q * l * x - \frac{q * x^2}{2} = 0$$

Kada izraz podijelimo s  $q * l$ , dobivamo da je  $x = \frac{3}{4} * l$ , gledano s desne prema lijevoj strani nosača, odnosno  $x = \frac{1}{4} * l$  gledano s lijeva prema desno. Dakle, u toj točki momentni dijagram poprima vrijednost nula. Sada započnimo sa konstrukcijom dijagrama. U točki  $x = 0$  je  $M(x) = -M_A$ . Zatim spajamo granične vrijednosti momenata,  $M(x) = -M_A$  i  $M(x) = 0$  plavom iscrtkanom linijom. U polovici raspona nosača,  $x = \frac{l}{2}$ , od plave iscrtkane linije dva puta vertikalno prema dolje nanosimo zelenu vrijednost  $\frac{q * l^2}{8}$ . U točki kraja prve nanešene vrijednosti  $\frac{q * l^2}{8}$  crtamo crvenu iscrtkanu liniju paralelnu plavoj. Krajnju točku druge nanesene vrijednosti  $\frac{q * l^2}{8}$  spajamo žutim iscrtkanim linijama sa graničnim vrijednostima momenata. Sada imamo tri osnovne tangente od kojih svaka dira našu parabolu u jednoj točki. Parabola, logično, ne smije prelaziti preko te tri tangente. Ljubičasta iscrtkana linija predstavlja tangentu na maksimalnu momentnu vrijednost, nezin je nagib jednak nuli. Konstruirani dijagram momenata prikazan je na slici 14.

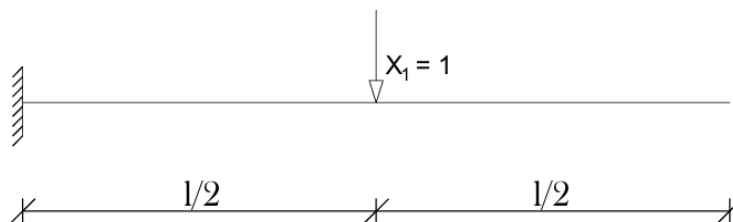




**Slika 14.** : Momentni dijagram  $M$  zadanog statički neodređenog sustava

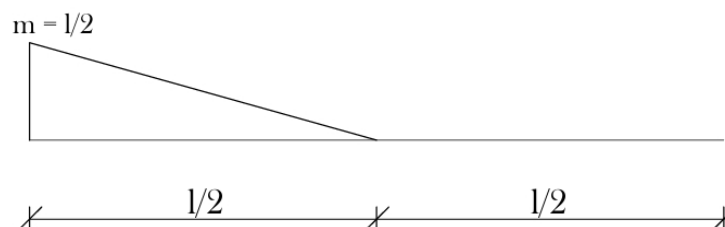
Metoda jedinične sile primjenjuje se za određivanje pomaka na mjestu i u smjeru zadane jedinične sile, neovisno o tome je li sustav koji nam je zadan statički određen ili nije. Sada ćemo na temelju prethodno konstruiranog momentnog dijagrama sa slike 14 metodom jedinične sile odrediti pomak u polovini raspona zadanog nosača.

Na osnovnom sistemu zadajemo jediničnu silu  $X_1 = 1$ . Prikaz zadane jedinične sile na osnovnom sistemu nalazi se na slici 15.



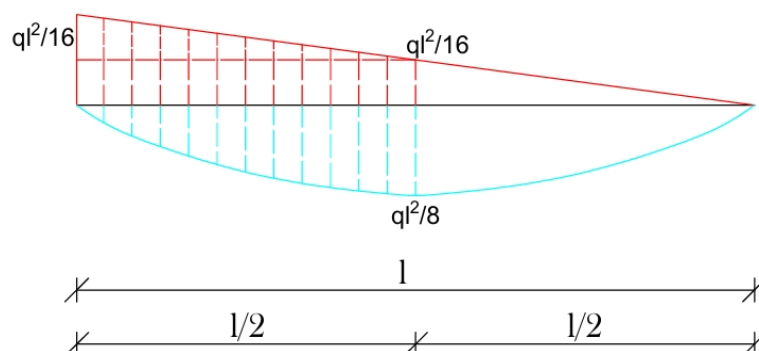
**Slika 15.** : Jedinična sila  $X_1 = 1$  zadana na osnovnom sistemu

Momentni dijagram osnovnog sistema uzrokovan jediničnom silom prikazan je na slici 16.

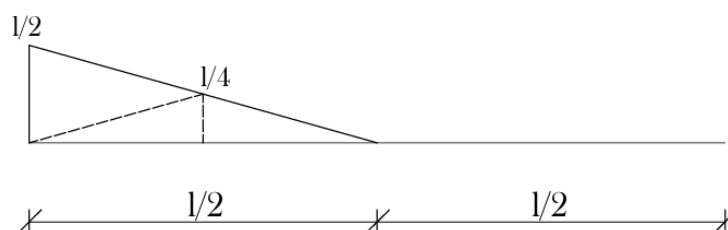


**Slika 16.** : Momentni dijagram  $m_1$  uzrokovan jediničnom silom  $X_1 = 1$

Sada, poznavajući dijagram momenata  $M$  i  $m_1$ , primjenom Vereščaginovog teorema doći ćemo do vrijednosti pomaka u polovini raspona nosača. Vrijednost pomaka u točki  $x = \frac{l}{2}$  određuje se na isti način na koji se određuju koeficijenti fleksibilnosti u metodi sila. Vrijednost pomaka će dakle biti jednaka koeficijentu fleksibilnosti  $\delta_{1,0}$ . Podjela dijagrama  $M$  i  $m_1$  na površine koje će nam biti potrebne u izračunu  $\delta_{1,0}$  prikazana je na slici 17 i 18. Obzirom da se u dijagramu sustava  $M$  radi o složenoj površini razdjeljujemo ga na trokut (crvene linije) i parabolu drugog stupnja (plave linije).



Slika 17. : Podjela momentnog dijagrama  $M$



Slika 18. : Podjela momentnog dijagrama  $m_1$

Izraz (37) za dobivenu vrijednost  $\delta_{1,0}$  prikazan je ispod :

$$(37) \quad \delta_{1,0} = \frac{1}{EI} * \left( \frac{ql^2}{16} * \frac{l}{2} * \frac{l}{4} + \frac{ql^2}{16} * \frac{l}{2} * \frac{1}{2} * \frac{2}{3} * \frac{l}{2} - \frac{2}{3} * \frac{ql^2}{8} * \frac{l}{2} * \frac{3}{8} * \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{EI} * \left( \frac{ql^4}{128} + \frac{ql^4}{192} - \frac{ql^4}{128} \right) = \frac{ql^4}{192 * EI}$$

Ovim smo izrazom dobili općenitu vrijednost pomaka na polovini nosača u točki  $x = \frac{l}{2}$  za bilo koje zadane vrijednosti distribuirane sile  $q$ , raspona nosača  $l$  i fleksijske krutosti nosača  $EI$ .

## 2.1.1. ODREĐIVANJE POMAKA TOČAKA STATIČKIH SISTEMA GRAFOANALITIČKIM POSTUPKOM

U ovome ćemo poglavlju objasniti primjenu grafoanalitičkog postupka (Mohrove analogije) za dobivanje pomaka točaka statičkih sistema. Ukratko ćemo predstaviti što je to Mohrova analogija, na kojim načelima se temelji te kako se primjenjuje kroz konkretan primjer. Na kraju će nam cilj biti usporedba rezultata dobivenih analitičkom i grafoanalitičkom metodom kako bi vidjeli kolika su odstupanja. Kod kompliciranijih statičkih sistema i zadanih vanjskih opterećenja, primjena analitičkog postupka nije uvijek optimalna. U takvim je slučajevima znatno jednostavnije i praktičnije primjeniti grafoanalitičku metodu, koja je temeljena na Mohrovoj analogiji, za crtanje progibne linije i nakon toga očitavanje pomaka koji nas zanimaju. Iako metoda nije do tog stupnja točna kao analitička, dobra je kako bi se na temelju jedne skice dobile približne vrijednosti pomaka svake točke statičkog sistema, što je prednost u odnosu na metodu jedinične sile kojom dobivamo pomak samo na mjestu pozicioniranja jedinične sile. Christian Otto Mohr uspostavio je vezu između površina ispod dijagrama momenata savijanja i progiba te rotacija u gredama. Ova metoda, koja je dobila naziv Mohrova analogija, inženjerima je omogućila lakšu i intuitivniju analizu deformacija u konstrukcijama. Zbog svoje praktične primjene, metoda je stekla veliku popularnost i priznanje u inženjerskim zajednicama.

