

Određivanje projektnih hidrograma velikih voda na odabranim hidrološkim postajama na sivu Save

Vidman, Mario

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:302936>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-07**

Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET U ZAGREBU

Mario Vidman

**Određivanje projektnih hidrograma velikih
voda na odabranim hidrološkim postajama na
slivu Save**

DIPLOMSKI RAD

Zagreb, 2024.



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET U ZAGREBU

MARIO VIDMAN

**ODREĐIVANJE PROJEKTNIH HIDROGRAMA
VELIKIH VODA NA ODABRANIM HIDROLOŠKIM
POSTAJAMA NA SLIVU SAVE**

DIPLOMSKI RAD

Mentor: izv. prof. dr. sc. Kristina Potočki

Komentor: doc. dr. sc. Nikola Adžaga

Zagreb, 2024.



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING, UNIVERSITY OF ZAGREB

MARIO VIDMAN

**DETERMINATION OF DESIGN FLOOD
HYDROGRAPHS ON THE SELECTED
HYDROLOGICAL STATIONS ON THE SAVA RIVER
BASIN**

MASTER THESIS

Supervisor: Assoc. Prof. Kristina Potočki

Co-supervisor: Asst. Prof. Nikola Adžaga

Zagreb, 2024.



OBRAZAC 3

POTVRDA O POZITIVNOJ OCJENI PISANOG DIJELA DIPLOMSKOG RADA

Student/ica :

Mario Vidman

(Ime i prezime)

0082057709

(JMBAG)

zadovoljio/la je na pisanom dijelu diplomskog rada pod naslovom:

Određivanje projektnih hidrograma velikih voda na odabranim hidrološkim postajama na slivu Save

(Naslov teme diplomskog rada na hrvatskom jeziku)

Determination of design flood hydrographs on the selected hydrological stations on the Sava Riber Basin

(Naslov teme diplomskog rada na engleskom jeziku)

i predlaže se provođenje daljnjeg postupka u skladu s Pravilnikom o završnom ispitu i diplomskom radu Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta.

Pisani dio diplomskog rada izrađen je u sklopu znanstvenog projekta: (upisati ako je primjenjivo)

Interakcija hidrotehničkih građevina i okoliša u uvjetima klimatskih promjena, 2024-GF17, Kristina Potočki

(Naziv projekta, šifra projekta, voditelj projekta)

Pisani dio diplomskog rada izrađen je u sklopu stručne prakse na Fakultetu: (upisati ako je primjenjivo)

/

(Ime poslodavca, datum početka i kraja stručne prakse)

Datum:

18.09.2024.

Mentor:

izv. prof. dr. sc. Kristina Potočki

Potpis mentora:

Kristina Potočki

Komentor:

doc. dr. sc. Nikola Adžaga

Nikola Adžaga



OBRAZAC 5

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja :

(Ime i prezime, JMBAG)

student/ica Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta ovim putem izjavljujem da je moj pisani dio diplomskog rada pod naslovom:

(Naslov teme diplomskog rada na hrvatskom jeziku)

izvorni rezultat mojega rada te da se u izradi istoga nisam koristio/la drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

Datum:

Potpis:

Murris Kishnam



OBRAZAC 6

IZJAVA O ODOBRENJU ZA POHRANU I OBJAVU PISANOG DIJELA DIPLOMSKOG RADA

Ja :

(Ime i prezime, OIB)

ovom izjavom potvrđujem da sam autor/ica predanog pisanog dijela diplomskog rada i da sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti odgovara sadržaju dovršenog i obranjenog pisanog dijela diplomskog rada pod naslovom:

(Naslov teme diplomskog rada na hrvatskom jeziku)

koji je izrađen na sveučilišnom diplomskom studiju Građevinarstvo Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta pod mentorstvom:

(Ime i prezime mentora)

i obranjen dana:

(Datum obrane)

Suglasan/suglasna sam da pisani dio diplomskog rada u cijelosti bude javno dostupan, te da se trajno pohrani u digitalnom repozitoriju Građevinskog fakulteta, repozitoriju Sveučilišta u Zagrebu te nacionalnom repozitoriju.

Datum:

Potpis:

Mario Kislunov

ZAHVALE

Zahvaljujem se mentorici Kristini Potočki, komentoru Nikoli Adžagi i asistentici Martini Lacko na dobroj suradnji i odličnom mentorstvu tijekom pisanja diplomskog rada. Također se zahvaljujem Građevinskom fakultetu u Zagrebu na prilici i odličnim uvjetima studiranja. Zahvaljujem se cijelom Zavodu za hidrotehniku, kvalitetnim profesorima i predavanjima tijekom diplomskog studija. Velika zahvala Državnom hidrometeorološkom zavodu na ustupljenim podacima, na temelju kojih su se radile analize za potrebe ovog rada. I na kraju, zahvaljujem se svojim roditeljima i obitelji što su me podržavali tijekom cijelog školovanja. Bez njih ovakav uspjeh ne bi bio ostvariv. Hvala Vam!

SAŽETAK

Fenomen velikih voda jedan je od najznačajnijih problema u hidrološkoj praksi. Inženjeri pokušavaju različitim metodama predvidjeti opasnost i predložiti odgovarajuće mjere smanjenja rizika. Tema ovog rada je obrada i analiza dnevnih podataka o protocima naručenih od Državnog hidrometeorološkog zavoda s ciljem određivanja projektnog sintetičkog hidrograma. Obradeni su i analizirani podaci s vodomjernih stanica (VS) na slivu rijeke Save, VS Zagreb na glavom toku rijeke Save i VS Kupljenovo na rijeci Krapini. Provedene su statističke analize podataka: preliminarna analiza homogenosti, izračun empirijskih funkcija raspodjele, prilagodbe teorijskih funkcija raspodjele vjerojatnosti, provođenje statističkih testova te određivanje oblika projektnog hidrograma. U izradi rada, cijeli je proces automatiziran pomoću R studija. Metoda godišnjih ekstrema korištena je za analize velikih voda, a za oblik projektnog sintetičkog hidrograma korišten je iskustveni izraz Dionisa Srebrenovića. Na kraju su dobiveni rezultati prikazani grafički te je dan kritički osvrt na rezultate s inženjerske perspektive.

Ključne riječi: sliv rijeke Save, projektni hidrogram, velike vode, hidrološki ekstremi, vjerojatnost pojavljivanja

SUMMARY

The phenomenon of high waters is one of the most significant issues in hydrological practice. Engineers use special methods to predict the danger and take necessary protective measures for the population. The topic of this paper is the processing and analysis of daily flow data, ordered from the State Hydrometeorological Institute, with the aim of obtaining a project synthetic hydrograph. The gauging stations being processed are VS Zagreb and VS Kupljenovo. Throughout the paper, certain statistical analyses are conducted, including the calculation of empirical distribution functions, fitting theoretical probability distribution functions, conducting statistical tests, and more. The entire process is attempted to be automated using R Studio. The method used for the analysis of high waters is the annual extremes method. One annual maximum is extracted from each year and further analysis is based on these values. Dionis Srebrenović's empirical formula is used to obtain the synthetic hydrograph. In the end, the obtained results will be presented graphically and critically reviewed from an engineering perspective.

Key words: basin of the Sava River, project hydrograph, high waters, hydrological extremes, probability of occurrence

SADRŽAJ

| | |
|--|------------|
| ZAHVALE | i |
| SAŽETAK | ii |
| SUMMARY | iii |
| SADRŽAJ | iv |
| 1. UVOD | 6 |
| 2. PODLOGE I ALATI | 7 |
| 2.1. Hidrološki podaci | 7 |
| 2.2. Alati | 13 |
| 3. METODE RADA I PREGLED ULAZNIH PODLOGA | 14 |
| 3.1. Metoda godišnjih maksimuma | 14 |
| 3.2. Metodologija proračuna vjerojatnosti pojave velikih voda..... | 17 |
| 3.2.1. Početna analiza niza..... | 19 |
| 3.2.2. Analiza homogenosti podataka | 19 |
| 3.3. Primjena empirijskih vjerojatnosti..... | 23 |
| 3.4. Primjena teorijskih distribucija vjerojatnosti..... | 25 |
| 3.4.1. Teorijske distribucije vjerojatnosti..... | 17 |
| 3.4.2. Normalna distribucija vjerojatnosti..... | 17 |
| 3.4.3. Generalizirana ekstremna vrijednost..... | 17 |
| 3.4.4. Log-normalna distribucija..... | 18 |
| 3.5. Testovi prikladnosti teorijske funkcije raspodjele | 29 |
| 3.6. Metodološki pristupi prikaza sintetičkih projektnih hidrograma | 20 |
| 3.7. Metoda Srebrenovića | 22 |
| 4. REZULTATI | 38 |
| 4.1. Početna analiza niza, analiza homogenosti i formiranje niza..... | 38 |
| 4.2. Vjerojatnost pojave velikih voda | 36 |
| 4.2.1. Testovi prikladnosti teorijske funkcije raspodjele..... | 36 |
| 4.2.2. Izbor najbolje teorijske funkcije raspodjele..... | 41 |
| 4.3. Proračun projektnog sintetičkog hidrograma metodom Srebrenovića | 42 |
| 4.3.1. Sintetički projektni hidrogram (1926. - 2022.) - VS Zagreb..... | 42 |
| 4.3.2. Sintetički projektni hidrogram za podniz (1975. - 2022.) - VS Zagreb..... | 44 |
| 4.3.3. Sintetički projektni hidrogram za podniz (1983. - 2022.) - VS Zagreb..... | 46 |
| 4.3.4. Sintetički projektni hidrogram (1964. - 2022.) - VS Kupljenovo..... | 48 |

| | |
|--|-----------|
| 4.3.5. Sintetički projektni hidrogram za podniz (1975. - 2022.) - VS Kupljenovo..... | 50 |
| 4.3.6. Sintetički projektni hidrogram za podniz (1983. - 2022.) - VS Kupljenovo..... | 52 |
| 4.4. Usporedba s prethodnim studijama | 53 |
| 4.4.1. Usporedba rezultata teorijskih funkcija raspodjele vjerojatnosti | 54 |
| 5. ZAKLJUČAK | 58 |
| POPIS LITERATURE | 59 |
| POPIS SLIKA | 61 |
| POPIS TABLICA..... | 63 |
| PRILOZI | 65 |
| PRILOG A | 65 |

1. UVOD

Hidrologija se bavi širokim spektrom problema vezanih uz vodu. Jedan od najbitnijih hidroloških problema su velike vode. Osim što prouzrokuju ogromne ekonomske štete mogu ugroziti i velik broj ljudskih života. Inženjeri pokušavaju na temelju mjerenih podataka iz prošlosti napraviti analize velikih voda. Jedan od ciljeva analiza je odrediti povratni period pojedinog protoka (što je u metodi godišnjih maksimuma obrnuto proporcionalna vrijednost s vjerojatnošću pojavljivanja) te oblik pripadnog projektnog hidrograma kako bi se prema potrebi mogli odrediti i podaci o volumenu vodnog vala. Potrebno je na što brži i efektivniji način obraditi podatke, prikazati ih vizualno i na kraju donijeti inženjerski zaključak o dobivenim rezultatima. Ovaj rad je izrađen pomoću programskog jezika R, u sučelju R studio, s ciljem digitalne automatizacije cijelog procesa. U radu su obrađeni dnevni podaci o protoku dviju vodomjernih postaja sliva Save, a to su VS Zagreb na rijeci Savi i VS Kupljenovo¹ na rijeci Krapini. Podaci su dobiveni od Državnog hidrometeorološkog zavoda (u nastavku DHMZ), službenog tijela državne uprave Republike Hrvatske. U statističkoj obradi je uvijek bolje raspolagati duljim nizom podataka kako bi se dobila što veća pouzdanost statističkog modela te su stoga u ovim analizama korišteni dnevni podaci. Važno je napomenuti da u praksi za analize vršnih protoka prednost treba dati satnim podacima (što je od još veće važnosti na malim slivovima) kad god je to moguće. U preliminarnim analizama potrebno je analizirati homogenost niza. Nakon što se formira niz godišnjih maksimuma potrebno je napraviti proračun empirijskih vjerojatnosti i statističkih parametara niza, a zatim proračun parametara i vrijednosti teorijske funkcije raspodjele. Testovi prikladnosti će nam pokazati koja teorijska funkcija najbolje opisuje naš niz pa ćemo na temelju nje prognozirati vrijednosti za povratna razdoblja od 2, 5, 10, 20, 50, 100 i 1000 godina. Glavni cilj ovog rada je dobiti projektni sintetički hidrogram² pomoću metode Srebrenovića za navedene povratne periode i usporediti rezultate s prijašnjim istraživanjima. Hidrogram će prikazivati vrijednosti za navedene povratne periode. Zadatak koji se razmatra nema jednoznačno rješenje jer proces otjecanja ovisi o lokalnim geografsko-klimatskim faktorima sliva i uvjetima korištenja zemljišta.

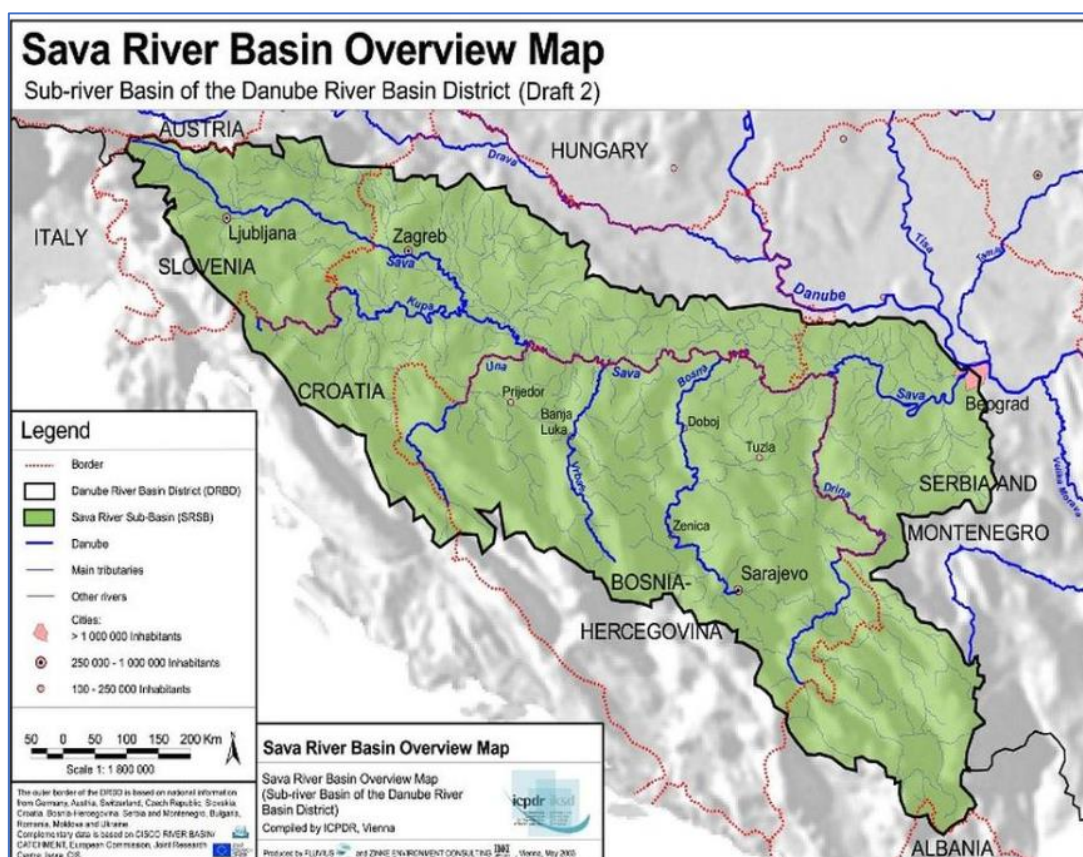
¹ Kupljenovo – vodomjerna stanica na rijeci Krapini, podsliv rijeke Save

² Hidrogram – grafički prikaz promjene protoka kroz vrijeme

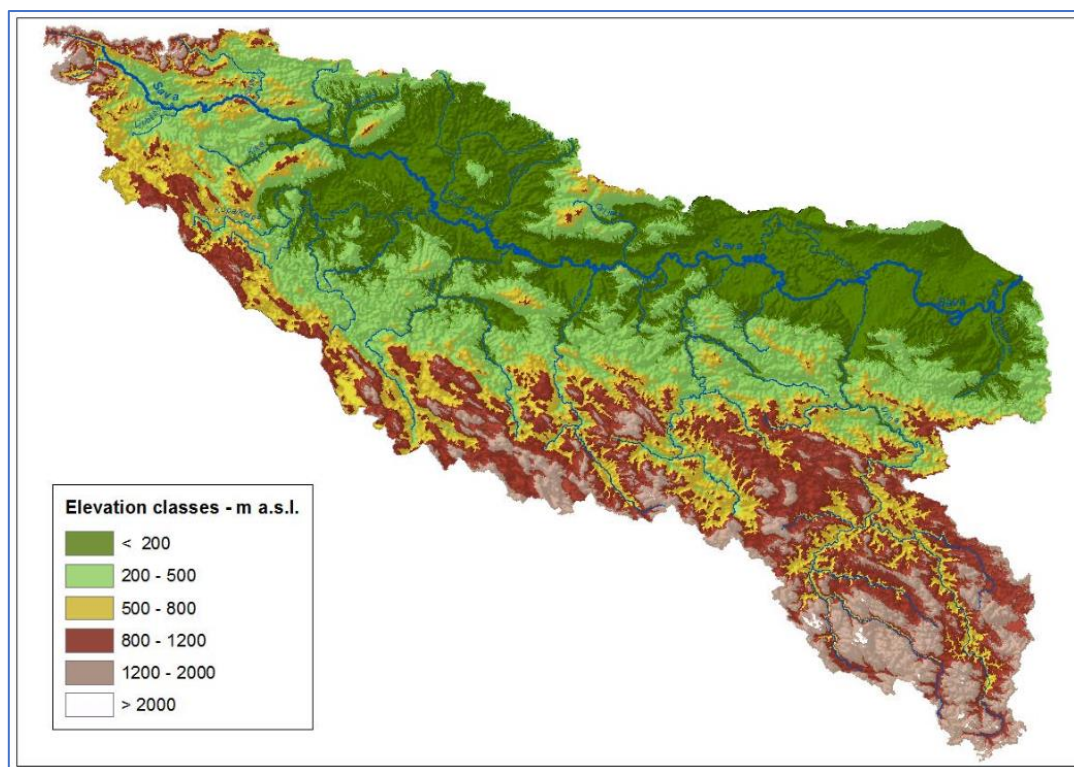
2. PODLOGE I ALATI

2.1. Hidrološki podaci

Sliv rijeke Save veličine 97 713 km² prostire se kroz šest država, a to su Hrvatska, Slovenija, Bosna i Hercegovina, Srbija, Crna gora te manjim dijelom Albanija. Sava izvire u Sloveniji i ulijeva se u Dunav i pripada crnomorskom slivu. Sama rijeka duljine 944 km jedna je od 3 najdulje rijeke u Hrvatskoj. Povezuje 3 glavna grada, Zagreb, Ljubljanu i Beograd. Na slikama 1 i 2 prikazan je sliv rijeke Save. Površina sliva rijeke Save u Hrvatskoj iznosi približno 25000 km² i samim time je najveći riječki sliv u državi. Ima važnu ulogu u vodnom gospodarstvu u Hrvatskoj te su neki od najvećih sustava obrane od poplava izgrađeni na srednjem toku rijeke Save (preljev Jankomir, retencije Lonjsko i Odransko polje, kanal Sava-Odra, brojni nasipi i ustave).



Slika 1 Sliv rijeke Save [1]



Slika 2 Sliv rijeke Save – QGIS [2]

Vodomjerna stanica Zagreb nalazi se na rijeci Savi. Spomenuta stanica igra važnu ulogu u praćenju protoka vode i vodostaja te pruža važne podatke za različite svrhe uključujući prognozu poplava, upravljanje vodnim resursima i planiranje obrane od poplava. Moderni senzori i automatiziranost sustava omogućuje precizno praćenje stanja rijeke. Prikupljeni podaci koriste se za analizu i modeliranja protoka rijeke Save. Statističke analize se provode kako bi se što bolje razumjeli hidrološki obrasci i predvidjele buduće promjene. Vodomjerna stanica Kupljenovo je mjerna postaja na rijeci Krapini koja spada u pritok rijeke Save. Na slici 3 prikazane su obje vodomjerne postaje. VS Zagreb označena je zelenom, a VS Kupljenovo crvenom bojom.



Slika 3 Vodomjerne postaje Zagreb i Kupljenovo [3]

Od strane DHMZ-a dobiveni su podaci u tekstualnom (.txt) i tabličnom (.csv) formatu. To su dnevna mjerenja protoka za Zagreb od 1926. do 2022. godine i za Kupljenovo od 1964. do 2022. Također bitne podloge ovog rada bili su historijati postaja gdje smo mogli vidjeti evidenciju promjena na vodomjernim postajama. Projektna dokumentacija Vodoprivredno-projektne biroa koristila se prilikom usporedbe rezultata [4], [5].

2.2. Alati

R je programski jezik i softversko okruženje koje se prvenstveno koristi za statističku analizu i grafičko prikazivanje podataka. Razvijen je za potrebe statističara, ali je zbog svoje fleksibilnosti, otvorenog koda i velike baze dostupnih biblioteka i paketa postao vrlo popularan u disciplinama poput hidrologije ili općenito hidrotehnike. R može biti korišten za kreiranje statističkih modela za analizu velikih voda, simulaciju poplavnih scenarija i za mapiranje i vizualizacija poplavnih zona.

Paketi u R-u su kolekcije funkcija, podataka i dokumentacije koje proširuju osnovnu funkcionalnost jezika R. Paketi omogućavaju korisnicima da riješe specifične probleme bez da sami pišu složene algoritme. U nastavku su nabrojani paketi korišteni prilikom izrade ovog rada: lfstat, dplyr, lubridate, zoo, ggplot2, lmomco, fitdistrplus, ADGofTest, evd, VGAM, tidyr i reshape2.

