

# Unutarnje sile u grednim nosačima

---

Vukanović, Tea

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:926267>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-19**

Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

TEA VUKANOVIĆ

# UNUTARNJE SILE U GREDNIM NOSAČIMA

ZAVRŠNI RAD

Zagreb, rujan 2024.



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

TEA VUKANOVIĆ

# UNUTARNJE SILE U GREDNIM NOSAČIMA

ZAVRŠNI RAD

Mentorica: izv. prof. dr. sc. Marta Šavor Novak

Zagreb, rujan 2024.



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

TEA VUKANOVIĆ

# INTERNAL FORCES IN GIRDERS

FINAL THESIS

Supervisor: assoc. prof. Marta Šavor Novak

Zagreb, 2024.

## SAŽETAK

Gredni nosači su konstrukcijski elementi koji se često primjenjuju u konstrukcijama. Raspodjela njihovih unutarnjih sila ima veliki utjecaj na stabilnost i funkcionalnost grednog nosača. Opisani su pojmovi gredni nosač, unutarnje sile, statička određenost i neodređenost, ležajevi. Istaknuta je važnost razumijevanja ponašanja unutarnjih sila i poznavanje istih. Radi boljeg razumijevanja statički određenih grednih nosača, prikazan je riješeni primjer takvog nosača. Za rješavanje statički neodređenog jednostavnog grednog nosača korišten je programski paket. Isti takav zadatak riješen je i ručno s pomoću metode sile, u svrhu usporedbe dobivenih rezultata s rezultatima riješenih programski.

**Ključne riječi:** moment savijanja, poprečna sila, uzdužna sila, gredni nosač, statički određeni i neodređeni gredni nosači

## SUMMARY

Beam girders are structural elements that are often used in structures. The distribution of their internal forces has a great influence on the stability and functionality of the beam girder. The following terms are explained in the thesis: beam girders, internal forces, static determinacy and indeterminacy, supports. The importance of understanding the behaviour of internal forces and knowing them is emphasised. For a better understanding of statically determinate beam girders, a solved example of such a girder is shown. A software package was used to solve statically indeterminate simple beam girder. The same task was also performed manually by using the force method, in order to compare the results with the results obtained by software.

**Key words:** bending moment, shear force, axial force, beam girders, statically determinate and indeterminate beam girders

## SADRŽAJ

|  |           |
|--|-----------|
| <b>SAŽETAK</b> .....                               | <b>i</b>  |
| <b>1. UVOD</b> .....                               | <b>3</b>  |
| <b>2. GREDNI NOSAČI</b> .....                      | <b>3</b>  |
| 2.1. Vrste grednih nosača.....                     | 4         |
| 2.2. Oblici poprečnih presjeka grednih nosača..... | 4         |
| 2.3. Ležajevi i ležajne reakcije.....              | 6         |
| 2.4. Određeni i neodređeni statički sustavi.....   | 8         |
| 2.5. Primjena grednih nosača.....                  | 9         |
| <b>3. UNUTARNJE SILE</b> .....                     | <b>9</b>  |
| 3.1 UNUTARNJE SILE U GREDNIM NOSAČIMA.....         | 10        |
| <b>ZAKLJUČAK</b> .....                             | <b>40</b> |
| <b>POPIS LITERATURE</b> .....                      | <b>42</b> |

## 1. UVOD

Cilj ovog završnog rada jest temeljito istražiti unutarnje sile u grednim nosačima. To ćemo postići kroz analizu presjeka, ležajeva, statičkih sustava i unutarnjih sila, uz naglasak na ključne parametre kao što su moment savijanja, poprečna sila i uzdužna sila.

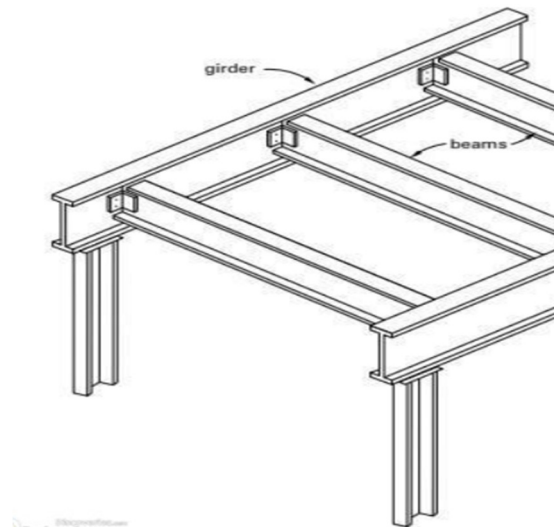
Razumijevanje unutarnjih sila grednih nosača od iznimne je važnosti za projektiranje i analizu konstrukcija. U građevinarstvu, a i u ostalim granama inženjerstva, gredni nosači su jedni od najčešćih konstrukcijskih elemenata koji se upotrebljavaju za izgradnju građevina u kojima svakodnevno boravimo ili koje svakodnevno susrećemo, primjerice; zgrade, mostovi i mnoge druge konstrukcije. Uloga grednih nosača jest da prenesu opterećenje na način da zadrže stabilnost i čvrstoću konstrukcije. Ključni faktor u prijenosu opterećenja predstavljaju unutarnje sile koje osiguravaju prenošenje i raspodjelu opterećenja na oslonce. Također, u radu će biti predstavljene različite vrste i oblici grednih nosača te način na koji su oni pričvršćeni na podlogu. Bit će prikazan primjer dimenzioniranja profila čeličnog grednog nosača kako bi se istaknula važnost odabira poprečnog presjeka. Vrsta, oblik i način pričvršćenja grednih nosača su izrazito važni jer imaju veliki utjecaj na raspodjelu unutarnjih sila pa tako i na cijelu konstrukciju. Radi boljeg razumijevanja unutarnjih sila, obradit će se postupak njihovog određivanja i postupak određivanja statičke određenosti i neodređenosti grednih nosača. Razradit će se primjeri određivanja unutarnjih sila statički određenih i neodređenih grednih nosača. Određivanje unutarnjih sila statički određenih grednih nosača provest će se analitički dok će se određivanje unutarnjih sila neodređenih grednih nosača prikazati proračunom u programskom paketu SAP2000. Nakon proračuna programskim putem, isti primjer bit će prikazan ručnim proračunom metodom sila. Dobiveni rezultati će se interpretirati i usporediti.

## 2. GREDNI NOSAČI

Gredni nosači su kosi ili horizontalni konstrukcijski elementi koji nose i prenose opterećenje u ležajevima. Osnovna funkcija grednog nosača je prenošenje opterećenja. To opterećenje može biti u vertikalnom i horizontalnom smjeru, stoga gredni nosači mogu pružiti i horizontalnu i vertikalnu stabilnost konstrukciji. Uglavnom su jako kruti i imaju veće dimenzije u odnosu na običnu gredu. Također, imaju veliku ulogu i široki raspon upotrebe u



građevinarstvu te su, stoga, ujedno i jedan od najosnovnijih elemenata u građevinarstvu. Mogućnost izvedbe grednih nosača od različitih materijala te u različitim oblicima i veličinama poprečnih presjeka čini ih poželjnim prilikom izvedbe konstrukcije.



Slika 1: Čelični gredni nosač (engl. girder) i čelične grede (engl. beams) [1]

## 2.1. Vrste grednih nosača

Gredni nosači se mogu izrađivati od raznih materijala, što nudi značajnu prednost u projektiranju i izgradnji. Materijali od kojih mogu biti izgrađeni su: čelik, beton, drvo, aluminij te kompoziti [2]. Kompozitni gredni nosači su nosači koji se sastoje od spoja dvaju ili više različitih materijala što omogućuje stvaranje novog materijala sa superiornim svojstvima u odnosu na pojedinačne materijale (npr. armiranobetonski gredni nosač). Također, svaki materijal ima svoje prednosti i mane, ovisno o okruženju u kojem se nalazi konstrukcija. Prilagodba s okolinom, usklađivanje s vanjskim čimbenicima, estetskim izborima, ekonomska održivost te učinkovitost korištenja materijala imaju veliku ulogu pri izboru materijala, a raznolikost materijala olakšava odabir.

## 2.2. Oblici poprečnih presjeka grednih nosača

Oblik poprečnog presjeka grednog nosača direktno utječe na raspodjelu unutarnjih sila (savijanje, smicanje, torzija) i njegovu sposobnost prijenosa opterećenja. Odabir oblika ključan je za postizanje optimalne učinkovitosti i ekonomičnosti grednog nosača, a

inženjerima pripada zadaća optimizacije oblika nosača kako bi se postigle potrebne čvrstoće, učinkovitosti težine i performanse. Postoji više vrsta oblika poprečnog presjeka grednih nosača, a najčešći od njih su: [2-4]

1. **I- gredni nosač** je nosač kojem oblik poprečnog presjeka nalikuje slovu „I“. Sastoji se od hrbata i pojasnica. Često se koristi u izgradnji mostova i zgrada radi dobrog omjera čvrstoće i težine.



Slika 2: I-gredni nosač [5]

2. **Sandučasti gredni nosači** su nosači zatvorenog poprečnog presjeka, nalik na kutiju. Posjeduju izvrstan omjer čvrstoće i težine te imaju odličnu otpornost na uvijanje.



Slika 3: kutijasti gredni nosači [1, 5]

3. **C-gredni nosač** je nosač kojem oblik poprečnog presjeka nalikuje na slovo „C“. Ima dobar omjer čvrstoće i težine.



Slika 4: C-gredni nosač [6]

4. **T-gredni nosač** je nosač kojem oblik poprečnog presjeka nalikuje na slovo „T“. ima dobar omjer čvrstoće i težine.



Slika 5: T-gredni nosači [7]

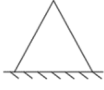
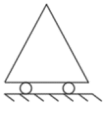
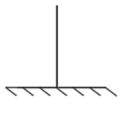
### 2.3. Ležajevi i ležajne reakcije

Ležajevi su potrebni kako bi gredni nosači bili stabilno oslonjeni i uspješno izvršavali svoju zadaću nošenja te prijenosa opterećenja u tlo ili neki drugi konstrukcijski element. Oni predstavljaju veze grednog nosača s podlogom te mu onemogućavaju pomicanje točaka tijela u određenim smjerovima. Postoje razni načini na koje gredni nosači mogu biti oslonjeni, a oni ovise o vrsti opterećenja kojem je gredni nosač izložen. U ležajevima se kao odgovor na djelovanje opterećenja javljaju reakcije koje iznimno utječu na unutarnje sile grednih nosača i cijelu konstrukciju. Kako bi se pojednostavnila analiza grednih sustava, i učinila matematički izvedivom, u mehanici se ležajevi promatraju kao idealizirani modeli. Njihov položaj u prostoru je određen koordinatnim osima. U statičkoj analizi, oslonce grednih nosača možemo promatrati kao nepomične, pomične ili u obliku uklještenja, a međusobno spajanje dvaju nosača može biti kruto ili zglobno.

Osnovni princip graditeljske statike koji se temelji na III Newtonovu zakonu, također se naziva i „Zakon akcije i reakcije“, opisuje međudjelovanje dvaju tijela te glasi: „Na svaku sliku akcije javlja se jednaka i suprotno usmjerena sila reakcije. Ukupno međudjelovanje dvaju tijela prikazuje se dvjema silama koje su jednake po iznosu, suprotnog smjera djelovanja i leže na istom pravcu djelovanja“ [8]. Dakle, zbroj sila u vezama jednak je opterećenju koje djeluje na konstrukciju. S obzirom na to, zbroj sila u vezama i sile od opterećenja međusobno se poništavaju te je njihov zbroj jednak nuli; što u statičkom smislu predstavlja ravnotežu, tj. mirovanje konstrukcije.

U navedenim vrstama oslonaca, javljaju se različite ležajne reakcije. Ležajne reakcije tijela u ravnini sprječavaju translaciju u horizontalnom i/ili vertikalnom smjeru te mogu sprječavati zaokret. Nepomični ležaj sprječava translaciju u horizontalnom i vertikalnom smjeru, ali omogućuje zaokret. Pomični ležajevi sprječavaju translaciju u smjeru okomitom na pravac klizanja dok su translacija na pravcu klizanja i zaokret omogućeni. Ležajevi koji sprječavaju i horizontalnu i vertikalnu translaciju te zaokret oko bilo koje osi su upeti, odnosno ukliješteni ležajevi [9].