Mohr je otkrio povezanost dijagrama momenta savijanja sa progibima i nagibima duž grede. Shvatio je da diferencijalna jednadžba ravnotežne konfiguracije niti

$$(38) \quad w''(x) = -\frac{q(x)}{H}$$

(pri čemu funkcija  $q$  predstavlja vrijednosti zadane distribuirane sile, a  $H$  vrijednost napetosti niti) i diferencijalna jednadžba progibne linije

$$(39) \quad w''(x) = -\frac{M(x)}{EI}$$

imaju istu strukturu. Budući da se ravnotežna konfiguracija niti može posmatrati kao dijagram momenata savijanja u gredi istog raspona i pod istim raspoređenim opterećenjem, zbog toga što diferencijalna jednadžba ravnoteže

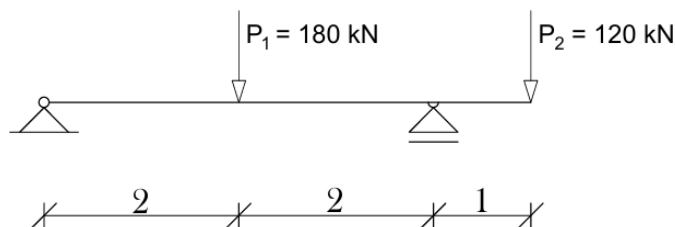
$$(40) \quad M''(x) = -q(x)$$

ima istu strukturu, Mohr je zaključio da se linija progiba grede može nacrtati kao dijagram momenata uzrokovanih zamišljenim raspoređenim opterećenjem. Vrijednosti progibne linije opisane su funkcijom :

$$(41) \quad \kappa(x) = \frac{M(x)}{EI}$$

Ovu ćemo metodu najbolje objasniti tako da se istovremeno koristimo konkretnim primjerom. Kao primjer zadana je greda s prepustom ukupne duljine od pet metara te duljinom prepusta

od jednog metra. Na gredi je zadano vanjsko opterećenje, sila  $P_1$  u točki  $x = 2 \text{ m}$  i sila  $P_2$  na kraju prepusta, u točki  $x = 5 \text{ m}$ . Greda je prikazana na slici 19.



**Slika 19.** : Greda s prepustom sa zadanim vanjskim opterećenjem (Izvor : Fresl, nepoznata godina)

Prvi korak je određivanje reakcijskih sila u ležajevima kako bi mogli konstruirati momentni dijagram. Obzirom da se u primjeru radi o statički određenom sistemu, na jednostavan način pomoću jednadžbi ravnoteže možemo odrediti te reakcije. Sumom momenata u zglobu  $A$  dobivamo vertikalnu reakciju ležaja  $B$ .

$$(42) \quad \sum M_A = 120 * 5 + 180 * 2 - B_y * 4 = 0$$

Iz te jednadžbe dobivamo  $B_y = 240 \text{ kN}$ . Sada preko sume sila u  $y$  smjeru možemo dobiti silu  $A_y$ .

$$(43) \quad \sum F_y = 240 - 180 - 120 + A_y = 0$$

Prema tome dobivamo da sila  $A_y$  iznosi  $60 \text{ kN}$ . Sada ćemo napisati izraze za funkcije momenta po duljini nosača kako bi u ključnim točkama mogli odrediti vrijednost momenta savijanja te konstruirati konačan momentni dijagram. Na intervalu  $[0 \leq x \leq 2]$  moment je uzrokovan samo vertikalnom reakcijskom silom  $A_y$  pa funkcija momenta glasi :

$$(44) \quad M_x = A_y * x$$

Intuitivno je jasno da će u točki  $x = 0$  moment biti jednak nuli. Uvrštavajući vrijednost  $A_y = 60 \text{ kN}$  i  $x = 2 \text{ m}$  u izraz (44) dobivamo da je u točki  $x = 2$  vrijednost momenta  $120 \text{ kNm}$  (izraz 45). Vrijednost je momenta pozitivna, tako da ga na dijagramu crtamo s donje strane osi grede.

$$(45) \quad M_x = 60 * 2 = 120 \text{ kNm}$$

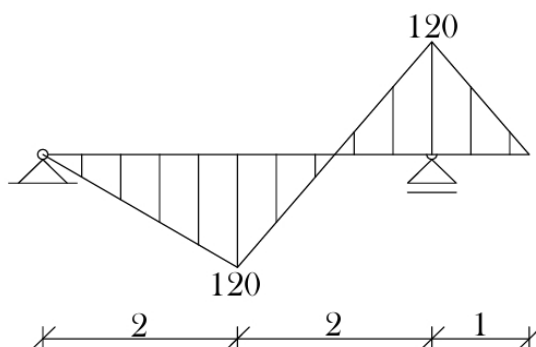
Na intervalu  $[2 \leq x \leq 4]$  uz silu  $A_y$  na vrijednost momenta utječe i koncentrirana sila  $P_1$ , pa funkcija momenta u općem obliku glasi :

$$(46) \quad M_x = A_y * x - P_1 * (x - 2)$$

Uvrštavajući  $A_y = 60 \text{ kN}$ ,  $P_1 = 180 \text{ kN}$  i  $x = 4$  u izraz (46) dobivamo da je u točki  $x = 4$  vrijednost momenta iznosi  $-120 \text{ kNm}$  (izraz 47), što znači da će se moment na dijagramu crtati s gornje strane osi grede.

$$(47) \quad M_x = 60 * 4 - 180 * (4 - 2) = -120 \text{ kNm}$$

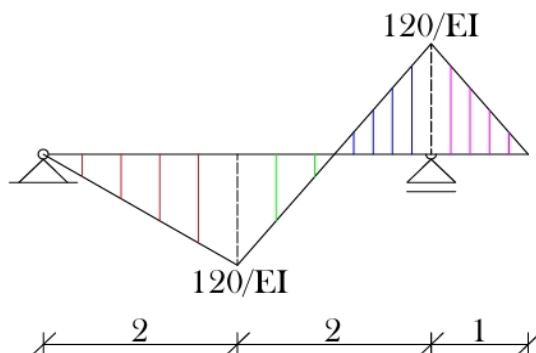
Obzirom da na kraju prepusta grede ne djeluje nikakav koncentrirani moment, na tome će dijelu vrijednost momenta biti jednaka nuli te za taj dio nije potrebno ispisivati funkciju momenta kako bi odredili njegovu vrijednost. Momentne funkcije su na svim dijelovima nosača linearne, tako da će kontura dijagrama biti više pravaca. Sada imamo sve potrebne vrijednosti i informacije za pravilnu konstrukciju momentnog dijagrama. Pripadajući momentni dijagram prikazan je na slici 20.



**Slika 20.** : Momentni dijagram grede s prepustom (Izvor : Fresl, nepoznata godina)

Ukoliko na kraju našeg primjera želimo očitati točnu vrijednost pomaka, morat ćemo definirati neka mjerila. Kao mjerilo duljina uzet ćemo 1 : 100, odnosno  $1 \text{ cm} = 100 \text{ cm}$ . Općenitiji zapis za mjerilo duljina glasiti će 1:  $m$ .

Sada ćemo poznati dijagram momenata  $M(x)$  zamijeniti dijagramom zamišljene „distribuirane sile“, dijagramom  $\kappa(x)$ . Obzirom da je  $\kappa(x) = \frac{M(x)}{EI}$ , a fleksijska krutost  $EI$  je duž naše grede konstantna, dijagram  $\kappa(x)$  imati će oblik jednak onomu momentnoga dijagrama. Dijagram  $\kappa(x)$  prikazan je na slici 21.



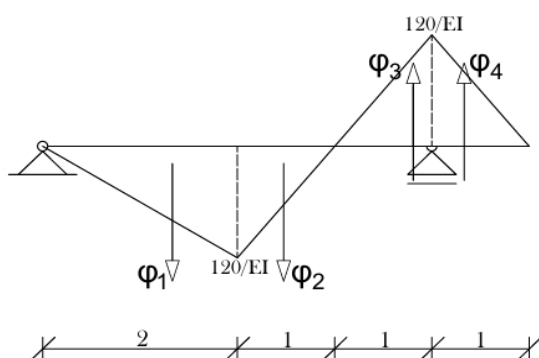
**Slika 21.** : Dijagram  $\kappa(x)$  (Izvor : Fresl, nepoznata godina)

Verižnu krivulju za našu zadanu zamišljenu „distribuiranu silu“ dobiti ćemo tako da je ucrtamo u njezin tangenti poligon. Taj će tangenti poligon u stvari biti verižni poligon za sustav koncentriranih sila koji je statički ekvivalentan distribuiranoj sili. Trokute sa slike 21 označene crvenim, zelenim, plavim i ljubičastim linijama zamijenit ćemo koncentriranim silama čije su vrijednosti jednake površinama tih trokuta. Pravci djelovanja tih sila prolaze težištima trokuta.