Prilikom korištenja R programskog jezika, korisnici obično koriste R studio. R studio je integrirano razvojno okruženje za programski jezik R. Njegova glavna svrha je da olakša rad sa R-om kroz jednostavnije i pristupačnije sučelje [6].

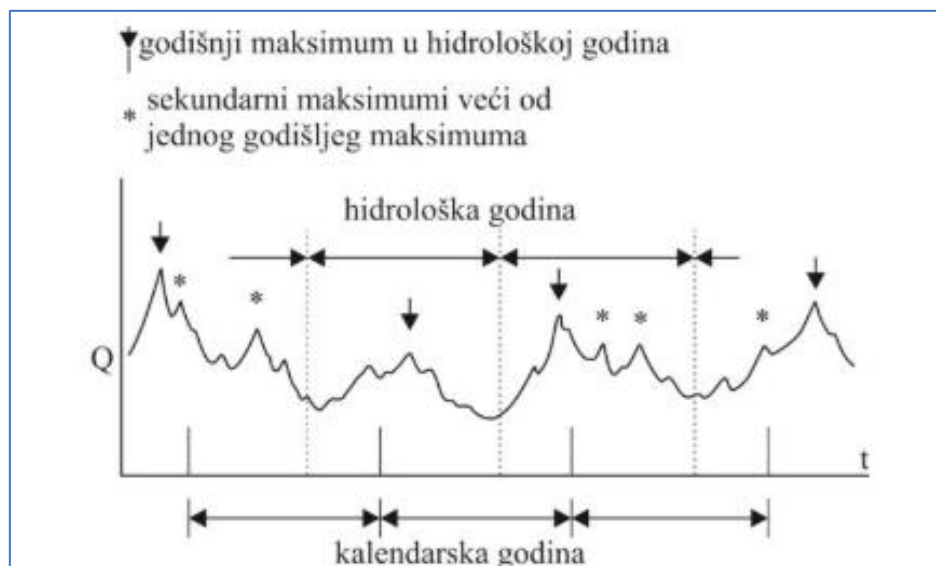
3. METODE RADA I PREGLED ULAZNIH PODLOGA

3.1. Metoda godišnjih maksimuma

Velike vode prema Hrelji [7] su pojave kod kojih se vodostaj rijeke naglo povećava, dosegne maksimum, a nakon toga postepeno opada. Pripadni hidrogram naziva se poplavni val jer se prilikom velikih voda rijeka izlije iz osnovnog korita. U praksi se pojava velikih voda povezuje s maksimalnim protokom i vodostajem.

Za određivanje velikih voda koristi se široki spektar različitih metoda. Prema tipu metode dijelimo probabilističke (statističke), determinističke (parametarske), metode regionalnih analiza i kombinirane metode. Prilikom analize vjerojatnosti pojave hidroloških veličina najčešće se koriste metoda godišnjih ekstrema i metoda prekoračenja iznad praga (POT)³.

Godišnji ekstrem podrazumijeva najveću trenutnu vrijednost protoka na određenom profilu izmjeren u toku kalendarske ili hidrološke godine. Izdvajanjem svih takvih ekstrema iz niza podataka formira se vremenska serija maksimalnih godišnjih protoka. Ti maksimalni protoci temelj su svake daljnje statističke analize po metodi godišnjih ekstrema [7]. Na slici 4 prikazan je shematski prikaz maksimalnih godišnjih protoka.



Slika 4 Shematski prikaz maksimalnih godišnjih protoka [7]

³ POT- „peaks over threshold“ metoda gdje se gledaju svi protoci iznad odabrane granice

Cilj analize je određivanje vjerojatnosti pojave maksimalnih godišnjih protoka. To se postiže pronalaskom funkcije raspodjele vjerojatnosti maksimalnog protoka Q_{max} :

$$F(x) = P(Q_{max} \leq x), \text{ odnosno funkcije } \phi(x) = P(Q_{max} \geq x) \quad (2.1)$$

jer je $F(x)$ funkcija raspodjele vjerojatnosti, odnosno $\phi(x)$ potpuna karakteristika raspodjele.

U prijevodu znači da se svi rezultati slučajne varijable (Q) mogu dobiti iz funkcije raspodjele vjerojatnosti $F(Q)$, odnosno $\phi(Q)$. Vrijednosti maksimalnih godišnjih protoka određenog povratnog razdoblja određuju se iz jednadžbe:

$$Q_T = 1/\phi(Q). \quad (2.2)$$

3.2. Metodologija proračuna vjerojatnosti pojave velikih voda

Za analizu vjerojatnosti pojave hidroloških ekstrema koriste se negrupirani podaci⁴. Proračun vjerojatnosti pojave hidroloških ekstrema u statističkoj analizi izrađuje se pomoću dvije metode definiranja vremenskog niza, a to su:

1. Metoda godišnjih ekstrema
2. POT metoda

Za potrebe ovog rada koristit će se metoda godišnjih ekstrema koja je detaljnije objašnjena u nastavku. Postupak određivanja vjerojatnosti pojave velikih voda (male vjerojatnosti pojave) provodi se pomoću sljedećih koraka [8]:

- formiranje vremenskog niza
- početna analiza vremenskog niza
- definiranje statističkog niza
- određivanje empirijske funkcije raspodjele vjerojatnosti
- proračun numeričkih karakteristika slučajne varijable - statističkog niza maksimalnih godišnjih protoka (srednja vrijednost, standardna devijacija, medijan, koeficijent varijacije itd.)
- određivanje parametara i vrijednosti teorijskih funkcija raspodjele vjerojatnosti
- provedbom statističkih testova odrediti najprikladniju teorijsku raspodjelu
- pomoću odabrane teorijske funkcije raspodjele vjerojatnosti proračunati vrijednosti maksimalnih godišnjih protoka za karakteristične povratne periode (2, 5, 10, 20, 50, 100 i 1000 godina)

Numerička rješenja teorijskih funkcija raspodjele uglavnom su dana tablično, a njihove su funkcije ugrađene u rutine računarskih programa kojima se provode takvi proračuni. Metoda se bazira na analizi ekstremnih vrijednosti u svakoj godini (jedan podatak godišnje) tokom višegodišnjeg perioda mjerenja. Uređivanjem izmjerenih podataka po veličini formira se statistički niz.

⁴ negrupirani podaci – sirovi podaci koji se prikazuju pojedinačno, bez ikakvog grupiranja ili sažimanja

3.2.1. Početna analiza niza

Metode matematičke statistike mogu se primijeniti na statistički skup podataka zadan kao niz vrijednosti slučajne varijable ako su zadovoljeni sljedeći početni uvjeti [8]:

1. Članovi niza moraju biti slučajne varijable - hidrološke i meteorološke veličine mogu se smatrati slučajnim varijablama zbog velikog broja utjecaja o kojima ovise
2. Članovi niza su međusobno neovisni - prethodno mjerenje hidrološke veličine ne smije utjecati na sljedeće mjerenje (za godišnje ekstreme u hidrološkim godinama redovito se može usvojiti da su međusobno neovisni)
3. Niz mora biti dovoljno dug - u hidrološkoj praksi uobičajeno je pravilo da se za statističku analizu koriste nizovi od najmanje 30 godina
4. Podaci moraju biti homogeni - homogenost može biti narušena zbog promjena na slivu (promjene u vodnom režimu, promjene u profilu vodotoka, promjene kote nule vodomjera itd.)
5. Članovi niza moraju biti stacionarni - nestacionarnost se odražava na podatke u vidu trendova, periodičnosti i dr.

Zbog svih navedenih uvjeta potrebno je izvršiti početnu obradu vremenskih nizova izmjerenih podataka u vidu analize pouzdanosti podataka, analizu homogenosti i trenda podataka te formiranje statističkog niza.

Dnevni podaci dobiveni od strane DHMZ-a za Zagreb bilježeni su od 1926. godine pa sve do 2022. U tom rasponu potrebno je pronaći niz koji zadovoljava početne uvjete. Kasnije će se upravo na tom nizu raditi detaljne analize. Za početak vrlo je bitno pogledati historijate postaja. U tom dokumentu zabilježene su sve promjene na postajama koje bi eventualno mogle utjecati na homogenost i pouzdanost podataka. Uzet ćemo u obzir događaj 1983. godine kada se dogodila rekonstrukcija postaje Zagreb i izgradnja Sustava obrane od poplava Srednjeg Posavlja 1970-ih godina.

3.2.2. Analiza homogenosti podataka

Homogenost podataka odnosi se na konzistentnost i ujednačenost podataka tijekom vremena. U hidrologiji to znači da su podaci o protoku rijeka ili padalinama prikupljeni pod istim uvjetima i da nisu podložni promjenama uzrokovanim vanjskim čimbenicima poput promjena u mjernoj opremi ili promjena u metodologiji prikupljanja podataka. Homogeni podaci su ključni za pouzdane hidrološke analize poput procjene vršnih protoka ili dugoročnih klimatskih

analiza. Ako podaci nisu homogeni, rezultati analiza mogu biti netočni ili zavaravajući. U nastavku su provedena 2 testa homogenosti: Pettit test i Kolmogorov-Smirnov test.

- Pettit test
 - koristi se za pronalaženje točke prekida u vremenskoj seriji, tj. točke loma
 - test uspoređuje kumulativne sumirane vrijednosti serije prije i nakon svake točke unutar vremenske serije
 - jednostavan je za primjenu i ne zahtijeva pretpostavke o distribuciji podataka.

Formula za Pettit test koristi se za izračunavanje statistike testa K_t za svaku točku t u vremenskom nizu [9]:

$$K_t = \max |U_t|, \text{ za } t = 1, 2, \dots, N, \quad (2.3)$$

gdje je:

$$U_t = \sum_{i=1}^t \sum_{j=i+1}^N \text{sgn}(X_i - X_j). \quad (2.4)$$

- Kolmogorov-Smirnov test
 - značajan statistički test koji se koristi za usporedbu distribucija podataka i može se primijeniti u kontekstu testiranja homogenosti podataka
 - KS test može usporediti dvije različite vremenske serije podataka, npr. seriju prije i poslije određene godine kako bi se utvrdile razlike u distribucijama tih serija
 - KS test također može usporediti empirijsku distribuciju podataka iz vremenske serije s nekom teorijskom distribucijom

Za dvostrani Kolmogorov-Smirnov test, statistika testa D definira se kao [10]:

$$D = \sup_x |F_1(x) - F_2(x)| \quad (2.5)$$

gdje je:

- $F_1(x)$ – empirijska kumulativna distribucijska funkcija (ECDF) prvog skupa podataka
- $F_2(x)$ – empirijska kumulativna distribucijska funkcija (ECDF) drugog skupa podataka ili teoretska kumulativna distribucijska funkcija ako se uspoređuje s teorijskom distribucijom
- \sup_x – označava supremum (najveću vrijednost) apsolutne razlike između funkcija za sve vrijednosti x .

3.3. Primjena empirijskih vjerojatnosti

Empirijske ili kompromisne vjerojatnosti su ključne u hidrologiji i statistici. U slučajevima kada se analizira distribucija podataka poput maksimalnih protoka one nam služe za procjenu učestalosti određenih događaja velikih voda na temelju izmjerenih podataka. Primjenjujemo ih kod procjene povratnih perioda i kod prikaza krivulja učestalosti.

Postoji nekoliko pristupa empirijskim metodama poput Weibull metode, Hazen, Čegodajev i dr. U nastavku će biti prikazani izrazi pomoću kojih se računaju empirijske vrijednosti.

Konkretno u našem primjeru primijenjena je Čegodajev metoda jer je navedena metoda najpodobnija za analizu ekstremnih događaja i korištena je u studiji vezanoj za sustav obrane od poplava Srednjeg Posavlja. [4, 5] Njen korekcijski faktor može se prilagoditi specifičnim potrebama analize omogućujući preciznije procjene koje su ključne za donošenje odluka u upravljanju vodnim sustavima i resursima.

Čegodajev metoda računa empirijske vrijednosti prema formuli [11]:

$$P(X \geq x_m) = \frac{m-0.3}{N+0.4} \quad (3.1)$$

Hazen metoda računa empirijske vrijednosti prema formuli [11]:

$$P(X \geq x_m) = \frac{m-0.5}{N} \quad (3.2)$$

Weibull metoda računa empirijske vrijednosti prema formuli [11]:

$$P(X \geq x_m) = \frac{m}{N+1} \quad (3.3)$$

Gdje je: P - empirijska vjerojatnost nepremašivanja za i-ti rangirani podatak

m - pozicija (rang) promatranog podatka u uzlaznom poretku

N - ukupan broj promatranih podataka [11].

3.4. Primjena teorijskih distribucija vjerojatnosti

3.4.1. Teorijske distribucije vjerojatnosti

Teorijske funkcije distribucije su matematički koncept pomoću kojih opisujemo raspodjelu slučajnih varijabli. Njihova uloga je ključna u statistici i teoriji vjerojatnosti jer omogućuju analizu i modeliranje slučajnih fenomena. Postoje funkcija gustoće vjerojatnosti i funkcija distribucije vjerojatnosti. U našem slučaju koristi se funkcija distribucije vjerojatnosti koja opisuje vjerojatnost da će slučajna varijabla biti manja ili jednaka određenoj vrijednosti. Ako je x slučajna varijabla, a funkcija označena s $F(x)$ tada je njena definicija:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (3.4)$$

Nakon izračuna empirijskih vjerojatnosti distribucije pokušavamo pronaći teorijsku funkciju koja najbolje opisuje naš niz podataka. Najčešće funkcije koje se koriste su Normalna, GEV, Log-normalna, Gama, Pearson III, Log-Pearson III, Gumbelova i dr [12]. Za naš niz podataka provedene su usporedbe prilagodbe GEV, Log-normal i Gumbel distribucije s empirijskom distribucijom prema Čegodajevu.

3.4.2. Normalna distribucija vjerojatnosti

Normalna distribucija, također poznata kao Gaussova, jedna je od najvažnijih i najčešće korištenih distribucija u statistici. Karakterizira je zvonoliki oblik i simetrija oko srednje vrijednosti. Njeni parametri su srednja vrijednost (μ) i standardna devijacija (σ). Često se koristi za modeliranje prirodnih fenomena, rezultata testova ili bilo koje druge podatke koji pokazuju tendenciju koncentracije oko srednje vrijednosti [12].

3.4.3. Generalizirana ekstremna vrijednost

Generalizirana ekstremna vrijednost ili GEV je teorijska distribucija koja se koristi za modeliranje ekstremnih vrijednosti, tj. maksimalnih i minimalnih vrijednosti uzoraka iz različitih distribucija. Objedinjuje 3 različite vrste distribucija, a to su: Gumbelova, Frechetova i Weibullova. GEV ima 3 parametra:

- μ (μ) lokacijski parametar koji određuje središte distribucije
- σ (σ) skalarni parametar koji određuje širinu distribucije
- ξ (ξ) parametar oblika, određuje oblik repova distribucije

Najčešće se koristi u hidrologiji, meteorologiji, inženjeringu i financijama. Distribucija je svestran alat za modeliranje ekstremnih vrijednosti u raznim znanstvenim i inženjerskim

disciplinama. Njena fleksibilnost da obuhvati različite tipove ekstremnih vrijednosti čini je posebno korisnom za analizu ekstremnih događaja [12].

3.4.4. Log-normalna distribucija

Log-normalna distribucija je još jedna u nizu teorijskih distribucija vjerojatnosti za slučajnu varijablu čiji je logaritam normalno distribuiran. Dakle, ako je varijabla X log-normalno distribuirana, tada je $Y = \ln(X)$ normalno distribuirana. Njene karakteristike su:

μ (mu) - srednja vrijednost logaritma varijable

σ (sigma) - standardna devijacija logaritma varijable.

Ako X ima log-normalnu distribuciju s parametrima μ i σ , tada se to zapisuje kao

$$X \approx \text{Log-N}(\mu, \sigma^2). \quad (3.5)$$

Funkcija gustoće vjerojatnosti log-normalne distribucije s parametrima μ i σ^2 dana je formulom:

$$f_X(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0 \quad (3.6)$$

Kumulativna distribucijska funkcija dana je formulom:

$$F_X(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right), \quad x > 0, \quad (3.7)$$

gdje je erf funkcija pogreške.

U nastavku su navedene osnovne karakteristike log-normalne distribucije:

$$\text{Srednja vrijednost } E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$\text{Medijan } (X) = e^{\mu}$$

$$\text{Varijanca } \operatorname{Var}(X) = (e^{\sigma^2} - 1) e^{2\mu + \sigma^2}.$$

Log-normalna distribucija često se koristi u raznim područjima zbog svoje karakteristike da je uvijek pozitivna, što je korisno za modeliranje veličina koje ne mogu biti negativne (kao što je slučaj kod protoka). Njena primjena je široka i obuhvaća mnoge discipline, od ekonomije, financija, prirodnih znanosti, inženjeringa i dr. [12].

3.5. Testovi prikladnosti teorijske funkcije raspodjele

Testovi prikladnosti teorijskih funkcija raspodjele koriste se za procjenu koliko dobro određeni teorijski model (funkcija raspodjele) odgovara stvarnim podacima. Provedena su dva statistička testa, Anderson-Darling i Kolmogorov-Smirnov. Anderson-Darling je prikladnija verzija Kolmogorov-Smirnova testa jer je osjetljiviji na razlike u repovima distribucije. Daje precizniju mjeru odstupanja između empirijske i teorijske distribucije [13].

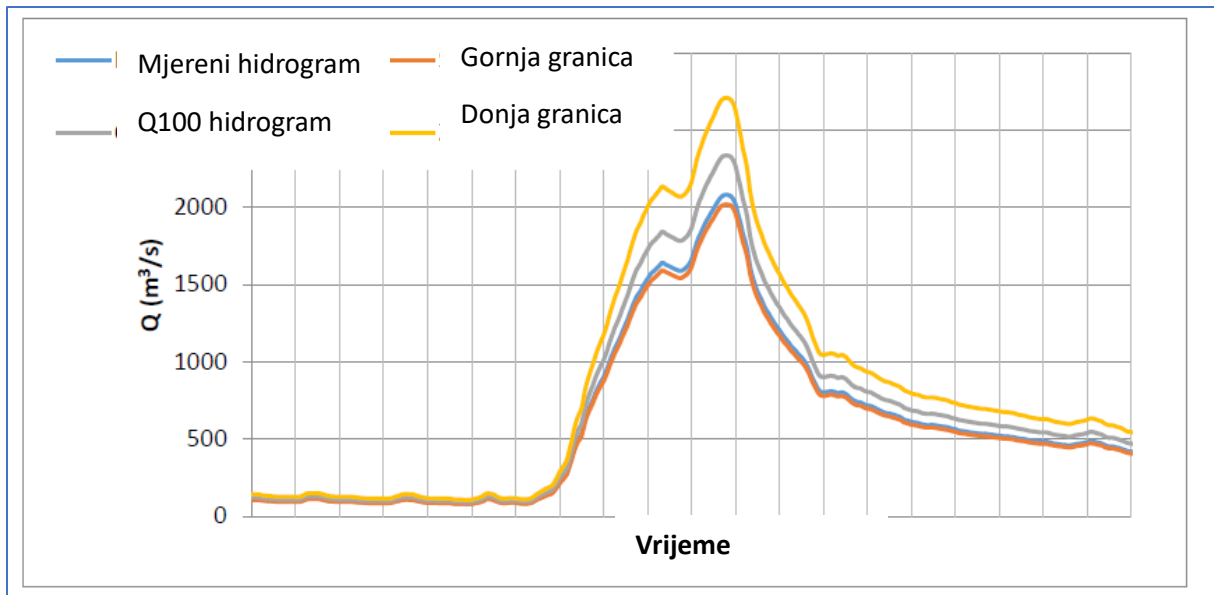
3.6. Metodološki pristupi prikaza sintetičkih projektnih hidrograma

Za planiranje hidrotehničkih objekata i mjera za smanjenje rizika od poplava ključni su podaci o projektnim vršnim protocima i pripadnim hidrogramima iz kojih se može odrediti pripadni volumen vode. Metodologija za određivanje projektnih hidrograma određenih povratnih razdoblja iz kojih se određuju vrijednosti za potrebe projektiranja nije propisana, niti postoje stručne smjernice, što rezultira primjenom različitih metoda u praksi. Najčešće se koriste jednostavne empirijske jednadžbe ili vjerojatnosne analize vršnih protoka.