Tablica 1. *Osnovne vrste ležajeva tijela u ravnini, njihove oznake te reakcije koje se javljaju uslijed opterećenja*

|    | VRSTA LEŽAJA    | OZNAKA  | REAKCIJSKA SILA                        |
|----|-----------------|---|--|
| 1. | Nepomični ležaj |  | horizontalna i vertikalna sila         |
| 2. | Pomični ležaj   |  | vertikalna sila                        |
| 3. | Upeti ležaj     |  | Horizontalna, vertikalna sila i moment |

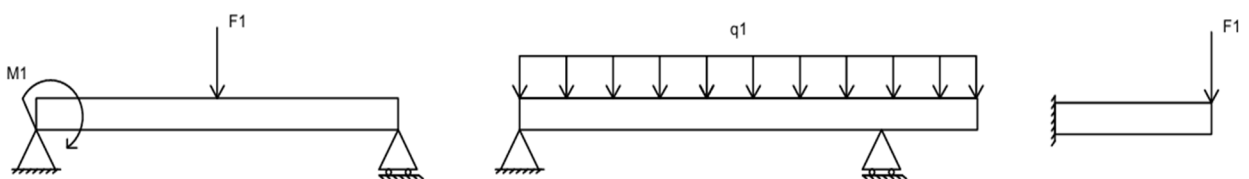
## 2.4. Određeni i neodređeni statički sustavi

Promatrajući statičku određenost, gredne nosače dijelimo na statički određene i neodređene. Statička određenost i neodređenost imaju značajan utjecaj na raspored i veličine unutarnjih sila, a način na koji određujemo je li statički sustav određen ili neodređen ovisi o broju nepoznatih reakcija, uvjetima ravnoteže te načinu podupiranja konstrukcije. U ravnini, gredni nosači imaju tri stupnja slobode gibanja koji su spriječeni s **ispravno** postavljenim ležajevima; „pravci po kojima veze sprečavaju pomake ne smiju prolaziti istom konačnom ili neizmjerljivo dalekom točkom (Fresl, 2007.)“ [10]. Gredni nosači se smatraju statički određenima ako se postavljanjem triju osnovnih uvjeta ravnoteže ( $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$  i  $\sum M = 0$ ) mogu odrediti tri nepoznate statičke veličine. Statički neodređeni gredni nosači, u ravnini, su oni kod kojih je broj nepoznatih reakcija veći od broja uvjeta ravnoteže [8-10].

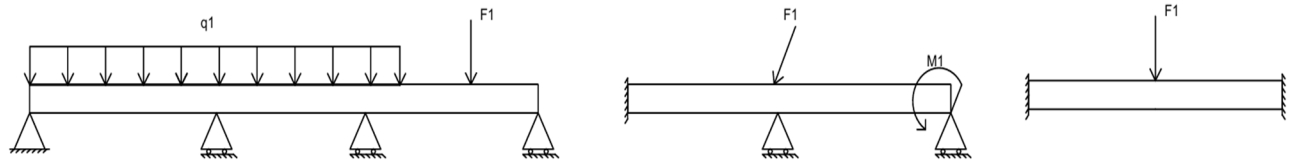
Kada bismo broj nepoznatih reakcija označili sa slovom „n“, a slovom „k“ broj jednadžbi ravnoteže, dobili bismo tri moguća slučaja: [9]

$$S = n - k$$

1.  $s = 0$  – ako je broj nepoznanica jednak broju jednadžbi ravnoteže – zadatak je statički određen
2.  $s > 0$  – ako je broj nepoznanica veći od broja jednadžbi – zadatak je statički neodređen onoliko koliko iznosi „s“
3.  $s < 0$  – broj nepoznanica manji je od broja jednadžbi – promatrana konstrukcija je mehanizam sa „s“ stupnjeva slobode gibanja.



Slika 6: primjer statički određenih grednih nosača



Slika 7: primjer statički neodređenih grednih nosača

## 2.5. Primjena grednih nosača

Gredni nosači su osnovni konstrukcijski elementi koji se koriste uvelike koriste u građevinarstvu. Imaju iznimnu sposobnost nošenja i raspodjele opterećenja te se zbog nje često koriste u izgradnji mostova, zgrada, industrijskih objekata, pomorskih konstrukcija, konstrukcijama za prijenos električne energije i slično. U svakodnevnom životu, najčešće se susrećemo s grednim nosačima na mostovima i na zgradama. Gredni nosači imaju veliku ulogu kod izgradnje mostova čineći primarne konstrukcijske elemente koji podupiru mostovnu ploču i prometno opterećenje. Zbog njihove čvrstoće i krutosti te sposobnosti premošćenja velikih raspona, izvrsno podnose velika opterećenja te se smanjuje broj potpora što značajno smanjuje troškove gradnje. Njihova nosivost i sposobnost premošćenja velikih raspona se očituje i kod zgrada.

## 3. UNUTARNJE SILE

Unutarnje sile su nevidljive sile unutar tijela koje nastaju međusobnim privlačenjem čestica te mu na taj način pružaju čvrstoću i određuju njegov oblik. Kratkog su dosega, što znači da djeluju samo na maloj udaljenosti, obično na razini atoma ili molekula koji čine materijal od kojeg je napravljena konstrukcija. Iako djeluju na malim udaljenostima, imaju sposobnost da spriječe deformaciju ili raspad konstrukcije. Unutarnje sile raspodijeljene po površinama poprečnih presjeka zamjenjuju se rezultirajućim djelovanjima u težištima presjeka. To znači da se mnoštvo sitnih sila sažima u jednu, ekvivalentnu silu koja djeluje u određenoj točki, pojednostavljujući tako analizu i proračune. Važno je napomenuti da se unutarnje sile ne mogu promatrati izravno, one se manifestiraju kroz deformacije i naprezanja objekta na koji djeluju. Na primjer, kada želimo rastegnuti štap, unutarnje sile rastezanja sprječavaju da se on slomi.

Gredni nosači su kruta tijela koja nose i preuzimaju opterećenja. Opterećenja mogu biti vlastita težina konstrukcije, uporabna opterećenja (npr. ljudi, namještaj), promjenjiva djelovanja (npr. vjetar, snijeg, temperatura), a također mogu biti i izvanredna djelovanja (npr. požar, potres, tornado, eksplozija) [11]. Navedene sile i opterećenja se na konstrukciji mogu manifestirati kao koncentrirane sile, spreg sila, kontinuirana opterećenja ili kao kombinacije tih opterećenja. Vanjske sile i opterećenja pokušavaju promijeniti oblik i položaj konstrukcije, ali ona im se aktivno suprotstavlja pojavom unutarnjih sila te na taj način zadržava svoj izvorni oblik i položaj. Unutarnje sile su od iznimne važnosti jer s pomoću njih konstrukcija zadržava ravnotežu i sprječava njezine deformacije i gibanja [9]. Također, razumijevanje unutarnjih sila je nužno kako bi konstrukcija bila pravilno projektirana i dimenzionirana te kako ne bi došlo do njezinog loma [9]. Raspodjela i veličina unutarnjih sila ovise o veličini i načinu oslonjenosti konstrukcije s podlogom, a unutarnje sile koje se najčešće javljaju u ravnini su moment, uzdužna te poprečna sila.

### 3.1 UNUTARNJE SILE U GREDNIM NOSAČIMA

Unutarnje sile se ne mogu izravno mjeriti, stoga se one određuju proračunski. Također, u praksi se često koriste dijagrami unutarnjih sila kako bi se grafički prikazalo njihovo djelovanje. U sljedećem primjeru (slika 9., 10.), prikazan je postupak određivanja unutarnjih sila u grednom nosaču.

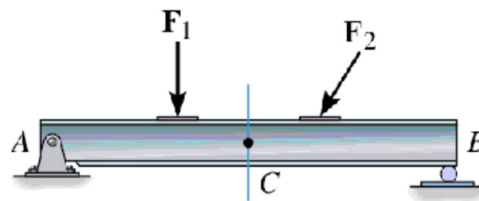
Greda je oslonjena na podlogu pomoću nepomičnog i kliznog ležaja (slika 9). Da bismo saznali vrijednost unutarnjih sila koje djeluju na gredni nosač, prvi korak je promotriti zadanu gredu te odrediti od koliko diskova se sastoji, na koji način je oslonjena i koje vrste opterećenja djeluju na nju. Zatim, na temelju stečenog znanja o ležajevima i reakcijama koje se javljaju u njima, odrediti s koliko veza je gredni nosač povezan s podlogom [12]. Određivanjem broja nepoznatih sila u ležajevima moguće je odrediti statičku određenost sustava, prema izrazu: [9]

$$S = n - k,$$

-n= broj nepoznatih reakcija

-k= broj jednadžbi ravnoteže,

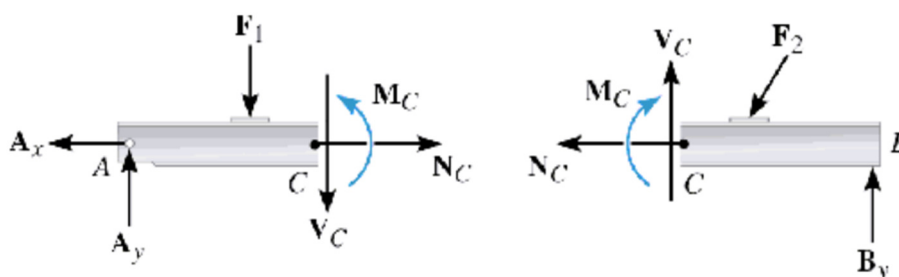
dobili bismo da je  $S = 3 - 3 \Rightarrow S = 0$ . Dobiveni rezultat predstavlja statičku određenost grednog nosača (slika 9).



Slika 8: gredni nosač pod utjecajem opterećenja  $F_1$  i  $F_2$  (izvor: [12])

Budući da se u nepomičnom ležaju  $A$  javlja vertikalna  $A_y$  i horizontalna  $A_x$  sila, a kod kliznog ležaja  $B$  sila okomita na smjer klizanja  $B_y$ , prikazana greda u zbroju ima tri veze s podlogom. Kada bismo raspisali uvjete ravnoteže za tri nepoznate sile  $A_y$ ,  $A_x$ ,  $B_y$ , dobili bismo iznos svih triju nepoznatih sila [9, 12].

Radi lakšeg razumijevanja djelovanja unutarnjih sila, prikazan je zamišljeni presjek ravninskog grednog nosača, proizvoljno presječenog okomito na os grednog nosača u točki „C“ (slika 10).

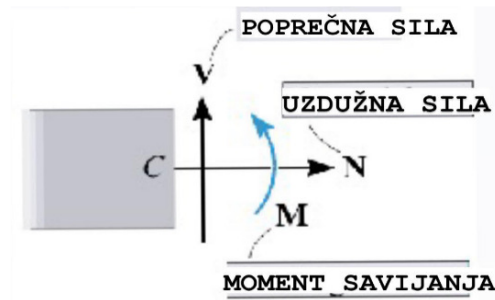


Slika 9: presjek grednog nosača u točki „C“ (izvor: [12])

Konačno, kada je određen iznos reakcijskih sila u ležajevima, moguće je odrediti unutarnje sile pomoću tri uvjeta ravnoteže;  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$  i  $\sum M = 0$ . Uvjeti ravnoteže postavljaju se na način da se zasebno promatraju desni i lijevi odjsečki grednog nosača.

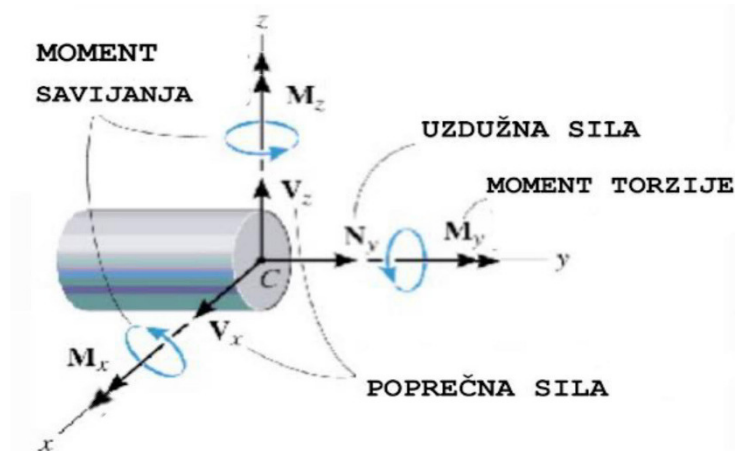
Unutarnje sile se uvijek nalaze u ravnoteži. Kada se gredni nosač koji je bio u stanju ravnoteže (slika 9) presječe okomito na njegovu os (slika 10), tada svaki njegov dio mora ostati u ravnoteži uslijed djelovanja vanjskih sila i opterećenja [9]. Unutarnje sile kojima jedan dio grede djeluje na drugi su jednake po intenzitetu i pravcu djelovanja, a različite po orijentaciji.