Po kinematičkom značenju, funkcija  $\kappa(x)$  opisuje zakrivljenost osi nosača :

$$(48) \quad \kappa(x) = -w''(x)$$

Prema tome, površine naših trokuta jednake su kutu  $\varphi$  koji zatvaraju tangente na progibnu liniju u točkama s pripadnim apscisama. Stoga su zamišljene „koncentrirane sile“ za koje crtamo verižni poligon vektori čije su vrijednosti jednake kutovima između tangenata na progibnu liniju. Sada ćemo, za naš zadani primjer, uvesti vektore  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  i  $\varphi_4$  koji će djelovati po pravcu težišta trokuta. Intenzitete tih vektora izračunati ćemo kao površine trokuta. Na slici 22 prikazani su vektori  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  i  $\varphi_4$ .

**Slika 22.** : Vektori  $\varphi$  (Izvor : Fresl, nepoznata godina)

Vrijednosti vektora iznose :

$$(49) \quad \varphi_1 = \frac{1}{EI} * \left( \frac{2*120}{2} \right) = \frac{240}{2EI} = \frac{240}{2*1,0*10^4} = 0,012$$

$$(50) \quad \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \frac{1}{EI} * \left( \frac{1*120}{2} \right) = \frac{120}{2EI} = 0,006$$

Pri čemu je za  $EI$  je uzeto  $1 * 10^4 \text{ kNm}^2$ .

Dalje verižni poligon za vektore kutova radimo prema istim načelima kao i za obične koncentrirane sile. Kako bi mogli napraviti verižni poligon, moramo definirati mjerilo u kojem ćemo crtati vektore kutova. Za potrebe konstruiranja poligona odabrat ćemo mjerilo kutova  $1 \text{ cm} :: 0,0025$ . U tom će mjerilu naši vektori kutova iz primjera na crtežu biti jednaki  $\varphi_1 = 4,8 \text{ cm}$  i  $\varphi_2 = 2,4 \text{ cm}$ . Za pravilnu konstrukciju poligona potrebno je odrediti i udaljenost pola od pravca na kojem se nalaze vektori kutova i položaj pola na pravcu paralelnom s pravcem vektora. Tu udaljenost označavamo s  $\chi$ . O udaljenosti  $\chi$  ovisi mjerilo u kojem očitavamo duljine

pomaka. Ako uzmemo da je  $\chi = 1$ , kutovi koje zatvaraju zrake poligona vektora kutova i kutovi koje zatvaraju stranice nacrtanog tangentnog poligona jednaki su kutovima između tangenata na progibnu liniju. S obzirom na to da se radi o malim kutovima, vrijedi sljedeći izraz :

$$(51) \quad \alpha_i = \operatorname{tg} \alpha_i = \frac{\varphi_i}{\chi} = \frac{\varphi_i}{1} = \varphi_i.$$

U tom slučaju, duljine odsječaka ordinala između zaključne linije i verižne krivulje bile bi jednake duljinama progiba, prikazane u odgovarajućem mjerilu duljina. No, ako uzmemo da je

$$(52) \quad \chi = \frac{1}{n}$$

jasno je iz gornjeg izraza da će se kutovi između zraka povećati  $n$  puta. Kao posljedica toga, duljine odsječaka na ordinalama također će biti  $n$  puta veće. Ako označimo s  $\bar{w}(x)$  izmjerenu duljinu odsječaka na ordinali, stvarna duljina pomaka koju tražimo bit će:

$$(53) \quad w(x) = \frac{m}{n} * \bar{w}(x)$$

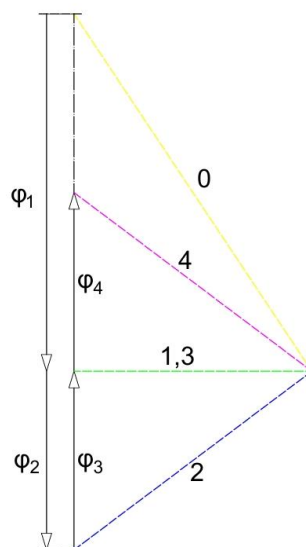
U našem slučaju, kada bi  $\chi$  bio jednak 1, za odabrano mjerilo kutova  $1 \text{ cm} : : 0,0025$  udaljenost pola od pravca na kojem se nalaze vektori bila bi  $\bar{\chi} = 40 \text{ m}$ . Sasvim je jasno da nam ta opcija nije pogodna pa uzimamo veći  $n$ . Uzimajući  $n = 125$  dobivamo

$$(54) \quad \chi = \frac{1}{n} = 0,008$$

Sada  $\chi$  podijelimo sa 0,0025 kako bi dobili koliko  $\bar{\chi}$  iznosi u cm, dakle :

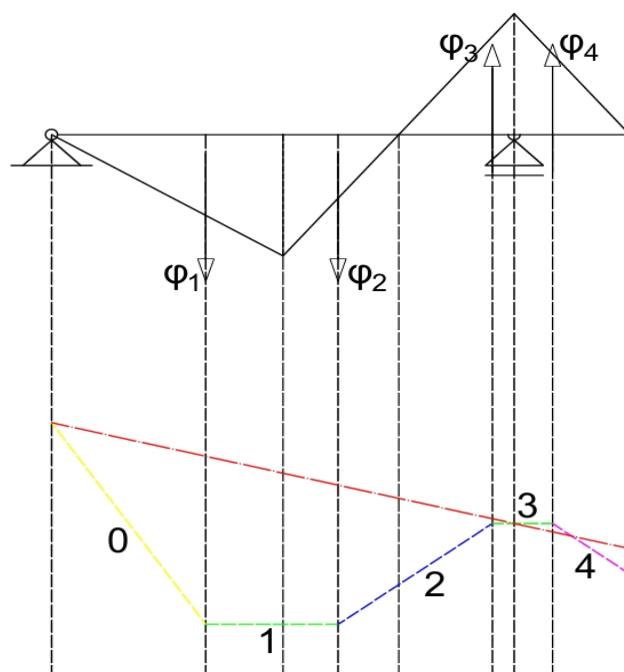
$$(55) \quad \bar{\chi} = \frac{\chi}{0,0025} = 3,2 \text{ cm}$$

Pol ćemo postaviti tako da prva i treća zraka poligona budu paralelne s osi grede, odnosno te dvije zrake biti će horizontalne. To radimo iz razloga što će u točkama  $x = 2$  i  $x = 4$  progibna linija dosezati svoje ekstremne vrijednosti, što znači da u tim točkama ne smije postojati nagib tangente, odnosno ona mora biti položena horizontalno. Znajući taj podatak, imamo sve preduvjete za crtanje verižnog poligona. Pripadajući verižni poligon, nacrtan u mjerilu, prikazan je na slici 23. (Krešimir Fresl, nepoznata godina)



**Slika 23.** : Verižni poligon (Izvor : Fresl, nepoznata godina)

Zraku 0 dobili smo spajanjem početne točke vektora  $\varphi_1$  i pola  $\bar{\chi}$ . Zraku 1 spajanjem kraja vektora  $\varphi_1$  i pola  $\bar{\chi}$  i sve ostale zrake na isti način samo za pripadajući vektor. Sljedeći je korak crtanje tangentskog poligona. On je prikazan na slici 24.



**Slika 24.** : Tangentni poligon



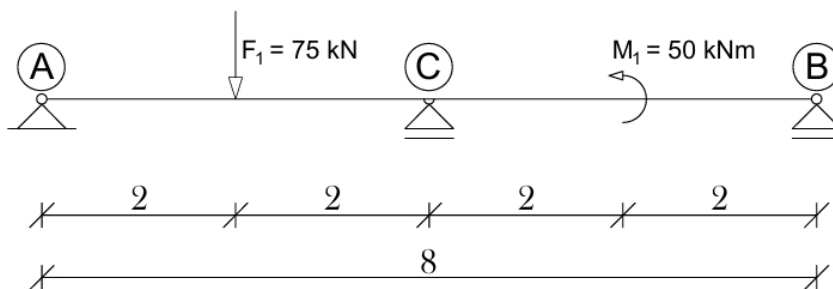
Crvena linija označava zaključnu liniju verižnog poligona. To je linija koja je određena rubnim uvjetima nosača, od kojih je jedan taj da je vertikalni pomak točke nosača jednak nuli. Naša zaključna linija spaja točke grede u kojima je progib  $w = 0$ , dakle ležajeve nosača. Kako bi odredili vrijednost progiba u točki nosača  $x = 2 \text{ m}$ , očitat ćemo duljinu crtkane linije između zaključne linije (crvene linije) i tangente broj 1 (zelene linije). Očitana vrijednost pomaka ( $\bar{w}$ ) iznosi  $1,5 \text{ cm}$ . Veza između očitano i stvarnog pomaka definirana je izrazom (53). Uvrštavajući  $m = 100$ ,  $n = 125$  i  $\bar{w} = 1,5 \text{ cm}$  u izraz (53) dobivamo stvarnu vrijednost pomaka u točki  $x = 2 \text{ m}$  (izraz 56).

$$(56) \quad w(x) = \frac{100}{125} * 1,5 = 1,2 \text{ cm}$$

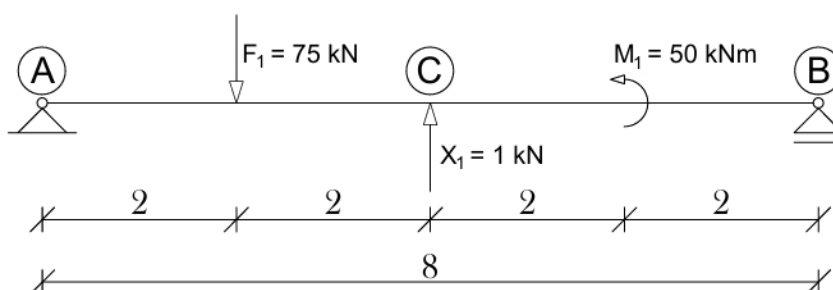
Dakle, pomak u točki  $x = 2 \text{ m}$  dobiven grafoanalitičkom metodom iznosi  $1,2 \text{ cm}$ .