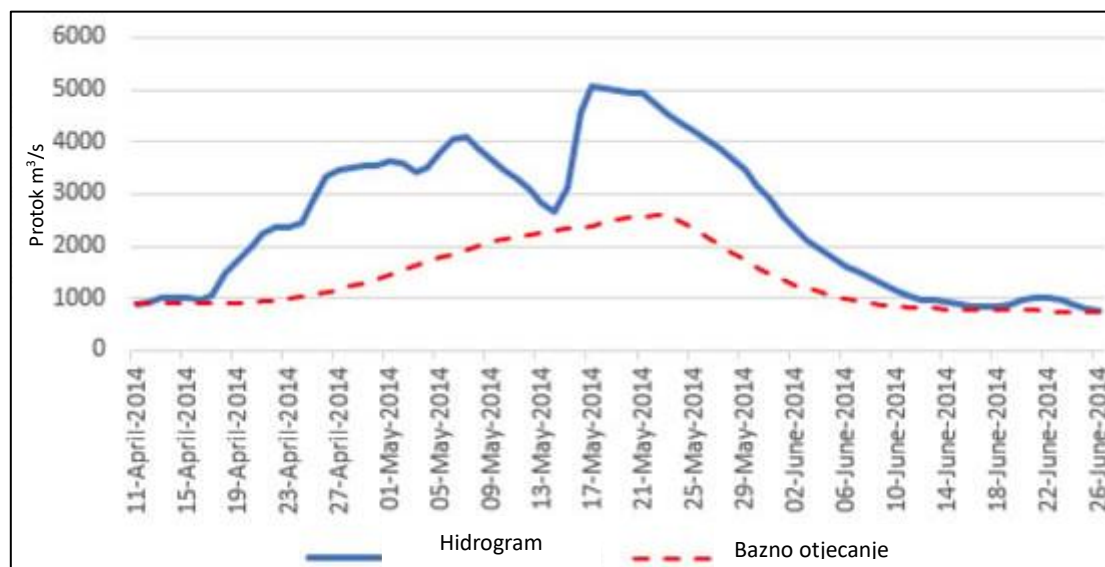
Od manje kompleksnih metoda koja se koristi za određivanje (oblika) projektnih hidrograma na nizovima mjerenih protoka koristi se metoda *tipičnog visokovodnog hidrograma* (engl. *Typical Flood Hydrograph*, TFH) gdje je odabrani tipični hidrogram skaliran pomoću odgovarajućih projektnih vrijednosti vršnog protoka te uključuje sljedeće korake [14]:

- Izbor uzorka za analizu
- Procjena parametara distribucijskih funkcija
- Ocjena prikladnosti distribucija
- Izbor odgovarajućih reprezentativnih hidrograma ovisno o svrsi korištenja rezultata (npr. kraći događaji, dulji događaji, više različitih kombinacija)
- Uzimanje u obzir rezultata vjerojatnosnih analiza i odabranih reprezentativnih hidrograma za određivanje projektnih hidrograma za različite vrijednosti povratnih razdoblja [15].

Na slici 5 prikazan je primjer oblika projektnog hidrograma temeljenog TFH univarijatnog pristupa s gornjom i donjom granicom pouzdanosti za povratni period od 100 godina, te primjer na slici 6 dobiven koristeći kopula analizu gdje su obje varijable, vršni protok i volumen, odabrani za povratne periode 100 godina.



Slika 5 Primjer hidrograma po metodi TFH zajedno s razmatranjem intervala pouzdanosti [15]



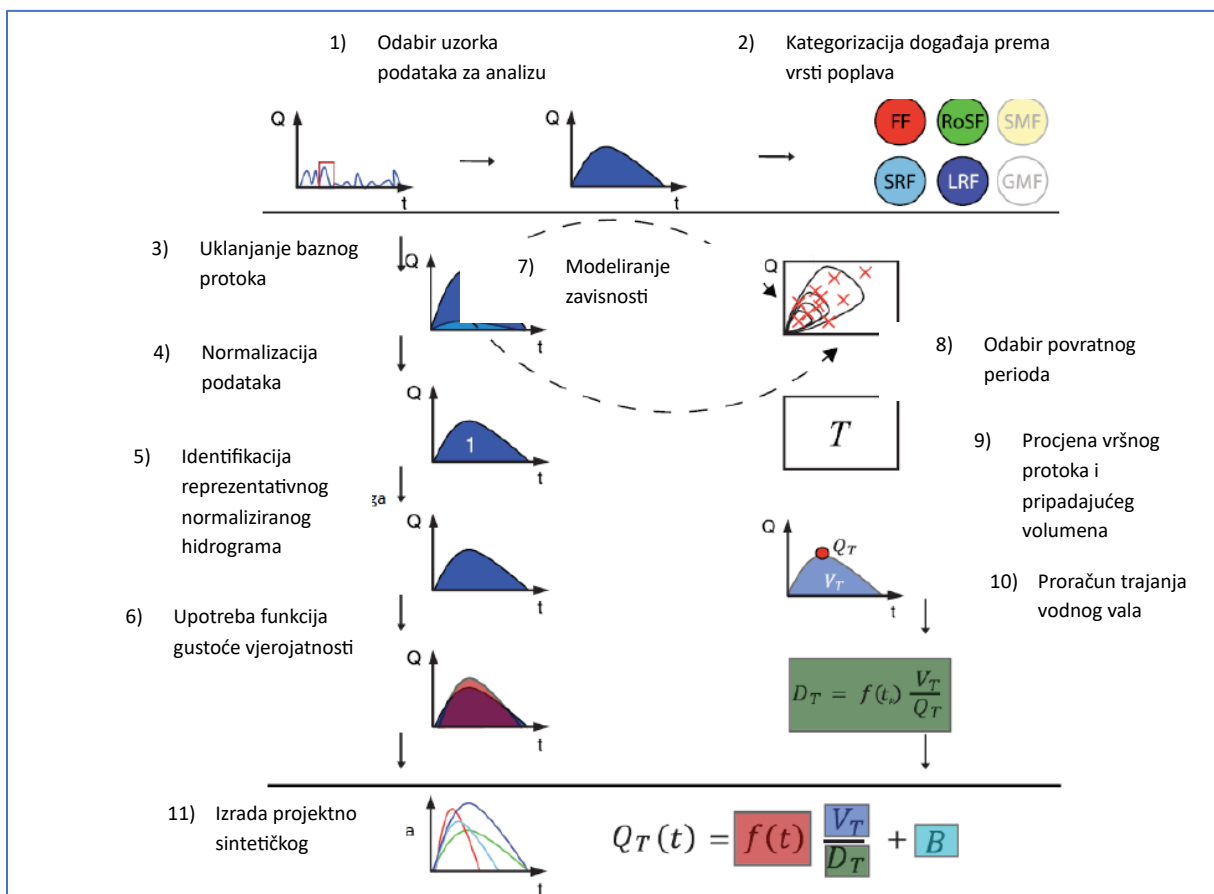
Slika 6 Primjer projektnog hidrograma za VS Županja na rijeci Savi koji je izrađen na temelju izmjenog AM hidrograma poplava iz 2014. godine [16]

Kompleksnije metode, kao što su one koje predlažu Brunner i suradnici [17], koriste naprednije postupke kako bi se dobili projektni hidrogrami. Temelje se na izgradnji sintetičkih hidrograma koji se koriste za analizu velikih voda, pogotovo u područjima bez mjernih postaja. Ove metode

se oslanjaju na određene karakteristike poplavnih događaja, poput oblika hidrograma i njegovog trajanja, a uključuju sljedeće:

- Odabir uzorka podataka za analizu
- Kategorizacija događaja prema vrsti poplava
- Uklanjanje baznog protoka
- Normalizacija podataka
- Identifikacija reprezentativnog normaliziranog hidrograma
- Upotreba funkcija gustoće vjerojatnosti
- Modeliranje zavisnosti
- Odabir povratnog perioda
- Procjena vršnog protoka i pripadajućeg volumena
- Proračun trajanja vodnog vala
- Izrada projektnog sintetičkog hidrograma [15], [17].

Na slici 7 prikazana je složenija metodologija za određivanje projektnih hidrograma.



Slika 7 Složenija metodologija za određivanje projektnih hidrograma [17]

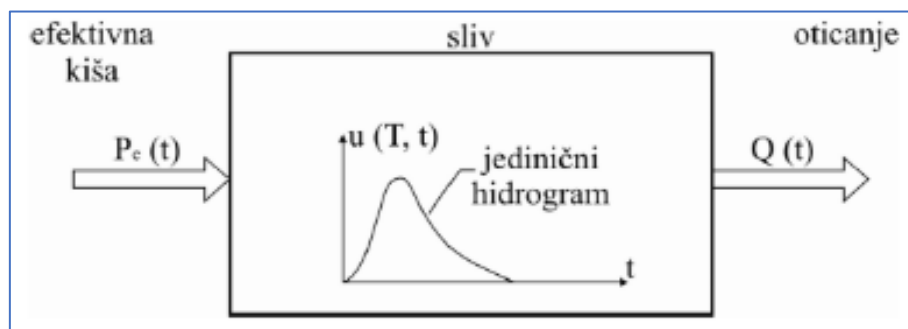
Korištenje modela pretvorbe efektivne oborine⁵ u hidrogram direktnog otjecanja najčešće se koristi kod neizučenih slivova, gdje metode proračuna hidrograma direktnog otjecanja na velikim slivovima uključuju sljedeće:

- Jedinični hidrogram (klasični jedinični hidrogram, SCS jedinični hidrogram)
- Metode distribuiranih modela (HEC-HMS, MIKE SHE)
- Sintetički hidrogrami (Snyderov, Clarkov)

Metode proračuna hidrograma direktnog otjecanja na malim slivovima su:

- Metoda izokrona
- Empirijske metode (Racionalna, Ven te Chow, Srebrenović, Gavrilović)
- Metoda jediničnog hidrograma

Na slici 8 prikazan je shematski prikaz metode jediničnog hidrograma.



Slika 8 Shematski prikaz metode jediničnog hidrograma [18]

3.7. Metoda Srebrenovića

Osnovni parametri vodnog vala su maksimalni protok, volumen i oblik vodnog vala. Svi parametri ovise o klimatskim, topografskim, geološkim i biološkim faktorima, kao i antropološkim djelovanjima. Princip analize poplavnih rizika je generalizacija parametara zabilježenih hidrograma vodnih valova, temeljem kojih su određeni sintetički vodni valovi karakterističnih povratnih razdoblja. Za određivanje sintetičkog hidrograma vodnih valova usvojen je iskustveni izraz Srebrenović [19] koji je razvijen za područja slivova srednje veličine. Vodni val sa svojim parametrima prikazan je na slici 9.

⁵ efektivne oborine – dio ukupnih oborina koji nakon početnih gubitaka i infiltracije formiraju direktno otjecanje

Iz navedene literature jednadžba oblika sintetičkog vodnog vala može se napisati:

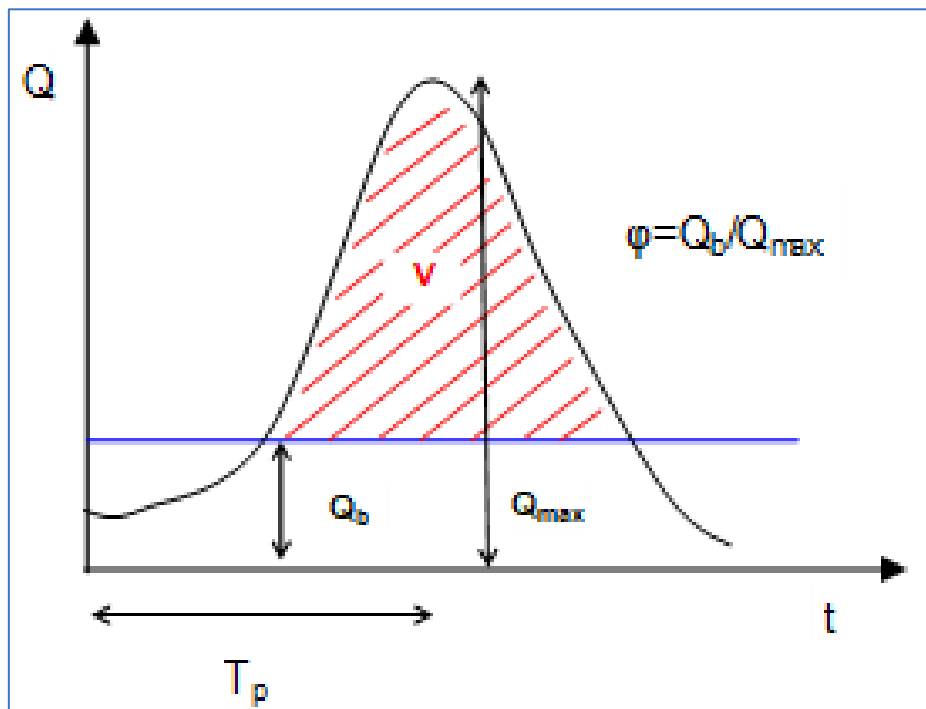
$$Q = Q_{max} \left(\frac{t}{T_p}\right)^m e^{m(1-\frac{t}{T_p})} \quad (2.6)$$

gdje je:

Q_{max} – vršni protok hidrograma (m^3/s);

T_p – vrijeme podizanja vodnog vala (sati);

m – koeficijent oblika vodnog vala.



Slika 9 Prikaz elemenata za proračun vodnog vala [19]

Koeficijent oblika sintetičkog vodnog vala označen kao “ m ” je izračunat kao aritmetička sredina koeficijenata mjerodavnih vodnih valova određenih prema izrazu prof. Srebrenovića [19]:

$$m = \left(\frac{9450 \times Q_{max} \times T_p \times (1-\varphi)^{1.5}}{V \times e^{0.5\varphi}}\right)^{1.94} \quad (2.7)$$

gdje su:

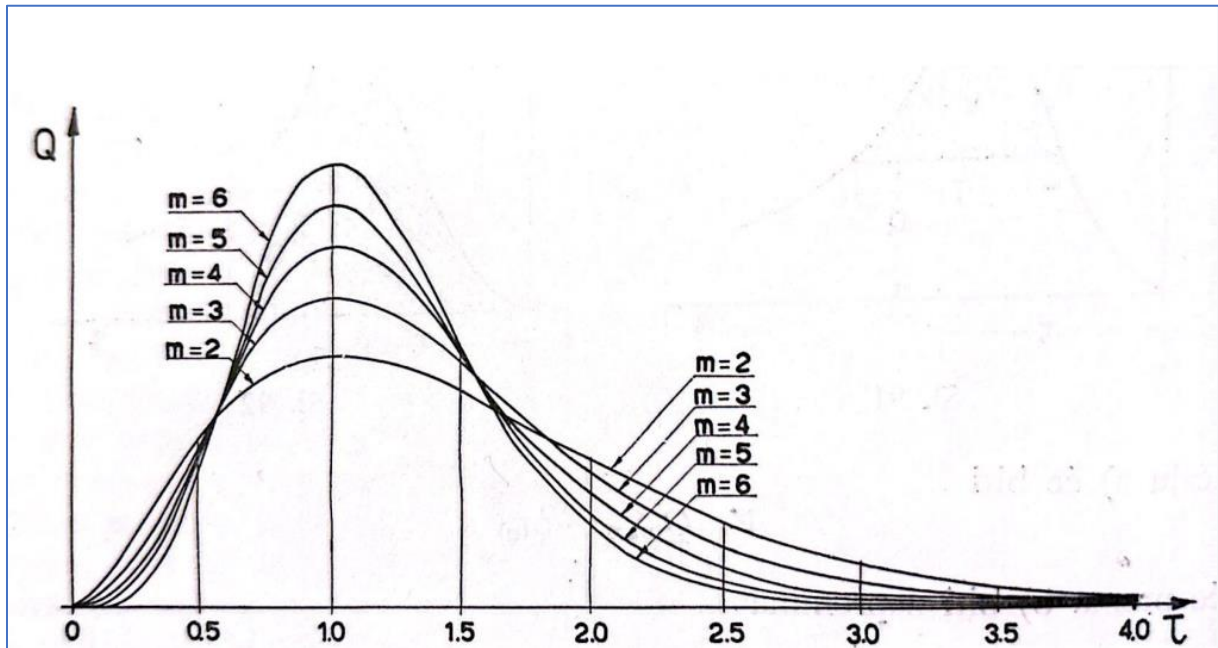
Q_{max} – vršni protok hidrograma (m^3/s);

T_p – vrijeme podizanja vodnog vala (sati)

φ – kvocijent baznog (Q_b) i vršnog protoka (Q_{max}) vodnog vala;

V – volumen vodnog vala (m^3).

Na slici 10 prikazan je hidrogram u ovisnosti o koeficijentu "m".



Slika 10 Izgled hidrograma prema vrijednosti koeficijenta "m" [18]

4. REZULTATI

4.1. Početna analiza niza, analiza homogenosti i formiranje niza

Maksimalni protoci i krivulje trajanja

Kao što je spomenuto u uvodu, za potrebe ovog rada naručeni su od DHMZ-a dnevni mjereni podaci o protoku stanica VS Zagreb te VS Kupljenovo. Koristi se metoda godišnjih ekstrema, što znači da po jednoj godini imamo jedan maksimalni protok. U tablicama 1 i 2 dan je tablični prikaz godišnjih maksimuma po godinama za VS Zagreb (1926. – 2022.), a potom i za VS Kupljenovo za podatkovni niz (1964. – 2022.).

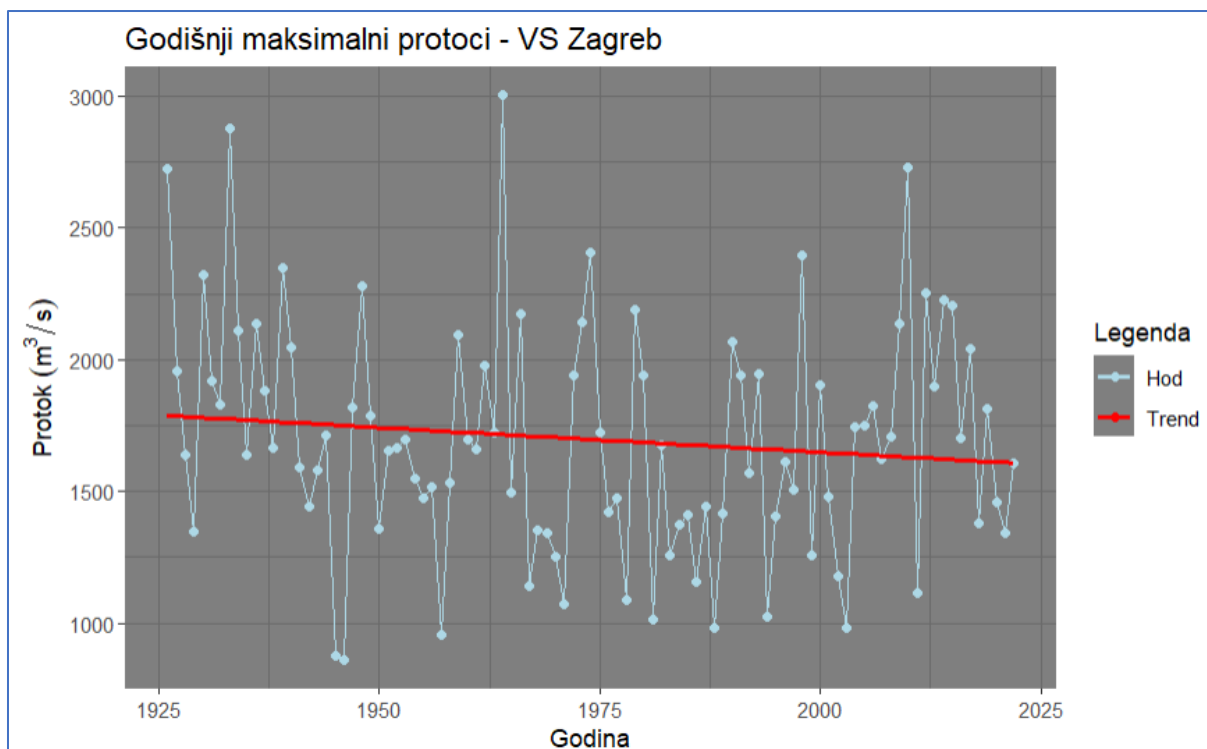
Tablica 1 Tablični prikaz godišnjih maksimuma za VS Zagreb (1926. – 2022.)

| Godina [-] | Protok [m ³ /s] | Godina [-] | Protok [m ³ /s] | Godina [-] | Protok [m ³ /s] |
|---------------|-------------------------------|---------------|-------------------------------|---------------|-------------------------------|
| 1926 | 2725.7 | 1958 | 1535.0 | 1990 | 2070.0 |
| 1927 | 1959.0 | 1959 | 2092.0 | 1991 | 1940.0 |
| 1928 | 1555.0 | 1960 | 1560.0 | 1992 | 1551.0 |
| 1929 | 1348.0 | 1961 | 1662.0 | 1993 | 1947.0 |
| 1930 | 2320.0 | 1962 | 1979.0 | 1994 | 1025.0 |
| 1931 | 1701.0 | 1963 | 1724.0 | 1995 | 1371.0 |
| 1932 | 1828.0 | 1964 | 3005.0 | 1996 | 1561.0 |
| 1933 | 2877.0 | 1965 | 1450.0 | 1997 | 1505.0 |
| 1934 | 2108.0 | 1966 | 2174.0 | 1998 | 2394.0 |
| 1935 | 1640.0 | 1967 | 1139.0 | 1999 | 1258.0 |
| 1936 | 2136.0 | 1968 | 1355.0 | 2000 | 1903.0 |
| 1937 | 1880.0 | 1969 | 1342.0 | 2001 | 1482.0 |
| 1938 | 1664.0 | 1970 | 1253.0 | 2002 | 1179.0 |
| 1939 | 2221.0 | 1971 | 1072.0 | 2003 | 980.0 |
| 1940 | 2045.0 | 1972 | 1941.0 | 2004 | 1743.0 |
| 1941 | 1593.0 | 1973 | 2140.0 | 2005 | 1518.0 |
| 1942 | 1442.0 | 1974 | 2406.0 | 2006 | 1824.0 |
| 1943 | 1581.0 | 1975 | 1722.0 | 2007 | 1624.0 |
| 1944 | 1713.0 | 1976 | 1422.0 | 2008 | 1706.0 |
| 1945 | 875.0 | 1977 | 1477.0 | 2009 | 2136.0 |
| 1946 | 859.0 | 1978 | 1089.0 | 2010 | 2732.0 |
| 1947 | 1495.0 | 1979 | 2192.0 | 2011 | 1116.0 |
| 1948 | 2282.0 | 1980 | 1941.0 | 2012 | 2251.0 |
| 1949 | 1649.0 | 1981 | 1016.0 | 2013 | 1896.0 |
| 1950 | 1360.0 | 1982 | 1676.0 | 2014 | 2229.0 |
| 1951 | 1655.0 | 1983 | 1259.0 | 2015 | 2204.0 |
| 1952 | 1667.0 | 1984 | 1372.0 | 2016 | 1553.0 |
| 1953 | 1696.0 | 1985 | 1413.0 | 2017 | 2044.0 |
| 1954 | 1511.0 | 1986 | 1159.0 | 2018 | 1382.0 |
| 1955 | 1475.0 | 1987 | 1443.0 | 2019 | 1611.0 |
| 1956 | 1487.0 | 1988 | 982.0 | 2020 | 1460.0 |
| 1957 | 956.0 | 1989 | 1419.0 | 2021 | 1344.0 |
| | | | | 2022 | 1607.0 |