Slika 10: Ravninski prikaz unutarnjih sila u presjeku grednog nosača (izvor: [12])

Primjenom metode presjeka na gredni nosač u prostoru, promatramo šest unutarnjih sila koje djeluju na poprečni presjek (slika 11). Prilikom rješavanja problema ravnoteže nosača u prostoru, potrebno je definirati sva djelovanja opterećenja. Zatim se dobivene sile i momenti moraju uključiti u jednadžbe ravnoteže za rješavanje nepoznatih sila, momenata ili reakcija u osloncima. Da bi gredni nosač bio u ravnoteži, algebarska suma jednadžbi ravnoteže mora biti jednaka nuli;  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$ ,  $\sum Z = 0$ ,  $\sum M_x = 0$ ,  $\sum M_y = 0$  i  $\sum M_z = 0$ .



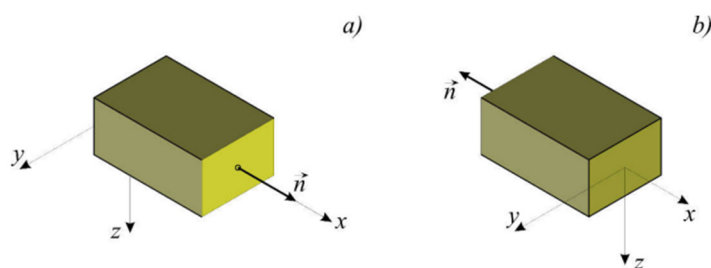
Slika 11: Prostorni prikaz unutarnjih sila u presjeku grednog nosača (izvor: [12])

### 3.1.1. Predznaci unutarnjih sila u grednim nosačima

Predznak unutarnjih sila u grednom nosaču određuje se konvencijom koja se koristi za opisivanje unutarnjih sila i momenata. Pri određivanju unutarnjih sila, od iznimne važnosti

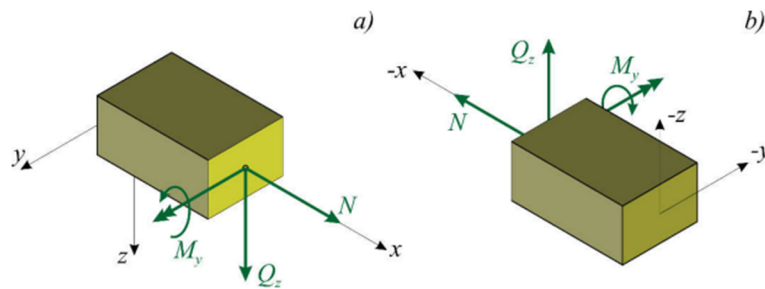
je odrediti njihov predznak. Pozitivni predznaci unutarnjih sila određeni su prema položaju koordinatnog sustava.

Koordinatni sustav  $x, y, z$  proizvoljno postavimo na način da koordinatna os „ $z$ “ leži u ravnini papira i usmjerena je prema dolje, koordinatna os „ $y$ “ „viri“ iz papira na način da je usmjerena prema čitatelju te horizontalna leži u ravnini papira i usmjerena je u desno. Ako su unutarnje sile i momenti usmjereni u smjeru vanjske normale, tada je presjek pozitivan. (slika 13a). Ako su unutarnje sile i momenti usmjereni suprotno od smjera vanjske normale, tada je presjek negativan. (slika 13b) [9]. Ova razlika u znaku presjeka ima ključnu ulogu u jednadžbama ravnoteže koje se koriste za analizu grednih nosača. U jednadžbama ravnoteže, smjerovi sila i momenata se izražavaju pomoću znakova (+ ili -), a pravilno korištenje znakova za presjek osigurava da su jednadžbe ravnoteže postavljene u skladu s fizičkim smjerovima sila i momenata.



**Slika 12: a) smjer vanjske normale lijeve strane presjeka, b) smjer vanjske normale desne strane presjeka (izvor: [9])**

Dakle, unutarnje sile poprečnog presjeka bit će pozitivne ako im je smjer djelovanja usmjeren u smjeru vanjske normale (slika 14a, 14b), u suprotnom, ako je smjer unutarnjih sila usmjeren suprotno od smjera vanjske normale, tada će one biti negativne [9].

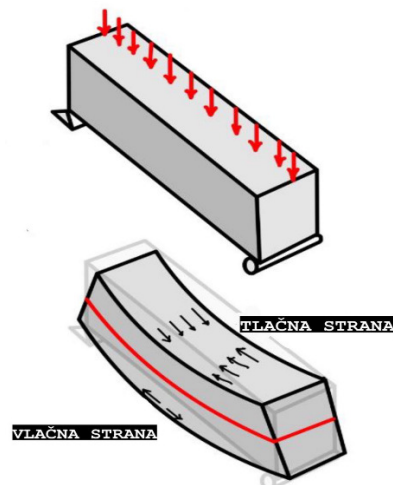


Slika 13: a), b) pozitivni smjerovi unutarnjih sila (izvor: [9])

### 3.1.2. Moment savijanja

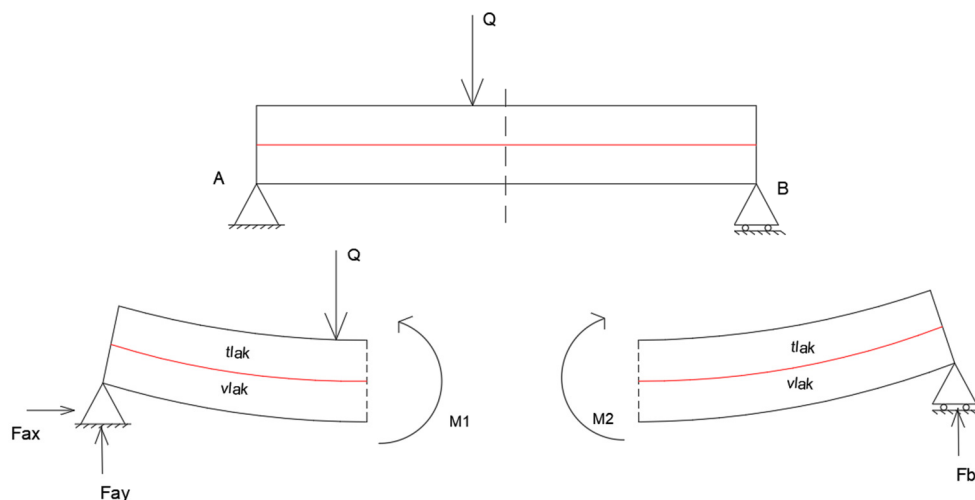
Za razumijevanje momenta savijanja, bitno je razumjeti pojmove „moment sile“ i „spreg sile“. Moment sile je umnožak sile i najkraće udaljenosti na kojoj ta sila djeluje od promatrane točke ili osi presjeka. Određen je veličinom i smjerom djelovanja, najčešće se prikazuje veličinom i zakrivljenom strjelicom oko osi ili točke u smjeru njegovog djelovanja. Nadalje, spreg sile čine dvije sile koje su iste veličine i nalaze se na paralelnim pravcima, ali su suprotne orijentacije. Veličina momenta sprega sile iznosi:  $M = F \cdot r$ , gdje  $M$  predstavlja moment,  $F$  silu te  $r$  najkraću udaljenost. Mjerna jedinica kojom se izražava veličina momenta sile i sprega sile je najčešće kilonjutmeter (kNm), a također se može izraziti i u njutnmetrima (Nm), njutncentimetrima (Ncm) te ostalim mjernim jedinicama [13].

Moment savijanja u presjeku grednog nosača djeluje u ravnini u kojoj leži os nosača, odnosno u ravninama koje su okomite na ravninu poprečnog presjeka te opisuje tendenciju vanjske sile da savije gredu (slika 15). Moment savijanja jednak je algebarskoj sumi momenata svih vanjskih sila i koncentriranih momenata koje djeluju s jedne ili druge strane promatranog presjeka [14]. Gredni nosač neposredno prije djelovanja opterećenja je ravan. Nakon djelovanja opterećenja postavljenog okomito na gredu, ona se savije na način da se donja strana grede „rastegne“, a gornja strana „skupi“. Stranu na kojoj se greda „rastegnula“ nazivamo vlačnom stranom, a „skupljenu“ površinu nazivamo tlačnom stranom. Razlog iz kojeg se koriste termini „vlak“ i „tlak“ je pojava sila koje djeluju na istom pravcu, na način da djeluju jedna prema drugoj ili suprotno jedna od druge [15].



Slika 14: savijanje grednog nosača (izvor: [13])

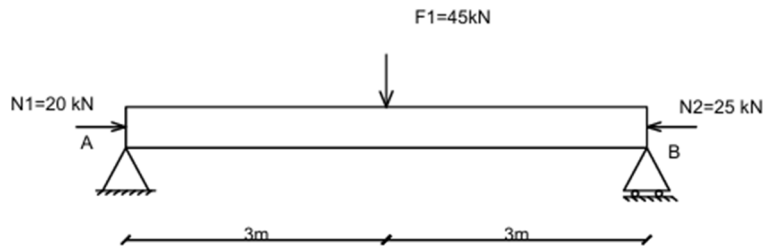
S obzirom na činjenicu da vlačne sile razvlače, a tlačne sile pritišću gredu, one svojim djelovanjem uzrokuju stvaranje unutarnjeg momenta. Zamišljenim presijecanjem grednog nosača (slika 15) u bilo kojoj točki, vidljivo je djelovanje unutarnjeg momenta savijanja (slika 16). Kao što je već spomenuto, kada vlačne sile rastežu presjek u donjem dijelu, prema III Newtonovom zakonu, možemo zaključiti da se vlačnim silama suprotstavljaju unutarnje sile koje su na paralelnom pravcu i istog iznosa, ali suprotnog smjera. Isto vrijedi i za tlačne sile u gornjem dijelu grednog nosača. Unutarnje sile koje se suprotstavljaju vlaku i tlaku predstavljaju unutarnji moment. Sila unutarnjeg momenta se odupire savijanju grednog nosača te na taj način sprječava deformacije ili lom. Veća krutost i čvrstoća grednog nosača čine bolju otpornost grede na vanjska opterećenja. Navedeni unutarnji momenti smatraju se pozitivnima iz razloga što se suprotstavljaju vanjskom opterećenju [15].



Slika 15: prikaz momenta savijanja  $M_1$

Zadatak 1.

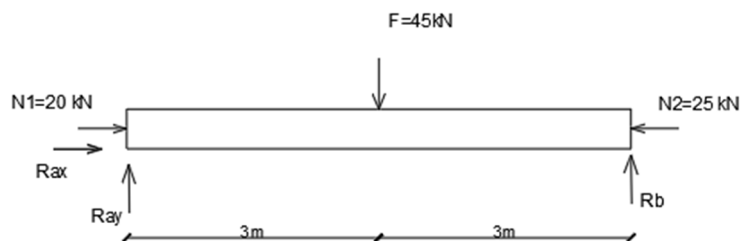
Zadan je gredni nosač opterećen vertikalnom silom  $F=45\text{ kN}$  i uzdužnim silama  $N1=20\text{ kN}$  i  $N2=25\text{ kN}$ . Potrebno je odrediti moment savijanja na udaljenosti od ležaja A za  $X_1=1.5\text{ m}$ .



Slika 16: Gredni nosač opterećen silama  $F_1$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ .

Rješenje:

Prikazani gredni nosač je statički određen;  $S=0$ .