### 2.1.1.1. USPOREDBA REZULTATA POMAKA DOBIVENOG RAZLIČITIM METODAMA

Kako bi usporedili rezultate dobivenog pomaka, sve opisane metode ćemo primjeniti za dobivanje zasebnih rezultata na jednom primjeru. Zadati ćemo primjer statički neodređenog sustava. Primjer je prikazan na slici 25.



Slika 25. : Kontinuirana greda

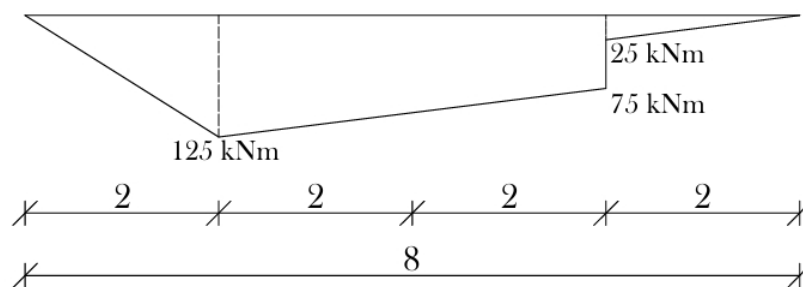
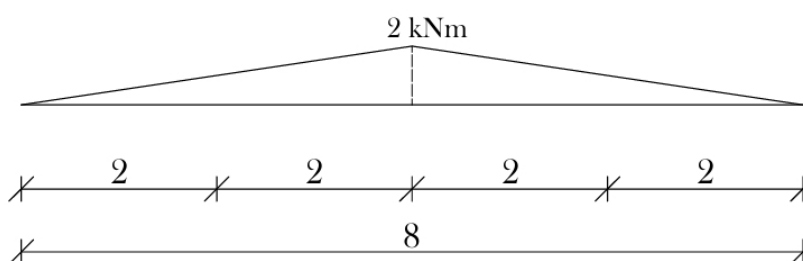


Slika 26. : Osnovni sustav

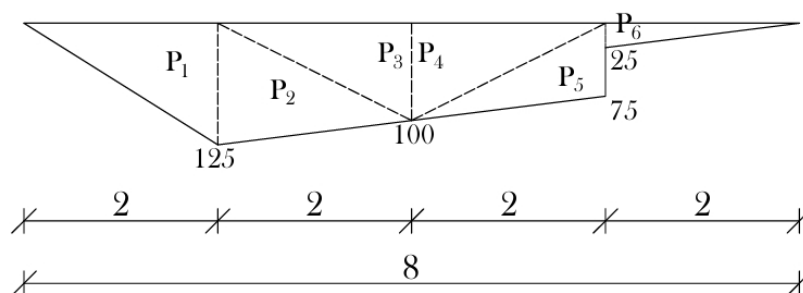
Uvjet kompatibilnosti pomaka zadanog i osnovnog sistema glasi :

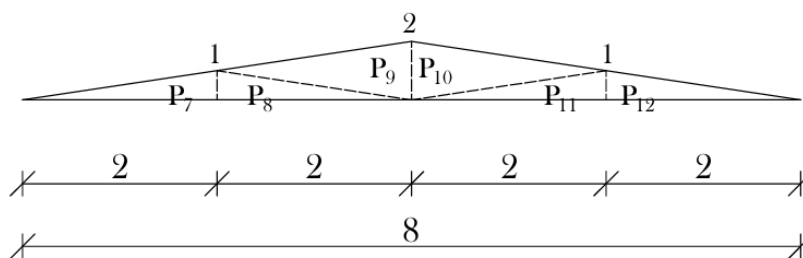
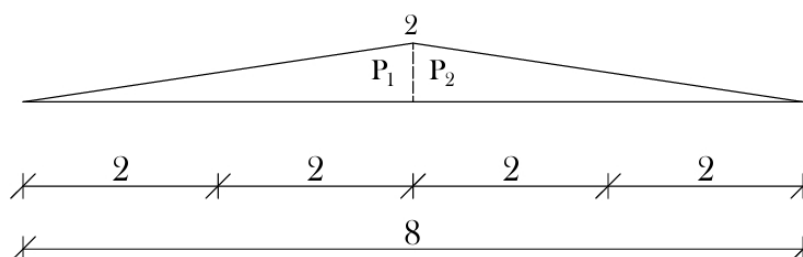
$$(57) \quad X_1 * \delta_{11} + \delta_{10} = 0$$

Vrijednost  $\delta_{11}$  predstavlja pomak osnovnog sistema na mjestu i u smjeru jedinične sile uzrokovan jediničnom silom  $X_1$ , a  $\delta_{10}$  pomak te iste točke uzrokovan vanjskim opterećenjem. Sada ćemo odrediti momentne dijagrame osnovnog sistema uzrokovane vanjskim opterećenjem  $F_1$  i  $M_1$  ( $M_x^0$ ) i jediničnom silom  $X_1$  ( $m_{x1}$ ). Momentni dijagram  $M_x^0$  prikazan je na slici 27. Dijagram  $m_{x1}$  prikazan je na slici 28.

Slika 27. : Dijagram  $M_x^0$ Slika 28. : Dijagram  $m_{x1}$ 

Sada ćemo pomoću Vereščaginova teorema odrediti koeficijente fleksibilnosti  $\delta_{11}$  i  $\delta_{10}$ . Podjela momentnih dijagrama  $M_x^0$  i  $m_{x1}$  koja nam je potrebna kako bi izračunali koeficijent  $\delta_{10}$  prikazana je na slikama 29 i 30. Podjela dijagrama za izračun koeficijenta fleksibilnosti  $\delta_{11}$  prikazana je na slici 31.

Slika 29. : Podjela dijagrama  $M_x^0$  (za  $\delta_{10}$ )

Slika 30. : Podjela dijagrama  $m_{x1}$  (za  $\delta_{10}$ )Slika 31. : Podjela dijagrama  $m_{x1}$  (za  $\delta_{11}$ )

Na taj način dobivamo izraze (58) i (59) :

$$(58) \quad \delta_{11} = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} * \left( \frac{1}{2} * 2 * 4 * \frac{2}{3} * 2 * 2 \right) = \frac{2}{39375} = 0,0000508$$

$$(59) \quad \delta_{10} = -\frac{1}{2,1 \cdot 10^5} * \left( \frac{1}{2} * 125 * 2 * \frac{2}{3} * 1 + \frac{1}{2} * 125 * 2 * \left( \frac{2}{3} * 1 + \frac{1}{3} * 2 \right) + 2 * \frac{1}{2} * 100 * \right. \\ \left. 2 * \left( \frac{2}{3} * 2 + \frac{1}{3} * 1 \right) + \frac{1}{2} * 75 * 2 * \left( \frac{2}{3} * 1 + \frac{1}{3} * 2 \right) + \frac{1}{2} * 25 * 2 * \frac{2}{3} * 1 \right) = -\frac{700}{2,1 \cdot 10^5} = \\ -\frac{1}{300} = 0,00333$$

U izrazu (59) redom smo množili :