Tablica 2 Tablični prikaz godišnjih maksimuma za VS Kupljenovo (1964. – 2022.)

| Godina [-] | Protok [m ³ /s] | Godina [-] | Protok [m ³ /s] |
|---------------|-------------------------------|---------------|-------------------------------|
| 1964 | 143.0 | 1994 | 106.0 |
| 1965 | 153.0 | 1995 | 146.0 |
| 1966 | 169.0 | 1996 | 103.0 |
| 1967 | 156.0 | 1997 | 148.0 |
| 1968 | 141.0 | 1998 | 197.0 |
| 1969 | 115.0 | 1999 | 169.0 |
| 1970 | 91.6 | 2000 | 89.8 |
| 1971 | 92.6 | 2001 | 105.0 |
| 1972 | 206.0 | 2002 | 97.0 |
| 1973 | 121.0 | 2003 | 38.0 |
| 1974 | 193.0 | 2004 | 124.0 |
| 1975 | 78.7 | 2005 | 129.0 |
| 1976 | 208.0 | 2006 | 163.0 |
| 1977 | 93.3 | 2007 | 83.0 |
| 1978 | 75.4 | 2008 | 106.0 |
| 1979 | 120.0 | 2009 | 107.0 |
| 1980 | 173.0 | 2010 | 175.0 |
| 1981 | 125.0 | 2011 | 33.0 |
| 1982 | 152.0 | 2012 | 94.7 |
| 1983 | 117.0 | 2013 | 168.0 |
| 1984 | 99.7 | 2014 | 153.0 |
| 1985 | 141.0 | 2015 | 185.0 |
| 1986 | 131.0 | 2016 | 142.0 |
| 1987 | 127.0 | 2017 | 142.0 |
| 1988 | 99.9 | 2018 | 105.0 |
| 1989 | 252.0 | 2019 | 159.0 |
| 1990 | 94.9 | 2020 | 111.0 |
| 1991 | 190.0 | 2021 | 127.0 |
| 1992 | 130.0 | 2022 | 124.0 |
| 1993 | 126.0 | | |

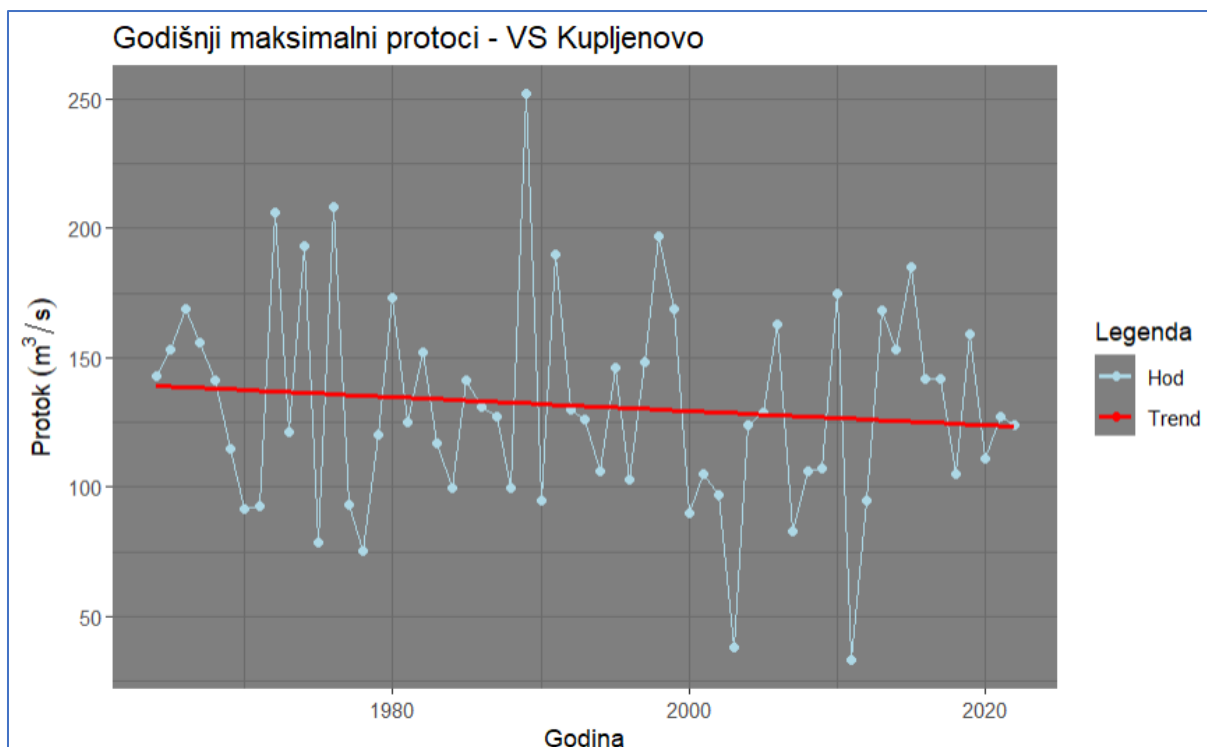
Grafički prikaz godišnjih maksimuma možemo vidjeti na slikama 11 i 12. Također je prikazana linija trenda prema kojoj možemo zaključiti da tijekom godina maksimalni protoci opadaju. U tablicama 3 i 4 možemo vidjeti karakteristične vrijednosti za pojedinu postaju.



Slika 11 Grafički prikaz godišnjih maksimuma VS Zagreb (1926. – 2022.)

Jednadžba trenda na VS Zagreb za razdoblje mjerenja od 1926. do 2022. godine je sljedeća:

$y = -1.7638x + 1765.4$. Koeficijent smjera iznosi -1.76.



Slika 12 Grafički prikaz godišnjih maksimuma VS Kupljenovo (1964. – 2022.)

Jednadžba trenda na VS Kupljenovo za razdoblje mjerenja od 1964. do 2022. je sljedeća:

$y = -0.2711x + 139.4$. Koeficijent smjera iznosi -0.27 .

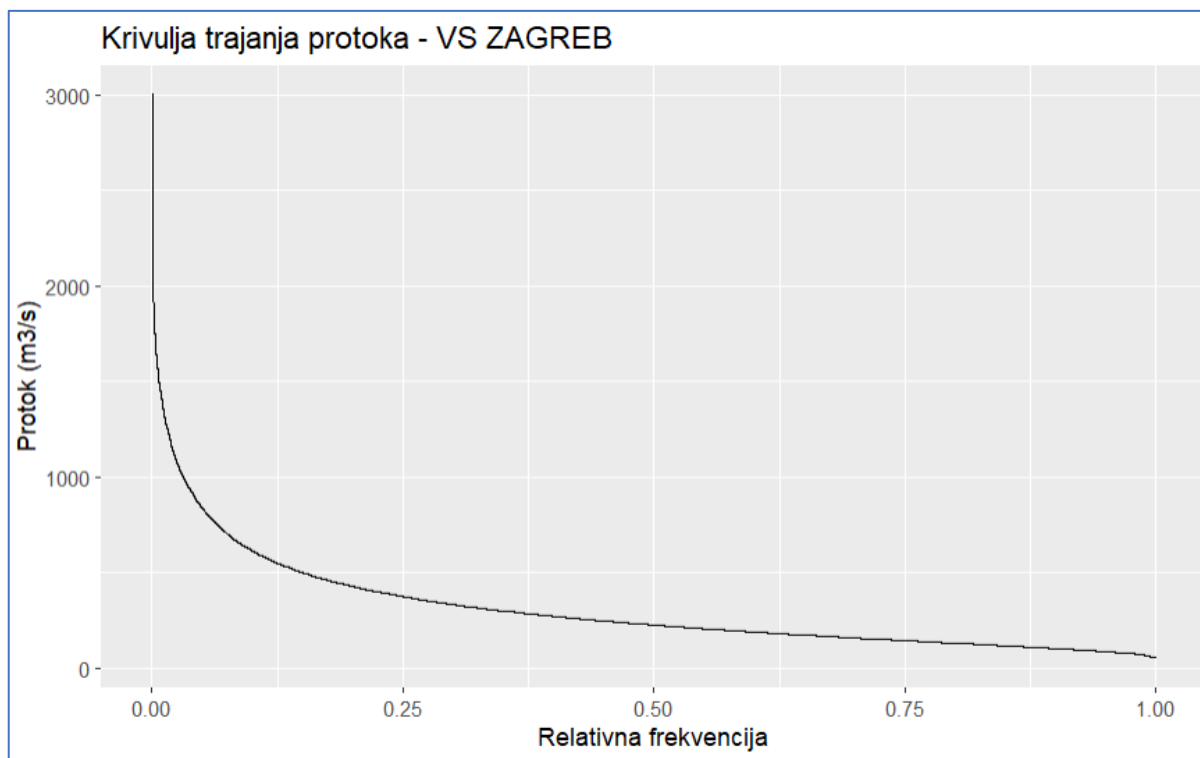
Tablica 3 Karakteristične vrijednosti protoka - VS Zagreb (prikazuje vrijednosti iz cijelog podatkovnog niza 1926. – 2022.)

| | |
|---|------|
| Minimalni protok [m ³ /s] | 47 |
| Maksimalni protok [m ³ /s] | 3005 |
| Srednji protok [m ³ /s] | 309 |
| Medijan [m ³ /s] | 225 |
| Standardna devijacija [m ³ /s] | 263 |
| Q1 – 25% kvantil | 144 |
| Q3 – 75% kvantil | 375 |

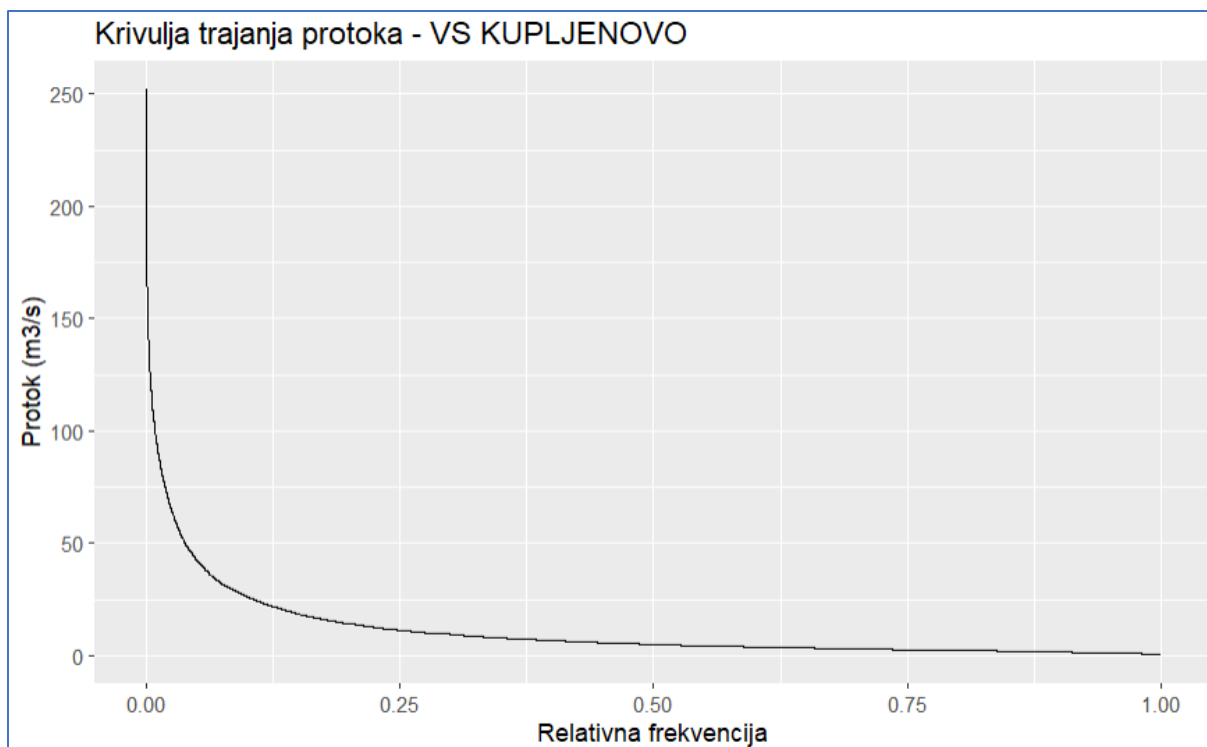
Tablica 4 Karakteristične vrijednosti protoka - VS Kupljenovo (prikazuje vrijednosti iz cijelog podatkovnog niza 1964. – 2022.)

| | |
|---|------|
| Minimalni protok [m ³ /s] | 0.34 |
| Maksimalni protok [m ³ /s] | 252 |
| Srednji protok [m ³ /s] | 11 |
| Medijan [m ³ /s] | 4.93 |
| Standardna devijacija [m ³ /s] | 18 |
| Q1 – 25% kvantil | 3 |
| Q3 – 75% kvantil | 11 |

Radimo s podacima veće postaje gdje je veličina slivne površine 97000 km² i prosječni protok 309 m³/s i druge manje postaje slivne površine svega 1200 km² i prosječnog protoka 11 m³/s. Kasnije možemo usporediti metodu Srebreновиća kako se ponaša na području većih i manjih slivova. U nastavku na slikama 13 i 14 dane su krivulje trajanja protoka obje vodomjerne postaje iz kojih možemo iščitati protok 10%-tnog trajanja koji će nam kasnije koristiti kod metode Srebreновиća.



Slika 13 Krivulja trajanja protoka VS Zagreb (1926. – 2022.)



Slika 14 Krivulja trajanja protoka VS Kupljenovo (1964. – 2022.)

Rezultati Pettit testa

Pettit test proveden je za 3 različita vremenska niza čiji su rezultati dani u tablici 5 za Zagreb i u tablici 6 za Kupljenovo.

Tablica 5 Rezultati Pettit testa za VS Zagreb

| Niz | Točka loma | p-vrijednost |
|-----------|-------------|--------------|
| 1926-2022 | 3.7.1981. | 2.20E-16 |
| 1975-2022 | 25.6.1988. | 2.20E-16 |
| 1983-2022 | 21.10.2003. | 1.45e-07 |

Tablica 6 Rezultati Pettit testa za VS Kupljenovo

| Niz | Točka loma | p-vrijednost |
|-----------|-------------|--------------|
| 1964-2022 | 7.5.1988. | 2.20E-16 |
| 1975-2022 | 7.5.1988. | 2.20E-16 |
| 1983-2022 | 26.10.2012. | 2.20E-16 |

Rezultati Kolmogorov-Smirnov testa

Kolmogorov-Smirnov test proveden je za ista 3 vremenska niza kao i Pettit test. Rezultati su prikazani u tablicama 7 i 8.

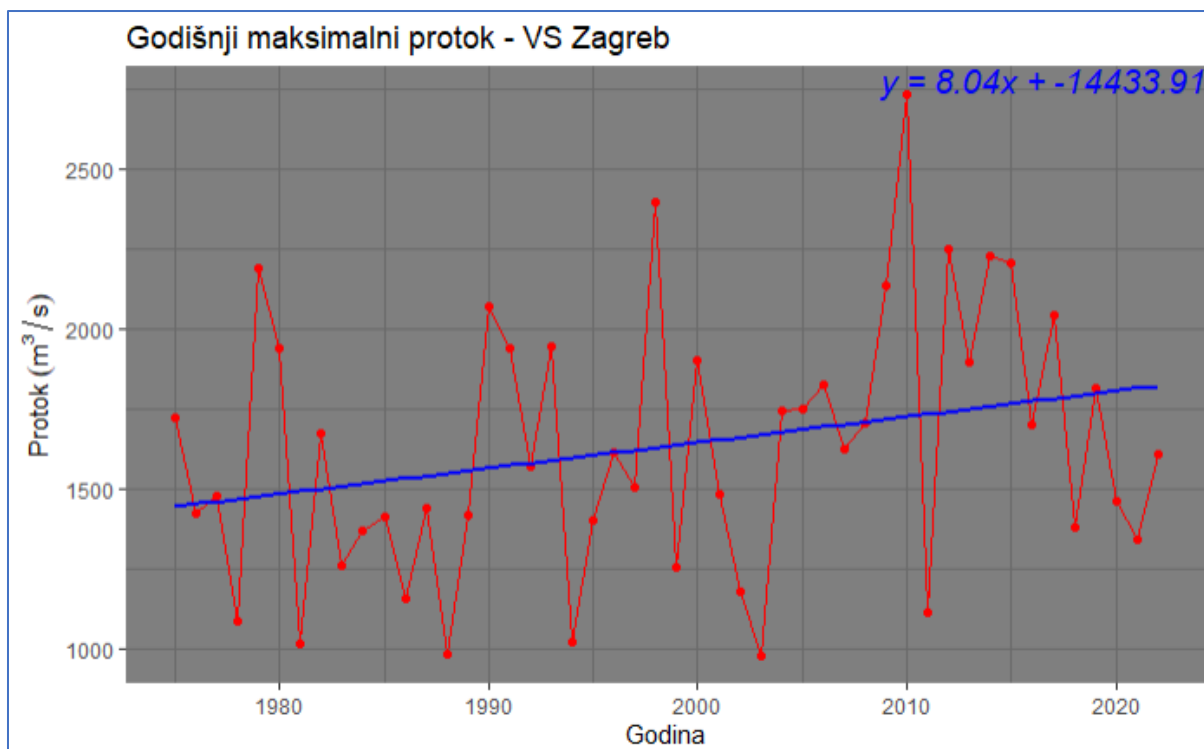
Tablica 7 Rezultati Kolmogorov-Smirnov testa za VS Zagreb

| Niz | D - vrijednost | p-vrijednost |
|-----------|----------------|--------------|
| 1926-2022 | 0.16847 | 2.20E-16 |
| 1975-2022 | 0.16873 | 2.20E-16 |
| 1983-2022 | 0.17390 | 2.20E-16 |

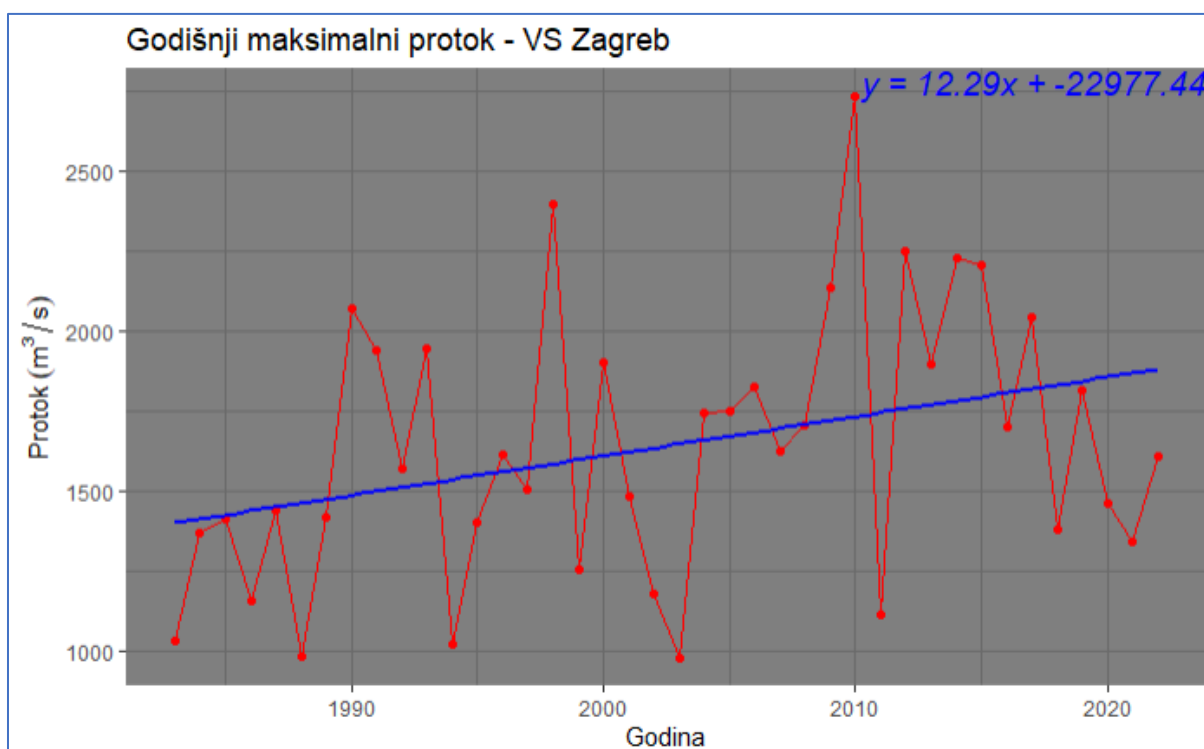
Tablica 8 Rezultati Kolmogorov-Smirnov testa za VS Kupljenovo

| Niz | D - vrijednost | p-vrijednost |
|-----------|----------------|--------------|
| 1964-2022 | 0.27467 | 2.20E-16 |
| 1975-2022 | 0.27566 | 2.20E-16 |
| 1983-2022 | 0.27903 | 2.20E-16 |