1. korak

Kako bismo odredili moment savijanja, potrebne su nam vrijednosti ležajnih sila. Ako promatramo sumu momenata na točku A, dobit ćemo reakciju na B ležaju:

$$\sum M_A = 0;$$

$$-45\text{kN} \cdot 3\text{m} + R_b \cdot 6\text{m} = 0$$

$$6R_b = 135$$

$$R_b = 22.5\text{ kN}$$

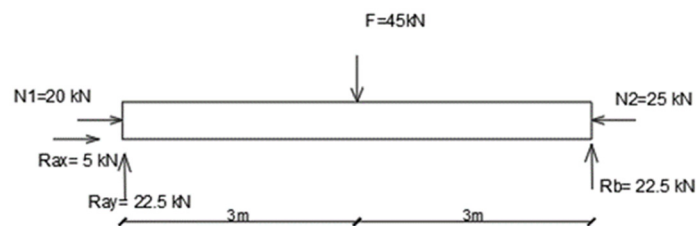
Ako promatramo sumu momenata na točku B, dobit ćemo vertikalnu reakciju u A ležaju:

$$\sum M_A = 0 ;$$

$$45kN \cdot 3m - Ra \cdot 6m = 0$$

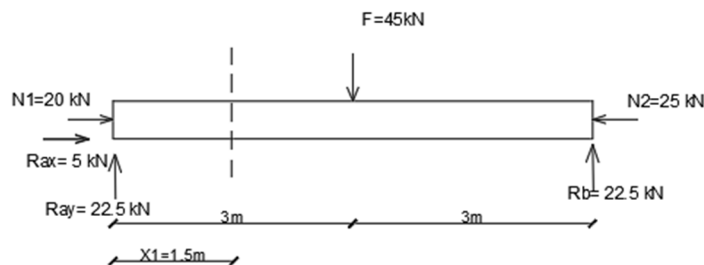
$$6Ra = 135$$

$$Ra = 22.5 kN$$



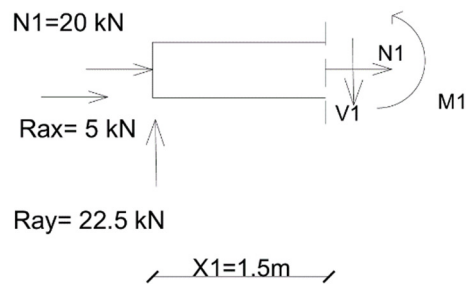
2. korak

Nakon određivanja vertikalnih reakcija u ležajevima, potrebno je odrediti iznos momenta savijanja u točki koja je udaljena od ležaja A za 1.5 metara;



3. korak

Za određivanje unutarnjeg momenta, potrebno je napraviti presjek u točki udaljenoj za 1.5 m od ležaja A:



4. korak

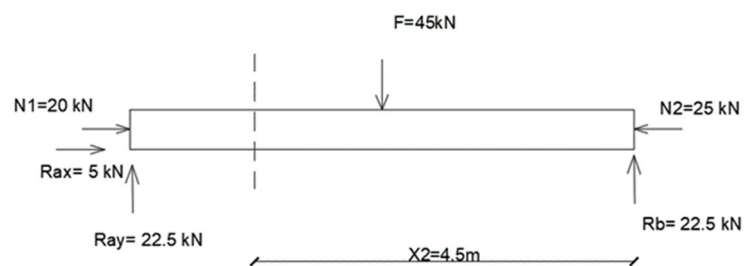
Izračun sume momenata na točku udaljenu od ležaja A za  $X_1 = 1.5$  m:

$$\sum M_{x_1} = 0 ;$$

$$-22.5 \text{ kN} \cdot 1.5 \text{ m} + M_1 = 0$$

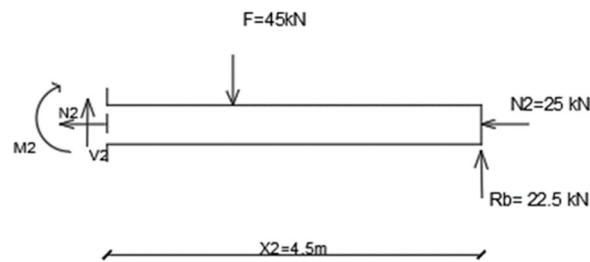
$$M_1 = 33.75 \text{ kNm}$$

Tvrdnju da su unutarnje sile uvijek u ravnoteži, moguće je dokazati na način da se sada promatra desni dio nosača za istu točku iz čega slijedi;



5. korak

Presjecanjem grednog nosača na udaljenosti  $X_2 = 4,5$  m slijedi;



6. korak

Postavljanjem sume momenata na točku koja je udaljena od ležaja B za 4.5m dobijemo;

$$\begin{aligned}\sum M_{x_2} &= 0 ; \\ 22.5kN \cdot 4.5m - 45kN \cdot 1.5m - M_2 &= 0 \\ M_2 &= 33.75 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Promatrajući lijevu i desnu stranu prijeseka, uočljivo je da su momenti savijanja lijeve i desne strane istog iznosa, a suprotnog smjera.

### 3.1.3. Poprečna sila

U ravnini, unutarnja poprečna sila grednog nosača predstavlja rezultantu svih sila koje djeluju okomito na os grednog nosača u određenom presjeku. Ona se dobiva kao algebarski zbroj projekcija svih sila, na os grednog nosača, koje djeluju s jedne ili druge strane poprečnog presjeka. Poprečna sila doživljava naglu promjenu u smjeru okomito na gredu na lokaciji gdje se nalazi koncentrirano opterećenje. U slučaju koncentriranog opterećenja usmjerenog prema dolje, poprečna sila će naglo porasti za vrijednost jednaku veličini tog opterećenja. Najčešći način označavanja poprečne sile u literaturi je slovo „V” ili „Q”, a jedinica mjere je kilonjuti [kN] [16]. Pozitivan smjer djelovanja poprečne sile je onaj u kojem ona ima tendenciju pomaknuti lijevu stranu presjeka prema dolje ili desnu stranu presjeka prema gore [9]. Postupak određivanja unutarnjih poprečnih sila provodi se zamišljenim presijecanjem grednog nosača okomito na njegovu os. Veličina poprečne sile utječe na naprezanje smicanja u materijalu; što je poprečna sila veća, to će biti i naprezanje smicanja veće.



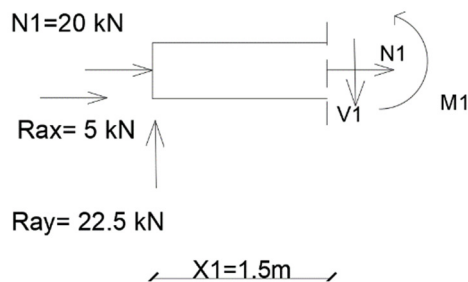
Na slici (slika 17) prikazan je gredni nosač opterećen silom  $F$  koja djeluje okomit na njegovu os. Poprečna sila koja se pojavljuje uslijed djelovanja sile  $F$ , nastoji se oduprijeti toj sili na način da sprječava smicanje grede, tj. sprječava njezin slom.

### Zadatak 2.

Na temelju prethodno zadanog zadatka, **zadatak 1**, potrebno je proračunati unutarnju poprečnu silu na udaljenosti  $X_1=1.5$  m .

Rješenje:

S obzirom na to da se vrijednosti svih unutarnjih sila određuju na način da se zadani element presječe okomito na os grednog nosača, u ovom primjeru na udaljenosti  $X_1=1.5$  m, postupak **zadatka 1** i **zadatka 2** se ne razlikuje do postavljanja uvjeta ravnoteže;

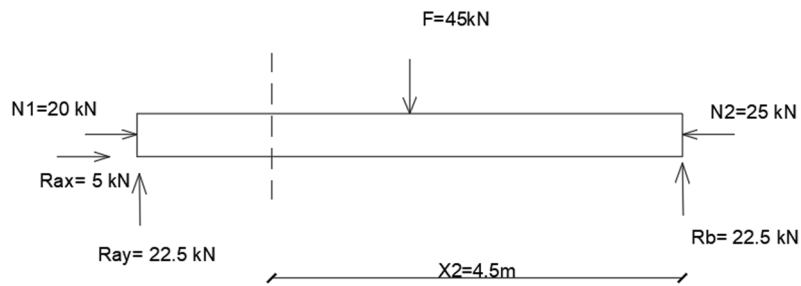


1.korak

Kako bismo odredili poprečnu silu u prikazanom presjeku, potrebno je napraviti sumu sila po  $y$ -osi;

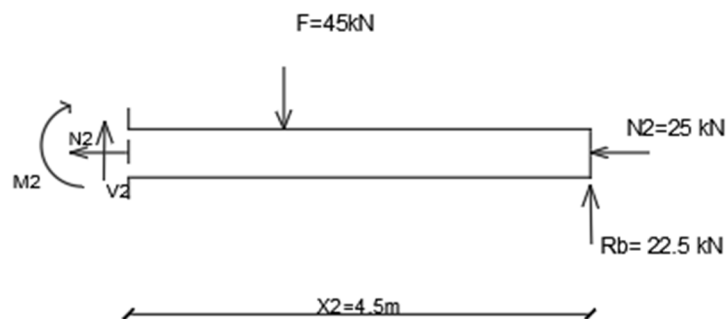
$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 ; \\ -22.5 + V1 &= 0 \\ V1 &= 22.5 \text{ kN}\end{aligned}$$

Tvrđnju da su unutarnje sile uvijek u ravnoteži, moguće je dokazati na način da se sada promatra desni dio nosača za istu točku iz čega slijedi;



2. korak

Presijecanjem grednog nosača na udaljenosti  $X_2 = 4.5$  m slijedi;



3. korak

Postavljanjem sume sila po  $y$ -osi dobijemo;

$$\sum F_y = 0;$$

$$-45 + V_2 + 22.5 = 0$$

$$V_2 = 22.5 \text{ kN}$$

Promatrajući lijevu i desnu stranu presjeka, uočljivo je da su poprečne sile lijeve i desne strane presjeka istog iznosa, ali suprotnog smjera.

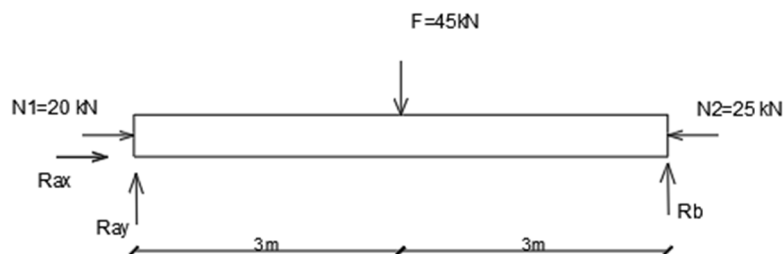
### 3.1.4. Uzdužna sila

Uzdužna ili aksijalna unutarnja sila je sila koja djeluje uzdužno, tj. paralelno s osi grednog nosača. Dobiva se kao algebarski zbroj projekcija svih sila, na os grednog nosača, koje djeluju s jedne ili druge strane poprečnog presjeka. Nastaje kao rezultat opterećenja koja se stavljaju na nosač, bilo da se radi o težini objekta koji stoji na njemu, ili o reakcijama koje nastaju kada se nosač oslanja na zidove ili stupove. Uzdužne sile se mogu manifestirati kao vlačne ili tlačne. Svojom pojavom, uzdužne unutarnje sile sprječavaju da se nosač skрати ili produlji pod opterećenjem. Na primjer, kada bismo uzeli konopac u ruke i rastegnuli ga, u konopcu bi se javile vlačne sile. Najčešći način označavanja uzdužne sile u literaturi je slovo „N“, a jedinica mjere je kilonjutr [kN] [14]. Uzdužne sile koje djeluju u smjeru normale imaju pozitivan smjer, a one koje djeluju suprotno od normale imaju negativan smjer.

#### Zadatak 3

Na temelju prethodno zadanog zadatka, **zadatak 1**, potrebno je proračunati unutarnju uzdužnu silu na udaljenosti  $X_1 = 1.5$  m.