1. površinu  $P_1$  sa vrijednošću momentnog dijagrama  $m_{x1}$  u točki  $x_T(P_1) = \frac{2}{3} * 2$ ,  
 $m_{x1}[x_T(P_1)] = \frac{2}{3} * 1$
2. površinu  $P_2$  sa vrijednošću momentnog dijagrama  $m_{x1}$  u točki  $x_T(P_2) = 2 + \frac{1}{3} * 2$ ,  
 $m_{x1}[x_T(P_2)] = \frac{2}{3} * 1 + \frac{1}{3} * 2$
3. površinu  $P_3$  ( $P_4$ ) sa vrijednošću momentnog dijagrama  $m_{x1}$  u točki  $x_T(P_3) = 2 + \frac{2}{3} * 2$ ,  
 $m_{x1}[x_T(P_3)] = \frac{2}{3} * 2 + \frac{1}{3} * 1$
4. površinu  $P_5$  sa vrijednošću momentnog dijagrama  $m_{x1}$  u točki  $x_T(P_5) = 4 + \frac{2}{3} * 2$ ,  
 $m_{x1}[x_T(P_5)] = \frac{2}{3} * 1 + \frac{1}{3} * 2$

5. površinu  $P_6$  sa vrijednošću momentnog dijagrama  $m_{x1}$  u točki  $x_T(P_6) = 6 + \frac{1}{3} * 2$ ,  
 $m_{x1}[x_T(P_6)] = \frac{2}{3} * 1$

Sada ćemo odrediti silu  $X_1$  iz izraza (60).

$$(60) \quad X_1 = C_y = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{-\frac{1}{\frac{300}{2}}}{\frac{2}{39375}} = 65,63 \text{ kN}$$

Dobiveni predznak od sile  $X_1$  je pozitivan, što znači da smo dobro pretpostavili njezin smjer. Sada kad poznajemo veličinu  $X_1$ , odnosno  $C_y$ , preko jednadžbi ravnoteže možemo odrediti preostale reakcijske veličine  $A_x$ ,  $A_y$  i  $B_y$ . Sumom momenata oko čvora B dobivamo vrijednost reakcijske sile  $A_y$  :

$$(61) \quad \sum M_B = A_y * 8 - 75 * 6 + 65,63 * 4 - 50 = 0$$

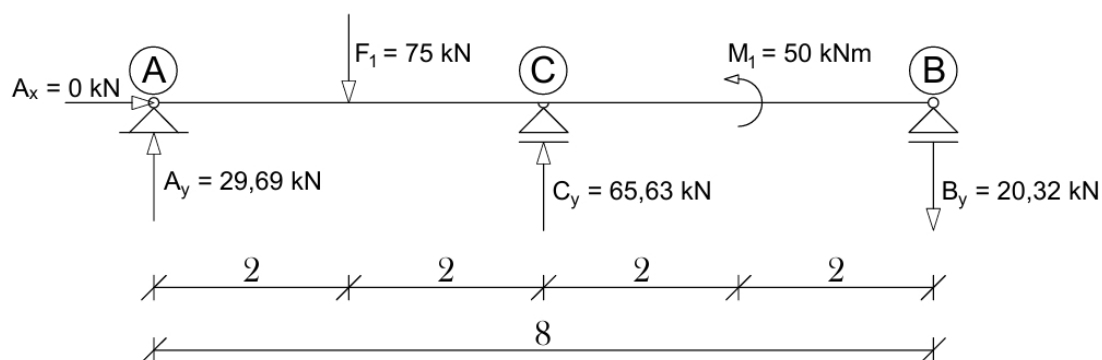
$$(62) \quad A_y = \frac{75*6 - 65,63*4 + 50}{8} = 29,69 \text{ kN}$$

Kao rezultat iz izraza (62) dobivamo  $A_y = 29,69 \text{ kN}$ . Što se tiče reakcijske sile  $A_x$ , ona je jednaka nuli jer na zadanom sustavu ne postoji niti jedna sila koja bi ju mogla uravnotežiti. Stoga,  $A_x = 0$ . Sumom sila u smjeru osi  $y$  dobivamo zadnju reakcijsku silu  $B_y$  :

$$(63) \quad \sum F_y = 29,69 - 75 + 65,63 + B_y = 0$$

$$(64) \quad B_y = 75 - 29,69 - 65,63 = -20,32 \text{ kN}$$

Iz izraza (64) tako dobivamo da je  $B_y = -20,32 \text{ kN}$ , dakle pretpostavljeni smjer sile je krivi. Radi jednostavnosti smo vrijednosti dobivenih reakcijskih sila zaokružili na dvije decimale. Dakle vrijednosti reakcijskih sila s kojima ćemo dalje ulaziti u proračun biti će :  $A_y = 29,69 \text{ kN}$ ,  $B_y = 20,32 \text{ kN}$  i  $C_y = 65,63 \text{ kN}$ . Prikaz statički neodređenog sustava sa zadanim opterećenjem i svim reakcijama prikazan je na slici 32.



**Slika 32.** : Statički neodređeni sustav sa prikazom svih reakcijskih sila i vanjskog opterećenja

Sada ćemo izraziti momentne funkcije po intervalima nosača kako bi mogli konstruirati momentni dijagram. Za interval  $[0 \leq x \leq 2]$  momentna funkcija dana je izrazom (65).

$$(65) \quad M_1(x) = A_y * x$$

Za interval  $[2 \leq x \leq 4]$  momentna funkcija dana je izrazom (66).

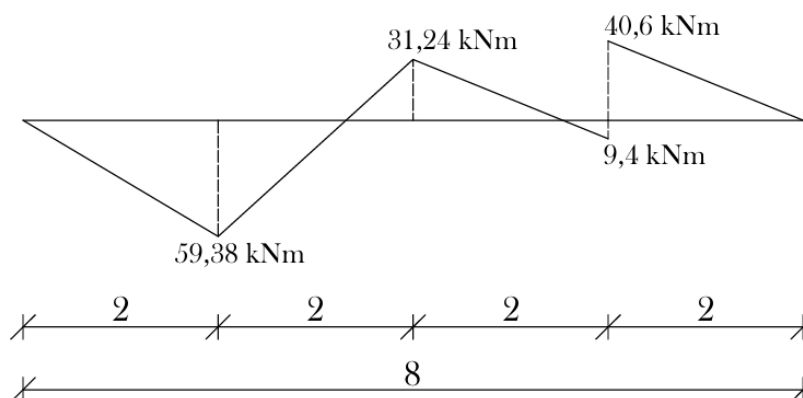
$$(66) \quad M_2(x) = A_y * x - F_1 * (x - 2)$$

Za interval  $[4 \leq x \leq 6]$  momentna funkcija dana je izrazom (67).

$$(67) \quad M_3(x) = A_y * x - F_1 * (x - 2) + C_y * (x - 4)$$

Za interval  $[6 \leq x \leq 8]$  momentna funkcija dana je izrazom (68).

$$(68) \quad M_4(x) = A_y * x - F_1 * (x - 2) + C_y * (x - 4) - M_1$$



**Slika 33. :** Momentni dijagram  $M_0$

Dobiveni momentni dijagram poprima vrijednost nula u dvije točke sustava. Te dvije točke određene su sljedećim izrazima :

$$(69) \quad 29,69 * x - 75 * x + 150 = 0 \Rightarrow x = 3,31 \text{ m}$$

$$(70) \quad 29,69 * x - 75 * x + 150 + 65,63 * x - 262,52 = 0 \Rightarrow x = 5,54 \text{ m}$$

Sada ćemo preko diferencijalne jednačbe progibne linije analitičkim putem odrediti progib u točki  $x = 2$ .

$$(71) \quad w(x) = \frac{1}{EI} * \iint M(x) dx dx + C_1 x + C_2$$

Idući korak je dvostruka integracija po  $x$  svih momentnih funkcija po segmentima iz izraza (65)-(68). Funkcije progiba za sve segmente nosača prikazane su u izrazima (72)-(75).

$$(72) \quad \iint -\frac{M_1(x)}{EI} = w_1(x) = -A_y * \frac{x^3}{6EI} + C_1 x + C_2$$

$$(73) \quad \iint -\frac{M_2(x)}{EI} = w_2(x) = -A_y * \frac{x^3}{6EI} + F_1 * \frac{(x-2)^3}{6EI} + C_3 x + C_4$$

$$(74) \quad \iint -\frac{M_3(x)}{EI} = w_3(x) = -A_y * \frac{x^3}{6EI} + F_1 * \frac{(x-2)^3}{6EI} - C_y * \frac{(x-4)^3}{6EI} + C_5x + C_6$$

$$(75) \quad \iint -\frac{M_4(x)}{EI} = w_4(x) = -A_y * \frac{x^3}{6EI} + F_1 * \frac{(x-2)^3}{6EI} - C_y * \frac{(x-4)^3}{6EI} + M_1 * \frac{x^2}{2} + C_7x + C_8$$