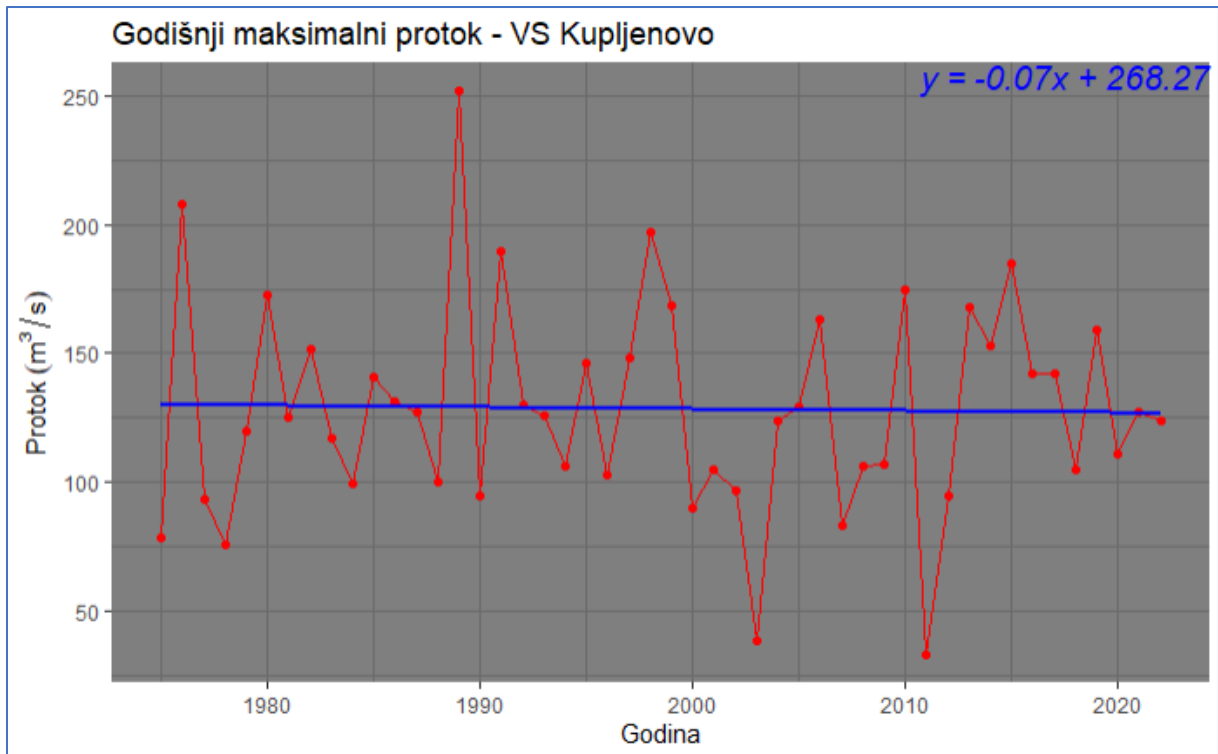
U pravilu bi p-vrijednost trebala biti veća od 0.05 kako bi se odbacila hipoteza da podaci nisu homogeni. S obzirom na rezultate ne možemo zaključiti kako su odabrani vremenski nizovi homogeni. U ovom slučaju postoji mogućnost da bi se homogenost pokazala na nekom manjem nizu u trajanju od 5 ili 10 godina, što nama ne pomaže s obzirom da želimo iskoristiti niz od minimalno 30 godina. Na temelju historijata postaja napravit ćemo detaljnu analizu niza od 1975. godine do 2022. (gdje uzimamo u obzir izgradnju sustava obrane od poplava Srednje Posavlje) i detaljnu analizu niza od 1983. do 2022. godine (gdje uzimamo u obzir rekonstrukciju postaje na Savi). Kasnije ćemo usporediti rezultate te vidjeti eventualne promjene i odstupanja u brojevima. U nastavku, na slikama 15-18, dani su godišnji maksimumi pojedinog niza sa trend linijama i njihovim jednadžbama. Na podacima postaje Zagreb možemo vidjeti kako postoji uzlazni trend tijekom godina, tj. vrijednost podataka povećava se tijekom vremena. Koeficijent nagiba iznosi 8.04 za podniz od 1975. do 2022., a za podniz od 1983. do 2022. godine iznosi 12.29. Na podacima postaje Kupljenovo ne postoji značajan trend što znači da su podaci prilično stabilni tijekom vremena, tj. stacionarni su. Treba napomenuti kako trend može utjecati na pouzdanost rezultata. U ovom radu se nisu radile analize podataka na kojima je uklonjen trend.



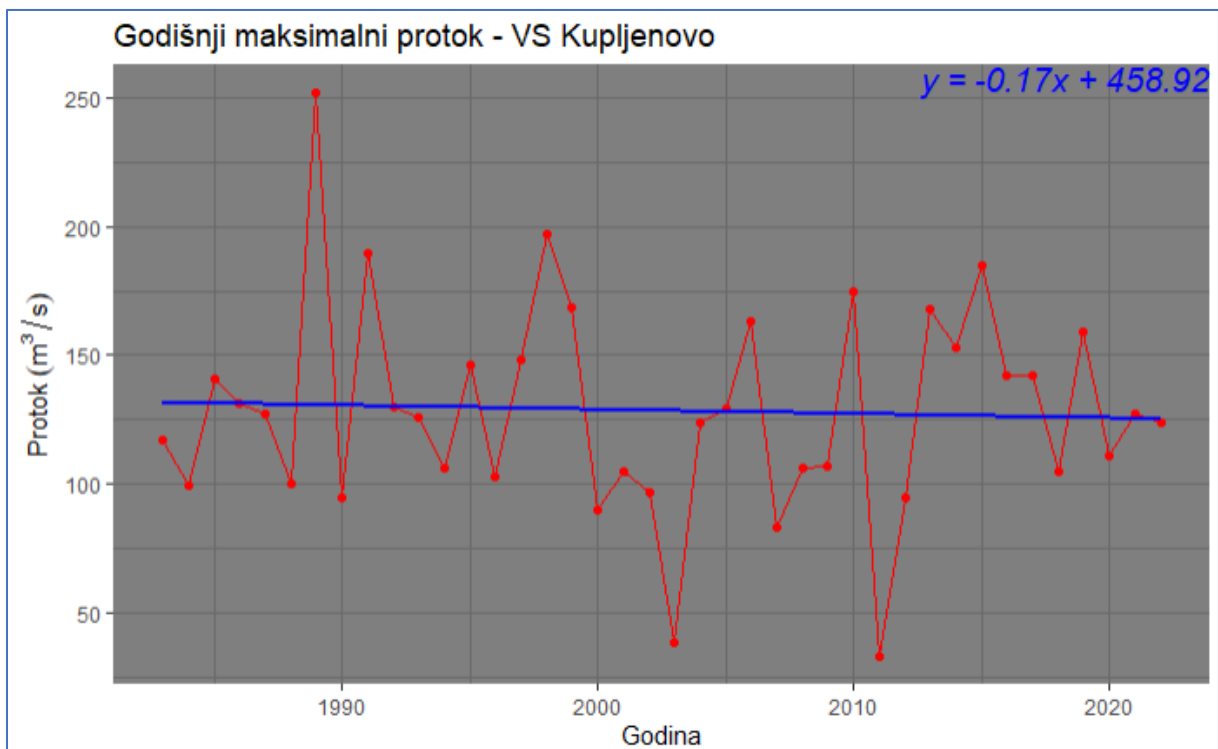
Slika 15 Godišnji maksimalni protoci od 1975. do 2022. godine na VS Zagreb



Slika 16 Godišnji maksimalni protoci od 1983. do 2022. godine na VS Zagreb



Slika 17 Godišnji maksimalni protoci od 1975. do 2022. godine na VS Kupljenovo



Slika 18 Godišnji maksimalni protoci od 1983. do 2022. godine na VS Kupljenovo

4.2. Vjerojatnost pojave velikih voda

4.2.1. Testovi prikladnosti teorijske funkcije raspodjele

Provedena su dva statistička testa, Anderson-Darling i Kolmogorov-Smirnov (u tablicama u zagradi označene sa AD i KS). Rezultati testova prikazani u tablicama 9-14 su pokazatelji koja distribucija najbolje opisuje naše podatke i prema kojoj možemo najrealnije predvidjeti protoke za 100 i 1000 godina. Testovi su provedeni za cijeli niz podataka te za 2 podniza odabrana u poglavlju 2.2.3.

Tablica 1 Rezultati statističkih testova VS Zagreb (1926. – 2022.)

| Distribucija | Statistika | p – vrijednost (AD) | Distribucija | Statistika | p – vrijednost (KS) |
|--------------|------------|---------------------|--------------|------------|---------------------|
| Gumbel | 0.5525 | 0.6935 | Gumbel | 0.0665 | 0.7590 |
| GEV | 0.6091 | 0.6390 | GEV | 0.0605 | 0.8485 |
| Log-normal | 0.3420 | 0.9033 | Log-normal | 0.0574 | 0.8883 |

Tablica 2 Rezultati statističkih testova VS Kupljenovo (1926. – 2022.)

| Distribucija | Statistika | p – vrijednost (AD) | Distribucija | Statistika | p – vrijednost (KS) |
|--------------|------------|---------------------|--------------|------------|---------------------|
| Gumbel | 0.7597 | 0.5105 | Gumbel | 0.0909 | 0.6807 |
| GEV | 0.7598 | 0.5103 | GEV | 0.0767 | 0.8515 |
| Log-normal | 0.8590 | 0.4398 | Log-normal | 0.0944 | 0.6349 |

Tablica 3 Rezultati statističkih testova VS Zagreb (1975. – 2022.)

| Distribucija | Statistika | p – vrijednost (AD) | Distribucija | Statistika | p – vrijednost (KS) |
|--------------|------------|---------------------|--------------|------------|---------------------|
| Gumbel | 0.324 | 0.919 | Gumbel | 0.067 | 0.971 |
| GEV | 0.344 | 0.902 | GEV | 0.065 | 0.979 |
| Log-normal | 0.244 | 0.973 | Log-normal | 0.056 | 0.995 |

Tablica 4 Rezultati statističkih testova VS Kupljenovo (1975. – 2022.)

| Distribucija | Statistika | p – vrijednost (AD) | Distribucija | Statistika | p – vrijednost (KS) |
|--------------|------------|---------------------|--------------|------------|---------------------|
| Gumbel | 0.748 | 0.529 | Gumbel | 0.105 | 0.626 |
| GEV | 0.732 | 0.532 | GEV | 0.086 | 0.833 |
| Log-normal | 0.907 | 0.410 | Log-normal | 0.114 | 0.514 |

Tablica 5 Rezultati statističkih testova VS Zagreb (1983. – 2022.)

| Distribucija | Statistika | p – vrijednost (AD) | Distribucija | Statistika | p – vrijednost (KS) |
|--------------|------------|---------------------|--------------|------------|---------------------|
| Gumbel | 0.211 | 0.987 | Gumbel | 0.066 | 0.989 |
| GEV | 0.221 | 0.983 | GEV | 0.058 | 0.997 |
| Log-normal | 0.157 | 0.998 | Log-normal | 0.055 | 0.999 |

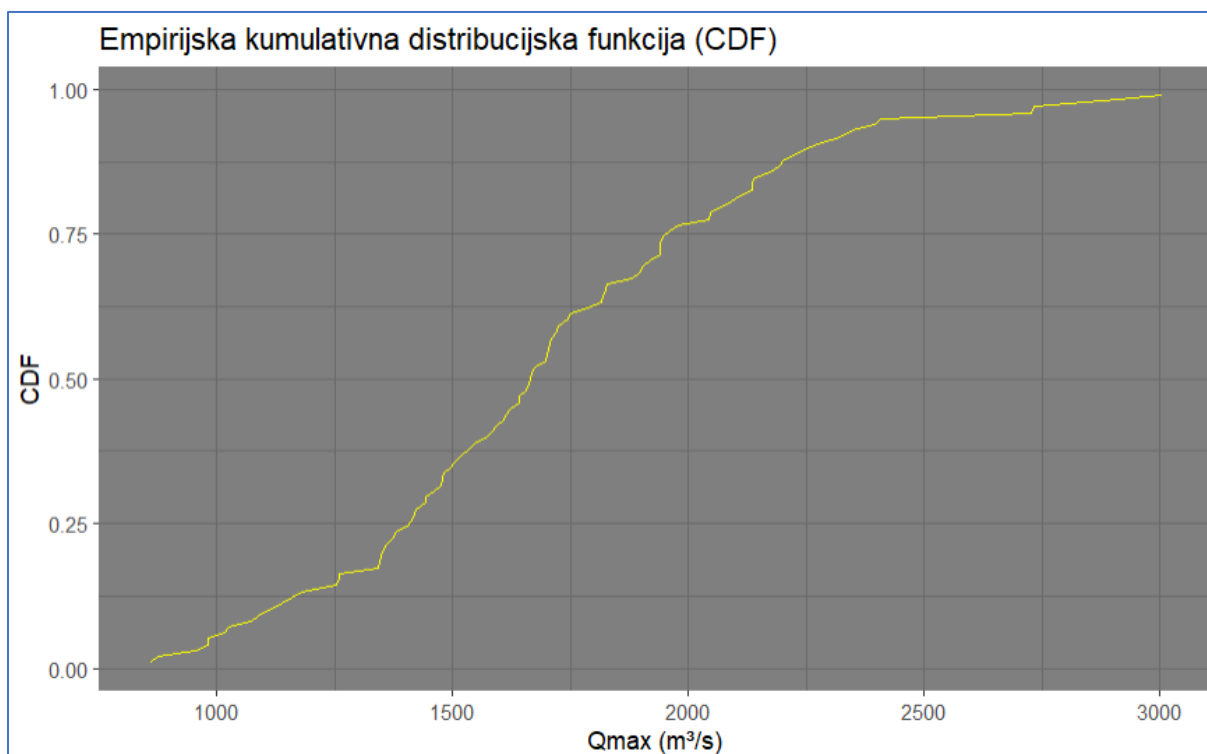
Tablica 6 Rezultati statističkih testova VS Kupljenovo (1983. – 2022.)

| Distribucija | Statistika | p – vrijednost (AD) | Distribucija | Statistika | p – vrijednost (KS) |
|--------------|------------|---------------------|--------------|------------|---------------------|
| Gumbel | 1.038 | 0.337 | Gumbel | 0.141 | 0.364 |
| GEV | 0.979 | 0.368 | GEV | 0.106 | 0.717 |
| Log-normal | 1.24 | 0.251 | Log-normal | 0.154 | 0.267 |

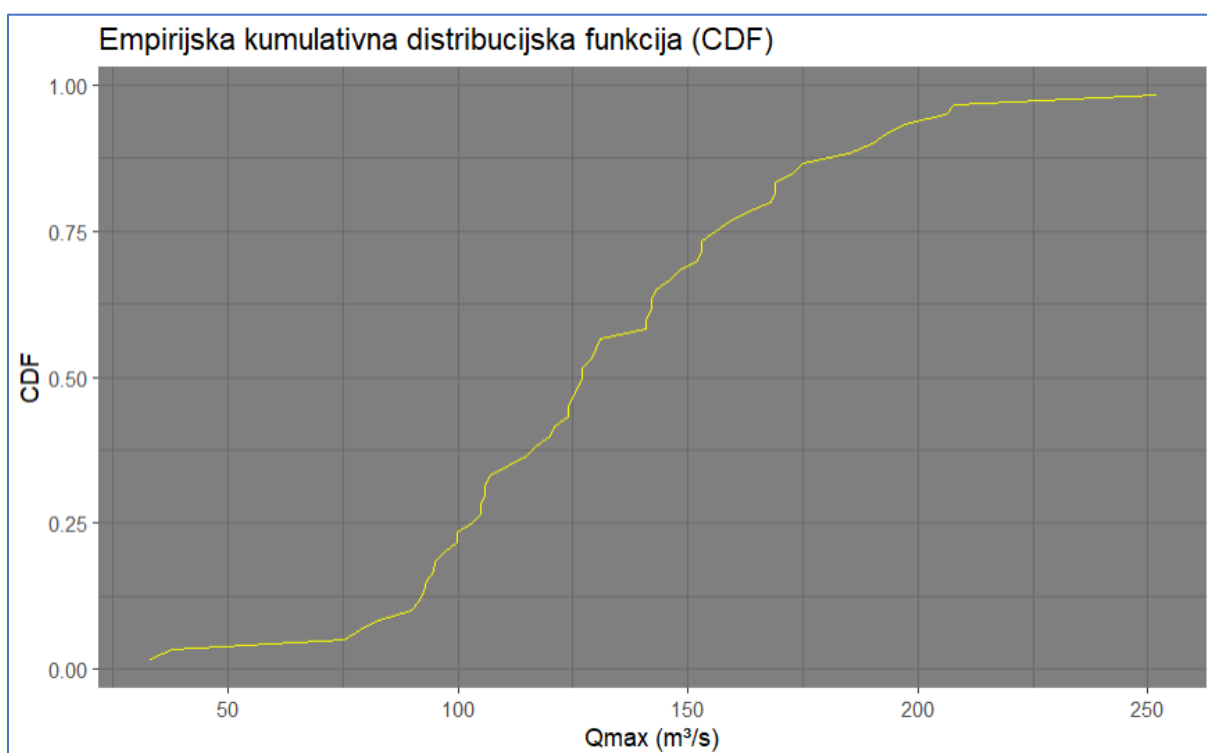
Iz tablice možemo vidjeti kako je vrijednost testa za Log-normalnu distribuciju 0.9, što je jako zadovoljavajući rezultat [10], [13].

Za podatke iz Zagreba, rezultati testova pokazuju kako funkcija koja najbolje opisuje podatke je Log-normalna u sva 3 niza. Kod postaje Kupljenovo nemamo baš tako idealnu situaciju te bi u budućim analizama trebalo još testirati neke druge distribucije (npr. Log-Pearson III). Rezultati testova prikazuju kako te podatke najbolje opisuje GEV distribucija.

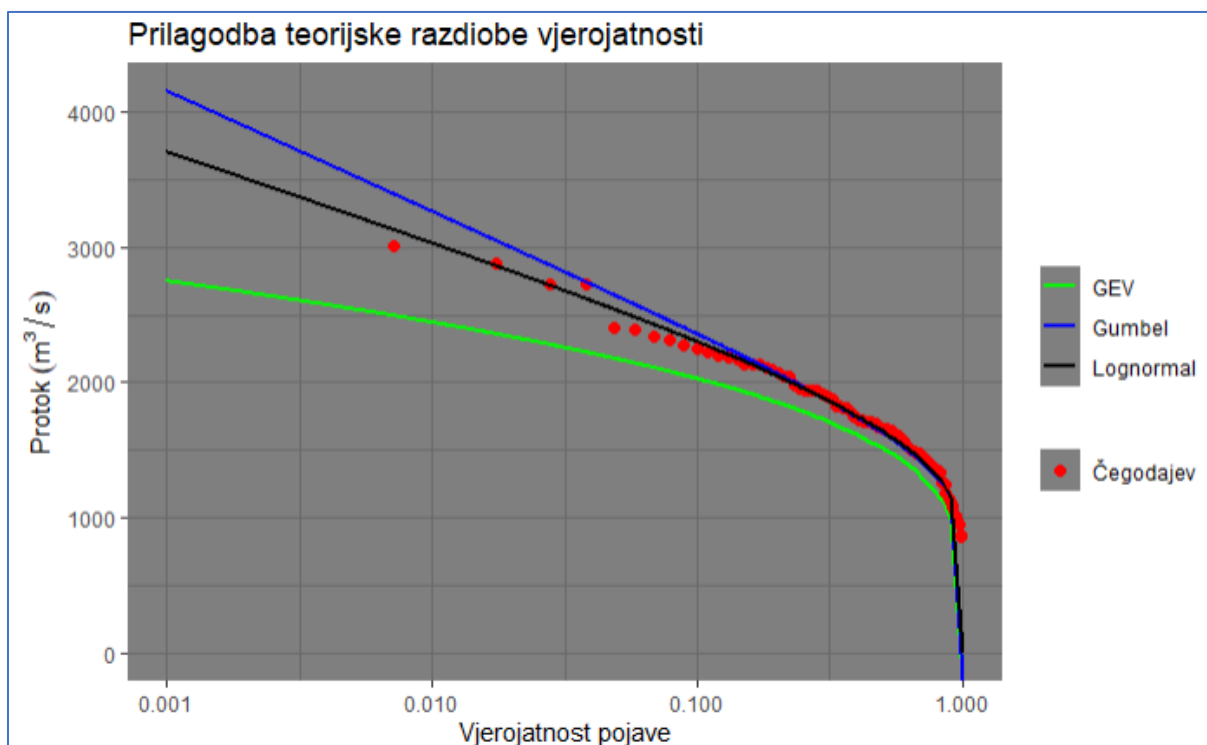
U nastavku na slikama 19 i 20 prikazane su empirijske kumulativne distribucijske funkcije za razdoblje od 1926. – 2022. Na slikama 21 i 22 prikazane su prilagodbe teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Čegodajev za VS Zagreb (1926. – 2022.) i za VS Kupljenovo (1964. – 2022.). Prilagodbe za podnizove dane su u prilogu 2. Prilikom usporedbe empirijskih vrijednosti (Hazen, Weibull i Čegodajev) možemo vidjeti kako ne postoje drastične razlike. Grafičke prikaze sa spomenutim empirijskim metodama nalaze u prilogima (slike P5 - P8). Na slikama 23 i 24, prikazane su prilagodbe teorijske raspodjele vjerojatnosti s povratnim razdobljem na x osi. Treba napomenuti kako su svi grafički prikazi spomenuti u ovom poglavlju izrađeni na temelju cijelog podatkovnog niza od 1926. - 2022. godine.