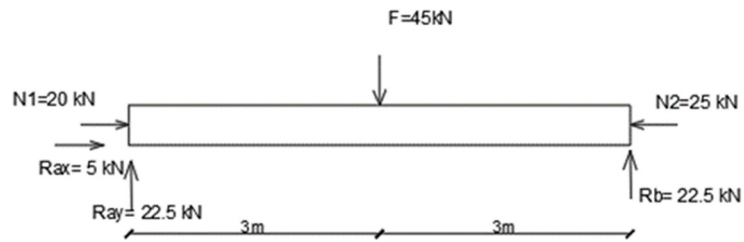
Rješenje:



1. korak

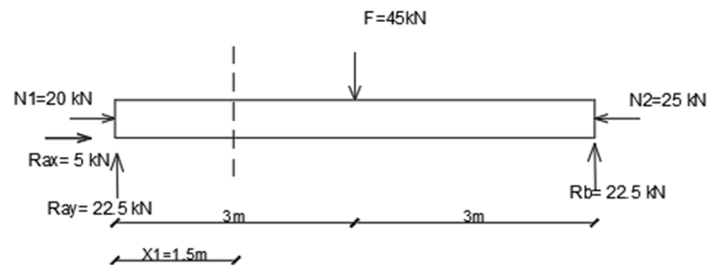
Kako bismo odredili uzdužne sile, potrebna nam je vrijednost horizontalne sile u ležaju A. Pomoću jednadžbi ravnoteže, dobit ćemo reakciju na A ležaju:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0; \\ 20 + R_{ax} - 25 &= 0 \\ R_{ax} &= 5 \text{ kN}\end{aligned}$$



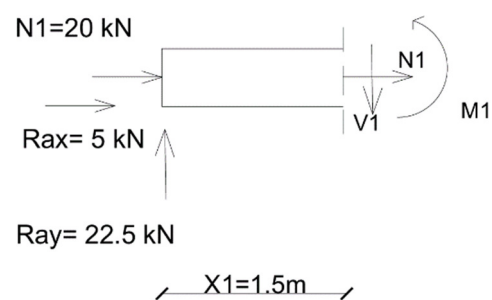
2. korak

Nakon određivanja reakcija u ležajevima, potrebno je odrediti iznos uzdužne sile u točki koja je udaljena od ležaja A za 1.5 metara;



3. korak

Za određivanje uzdužne sile, potrebno je napraviti presjek u točki udaljenoj za 1.5 m od ležaja A:



3

4. korak

Postavljanjem uvjeta ravnoteže, dobit ćemo iznos unutarnje uzdužne sile;

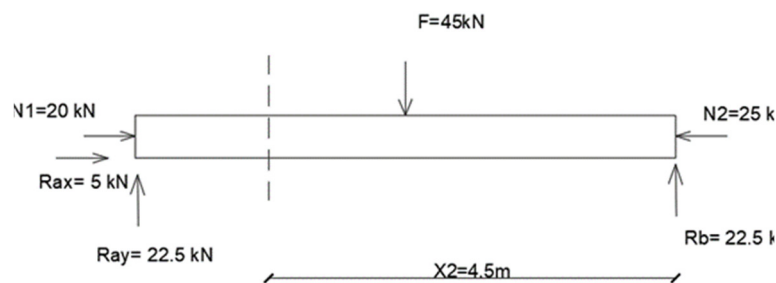
$$\sum F_x = 0 ;$$

$$20 + 5 + N1 = 0$$

$$N1 = -25 \text{ kN (TLAK)}$$

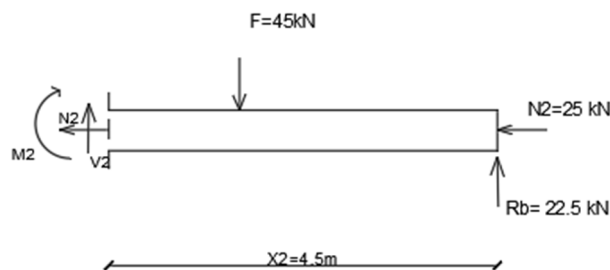
Dobiveni iznos uzdužne poprečne sile je negativnog predznaka. Negativni predznak predstavlja tlačnu silu.

Tvrđnju da su unutarnje sile uvijek u ravnoteži, moguće je dokazati na način da se sada promatra desni dio nosača za istu točku iz čega slijedi;



4. korak

Presijecanjem grednog nosača na udaljenosti  $X_2 = 4,5\text{m}$  slijedi;



5. korak

Postavljanjem sume sila po x-osi dobijemo;

$$\sum F_x = 0 ;$$

$$25 + N2 = 0$$

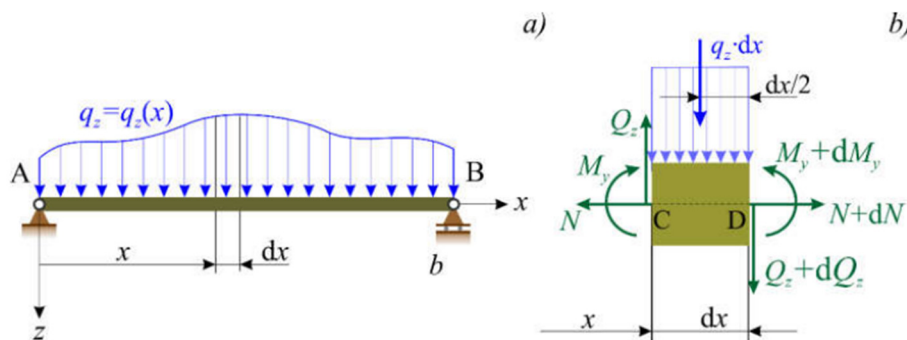
$$N_2 = -25 \text{ kNm}$$

Promatrajući lijevu i desnu stranu presjeka, uočljivo je da su unutarnje uzdužne sile lijeve i desne strane istog iznosa, a suprotnog smjera.

### 3.1.5. Veza između kontinuiranog opterećenja, momenta savijanja i poprečne sile

U kontekstu savijanja grednih nosača, ključni su parametri moment savijanja ( $M$ ) i poprečna sila ( $V$  ili  $Q$ ). Moment savijanja opisuje tendenciju grede da se savije, dok poprečna sila predstavlja ukupnu silu koja djeluje okomito na gredu u određenoj točki. Ona se ne dobiva algebarskim zbrojem svih sila, već zbrajanjem komponenti sila koje djeluju okomito na os grede. Za analizu naprezanja i deformacije grede nužno je razumijevanje diferencijalnih odnosa između momenta savijanja i poprečnih sila. Ono što je zajedničko ovim unutarnjim silama su jednadžba ravnoteže sila i jednadžba ravnoteže momenata.

Promatranjem grednog nosača u ravnini, koji je opterećen promjenjivim kontinuiranim opterećenjem  $q$ , možemo uočiti sljedeće:



Slika 17: a) gredni nosač opterećen proizvoljno promjenjivim kontinuiranim opterećenjem

b) ravnoteža odsječka grednog nosača širine  $dx$  (izvor: [9])

ako postavimo uvjete ravnoteže za odsječak grednog nosača širine  $dx$ , dobit ćemo sljedeće:

$$\sum F_x = 0; \quad (N + dN) - N = 0;$$

Iz sume sila po  $x$ -osi slijedi:  $dN = 0$ .

Dobiveni rezultat predstavlja uzdužnu silu koja je konstantna u prikazanom dijelu grednog nosača [9].

Zatim, promatramo sumu sila po y-osi:

$$\sum F_y = 0; \quad (Q_z + dQ_z) - Q_z + qz \cdot dx = 0$$

Rješavanjem jednadžbe dobiveni rezultat glasi:

$$\frac{dQ_z}{dx} = -qz$$

Dobiveni rezultat predstavlja prvu derivaciju poprečne sile po nezavisnoj koordinati x, koja je jednaka negativnom kontinuiranom opterećenju [9].

Postavljanjem posljednjeg uvjeta ravnoteže, dobivamo:

$$\sum M_{dx} = 0; \quad (M_y + dM_y) - M_y - Q_z \cdot dx + \frac{qz \cdot dx^2}{2} = 0$$

S obzirom na to da je promatrani presjek grednog nosača (slika 18b) infinitezimalan, zanemarujemo zadnji član jednadžbe  $(qz \cdot dx^2)/2$ . Zanemarivanje ovog člana znači da se pretpostavlja da je njegov utjecaj na konačni rezultat manje značajan od utjecaja drugih članova jednadžbe. [9] Iz navedenog slijedi;

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z$$

Dobiveni rezultat predstavlja prvu derivaciju momenta savijanja po nezavisnoj koordinati x koja je jednaka poprečnoj sili. Postavljanjem druge derivacije momenta savijanja po nezavisnoj koordinati x, dobije se sljedeći izraz:

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = -qz$$

Dobiveni izraz dokazuje vezu kontinuiranog opterećenja, momenta savijanja i poprečne sile. Ako gredni nosač nije opterećen kontinuiranim opterećenjem, odnosno  $q=0$ ; tada je poprečna sila konstantna, a moment savijanja je linearna funkcija. Zatim, ako je kontinuirano opterećenje konstantno po cijelom grednom nosaču, tada je poprečna sila linearna funkcija, a moment savijanja parabola drugog stupnja. Navedeni diferencijalni odnosi izrazito su bitni kod grafičkog prikazivanja dijagrama opterećenja [9].

### 3.1.6. Dimenzioniranje- primjena unutarnjih sila

U građevinarstvu, projektant teži pronaći ravnotežu između različitih faktora pri projektiranju građevine. To uključuje estetiku, ekonomičnost, funkcionalnost, sigurnost, održivost i mnoge druge aspekte. Projektant mora posvetiti posebnu pažnju pri odabiru dimenzija i geometrijskih oblika grednih nosača kako bi zadovoljio navedene faktore i osigurao da konstrukcija uspješno obavlja svoju funkciju te ima potrebni vijek trajanja. Za navedeno, potrebno je poznavati ponašanje unutarnjih sila jer one uvelike utječu na dimenzioniranje konstrukcije. Dimenzioniranje pomoću unutarnjih sila je postupak u statičkom proračunu konstrukcija kojim se određuju dimenzije, geometrijski oblici elemenata konstrukcije te armatura kod armiranog betona na temelju analiza unutarnjih sila i naprezanja koje djeluju na njih. Cilj dimenzioniranja je odabrati dimenziju poprečnog presjeka, koji će biti takav da se na razini poprečnog presjeka i na razini elementa isključe mogućnosti pojave loma, deformacija ili promjene oblika konstrukcije pod utjecajem opterećenja koja djeluju na nju.

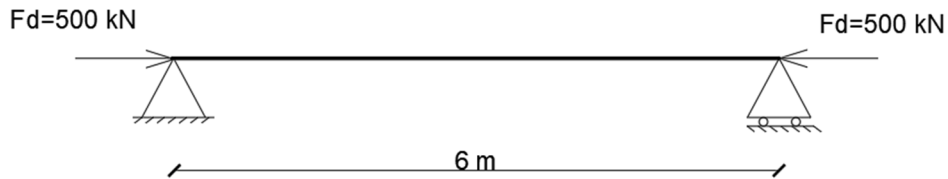
Kod dimenzioniranja elemenata postoje tri osnovna kriterija, a to su: čvrstoća, krutost i stabilnost [17]. Kako bi bio zadovoljen kriterij čvrstoće, potrebno je osigurati raspodjelu naprezanja na način da se nigdje ne smije pojaviti naprezanje koje je veće od dopuštenog naprezanja.

U sljedećem zadatku, prikazan je primjer dimenzioniranja čeličnog grednog nosača "I" poprečnog presjeka. Provjere su napravljene na razini elementa i poprečnog presjeka. Poprečni presjek može zadovoljavati uvjete nosivosti ili ih nezadovoljavati. U slučaju da poprečni presjek ne zadovoljava nosivost, projektant mora napraviti korekciju. Odabirom veće dimenzije poprečnog presjeka, promjenom materijala, promjenom oblika presjeka i slično. Također, poželjno je da projektant u obzir uzme cijenu i dostupnost materijala koji odabire za konstrukciju [18].

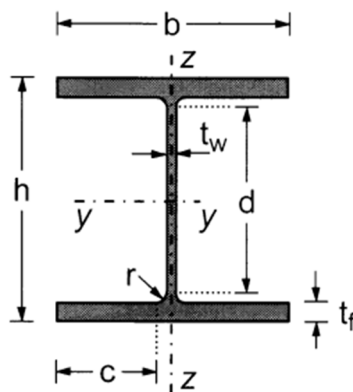


**Zadatak 4**

Zadani statički sustav centrički je opterećen uzdužnom silom  $F_d = 500 \text{ kN}$ . Potrebno je dimenzionirati poprečni presjek i element izložen uzdužnoj tlačnoj sili. Tlačna pojasnica "I" poprečnog presjeka je bočno pridržana cijelom svojom dužinom te ne postoji opasnost od pojave bočno-torzijskog izvijanja. Razmak između ležajeva je  $6 \text{ m}$ , a odabrani čelični profil je valjani HE 200 B [19].