Sad kad smo odredili funkcije progiba za sve segmente nosača, moramo odrediti vrijednosti integracijskih konstanti. To ćemo napraviti pomoću rubnih uvjeta nosača  $w_1(0) = 0$ ,  $w_2(4) = 0$ ,  $w_4(8) = 0$  i pomoću kontinuiteta progiba i nagiba u točki 2 i 4 za različite jednadžbe :  $w_1(2) = w_2(2)$ ,  $w_2(4) = w_3(4)$ ,  $\frac{dw_1(2)}{dx} = \frac{dw_2(2)}{dx}$ . Uvrštavanjem rubnih uvjeta dobivamo :

$$(76) \quad w_1(0) = -A_y * \frac{0^3}{6EI} + C_1 * 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$(77) \quad w_2(4) = -A_y * \frac{4^3}{6EI} + F_1 * \frac{(4-2)^3}{6EI} + C_3 * 4 + C_4 = 0$$

$$(78) \quad w_4(8) = -A_y * \frac{8^3}{6EI} + F_1 * \frac{(8-2)^3}{6EI} - C_y * \frac{(8-4)^3}{6EI} + M_1 * \frac{8^2}{2} + C_7 * 8 + C_8 = 0$$

A uvrštavanjem uvjeta kontinuiteta progiba i nagiba :

$$(79) \quad -A_y * \frac{2^3}{6EI} + C_1 * 2 = -A_y * \frac{2^3}{6EI} + F_1 * \frac{(2-2)^3}{6EI} + C_3 * 2 + C_4$$

$$(80) \quad 2C_1 = 2C_3 + C_4$$

$$(81) \quad -A_y * \frac{2^2}{2EI} + C_1 = -A_y * \frac{2^2}{2EI} + F_1 * \frac{(2-2)^2}{2EI} + C_3$$

$$(82) \quad C_1 = C_3$$

Ako uvstimo izraz (82) u izraz (80) dobivamo :

$$C_4 = 0$$

Sada ćemo iz izraza (77) izračunati konstantu  $C_3$  :

$$(83) \quad -A_y * \frac{4^3}{6EI} + F_1 * \frac{(4-2)^3}{6EI} + C_3 * 4 = 0$$

$$(84) \quad C_3 = C_1 = \frac{29,69 * \frac{4^3}{6 * 2,1 * 10^5} - 75 * \frac{2^3}{6 * 2,1 * 10^5}}{4} = 0,000258$$

Sada možemo izračunati progib u točki  $x = 2$ . Diferencijalna jednadžba za progib na tom segmentu glasi :

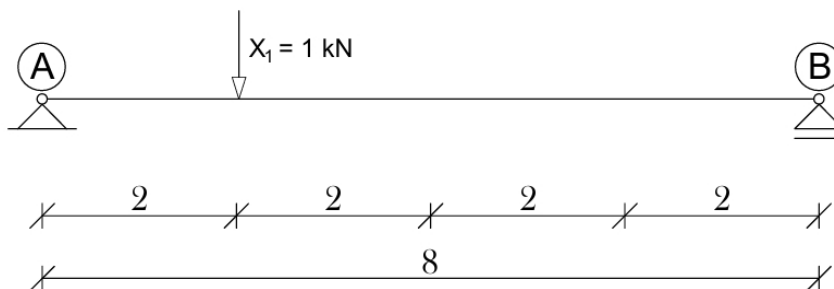
$$(85) \quad w_1(x) = -A_y * \frac{x^3}{6EI} + C_1x$$

Uvrstimo  $x = 2$  i  $C_1 = 0,000258$  te vrijednost sile  $A_y$  i fleksijske krutosti  $EI$  i dobivamo :

$$(86) \quad w_1(2) = -29,69 * \frac{2^3}{6 * 2,1 * 10^5} + 0,000258 * 2 = 0,00033$$

Dakle, dobivamo da je vrijednost progiba u točki  $x = 2$  jednaka  $w_{1,a}(2) = 0,33 \text{ mm}$ .

Sada ćemo primjeniti metodu jedinične sile za izračun pomaka u točki  $x = 2$ . Kako bismo pomak odredili na ovaj način, jediničnu silu zadajemo u točki u kojoj želimo dobiti vrijednost pomaka u smjeru tog pomaka. Dakle, za naš slučaj zadat ćemo jediničnu silu  $X_1 = 1$  na osnovni sistem u točki  $x = 2$ . To je prikazano na slici 34.



**Slika 34.** : Jedinična sila na mjestu i u smjeru traženog pomaka

Potrebno je konstruirati momentni dijagram za zadanu jediničnu silu. Da bi to napravili potrebne su nam vrijednosti reakcijskih sila  $A_{y,1}$  i  $B_{y,1}$ . Reakciju  $A_{y,1}$  dobivamo iz sume momenata na čvor B.

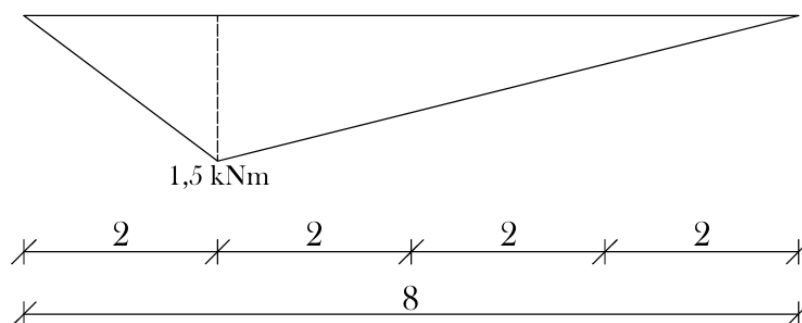
$$(87) \quad A_{y,1} \cdot 8 - 1 \cdot 6 = 0$$

$$(88) \quad A_{y,1} = \frac{6}{8} = 0,75 \text{ kN}$$

Iz izraza (88) dobili smo vrijednost  $A_{y,1}$ . Sada sumom sila u smjeru osi y dobivamo vrijednost sile  $B_{y,1}$ .

$$(89) \quad 0,75 - 1 + B_{y,1} = 0$$

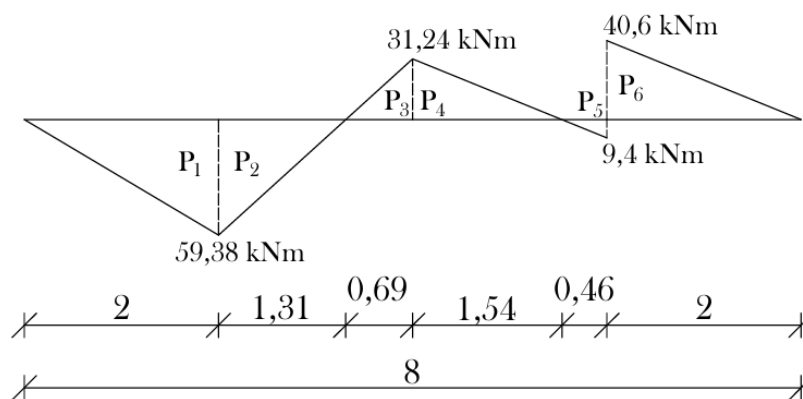
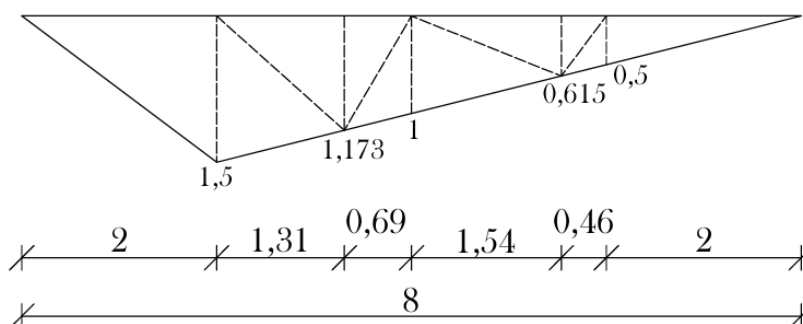
$$(90) \quad B_{y,1} = 0,25 \text{ kN}$$



**Slika 35.** : Momentni dijagram  $m_1$

Idući korak u postupku određivanja pomaka u željenoj točki ovom metodom je izračun koeficijenta fleksibilnosti  $\delta_{1,0}$ . Njega ćemo dobiti tako što ćemo primijeniti Vereščaginov teorem na funkcije momenata  $m_1$  i  $M_0$ . Podjela na površine dijagrama  $M_0$  i  $m_1$  potrebna za izračun  $\delta_{1,0}$  prikazana je na slikama 36 i 37.