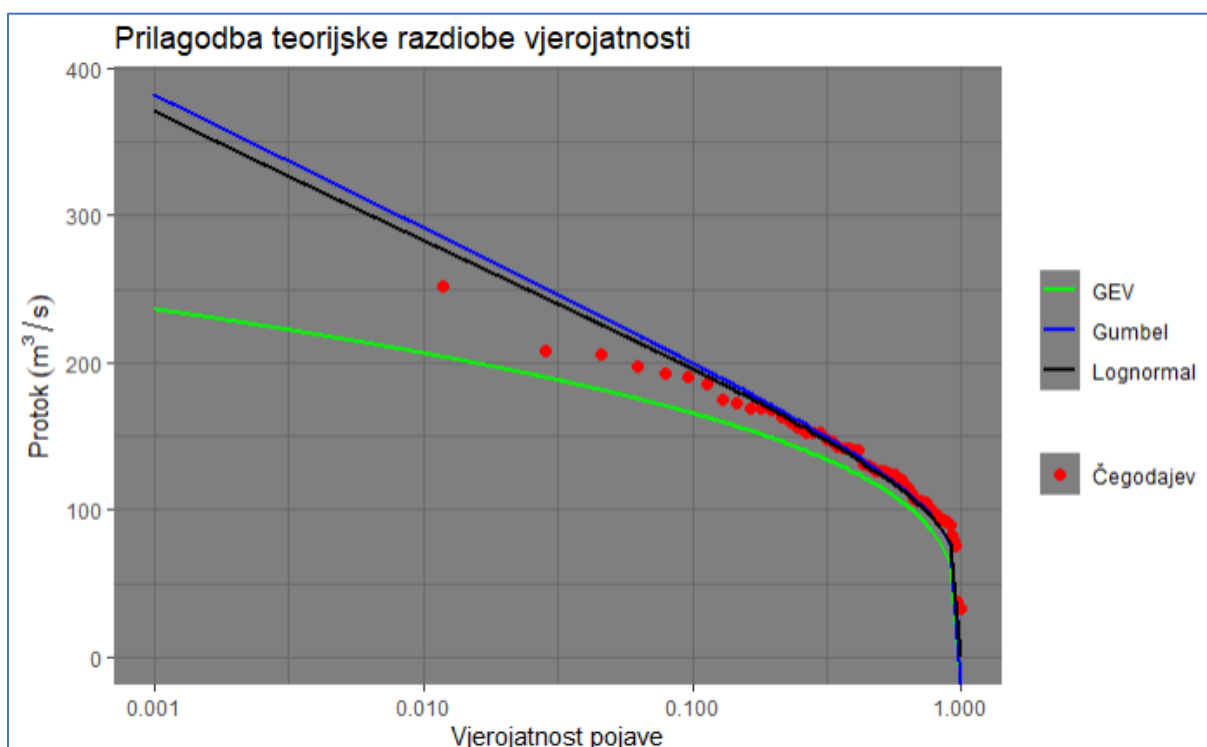
Slika 19 Grafički prikaz empirijske kumulativne distribucijske funkcije VS Zagreb (1926. – 2022.)



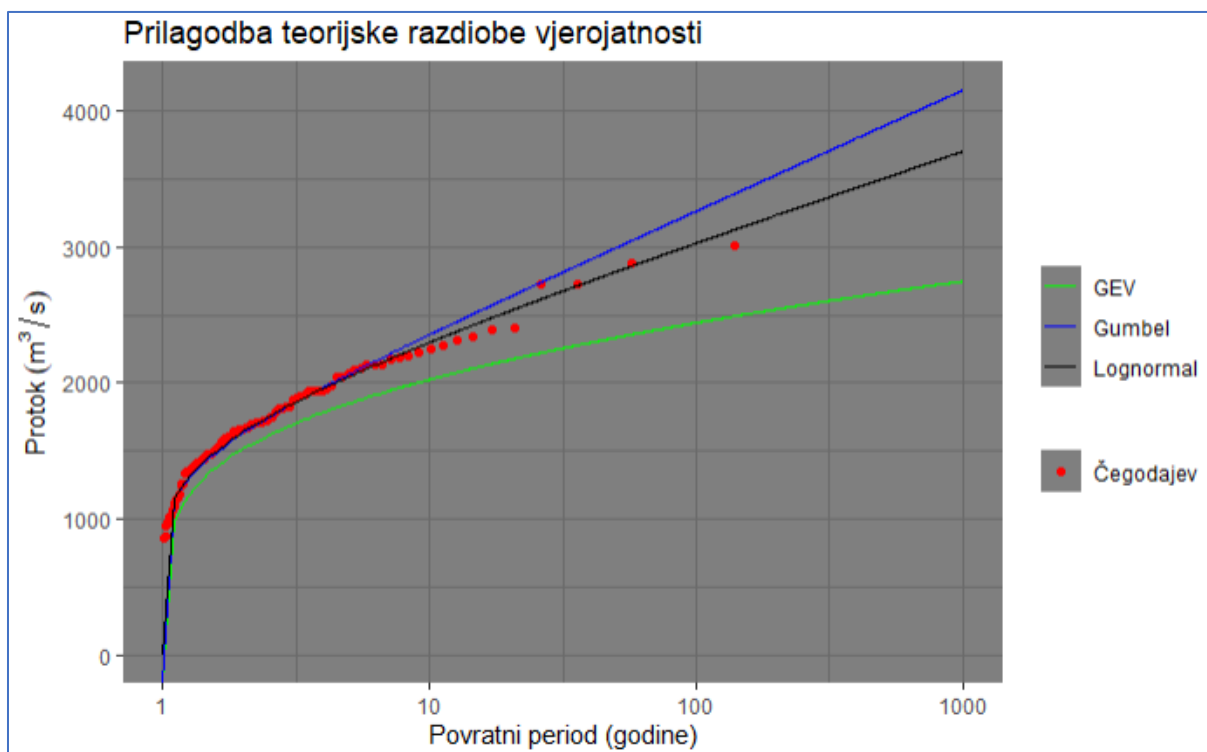
Slika 20 Grafički prikaz empirijske kumulativne distribucijske funkcije VS Kupljenovo (1964. – 2022.)



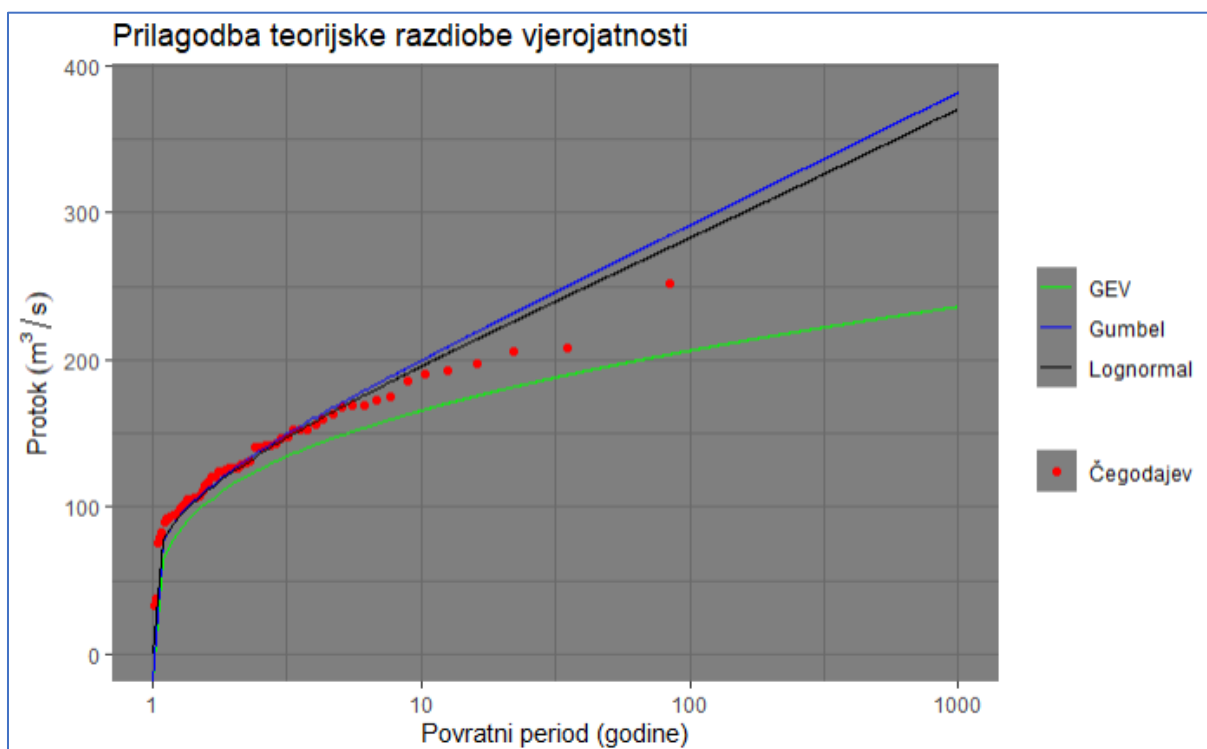
Slika 21 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Čegodajev - VS Zagreb (1926. – 2022.)



Slika 22 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Čegodajev - VS Kupljenovo (1964. – 2022.)



Slika 23 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Čegodajev i povratni period - VS Zagreb (1926. – 2022.)



Slika 24 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Čegodajev i povratni period - VS Kupljenovo (1964. – 2022.)

4.2.2. Izbor najbolje teorijske funkcije raspodjele

Nakon provedenih statističkih testova, možemo zaključiti kako je za naše podatke iz Zagreba najprikladnija funkcija raspodjele Log-normalna, a za podatke iz Kupljenova je to distribucija GEV. U tablici 13 i 14 prikazani su protoci očitani prema odabranim teorijskim funkcijama raspodjele za karakteristična povratna razdoblja.

Tablica 15 Očitani protoci za karakteristična povratna razdoblja VS Zagreb

| 1926.-2022. | | 1975.-2022. | | 1983.-2022. | |
|-------------|-----------------|-------------|-----------------|-------------|-----------------|
| Log-normal | | Log-normal | | Log-normal | |
| PR | Q _{PR} | PR | Q _{PR} | PR | Q _{PR} |
| | m3/s | | m3/s | | m3/s |
| 1000 | 3703 | 1000 | 3415 | 1000 | 3433 |
| 100 | 3028 | 100 | 2825 | 100 | 2842 |
| 50 | 2818 | 50 | 2640 | 50 | 2656 |
| 25 | 2602 | 25 | 2448 | 25 | 2464 |
| 20 | 2531 | 20 | 2385 | 20 | 2401 |
| 10 | 2300 | 10 | 2179 | 10 | 2194 |
| 5 | 2048 | 5 | 1953 | 5 | 1968 |

Tablica 16 Očitani protoci za karakteristična povratna razdoblja VS Kupljenovo

| 1926.-2022. | | 1975.-2022. | | 1983.-2022. | |
|-------------|-----------------|-------------|-----------------|-------------|-----------------|
| GEV | | GEV | | GEV | |
| PR | Q _{PR} | PR | Q _{PR} | PR | Q _{PR} |
| | m3/s | | m3/s | | m3/s |
| 1000 | 236 | 1000 | 233 | 1000 | 234 |
| 100 | 206 | 100 | 204 | 100 | 204 |
| 50 | 196 | 50 | 193 | 50 | 194 |
| 25 | 184 | 25 | 181 | 25 | 181 |
| 20 | 180 | 20 | 177 | 20 | 177 |
| 10 | 165 | 10 | 163 | 10 | 163 |
| 5 | 148 | 5 | 145 | 5 | 146 |

Navedene vrijednosti koriste se prilikom proračuna sintetičkog hidrograma prema metodi Srebrenovića.

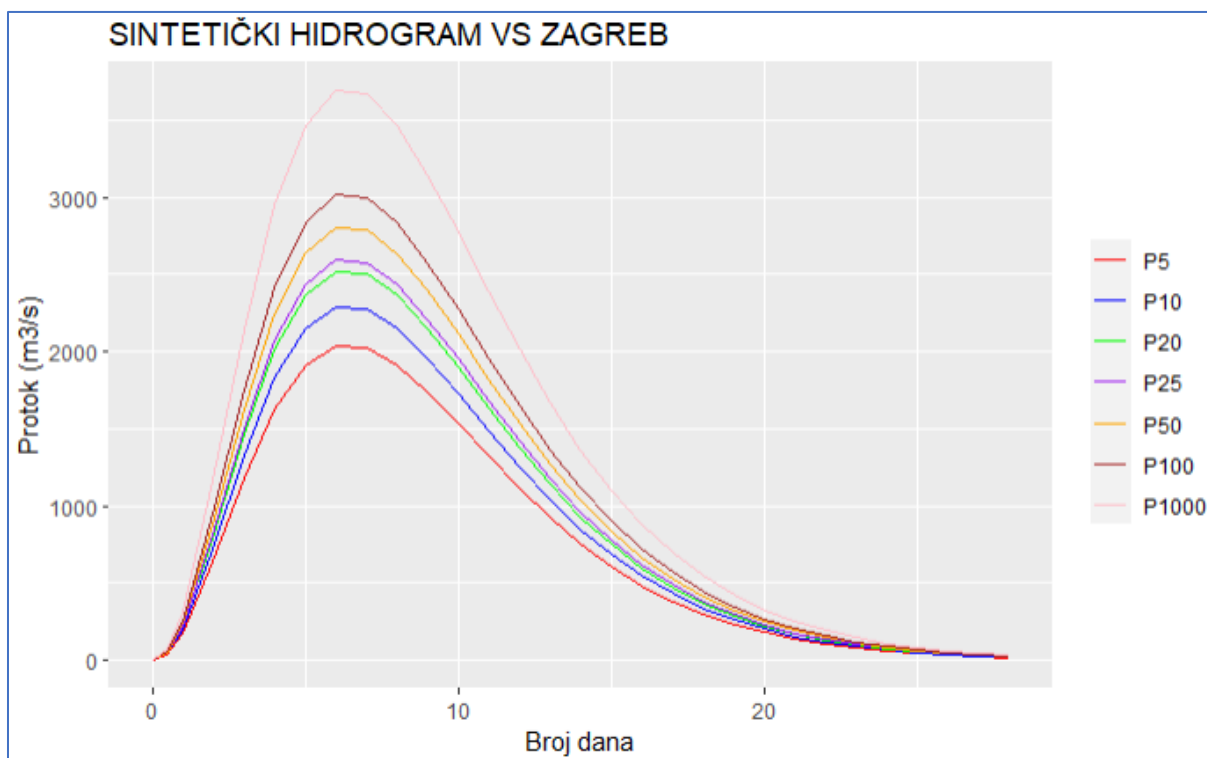
4.3. Proračun projektnog sintetičkog hidrograma metodom Srebrenovića

U ovom poglavlju će se navesti koraci u proračunu sintetičkog projektnog hidrograma pomoću metode Srebrenovića koji je rađen uz pomoć programskog jezika R.

1. Izvlačenje godišnjih maksimuma iz niza podataka pomoću metode godišnjih ekstrema
2. Određivanje baznog protoka – prema metodi, bazni protok je jednak 10%-tnom protoku iz krivulje trajanja
3. Definiranje valova – početak vala je prva točka lijevo od maksimuma gdje je direktno otjecanje jednako nuli, kraj vala je ista točka s desne strane
4. Volumeni valova – izračunati pomoću AUC (Area under the curve) funkcije u R studiju, funkcija koja računa površinu ispod funkcije
5. Pretvoriti volumene u m^3 (množene su vrijednosti s 86400 kako bismo dobili mjernu jedinicu m^3)
6. Odrediti vrijeme podizanja valova – broj dana od početka vala do maksimuma
7. Izračunati koeficijent „ φ “ – koeficijent φ je omjer između baznog i maksimalnog protoka
8. Izračunati koeficijent „ m “ – prema formuli (2.7)
9. Očitati protoke za karakteristična povratna razdoblja s teorijske funkcije distribucije
10. Prikazati podatke grafički – sintetički hidrogram za povratna razdoblja od 5, 10, 20, 50, 100 i 1000 godina
11. Prokomentirati dobivene rezultate

4.3.1. Sintetički projektni hidrogram za cijeli podatkovni niz (1926. – 2022.) – VS Zagreb

Nakon svih provedenih analiza, dolazimo do glavnog dijela. U nastavku na slici 25, možemo vidjeti sintetički hidrogram koji je zapravo bio cilj ovog rada. Prikazani hidrogram napravljen je od svih podataka koje smo imali za Zagreb. Ne možemo reći da je on mjerodavan s obzirom da smo vidjeli kako niz nije homogen i ne zadovoljava početne uvjete. Dijagram je prikazan radi usporedbe i kako bismo mogli procijeniti koliko varira od hidrograma napravljenih od podnizova.



Slika 25 Sintetički hidrogram VS Zagreb (1926. – 2022.)

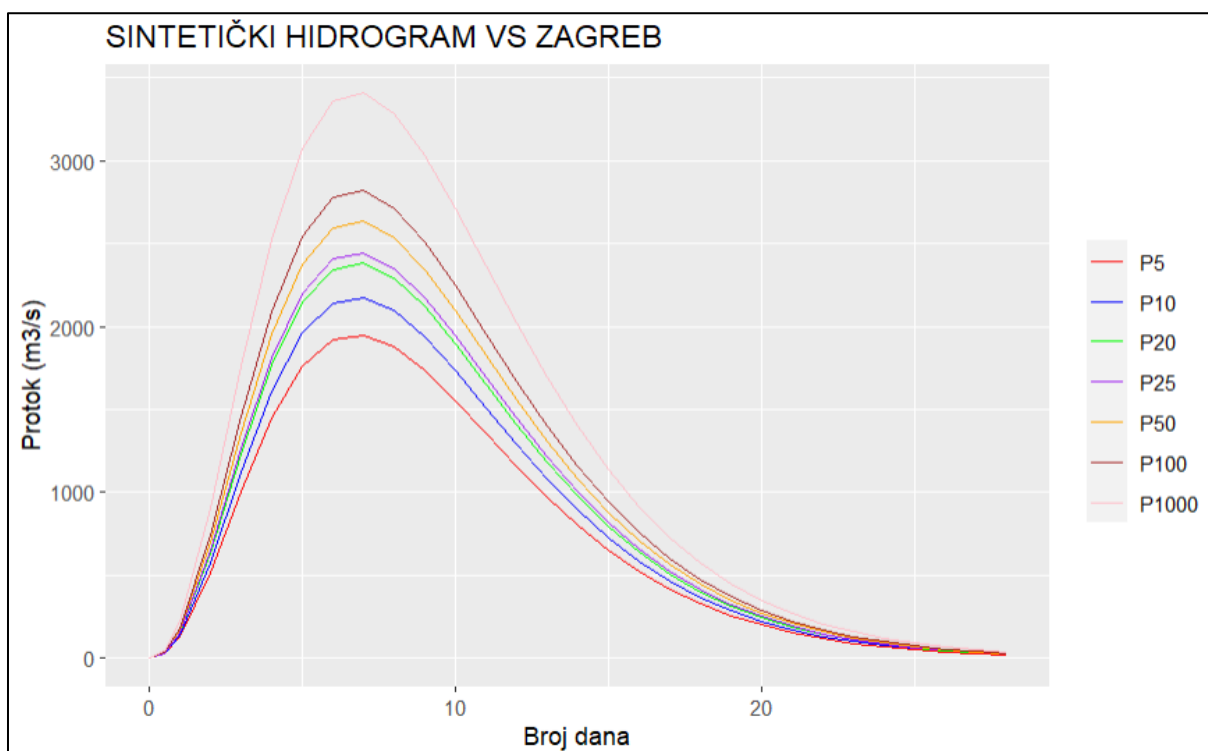
Iz priloženog prikaza možemo vidjeti kako je prosječno vrijeme podizanja vodnog vala 6 dana. Prosječni koeficijent oblika hidrograma iznosi 2.44. U tablici 17 u nastavku dani su očitani protoci za pojedino povratno razdoblje. U ovom slučaju, protok 10%-tnog trajanja iznosi $613\text{m}^3/\text{s}$ koji je ujedno odabran kao Q_b , odnosno bazni protok.

Tablica 17 Maksimalni protoci za karakteristična povratna razdoblja VS Zagreb (1926. – 2022.)

| PR [godina] | Q [m^3/s] | Volumen [10^8m^3] |
|-------------|-----------------------------|-------------------------------|
| 1000 | 3090 | 2.92 |
| 100 | 2415 | 2.39 |
| 50 | 2206 | 2.22 |
| 25 | 1989 | 2.05 |
| 20 | 1918 | 2.00 |
| 10 | 1687 | 1.82 |
| 5 | 1435 | 1.62 |

4.3.2. Sintetički projektni hidrogram za podniz 1975. – 2022. – VS Zagreb

Napravljena je analiza za protoke mjerene od 1975. do 2022. godine, kako bi se uzeo u obzir događaj izgradnje sustava obrane od poplava Srednjeg Posavlja. Na temelju tih podataka dobiven je, na slici 26, sintetički hidrogram za povratna razdoblja od 5, 10, 20, 25, 50, 100 i 1000 godina. Prosječni koeficijent oblika vodnog vala na ovoj analizi VS Zagreb iznosi 2.6 s prosječnim vremenom podizanja vodnog vala od 6.75. Protok 10%-tnog trajanja u ovom slučaju iznosi 575 m³/s koji je ujedno odabran kao Q_b, odnosno bazni protok.