Poprečni presjek:



**Slika 18: Poprečni presjek "I" čeličnog profila [19]**

Tablica 2. Dimenzije i statičke veličine poprečnog presjeka profila HE 200 B prema Euronorm 53-62

|                              |                          |
|------------------------------|--------------------------|
| Prostorna težina:            | $G = 61.30 \text{ kg/m}$ |
| Površina poprečnog presjeka: | $A = 78.08 \text{ cm}^2$ |
| Visina presjeka:             | $h = 200 \text{ mm}$     |
| Širina pojasnice:            | $b = 200 \text{ mm}$     |

|                      |                                  |
|----------------------|----------------------------------|
| Debljina hrpta:      | $t_w = 9 \text{ mm}$             |
| Debljina pojasnice:  | $t_f = 15 \text{ mm}$            |
| Radius zaobljenja:   | $r = 18 \text{ mm}$              |
| Moment tromosti:     | $I_y = 5696 \text{ cm}^4$        |
| Moment tromosti:     | $I_z = 2003 \text{ cm}^4$        |
| Moment otpora:       | $W_y = 569.60 \text{ cm}^3$      |
| Moment otpora:       | $W_z = 200.30 \text{ cm}^3$      |
| Moment plastičnosti: | $W_{pl,y} = 642.50 \text{ cm}^4$ |
| Moment plastičnosti: | $W_{pl,z} = 305.80 \text{ cm}^4$ |

Osnovni materijal: S235 ;  $t \leq 40 \text{ mm}$

Granica popuštanja:  $f_y = 235 \text{ N/mm}^2$

Modul elastičnosti:  $E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$

Parcijalni faktori:  $\gamma_{M0} = 1.0, \gamma_{M1} = 1.0$

#### 4.1. Klasifikacija poprečnog presjeka

##### -Pojasnica

$$\frac{c}{t} = \frac{b - t_w - 2 \cdot r}{2 \cdot t_f} = \frac{200 - 9.0 - 2 \cdot 18.0}{2 \cdot 15.0} = 5.16$$

\*Uvjet za klasu I:

$$\frac{c}{t_f} \leq 9 \cdot \varepsilon ; \varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}} = \sqrt{\frac{235}{235}} = 1.00$$

$$\frac{c}{t_f} = 5.16 \leq 9 \cdot \varepsilon = 9.00 \rightarrow \text{Pojasnica je klase I}$$

-Hrbat

$$\frac{c}{t_w} = \frac{h - 2 \cdot t_f - 2 \cdot r}{t_w} = \frac{200 - 2 \cdot 15 - 2 \cdot 18}{9.0} = 14.89$$

\*Uvjet za klasu I:

$$\frac{c}{t_w} \leq 33 \cdot \varepsilon; \varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}} = 1.00$$

$$\frac{c}{t_w} = 14.89 \leq 33 \cdot \varepsilon = 33.00 \rightarrow \text{Hrbat je klase I}$$

**Zaključak: Poprečni presjek svrstan je u klasu I**

4.2. Otpornost poprečnog presjeka na tlačnu silu

Kvaliteta čelika: **S 235**

$$N_{c,Rd} = \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{78.08 \cdot 23.5}{1.0} = 1835.00 \text{ kN} > N_{Ed} = 500.00 \text{ kN}$$

$$\frac{N_{Ed}}{N_{c,Rd}} \leq 1.00$$

$$\frac{500}{1835} = 0.27 \leq 1.00$$

✓ Uvjet je zadovoljen

4.3. Otpornost elementa na izvijanje

$$L_{cr,y} = L = 600 \text{ cm}$$

Određivanje mjerodavne krivulje izvijanja:

$$\frac{h}{b} = \frac{200}{200} = 1.00 < 1.2 \quad t_f = 15.00 \text{ mm} < 100 \text{ mm}$$

-Krivulja izvijanja b faktor imperfekcije  $\alpha = 0.34$

$$\text{Elastična kritična sila: } N_{cr,y} = \frac{\pi^2 E I_y}{L_{cr,y}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 21000 \cdot 5696}{600^2} = 3279 \text{ kN}$$

Bezdimenzijska vitkost: 
$$\bar{\lambda}_y = \sqrt{\frac{f_y \cdot A}{N_{cr,y}}} = \sqrt{\frac{78.08 \cdot 23.5}{3279}} = 0.748$$

**-Određivanje faktora redukcije:**

$$\phi_y = 0.5 \cdot [1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda}_y - 0.2) + \bar{\lambda}_y^2] = 0.5 \cdot [1 + 0.34 \cdot (0.748 - 0.2) + 0.748^2] = 0.873$$

$$\chi_y = \frac{1}{\phi_y + \sqrt{\phi_y^2 - \bar{\lambda}_y^2}} = \frac{1}{0.873 + \sqrt{0.873^2 - 0.748^2}} = 0.756$$

$$N_{b,Rd} = \chi \cdot \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = 0.756 \cdot \frac{78.08 \cdot 23.5}{1.0} = 1387.17 \text{ kN} > N_{Ed} = 500 \text{ kN}$$

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \leq 1.00$$

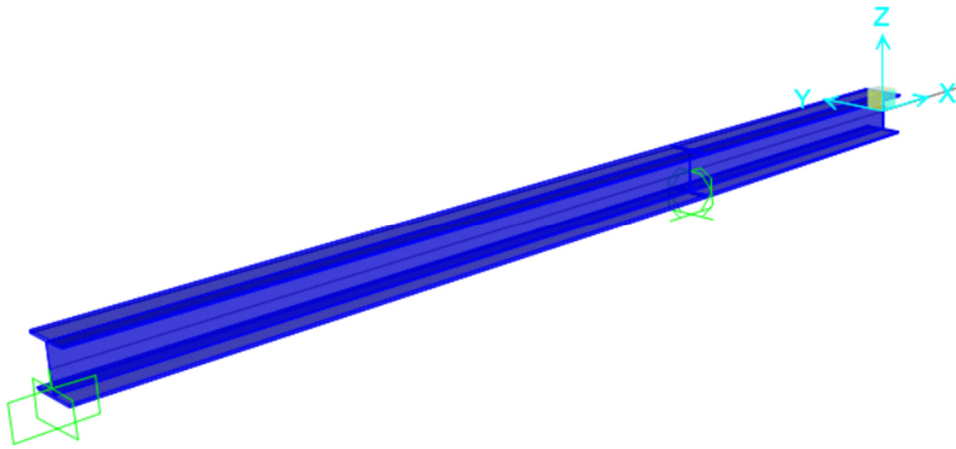
$$\frac{500}{1387.17} = 0.36 \leq 1.00$$

✓ Uvjet je zadovoljen.

#### 4. Unutarnje sile statički neodređenog grednog nosača-SAP2000

U programskom paketu SAP2000 prikazan je model grednog nosača duljine 6m. Prikazani gredni nosač je greda s prepustom koja je u ishodišnoj točki, koordinata A(0,0,0), pričvršćena za podlogu upetim ležajem koji sprječava translaciju i momente u svim smjerovima. Na udaljenosti 4m od ishodišne točke, koordinata B (4,0,0), nalazi se pomični ležaj. Gredni nosač opterećen je u krajnjoj točki elementa udaljenoj 6m od ishodišne točke, a koordinate točke u kojoj je opterećen gredni nosač su C(6, 0, 0). Gredni nosač opterećen je koncentriranom silom koja iznosi F=120kN. Gredni nosač je čelični gredni nosač I-profila, HEA300A. Sve prikazane numeričke vrijednosti su u metrima [m], kilonjutnima [kN] i kilonjutnmetrima [kNm].

#### 4.1. Model

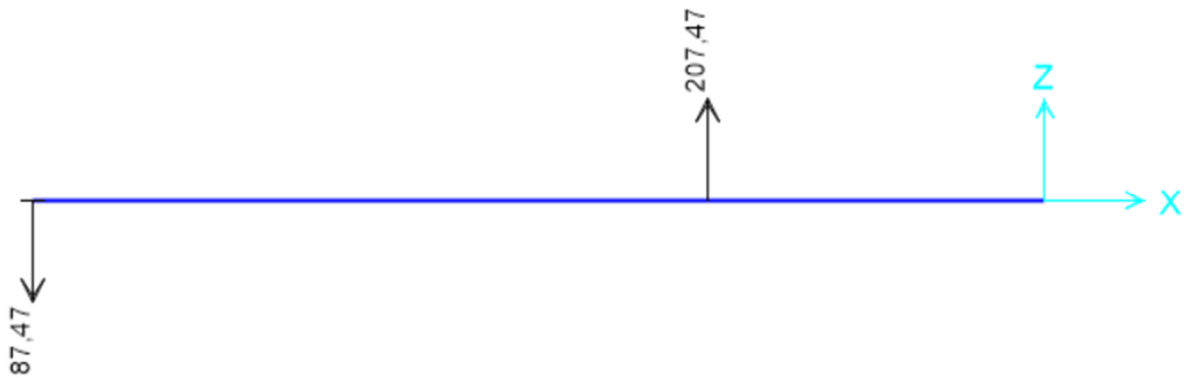


Slika 19: trodimenzionalni prikaz statički neodređenog grednog nosača



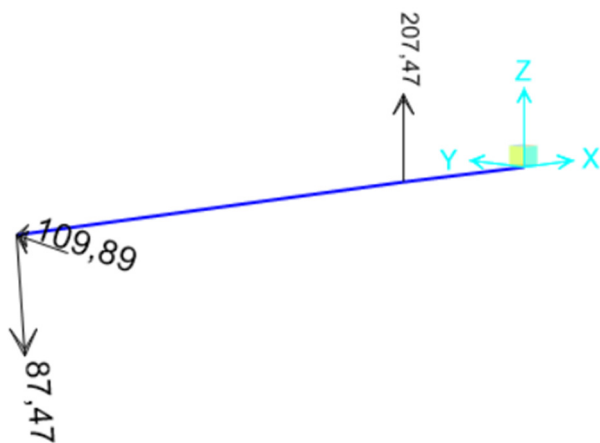
Slika 20: dvodimenzionalni prikaz statički neodređenog grednog nosača opterećenog koncentriranom silom  $F=120\text{kN}$

4.1.1. Rezultati

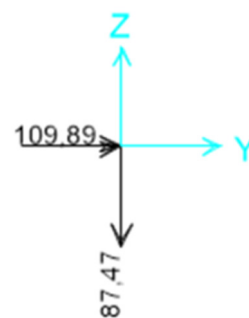


Slika 21: prikaz ležajnih reakcija u xz ravnini

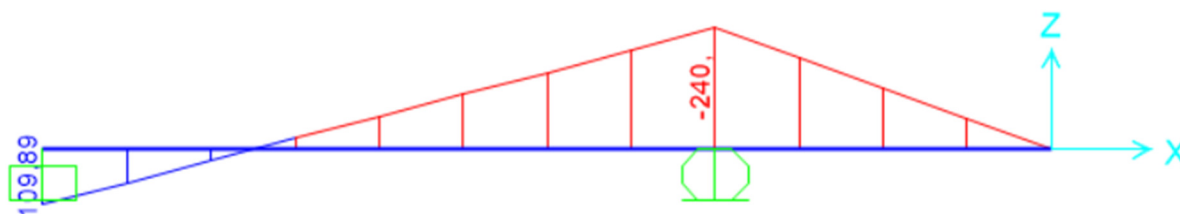
a)



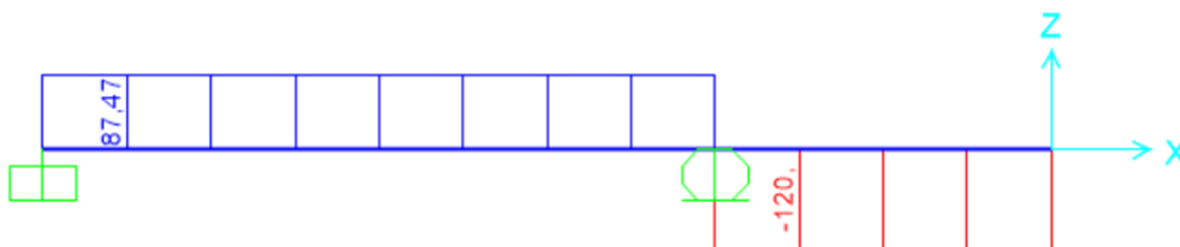
b)