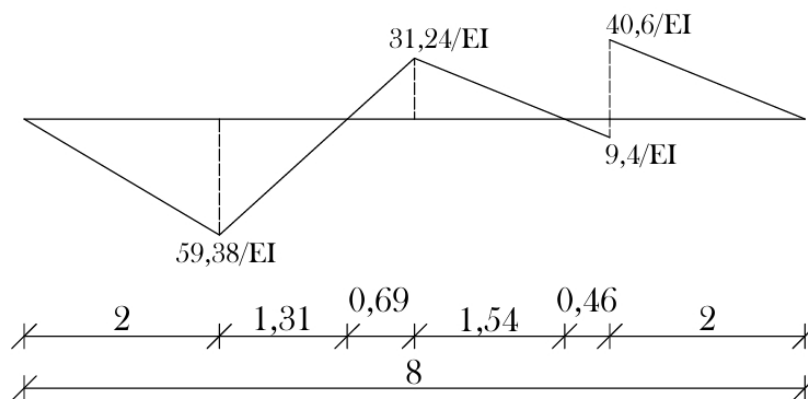
Slika 36. : Podjela dijagrama  $M_0$ Slika 37. : Podjela dijagrama  $m_1$ 

Izračun koeficijenta fleksibilnosti  $\delta_{1,0}$  dan je u izrazu (91) :

$$(91) \quad \delta_{1,0} = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} * \left( \frac{1}{2} * 59,38 * 2 * \frac{2}{3} * 1,5 + \frac{1}{2} * 59,38 * 1,31 * \left( \frac{1}{3} * 1,173 + \frac{2}{3} * 1,5 \right) - \frac{1}{2} * 31,24 * 0,69 * \left( \frac{2}{3} * 1 + \frac{1}{3} * 1,173 \right) - \frac{1}{2} * 31,24 * 1,54 * \left( \frac{1}{3} * 0,615 + \frac{2}{3} * 1 \right) + \frac{1}{2} * 9,4 * 0,46 * \left( \frac{2}{3} * 0,5 + \frac{1}{3} * 0,615 \right) - \frac{1}{2} * 40,6 * 2 * \frac{2}{3} * 0,5 \right) = 0,00033 \text{ m} = 0,33 \text{ mm}$$

Dobili smo da pomak određen metodom jedinične sile u točki sustava  $x = 2$  iznosi  $\delta_{1,0} = w_{1,ms} = 0,33 \text{ mm}$ , što je isti pomak kao i onaj dobiven preko diferencijalne jednadžbe.

Za usporedbu rezultata dobivenog pomaka još nam je preostalo proći kroz ovaj primjer grafoanalitičkom metodom. Momentni dijagram  $M_0$  zamijeniti ćemo dijagramom momenata  $\kappa(x) = \frac{M_0(x)}{EI}$  izazvanim zamišljenom distribuiranom silom. Taj je dijagram prikazan na slici 38.


 Slika 38. : Dijagram  $\kappa(x)$ 

Obzirom da se radi o grafoanalitici, moramo definirati mjerilo duljina. Mjerilo u kojem ćemo crtati biti će 1: 50, što znači da je  $m = 50$  obzirom da je općeniti zapis mjerila 1:  $m$ . Sada ćemo izračunati vektore kutova za pripadne površine dijagrama  $\kappa(x)$ .

$$(92) \quad \varphi_1 = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} * \frac{1}{2} * 59,38 * 2 = 0,000283$$

$$(93) \quad \varphi_2 = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} * \frac{1}{2} * 59,38 * 1,31 = 0,000185$$

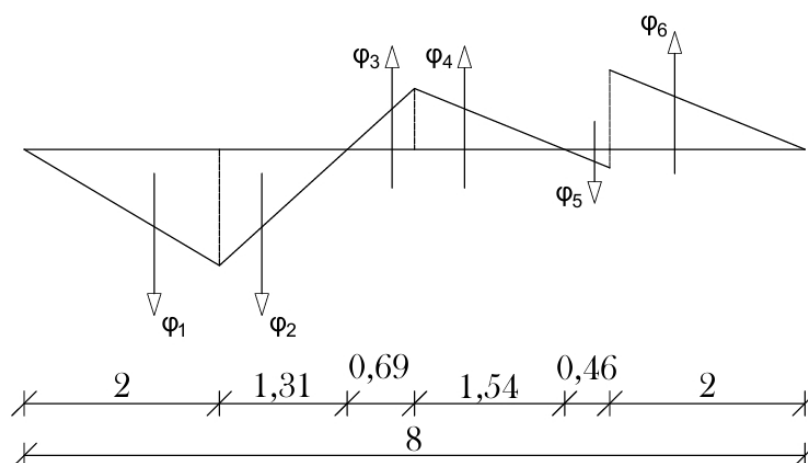
$$(94) \quad \varphi_3 = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} * \frac{1}{2} * 31,24 * 0,69 = 0,0000513$$

$$(95) \quad \varphi_4 = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} * \frac{1}{2} * 31,24 * 1,54 = 0,000115$$

$$(96) \quad \varphi_5 = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} * \frac{1}{2} * 9,4 * 0,46 = 0,0000103$$

$$(97) \quad \varphi_6 = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} * \frac{1}{2} * 40,6 * 2 = 0,000193$$

Vektori kutova prikazani su na slici 39.


 Slika 39. : Vektori kutova  $\varphi_1, \dots, \varphi_6$

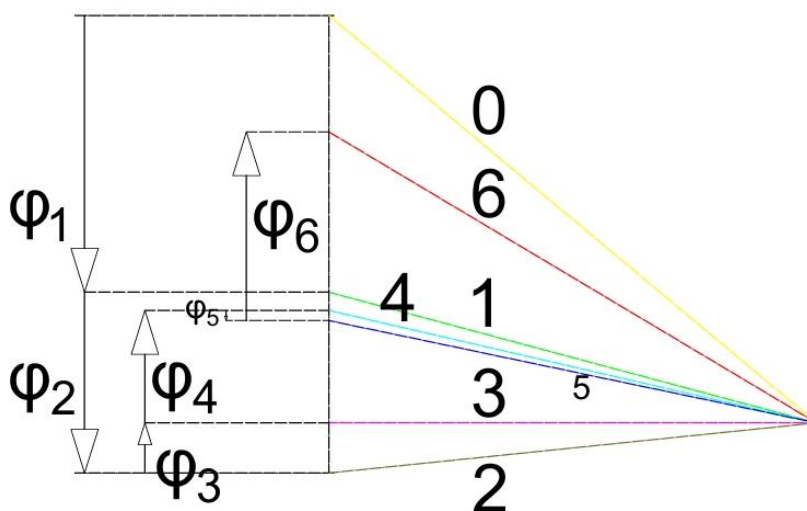
Sada ćemo konstruirati tangenti poligon s vektorima kutova. Mjerilo za crtanje poligona vektora kutova biti će 1:0,00010. U tom će mjerilu duljine nacrtanih vektora kutova biti :  $\bar{\varphi}_1 = 2,83 \text{ cm}$ ,  $\bar{\varphi}_2 = 1,85 \text{ cm}$ ,  $\bar{\varphi}_3 = 0,513 \text{ cm}$ ,  $\bar{\varphi}_4 = 1,15 \text{ cm}$ ,  $\bar{\varphi}_5 = 0,103 \text{ cm}$  i  $\bar{\varphi}_6 = 1,93 \text{ cm}$ .

Kako bi odredili udaljenost pola od pravca na kojem leže vektori kutova uzet ćemo da je  $n = 2000$ . Tada dobivamo :

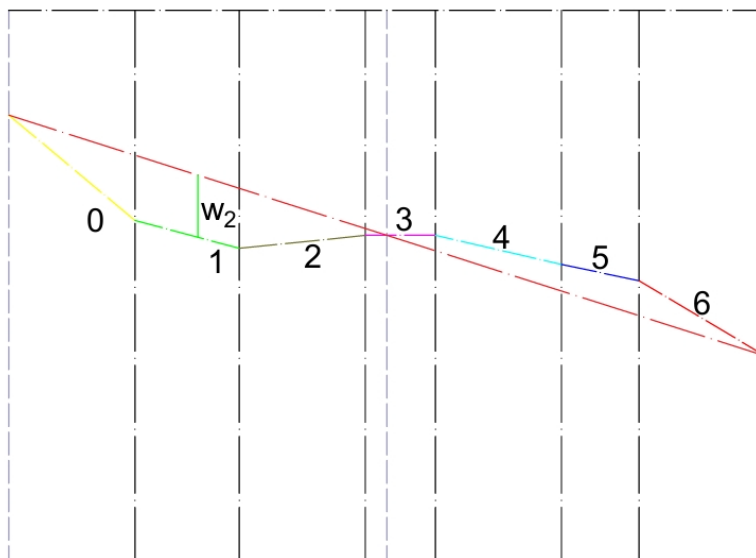
$$(98) \quad \chi = \frac{1}{2000} = 0,0005$$

$$(99) \quad \bar{\chi} = \frac{0,0005}{0,0001} = 5 \text{ cm}$$

U izrazu (85) smo podijelili vrijednost  $\chi$  sa mjerilom crtanja u poligonu kako bi dobili stvarnu udaljenost pola od pravca  $\bar{\chi}$ . Sada znamo udaljenost pola od pravca, ali ne znamo na koju poziciju ga postaviti. Postaviti ćemo ga tako da zraka 3 u poligonu bude horizontalna jer je progibna linija u točki  $x = 4$  jednaka nuli, što u prijevodu znači da je njena tangenta u toj točki horizontalna. Poligon vektora kutova prikazan je na slici 40, a tangenti poligon na slici 41.