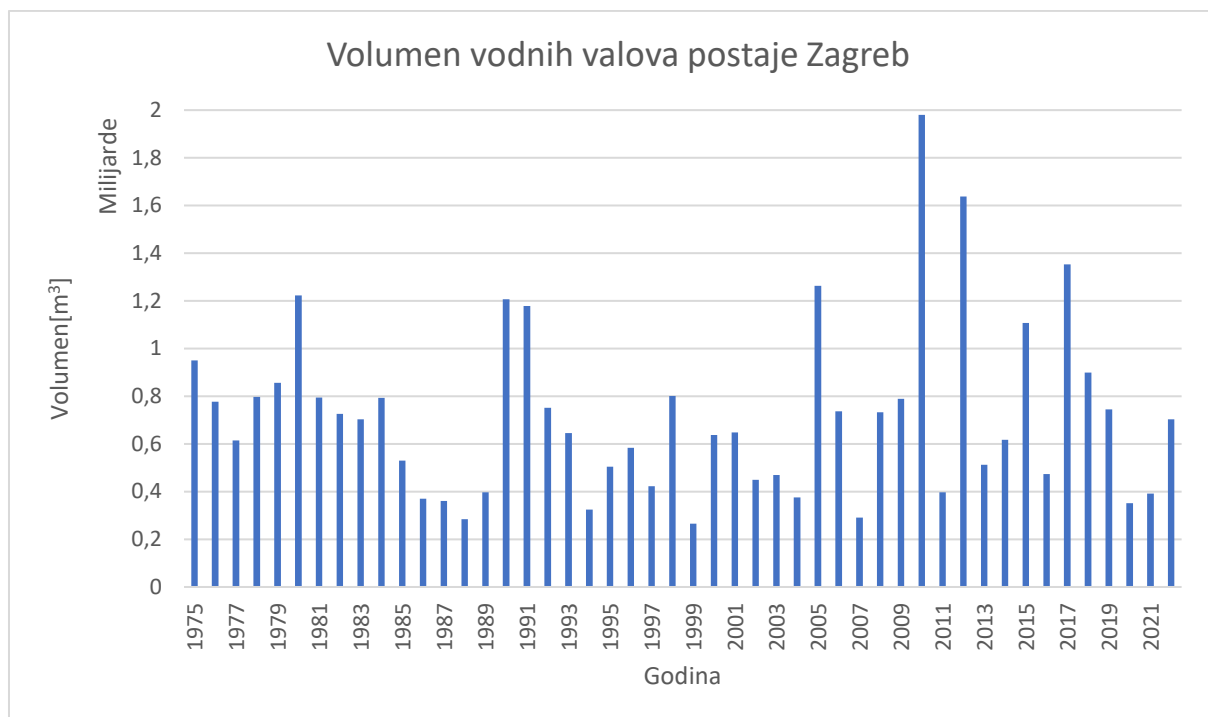
Slika 26 Sintetički hidrogram VS Zagreb (1975. - 2022.)

U tablici 18 prikazane su karakteristične vrijednosti protoka za pojedino povratno razdoblje.

Tablica 18 Maksimalni protoci za karakteristična povratna razdoblja na postaji Zagreb (1975. - 2022.)

| PR [godina] | Q [m ³ /s] | Volumen [10 ⁸ m ³] |
|----------------|--------------------------|--|
| 1000 | 2840 | 2.67 |
| 100 | 2250 | 2.09 |
| 50 | 2065 | 1.91 |
| 25 | 1873 | 1.72 |
| 20 | 1810 | 1.66 |
| 10 | 1604 | 1.46 |
| 5 | 1378 | 1.24 |

Također su prikazani, na slici 27, volumeni vodnih valova u m³ kroz godine.

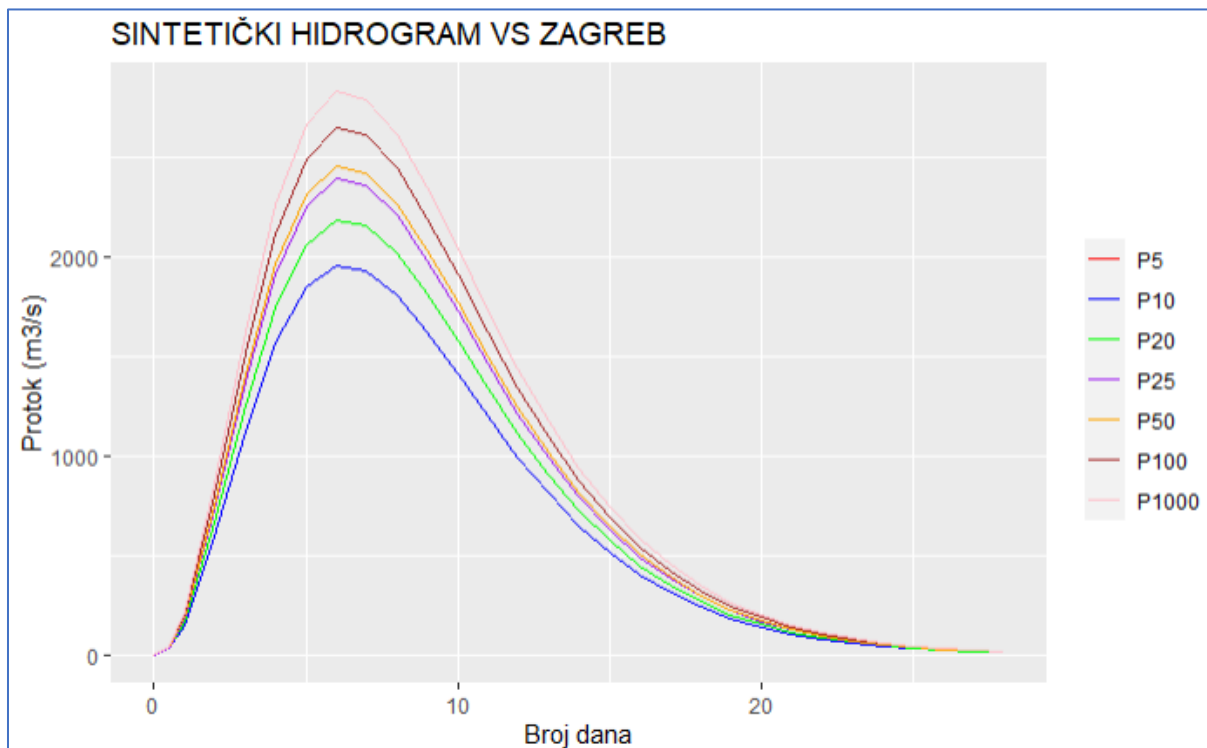


Slika 27 Volumeni vodnih valova tijekom godina 1975. - 2022. - VS Zagreb

Prikazani volumeni vodnih valova određeni su na način kako je opisano u poglavlju 3.5.

4.3.3. Sintetički projektni hidrogram za podniz 1983. – 2022. – VS Zagreb

Sljedeća analiza je za podatkovni niz od 1983. do 2022. godine. Vremenski niz je odabran na način da se uzme u obzir utjecaj rekonstrukcije vodomjerne postaje na Savi. Na slici 28 prikazan je sintetički hidrogram spomenutog niza.

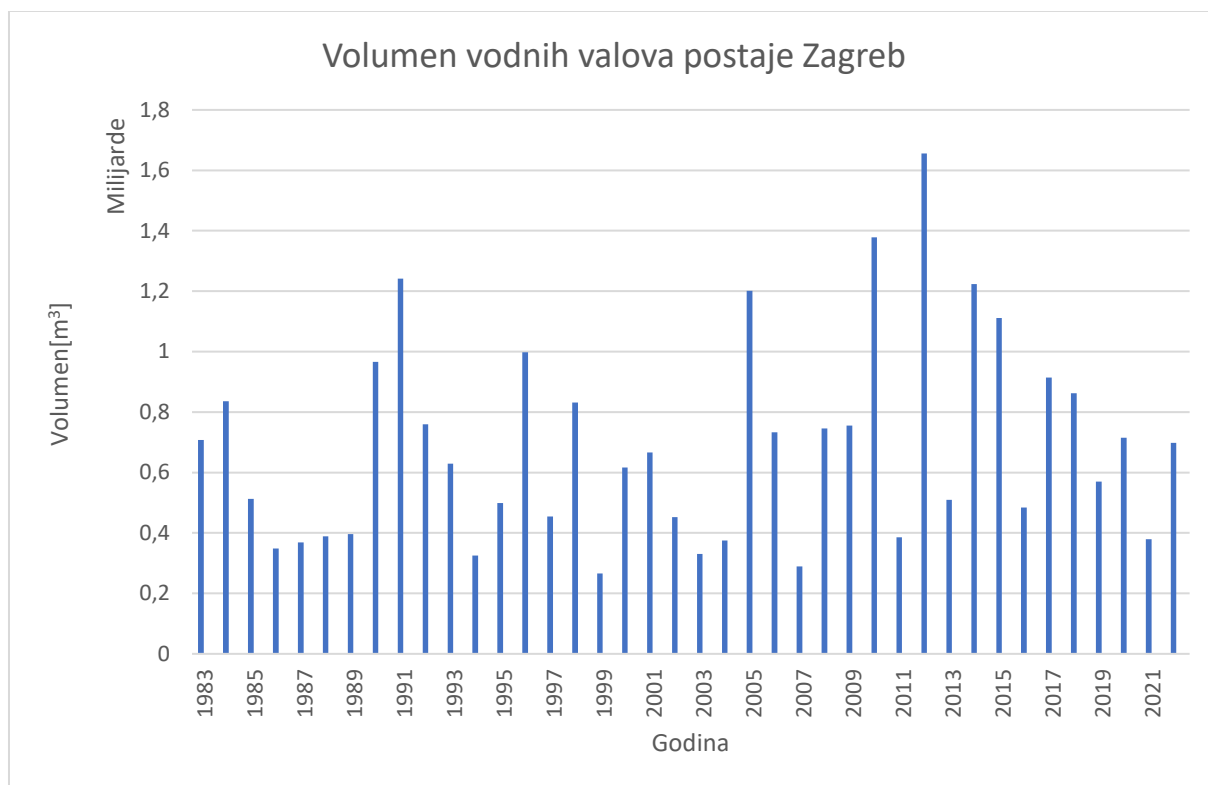


Slika 28 Sintetički hidrogram VS Zagreb (1983. – 2022.)

Za ovaj podatkovni niz, prosječna vrijednost koeficijenta „m“, koji opisuje oblik hidrograma, iznosi 2.58. Prosječno vrijeme podizanja vodnog vala iznosi 6.3 dana. U tablici 19 prikazane su karakteristične vrijednosti protoka za pojedino povratno razdoblje. Također su prikazani, na slici 29, volumeni vodnih valova u m³ kroz godine.

Tablica 19 Maksimalni protoci za karakteristična povratna razdoblja na postaji Zagreb (1983. – 2022.)

| PR [godina] | Q [m ³ /s] | Volumen [10 ⁸ m ³] |
|----------------|--------------------------|--|
| 1000 | 2862 | 2.47 |
| 100 | 2271 | 1.96 |
| 50 | 2085 | 1.80 |
| 25 | 1893 | 1.64 |
| 20 | 1830 | 1.58 |
| 10 | 1623 | 1.40 |
| 5 | 1397 | 1.21 |

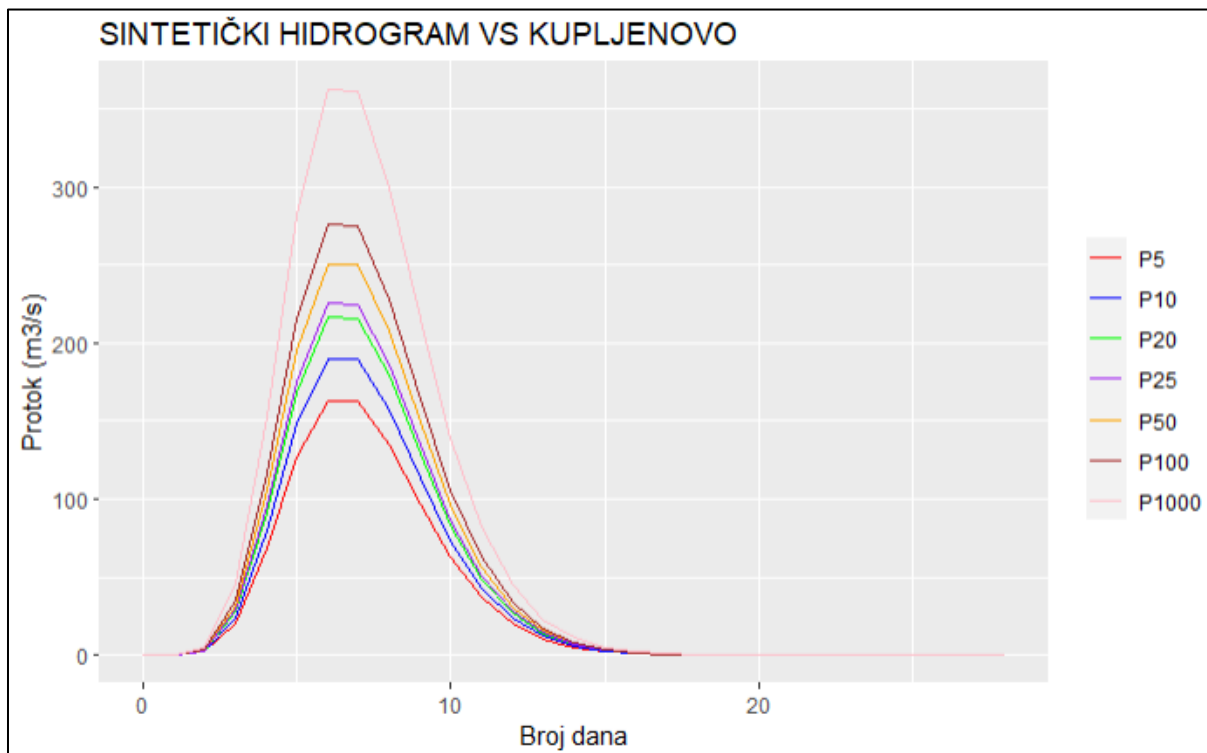


Slika 29 Volumeni vodnih valova tijekom godina 1983. - 2022. - VS Zagreb

Prikazani volumeni vodnih valova određeni su na način kako je opisano u poglavlju 4.3.

4.3.4. Sintetički projektni hidrogram za VS Kupljenovo (1964. – 2022.)

Isti postupak je napravljen za vodomjernu postaju Kupljenovo. Na slici 30, prikazan je sintetički hidrogram postaje Kupljenovo na rijeci Krapini za cijeli podatkovni niz (1964. - 2022.).



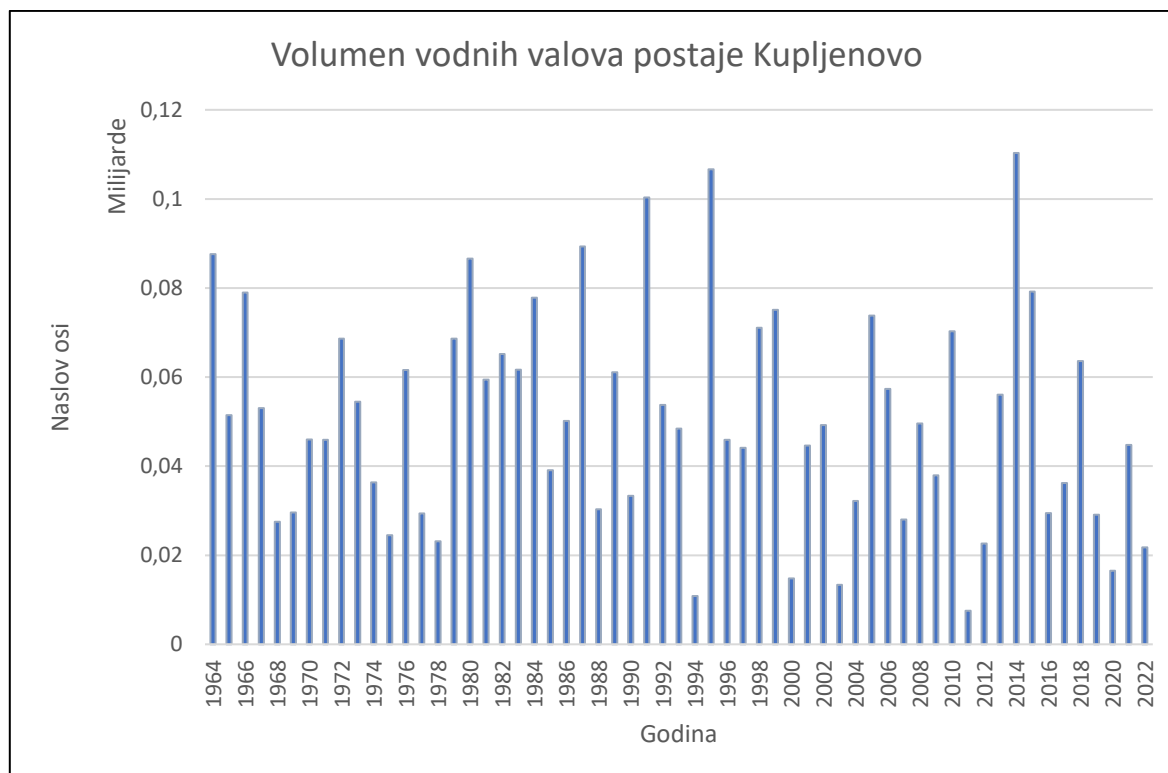
Slika 30 Sintetički hidrogram VS Kupljenovo (1964. – 2022.)

Iz priloženog prikaza možemo vidjeti kako je vrijeme podizanja vodnog vala 6 dana. Prosječni koeficijent oblika hidrograma iznosi 8.44. Navedena vrijednost ne spada u normalne vrijednosti ovog parametra s obzirom da se on kreće u rasponu između 1 i 6. Veličina sliva znatno utječe na oblik ovog hidrograma. U tablici 20 u nastavku dani su očitani protoci za pojedino povratno razdoblje. U ovom slučaju, protok 10%-tnog trajanja iznosi $26.1 \text{ m}^3/\text{s}$ koji je ujedno odabran kao Q_b , odnosno bazni protok.

Tablica 20 Maksimalni protoci za karakteristična povratna razdoblja na postaji Kupljenovo (1964. – 2022.)

| PR [godina] | Q [m^3/s] | Volumen [10^7 m^3] |
|-------------|-----------------------------|--------------------------------|
| 1000 | 345 | 1.52 |
| 100 | 257 | 1.16 |
| 50 | 231 | 1.06 |
| 25 | 205 | 0.95 |
| 20 | 196 | 0.91 |
| 10 | 169 | 0.80 |
| 5 | 141 | 0.69 |

Također su prikazani, na slici 31, volumeni vodnih valova u m³ kroz godine.

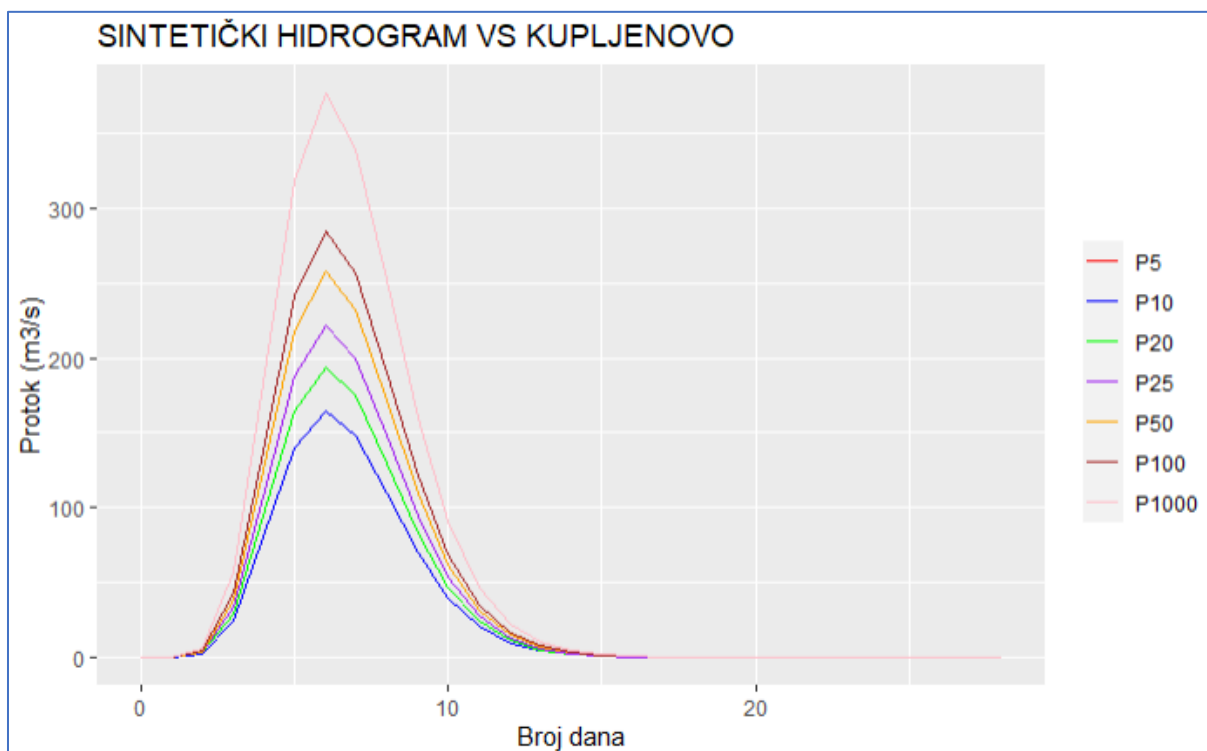


Slika 31 Volumeni vodnih valova tijekom godina 1964. - 2022. - VS Kupljenovo

Prikazani volumeni vodnih valova određeni su na način kako je opisano u poglavlju 3.5.

4.3.5. Sintetički projektni hidrogram za podniz od 1975. – 2022. – VS Kupljenovo

Sintetički hidrogram za karakteristična povratna razdoblja vodomjerne postaje Kupljenovo dan je u nastavku na slici 32.