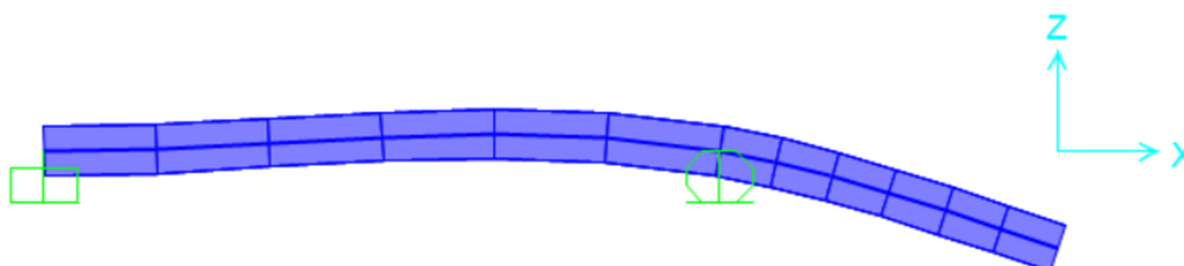
Slika 22: a) prikaz ležajnih reakcija u 3D pogledu, b) prikaz ležajnih reakcija u zy ravnini



Slika 23: prikaz dijagrama momenta savijanja u zx ravnini



Slika 24: prikaz poprečnih sila u zx ravnini



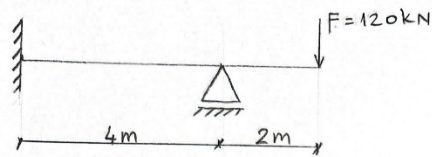
Slika 25: prikaz deformacije grednog nosača pod utjecajem sile  $F=120\text{kN}$  u ravnini xz

#### **4.1.2. Statički neodređeni gredni nosač- metoda sila**

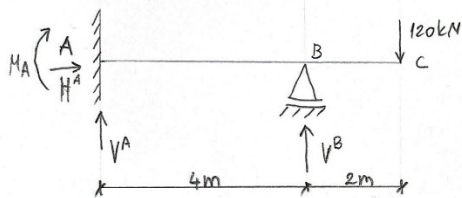
Statički neodređeni gredni nosač provjeren je ručno pomoću metode sila. Zadani gredni nosač jednak je prethodno prikazanom grednom nosaču u prethodnom poglavlju (slika 20.).



1. Gredni nosač opterećen je koncentriranom silom  $F=120\text{kN}$ . Odredi: moment savijanja i poprečnu silu.



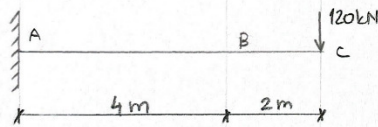
Rješenje: Zadani gredni nosač je statički neodređen;  
 $S = 4 - 3 = 1; S > 0$



\* Reakcija  $H^A$  je jednaka nuli jer na gredni nosač djeluje samo vertikalno opterećenje.  
 $H^A = 0\text{ kN}$

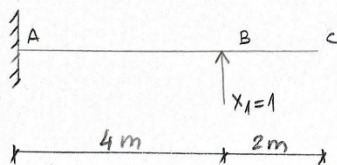
$$\sum M_A = 0; -M_A + 120 \cdot 6 = 0 \Rightarrow M_A = -720\text{ kNm}$$

OSNOVNI SUSTAV



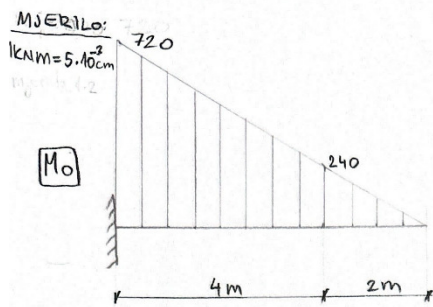
$$\sum M_C = 0; -A^V \cdot 6 + 720 = 0 \Rightarrow A^V = 120\text{ kN}$$

JEDINIČNI SUSTAV



$$\sum M_A = 0; -M_A + 1 \cdot 4 = 0 \Rightarrow M_A = 4\text{ kNm}$$

$$\sum M_C = 0; -4 - A^V \cdot 4 = 0 \Rightarrow A^V = -1\text{ kN}$$



$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

$$\delta_{11} = \left( \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) \cdot \frac{1}{EI} = \frac{64}{3EI}$$

$$\delta_{10} = \left[ \frac{720 \cdot 4}{2} \cdot \left( -\frac{2}{3} \cdot 4 \right) - \frac{240 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \right] \cdot \frac{1}{EI} = \frac{-4480}{EI}$$

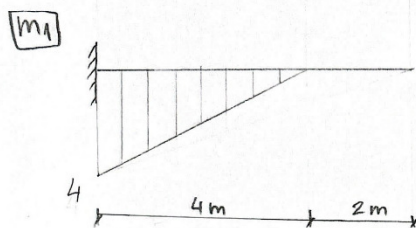
$$\frac{-4480}{EI} + \frac{64}{3EI} \cdot X_1 = 0$$

$$\frac{64}{3EI} \cdot X_1 = \frac{4480}{EI}$$

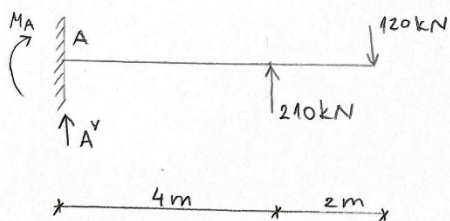
$$X_1 = \frac{13440 EI}{64 EI}$$

$$X_1 = 210 \text{ kN}$$

MJERILO:  
1 kN = 0,5 cm



KONAČNO:



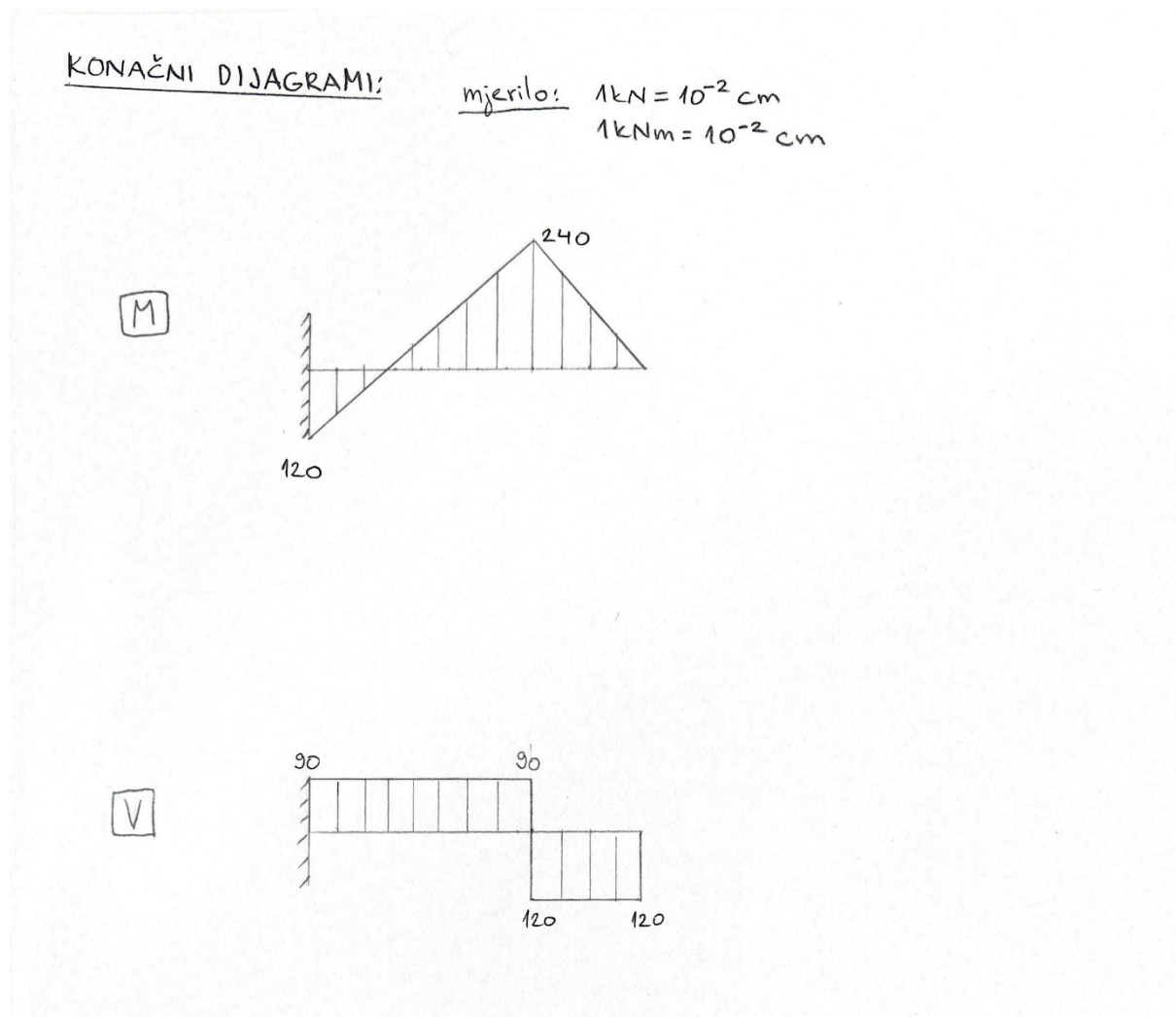
$$\sum M_A = 0; 120 \cdot 6 - 210 \cdot 4 + M_A = 0$$

$$M_A = 120 \text{ kNm}$$

$$\sum F_y; -120 + 210 + V^A = 0$$

$$V^A = -90 \text{ kN}$$

2



#### 4.1.3. Interpretacija rezultata i usporedba

U prethodnim poglavljima (4.1.1. i 4.1.2.) prikazani su rezultati analize unutarnjih sila statički neodređenog grednog nosača. Rješavanje zadatka pomoću programskih paketa, poput SAP2000, nudi velike prednosti iz razloga što su rezultati puno precizniji i efikasnije dobiveni u odnosu na ručni proračun. Kod programskog rješavanja zadatka, moguća je bolja vizualizacija statičkog sustava što je od iznimne važnosti pogotovo kada se rješavaju zahtjevniji statički sustavi. Iako programski način rješavanja statičkih sustava ima mnoge prednosti, on ne mora uvijek biti najtočnije. Zadatak projektanta jest da na temelju stečenog znanja i iskustva kritički procijeni i provjeri rezultate dobivene programskim ili ručnim proračunom.

Prilikom rješavanja zadatka ručno i pomoću programa, može doći do razlike u rezultatima. Jedni od razloga razlika rezultata su različito zaokruživanja rezultata, nepotpuni unos

podataka o materijalu i poprečnom presjeku grednih nosača, također, ove metode često uključuju aproksimacije i pojednostavljenja, podjelom konstrukcije na manje elemente. Računalni programi mogu koristiti sofisticiranije numeričke metode za rješavanje statičkih sustava te mogu podijeliti konstrukciju na manje presjeke, što rezultira preciznijim proračunom naprezanja i deformacija. U prethodno prikazanom zadatku, riješenom programski i ručno, uočljivo je da dolazi do razlike u rezultatima no njihova razlika je očekivana te je u ovom slučaju prihvatljiva.

Promatrajući momentne dijagrame, možemo uočiti da je dijagram crvene i plave boje (slika 22.). Crvena boja dijagrama predstavlja dio grednog nosača koji je u vlaku, a plava boja dio grednog nosača koji je u tlaku. Uočljivo je da se gredni nosač većim dijelom svoje površine nalazi u vlaku, odnosno gornja površina grednog nosača je prikazana kao da je razvučena, dok je s donje strane „stisnuta“ (slika 24.). U krajnjoj točki grednog nosača, na mjestu gdje djeluje koncentrirana sila  $F=120\text{kN}$ , moment je jednak nuli iz razloga što kada bismo promatrali gredu s desna na lijevo, s ciljem da izračunamo moment u toj točki; promatrani odsječak bi imao infinitezimalno malu vrijednost, približnu nuli. S druge strane, u upetom ležaju u ishodištu grednog nosača, javlja se ležajna reakcija koja sprječava savijanje grede. Najveći moment nalazi se iznad nepomičnog ležaja. Promatrajući poprečne dijagrame (slika 23.), možemo uočiti da je gredni nosač u tlaku na području od upetog ležaja do pomičnog ležaja, a zatim u vlaku od nepomičnog ležaja do kraja prepusta. Poprečna sila je jednaka opterećenju koje djeluje određenom mjestu na gredi, također, promatrajući nepomični ležaj, uočljivo je da zbroj poprečnih sila u njemu daje iznos vrijednosti reakcije u tom ležaju. Uspoređujući vanjski izgled dijagrama unutarnjih sila uočljiv je diferencijalni odnos između momenta savijanja i poprečnih sila. Momenti dijagram prikazan je linearnom funkcijom, a dijagram poprečnih sila je konstantan.