Slika 40. : Poligon vektora kutova  $\varphi_1, \dots, \varphi_6$



**Slika 41.** : Tangentni poligon kontinuirane grede

Zaključnu smo liniju (narančasta linija) konstruirali spajanjem točki ležajeva  $A, B$  i  $C$  jer je u tim točkama rubni uvjet taj da je progib jasno jednak nuli. Očitana vrijednost pomaka u točki nosača  $x = 2$  iznosi  $\bar{w}_2 = 1,31 \text{ cm}$ . Pravu vrijednost pomaka dobivenog grafoanalitičkim postupkom dobivamo iz izraza (100) :

$$(100) \quad w_{2,g} = \frac{50}{2000} * 1,31 = 0,033 \text{ cm} = 0,33 \text{ mm}$$

Vrijednosti dobivenih pomaka različitim metodama su :

1. Analitička metoda preko diferencijalne jednačbe :  $w_{2,a} = 0,33 \text{ mm}$
2. Analitički metodom jedinične sile :  $w_{2,ms} = 0,33 \text{ mm}$
3. Grafoanalitički (Mohrova analogija) :  $w_{2,g} = 0,33 \text{ mm}$

### 3. ZAKLJUČAK

U ovome smo završnom radu prošli kroz i opisali više različitih metoda koje se mogu koristiti za određivanje pomaka točke statičkih sistema. Metode dobivanja vrijednosti pomaka koje smo obradili su :

1. analitička metoda preko diferencijalne jednadžbe progibne linije
2. analitička metoda pomoću jedinične sile koju zadajemo na mjestu i u smjeru pomaka
3. grafoanalitička metoda zasnovana na Mohrovoj analogiji

Kako bi primjenili bilo koju od ovih metoda, mora nam biti poznat momentni dijagram i momentne funkcije statičkog sustava. Koraci određivanja momentnog dijagrama variraju ovisno o tome kakav je statički sustav.

Statički sustav može biti određen ili neodređen. Statički određen sustav je onaj koji ima točno potreban broj veza kako bi bio u stanju ravnoteže. Statički neodređen sustav je sustav koji ima prekobrojne veze koje mu nisu potrebne kako bi se nalazio u stanju ravnoteže. Kod statički određenih sustava na jednostavan način preko jednadžbi ravnoteže dolazimo do svih potrebnih reakcija za određivanje momentnog dijagrama. Kod statički neodređenih sustava, moramo se koristiti metodom jedinične sile kojom zamjenjujemo prekobrojne veze te tako dobivamo osnovni sustav i preko uvjeta kompatibilnosti dolazimo do vrijednosti prekobrojnih veličina. Zatim također pomoću jednadžbi ravnoteže računamo preostale reakcije. Kada nam je poznat momentni dijagram, kreće proces određivanja pomaka različitim metodama. Analitičkom metodom preko diferencijalne jednadžbe progibne linije dvostruko integriramo moment u točki u kojoj tražimo pomak te tako integriranu vrijednost momenta pomnožimo sa recipročnom vrijednošću fleksijske krutosti nosača  $EI$  kako bi dobili vrijednost progiba. Kod metode jedinične sile za određivanje pomaka zadajemo jediničnu silu na osnovnom sistemu na mjestu i u smjeru traženog pomaka. Zatim određujemo momentni dijagram na osnovnom sistemu uzrokovan zadanom jediničnom silom, a nakon toga računamo vrijednost pomaka na isti način na koji računamo koeficijente fleksibilnosti, dakle primjenom Vereščaginovog teorema. Kod grafoanalitičke metode momentni dijagram zamjenjujemo dijagramom zamišljene distribuirane sile, zatim računamo vrijednosti vektora kutova te crtamo poligon vektora kutova, a zatim i tangentni poligon. U tangentnom poligonu zaključnu liniju crtamo tako da spajamo točke statičkog sustava u kojima postoje rubni uvjeti. Jedan od mogućih rubnih uvjeta je da je progib jednak nuli. Kod ove je metode bitno sve crtati u određenim mjerilima kako bi mogli očitati točnu vrijednost pomaka točke statičkog sistema.

Na temelju dobivenih rezultata iz primjera kroz koji smo prošli koristeći se svim navedenim metodama, dolazimo do zaključka da je za određivanje vrijednosti pomaka neke točke statičkog sistema svejedno kojom ćemo se metodom koristiti. Sve tri metode dale su (na drugu decimalu zaokružen) isti rezultat. Obzirom na taj rezultat, kao najpogodniju metodu

mogli bi smatrati grafoanalitiku, iz tog razloga što sa jednom skicom dobivamo približne vrijednosti pomaka svih točaka statičkog sistema.

## POPIS LITERATURE

Veselin Simović, „Građevna statika 1“, 1988.

I.P. Prokofjev, „Teorija konstrukcija 2“, 1968.

Milutin Anđelić, „Građevna statika 2“, 2005.

Krešimir Fresl, „Skiciranje progibnih linija“, nepoznata godina

Petra Gidak; Elizabeta Šamec, „Statički neodređeni sistemi“, 2022.

## POPIS SLIKA

Slika 1. : Statički određen sustav br.1 (prosta greda).....	2
Slika 2. : Statički određen sustav br.1 sa zadanim vanjskim opterećenjem (Izvor : Simović, 1988.) .....	3
Slika 3. : Momentni dijagram (Izvor : Simović, 1988.) .....	4
Slika 4. : Statički neodređen sustav br.1 .....	7
Slika 5. : Osnovni sustav br.1 .....	8
Slika 6. : Osnovni sustav br.2 .....	9
Slika 7. : Osnovni sustav br.1 sa zadanim vanjskim opterećenjem $q$ .....	10
Slika 8. : Momentni dijagram $Mx0$ .....	10
Slika 9. : Momentni dijagram $mx1$ .....	11
Slika 10. : Pretpostavljeni pomak nosača od sile $X1$ .....	11
Slika 11. : Pretpostavljeni pomak nosača od opterećenja $q$ .....	11
Slika 12. : Pretpostavka konačnog pomaka nosača .....	11
Slika 13. : Zadani neodređeni sustav sa određenom reakcijom $B_y$ .....	13
Slika 14. : Momentni dijagram $M$ zadanog statički neodređenog sustava.....	15
Slika 15. : Jedinična sila $X1 = 1$ zadana na osnovnom sistemu.....	15
Slika 16. : Momentni dijagram $m1$ uzrokovan jediničnom silom $X1 = 1$ .....	15
Slika 17. : Podjela momentnog dijagrama $M$ .....	16
Slika 18. : Podjela momentnog dijagrama $m1$ .....	16
Slika 19. : Greda s prepustom sa zadanim vanjskim opterećenjem (Izvor : Fresl, nepoznata godina).....	18
Slika 20. : Momentni dijagram grede s prepustom (Izvor : Fresl, nepoznata godina).....	19
Slika 21. : Dijagram $\kappa(x)$ (Izvor : Fresl, nepoznata godina).....	20
Slika 22. : Vektori $\phi$ (Izvor : Fresl, nepoznata godina) .....	20
Slika 23. : Verižni poligon (Izvor : Fresl, nepoznata godina) .....	22
Slika 24. : Tangentni poligon.....	22
Slika 25. : Kontinuirana greda.....	24
Slika 26. : Osnovni sustav .....	24
Slika 27. : Dijagram $Mx0$ .....	25
Slika 28. : Dijagram $mx1$ .....	25
Slika 29. : Podjela dijagrama $Mx0$ (za $\delta10$ ).....	25
Slika 30. : Podjela dijagrama $mx1$ (za $\delta10$ ).....	26
Slika 31. : Podjela dijagrama $mx1$ (za $\delta11$ ).....	26
Slika 32. : Statički neodređeni sustav sa prikazom svih reakcijskih sila i vanjskog opterećenja .....	27
Slika 33. : Momentni dijagram $M0$ .....	28
Slika 34. : Jedinična sila na mjestu i u smjeru traženog pomaka.....	30



---

Slika 35. : Momentni dijagram $m_1$ .....	30
Slika 36. : Podjela dijagrama $M_0$ .....	31
Slika 37. : Podjela dijagrama $m_1$ .....	31
Slika 38. : Dijagram $\kappa x$ .....	32
Slika 39. : Vektori kutova $\varphi_1, \dots, \varphi_6$ .....	32
Slika 40. : Poligon vektora kutova $\varphi_1, \dots, \varphi_6$ .....	33
Slika 41. : Tangentni poligon kontinuirane grede .....	34