## ZAKLJUČAK

Unutarnje sile su odgovorne za nošenje i prenošenje opterećenja grednog nosača. Gredni nosači pojavljuju se u različitim oblicima i vrstama. Njihov oblik uvelike utječe na prijenos opterećenja u konstrukciji. Zadatak projektanta jest da na temelju opterećenja koja djeluju na konstrukciju, odredi vrstu i oblik poprečnog presjeka grednog nosača. Svaka konstrukcija je različita i posebna na svoj način, stoga, proračun grednih nosača nikada nije isti. Za ispravno određivanje unutarnjih sila u grednim konstrukcijama potrebno je poznavati njihovo ponašanje i način određivanja. Unutarnje sile u gredama uzrokuju deformaciju i naprezanje i važno je da deformacija ne bude prevelika, a naprezanje da ne pređe dozvoljenu granicu jer bi to moglo dovesti do puknuća gredne konstrukcije. Statička određenost i neodređenost također uvjetuje proračun. Statički određeni gredni nosači su oni koji imaju jednak broj jednadžbi ravnoteža kao i broj nepoznatih momenata i reakcija. Za razliku od njih, statički neodređeni gredni nosači imaju više nepoznatih reakcija i momenata nego što ima jednadžbi ravnoteže. Kako bi se odredila statička određenost grednih nosača potrebno je razumijevanje načina na koji je gredni nosač oslonjen na podlogu. Oni su nužni za podupiranje i sprječavanje njegovog savijanja ili loma. S obzirom na to da su unutarnje sile sile koje djeluju unutar grednog nosača i njihov iznos nije moguće odrediti bez proračuna, inženjeri za njihov prikaz često upotrebljavaju dijagrame. Dijagrami unutarnjih sila omogućuju lakše vizualno praćenje ponašanja konstrukcije, a na temelju njih se može procijeniti i odrediti sigurnost ili nesigurnost konstrukcije. Dijagrami momenta savijanja i unutarnjih sila prikazuju međusobnu povezanost. Njihova povezanost se očituje u diferencijalnim odnosima. Na temelju njih, ako poznamo dijagram momenta savijanja, moguće je predvidjeti i dijagram poprečnih sila presjeka. Za određivanje unutarnjih sila, moguće je koristiti različite načine na koje se one definiraju koristeći različite metode. Svaka metoda ima određenu razinu točnosti. Točnost metode ovisi i o kvaliteti dostupnih podataka. Na primjer, ako nisu poznate točne geometrijske dimenzije konstrukcije ili materijalne karakteristike, to može utjecati na točnost proračuna. Također, inženjeri se često koriste pojednostavljenjima kako bi na što jednostavniji način došli do prihvatljivog rješenja. Upravo to pojednostavljivanje rezultata može utjecati na njihovu točnost. Važno je naglasiti da nijedna metoda rješavanja statičkih sustava nije univerzalno "najprikladnija", već izbor metode ovisi o složenosti problema, dostupnim resursima i specifičnim potrebama analize. U nekim slučajevima, ručno rješavanje može biti brže i efikasnije za jednostavne probleme, dok računalni programi nude veću preciznost i mogu se koristiti za složenije modele. Odabir metode za proračunavanje unutarnjih sila grednih nosača ovisi o specifičnosti konstrukcije,

opterećenju, dostupnim resursima i željenom nivou točnosti. Zadatak građevinskog inženjera je da pažljivo protumači dobivene rezultate proračuna i da na temelju određenih normi donese konačni zaključak o stabilnosti konstrukcije.

## POPIS LITERATURE

- [1] Civil engineering discoveries. Difference between beam and girder. *Civil engineering discoveries*. Dostupno: <https://engineeringdiscoveries.com/difference-between-beam-and-girder/>,<https://engineeringdiscoveries.com/what-is-a-box-girder-bridge-construction-applications-specifications-advantages-and-disadvantages/> [Pristupljeno: 6. svibnja 2024.]
- [2] Letsbuild. Types of beams in construction. *Letsbuild*. Dostupno: <https://www.letsbuild.com/blog/types-of-beams> [Pristupljeno: 12. svibnja 2024.]
- [3] Initube. What are beams used for and what types are there?. *Initube*. Dostupno: <https://initube.es/en/what-are-beams-used-for-and-what-types-are-there/> [Pristupljeno: 12. svibnja 2024.]
- [4] Sugna premium steel. Types of beams in construction. *Sugna*. Dostupno: <https://sugnatmt.com/types-of-beams-in-construction/> [Pristupljeno: 12. svibnja 2024.]
- [5] Civil engineering. What is a girder bridge?. *Civil engineering*. 2015. Dostupno na: <https://erkrishneelram.wordpress.com/2015/01/21/what-is-a-girder-bridge/> [Pristupljeno: 6. svibnja 2024.]
- [6] Wenlin Hu. Examples of channel girder and box girder. *Research Gate*. 2018. Dostupno na: [https://www.researchgate.net/figure/Examples-of-channel-girder-and-box-girderaChannel-girder-used-for-Lanzhou-Xinjiang\\_fig1\\_329228651](https://www.researchgate.net/figure/Examples-of-channel-girder-and-box-girderaChannel-girder-used-for-Lanzhou-Xinjiang_fig1_329228651) [Pristupljeno: 6. svibnja 2024.]
- [7] Daily civil. Advantages And Disadvantages Of T-Beam. *Daily civil*. Dostupno na: <https://dailycivil.com/advantages-disadvantages-t-beam/> [Pristupljeno: 12. lipnja 2024.]
- [8] Dr. Aleksandar Kiričenko. *Tehnička mehanika I. dio*. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Građevinski institut Zagreb; 1990.
- [9] Bože Plazibat, Ado Matoković, Vladimir Vetma. *Tehnička mehanika I*. Split: Sveučilište u Splitu, Sveučilišni odjel za stručne studije; 2020. Dostupno: [https://www.grad.unizg.hr/\\_download/repository/Upute%20za%20pisanje%20i%20o%20branu%20radova%20na%20GF\\_26.3.2024.pdf](https://www.grad.unizg.hr/_download/repository/Upute%20za%20pisanje%20i%20o%20branu%20radova%20na%20GF_26.3.2024.pdf) [Pristupljeno: 12. svibnja 2024.]

- [10] Fresl K. *Statički određeni nosači s jednim punostjenim diskom. Građevinski fakultet u Zagrebu.* Dostupno: <https://www.grad.hr/nastava/gS/bilj1/njd2.pdf> [Pristupljeno: 27.svibnja 2024.]
- [11] Građevinski fakultet sveučilišta u Zagrebu (2019) „Osnovni postupci u projektiranju konstrukcija“, *Građevinski fakultet sveučilišta u Zagrebu* [online] Dostupno: <https://www.grad.unizg.hr/predmet/uuki> [Pristupljeno: 28.svibnja 2024.]
- [12] University of Sidney. Internal forces. *The University of Sidney.* Dostupno na : <https://www.aeromech.usyd.edu.au/statics/doc/internal.htm> [Pristupljeno: 28.svibnja 2024.]
- [13] Fakultet strojarstva i brodogradnje. Osnove mehanike. *Fakultet strojarstva i brodogradnje.* Dostupno na: [https://elemstroj.fsb.hr/pdf/pmf/osnove\\_strojarstva/osnove\\_mehanike.pdf](https://elemstroj.fsb.hr/pdf/pmf/osnove_strojarstva/osnove_mehanike.pdf) [Pristupljeno: 28.svibnja 2024.]
- [14] Prof. dr. sc. Šimić V. *Otpornost materijala 1.* (II izdanje) Zagreb: Školska knjiga Zagreb; 2002.
- [15] *Mechanical Engineering: Internal Forces on Beams (5 of 27) Bending Moments Explained.*(2016.) Youtube, dodao: Michel van Biezen [Online]. Dostupno na: <https://www.youtube.com/watch?v=2juoQva4FPY> [Pristupljeno: 28.svibnja 2024.]
- [16] Antolić I. *Građevna mehanika.* Zagreb: Školska knjiga; 2005. Dostupno: <https://www.scribd.com/doc/283678791/Gra%C4%91evna-mehanika-Antoli%C4%87> [Pristupljeno: 27.svibnja 2024.]
- [17] Institut za hrvatski jezik i jezikoslovlje. Dimenzioniranje. Struna, *Hrvatsko strukovno nazivlje.* Dostupno na: <http://struna.ihj.hr/naziv/dimenzioniranje/8137/#naziv> [Pristupljeno: 12. lipnja 2024.]
- [18] Androić, B., Dujmović D. i Džeba, I., *Metalne konstrukcije 1,* Institut građevinarstva Hrvatske
- [19] Androić, B., Dujmović D. i Džeba, I., *Čelične konstrukcije 2-numerički primjeri prema EC3, IA* projektiranje



## POPIS SLIKA

|  |    |
|--|----|
| Slika 1: Čelični gredni nosač (girder) i čelične grede (beams)[1].....   | 5  |
| Slika 2: I-gredni nosač [5] .....  | 6  |
| Slika 3: kutijasti gredni nosači [1, 5].....   | 6  |
| Slika 4: C-gredni nosač [6] .....  | 6  |
| Slika 5: T-gredni nosači [7] .....   | 7  |
| Slika 6: primjer statički određenih grednih nosača.....  | 9  |
| Slika 7: primjer statički neodređenih grednih nosača.....  | 9  |
| Slika 8: gredni nosač pod utjecajem opterećenja $F_1$ i $F_2$ (izvor: [12]) .....  | 11 |
| Slika 9: presjek grednog nosača u točki "C" (izvor: [12]) .....  | 11 |
| Slika 10: Ravninski prikaz unutarnjih sila u presjeku grednog nosača (izvor: [12]) .....   | 12 |
| Slika 11: Prostorni prikaz unutarnjih sila u presjeku grednog nosača (izvor: [12]).....  | 12 |
| Slika 12: a) smjer vanjske normale lijeve strane presjeka, b) smjer vanjske normale desne strane presjeka (izvor: [9]) .....                                   | 13 |
| Slika 13: a), b) pozitivni smjerovi unutarnjih sila (izvor: [9]) .....   | 13 |
| Slika 14: savijanje grednog nosača (izvor: [13]) .....   | 14 |
| Slika 15: prikaz momenta savijanja $M_1$ .....   | 15 |
| Slika 16: Gredni nosač opterećen silama $F_1$ , $N_1$ , $N_2$ . .....  | 15 |
| Slika 17: a) gredni nosač opterećen proizvoljno promjenjivim kontinuiranim opterećenjem<br>b) ravnoteža odsječka grednog nosača širine $dx$ (izvor: [9]) ..... | 24 |
| Slika 18: Poprečni presjek "I" čeličnog profila [19] .....   | 27 |
| Slika 19: trodimenzionalni prikaz statički neodređenog grednog nosača .....  | 30 |
| Slika 20: dvodimenzionalni prikaz statički neodređenog grednog nosača opterećenog koncentriranom silom $F=120\text{kN}$ .....                                  | 30 |
| Slika 21: prikaz ležajnih reakcija u $xz$ ravnini.....   | 28 |
| Slika 22: a) prikaz ležajnih reakcija u 3D pogledu, b) prikaz ležajnih reakcija u $zy$ ravnini...  | 31 |
| Slika 23: prikaz dijagrama momenta savijanja u $zx$ ravnini.....   | 32 |
| Slika 24: prikaz poprečnih sila u $zx$ ravnini .....   | 32 |
| Slika 25: prikaz deformacije grednog nosača pod utjecajem sile $F=120\text{kN}$ u ravnini $xz$ .....   | 32 |

## POPIS TABLICA

|   |    |
|---|----|
| Tablica 1. Osnovne vrste ležajeva tijela u ravnini, njihove oznake te reakcije koje se javljaju usljed opterećenja..... | 8  |
| Tablica 2. <i>Dimenzije i statičke veličine poprečnog presjeka profila HE 200 B prema Euronorm 53-62</i> .....          | 27 |