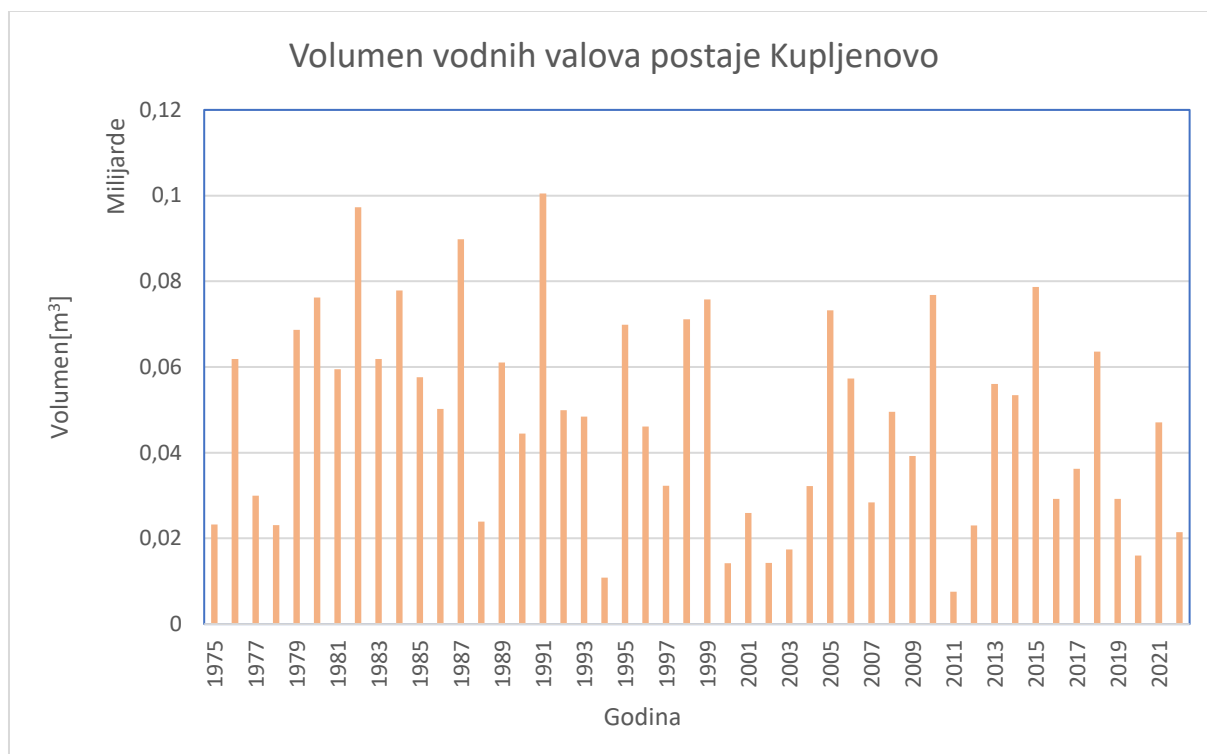
Slika 32 Sintetički hidrogram VS Kupljenovo (1975. – 2022.)

Kada pogledamo hidrogram Save i Krapine možemo uočiti velike razlike. Prvenstveno u bazama hidrograma, a zatim i u samom obliku. Kod VS Kupljenovo je baza hidrograma znatno manja te iznosi oko 13 dana dok kod Zagreba iznosi preko 25 dana. Što se tiče samog oblika hidrograma, u ovom slučaju je koeficijent „m“ preko 6, a prosječno vrijeme podizanja vala iznosi 6 i pol dana. Protok 10%-tnog trajanja u ovom slučaju iznosi 25 m³/s. U tablici 20 u nastavku dani su očitani protoci za pojedino povratno razdoblje.

Tablica 21 Maksimalni protoci za karakteristična povratna razdoblja na postaji Kupljenovo (1975. – 2022.)

| PR [godina] | Q [m³/s] | Volumen [10 ⁷ m³] |
|-------------|----------|------------------------------|
| 1000 | 352 | 1.40 |
| 100 | 260 | 1.06 |
| 50 | 232 | 0.96 |
| 25 | 205 | 0.85 |
| 20 | 197 | 0.83 |
| 10 | 169 | 0.72 |
| 5 | 140 | 0.61 |

Na slici 33 prikazani su volumeni vodnih valova od 1975. godine do 2022.

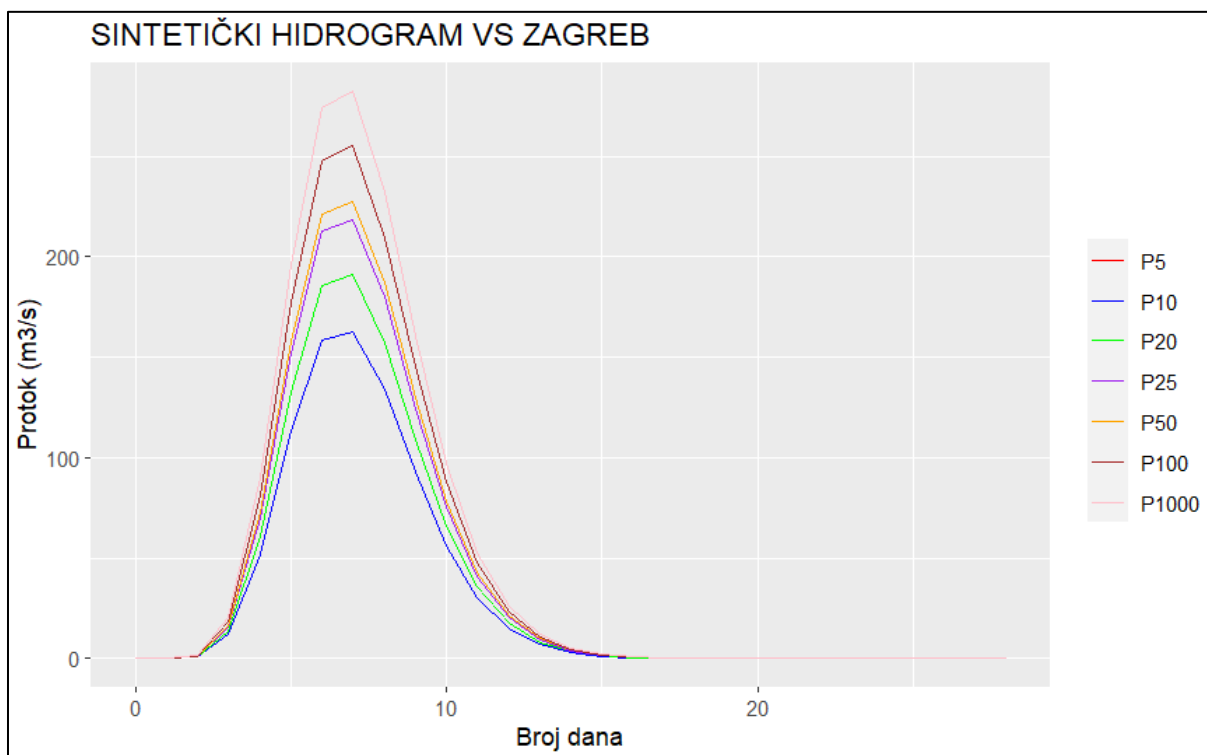


Slika 33 Iznos volumena vodnih valova tijekom godina 1975. – 2022. – VS Kupljenovo

Prikazani volumeni vodnih valova određeni su na način kako je opisano u poglavlju 3.5.

4.3.6. Sintetički projektni hidrogram za podniz od 1983. – 2022. – VS Kupljenovo

Posljednji podniz koji analiziramo jest za razdoblje od 1983. – 2022. za postaju Kupljenovo. Na slici 34 prikazan je sintetički hidrogram za navedeni podniz.



Slika 34 Sintetički hidrogram VS Kupljenovo (1983. – 2022.)

U ovom slučaju je prosječno vrijeme podizanja vodnog vala 6.5 dana. Prosječni koeficijent oblika hidrograma jest 11, što se može vidjeti i po slici 33. Sintetički hidrogram je nepravilnog oblika i nema glatke linije. Kod analize nizova u Zagrebu možemo vidjeti hidrograme s koeficijentima oblika unutar prihvatljivog raspona (1-6), dok kod Kupljenova ti koeficijenti se penju do 11. U tablici 22 u nastavku dani su očitani protoci za pojedino povratno razdoblje.

Tablica 22 Maksimalni protoci za karakteristična povratna razdoblja na postaji Kupljenovo (1983. – 2022.)

| PR [godina] | Q [m ³ /s] | Volumen [10 ⁷ m ³] |
|-------------|-----------------------|---|
| 1000 | 358 | 1.44 |
| 100 | 264 | 1.09 |
| 50 | 236 | 0.98 |
| 25 | 208 | 0.88 |
| 20 | 199 | 0.84 |
| 10 | 171 | 0.74 |
| 5 | 142 | 0.63 |

4.4. Usporedba s prethodnim studijama

ISTRAŽIVANJE VODOPRIVREDNO-PROJEKTOG BIRO-a - METODA DOBIVANJA SINTETIČKOG HIDROGRAMA

Vodoprivredni-projektni biro (VPB) je napravio studiju na temu „Sustav obrane od poplava srednje Posavlja i analiza visokovodnog režima Save“. U samom istraživanju koristila se metoda dobivanja sintetičkog hidrograma koja se temelji isključivo na zabilježenim pojavama velikih voda. Metoda se temelji na metodi Srebrenovića uz određene nadogradnje i modifikacije [4], [5].

Proračun maksimalnog protoka se provodi po sljedećoj formuli:

$$Q_{\max P} = 0.45 * F^{0.78} * S^{0.15} * H * e^{0.6 * f * (1 + 0.4 \log P)} (1 + 1.25 \log P) \quad (3.8)$$

Oblik vodnog vala se računa po sljedećoj formuli:

$$Q_t = (Q_{\max P} - Q_0) * (t / \tau)^{m(1 - (t / \tau))} + Q_0, \quad (3.9)$$

koji odgovara Pearsonovoj distribuciji IV – tog tipa.

Značenje varijabli je sljedeće:

$Q_{\max P}$ – maksimalni protok zadanog povratnog perioda P – m³/s

F – površina sliva – km²

S – pad sliva - %

H – prosječna godišnja oborina na slivu – m

f – odnos površine pod kršom i ukupne slivne površine

P – povratni period – godine

Q_t – protok – ordinate hidrograma u vremenu 't' - m^3/s

Q_0 – protok trajanja 90% - m^3/s

t – vrijeme – sati

τ – vrijeme koncentracije, vrijeme formiranja maksimuma vodnog vala – sati

m – bezdimenzionalni parameter, pokazatelj spljoštenja vodnog vala

Na temelju ovih izraza izračunati su poznati protoci Save u Zagrebu:

$$Q_{100} = 3650 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{1000} = 4270 \text{ m}^3/\text{s}$$

U njihovom istraživanju korišten je prvenstveno niz od 1975. do 2010. godine, čime je uzeto u obzir izgradnja preljeva Jankomir i kanala Odra. Objekt koji ima najveći utjecaj na redukciju velikih voda od svih ostalih.

4.4.1. Usporedba rezultata teorijskih funkcija raspodjele vjerojatnosti

Dobivene rezultati uspoređujemo s projektom kojeg je izradio Vodoprivredno-projektni biro d.d. Naziv projekta je Sustav obrane od poplava srednjeg Posavlja, analiza visokovodnog režima Save. Treba napomenuti kako nisu korišteni isti nizovi podataka, ali obrađivane su iste postaje na rijeci Savi. Na sljedećem prikazu (tablica 23) možemo vidjeti usporedbu vrijednosti vodomjerne stanice Zagreb, dobivenih pomoću Log-normal funkcije distribucije.

Tablica 23 Usporedba vrijednosti s VPB-ovim istraživanjem – VS Zagreb

| Log-normalna distribucija - rad | | | | Log-normal VPB (1975. do 2010.) | |
|---------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------------------|----------|
| PR | Q_{PR} (1926. - 2022.) | Q_{PR} (1975. - 2022.) | Q_{PR} (1983. - 2022.) | PR | Q_{PR} |
| | m^3/s | m^3/s | m^3/s | | m^3/s |
| 1000 | 3703 | 3415 | 3433 | 1000 | 3692 |
| 100 | 3028 | 2825 | 2842 | 100 | 3070 |
| 50 | 2818 | 2640 | 2656 | 50 | 2875 |
| 25 | 2602 | 2448 | 2464 | 25 | 2672 |
| 20 | 2531 | 2385 | 2401 | 20 | 2604 |
| 10 | 2300 | 2179 | 2194 | 10 | 2385 |
| 5 | 2048 | 1953 | 1968 | 5 | 2145 |

Iz tablice 24 možemo vidjeti kako naši rezultati analiza odstupaju od VPB-ovog istraživanja. Kao što smo rekli na početku, cijeli podatkovni niz nije mjerodavan s obzirom da ne pokazuje homogenost podataka i ne zadovoljava početne uvjete koje smo naveli prethodno. Dva podniza, koje smo analizirali, pokazuju dosta slične rezultate. Takav rezultat smo i očekivali jer razlika u podatkovnim nizovima nije velika. Kada bismo uzeli niz 1975. – 2022. i niz 1983. – 2022. kao mjerodavne, tada bi razlika u istraživanjima izgledala ovako:

Tablica 24 Razlika vrijednosti rada i VPB-ovog istraživanja – VS Zagreb

| PR | Log-normalna distribucija - rad | | Log-normal VPB (1975. do 2010.) | Razlika | |
|------|---------------------------------|--------------------------|---------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| | Q_{PR} (1975. - 2022.) | Q_{PR} (1983. - 2022.) | Q_{PR} | Q_{PR} (1975. - 2022.) | Q_{PR} (1983. - 2022.) |
| | m ³ /s | m ³ /s | m ³ /s | % | |
| 1000 | 3415 | 3433 | 3692 | 7,50 | 7,02% |
| 100 | 2825 | 2842 | 3070 | 7,98 | 7,43% |
| 50 | 2640 | 2656 | 2875 | 8,17 | 7,62% |
| 25 | 2448 | 2464 | 2672 | 8,38 | 7,78% |
| 20 | 2385 | 2401 | 2604 | 8,41% | 7,80% |
| 10 | 2179 | 2194 | 2385 | 8,64% | 8,01% |
| 5 | 1953 | 1968 | 2145 | 8,95% | 8,25% |

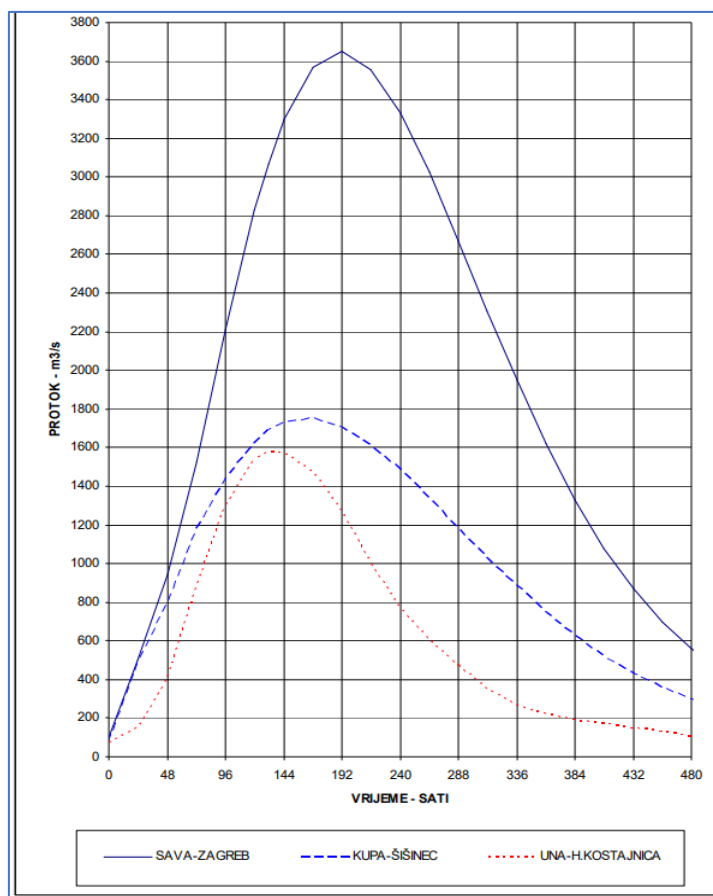
Razlike u protocima dobivenim pomoću Log-normal distribucije kreću se između 7 i 9%.

U nastavku na slici 35, prikazani su teorijski hidrogrami na ulaznim profilima sustava Srednje Posavlje koji su korišteni u sljedeća tri elaborata:

- Analiza režima velikih voda Save, 1975. g.
- Analiza čvora Strelečko, 1980. g.
- Identifikacija stupnja zaštite od poplava Srednjeg Posavlja u sadašnjem stanju izgrađenosti Sistema i analiza prioriternih radova, 1984. g.,

čiji je autor profesor Srebrenović [4], [5]. Konkretno nas zanima val Save koji je označen plavom bojom i povratnog je perioda 100 godina. Možemo iz grafikona vidjeti kako stogodišnji protok iznosi 3650 m³/s i vrijeme podizanja vodnog vala iznosi 8 dana dok u našem slučaju za podniz (1975. – 2022.) maksimalni protok iznosi 2250 m³/s s prosječnim vremenom podizanja vodnog vala od 6 dana. U VPB-ovom istraživanju postojala je pretpostavka da se isti povratni period istovremeno pojavljuje na cijeloj analiziranoj dionici Save. Spomenuta pretpostavka

prouzročila je, u modelskim analizama, povećano opterećenje te rezultate koji nadmašuju planske parametre.



Slika 35 Sintetički hidrogram iz projekta za PR = 100 godina [12]

Tablica 25 Usporedba vrijednosti s VPB-ovim istraživanjem za podniz (1975. – 2022.) – VS Kupljenovo

| PR | GEV - rad | Log3 (VPB) | Gumbel (VPB) | Log3 (VPB) | Gumbel (VPB) | Log3 (VPB) | Gumbel (VPB) |
|------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------|-------------------|------------|--------------|
| | Q_{PR} (1975. - 2022.) | Q_{PR} (1975. - 2022.) | Q_{PR} (1975. - 2022.) | Razlika | Razlika | Razlika | Razlika |
| | m ³ /s | m ³ /s | m ³ /s | m ³ /s | m ³ /s | % | % |
| 1000 | 383 | 375,50 | 351,30 | 7,5 | 31,70 | 1,96% | 8,28% |
| 100 | 293 | 283,40 | 276,60 | 9,6 | 16,40 | 3,28% | 5,60% |
| 50 | 265 | 257,80 | 254,00 | 7,2 | 11,00 | 2,72% | 4,15% |
| 25 | 238 | 232,90 | 231,20 | 5,1 | 6,80 | 2,14% | 2,86% |
| 20 | 229 | 224,90 | 223,90 | 4,1 | 5,10 | 1,79% | 2,23% |
| 10 | 201 | 200,40 | 200,60 | 0,6 | 0,40 | 0,30% | 0,20% |
| 5 | 171 | 175,40 | 176,30 | -4,4 | -5,30 | -2,57% | -3,10% |

Prilikom izrade ovog rada, najprikladnija distribucija za podatke vodomjerne postaje Kupljenovo pokazala se GEV distribucija. U VPB-ovom istraživanju, uzeta je Log-Pearson 3 (u nastavku Log3) distribucija kao najprikladnija, no prikazana je također i Gumbel-ova s obzirom da je GEV kombinacija 3 distribucije, uključujući i Gumbel. Možemo primijetiti kako je protok za PR = 1000 godina bliži njihovoj vrijednosti od Log3 nego Gumbel. U usporedbi s Log-normalnom distribucijom, razlike se kreću između 0,3 i 3,3%, a kod usporedbe s Gumbel distribucijom imamo razlike između 0 i 8%. Protoci za podniz od 1983. do 2022. godine su identični kao i protoci prikazani u tablici 21. Tablica se može smatrati mjerodavnom za oba podniza.

5. ZAKLJUČAK

U ovom diplomskom radu možemo vidjeti kako su obrada podataka, statistika i hidrologija usko povezane i ovaj rad je zapravo interdisciplinaran. Na temelju neobrađenih dnevnih podataka o protoku, određen je projektni sintetički hidrogram koji nadalje može biti baza za projektiranje određenih hidrotehničkih građevina i/ili kao ulazni podatak za hidrauličke modele na analiziranim lokacijama na rijeci Savi. Prilikom projektiranja određenih mjera za smanjenje rizika od poplava, također je potrebno poznavati maksimalne protoke i volumene kako bi što bolje procijenili kapacitet određenih elemenata sustava (retencije, ustave, preljevi, itd.).

Koristeći statistički niz maksimalnih godišnjih protoka i poznate empirijske vjerojatnosti pojavljivanja, odabrane su najprikladnije teorijske funkcije raspodjele vjerojatnosti za vodomjerne postaje Zagreb na rijeci Savi i Kupljenovo na rijeci Krapini. Općenito u praksi kod projektiranja, mjerodavne su ekstremne vrijednosti, najčešće maksimalni protok ili vodostaj. Upravo pomoću teorijskih funkcija distribucije raspodjele možemo najbliže predvidjeti vrijednosti za karakteristična povratna razdoblja od 50, 100 ili 1000 godina. Za određivanje oblika projektnog hidrograma korištena je metoda Srebrenovića u kojoj sa svega nekoliko parametara na jednostavan način, možemo dobiti oblike sintetičkih hidrograma. Sama metoda se pokazala efikasnom za sliv rijeke Save s obzirom da su naši rezultati veoma slični rezultatima prijašnjih studija s odstupanjima od 7 do 9% za VS Zagreb, te od 0 do 8,3% za VS Kupljenovo.

U današnje vrijeme u praksi treba odraditi posao na što brži i kvalitetniji način korištenjem informatičkih alata. Tijekom izrade ovog rada napisan je programski kod u R studiju s kojim se može u svega par koraka doći do određenih rezultata. Razvijeni kod vodi korisnika od sirovih podataka do izlaznih projektnih hidrograma. Gotovo svaki hidrotehnički projekt zahtjeva preliminarne analize i obradu ulaznih podataka, a to su upravo izlazni rezultati ovog rada.

POPIS LITERATURE

- [1] Dinarsko gorje. *Sliv rijeke Save* [Online] Dostupno: <https://www.dinarskogorje.com/sliv-rijeke-save.html>
- [2] International Sava river basin commission. *Sliv rijeke Save. Reljef i hidrografija* [Online]. Dostupno: <https://www.savacommission.org/o-nama-81/sliv-rijeke-save/reljef-i-hidrografija/2250>
- [3] Google maps. (2024.) *Zagreb* [Online]. Dostupno: <https://www.google.com/maps>
- [4] Vodoprivredno-projektni biro d.d., Knjiga 1, „Sustava obrane od poplava sr. Posavlja - Analiza visokovodnog režima Save“ Zagreb, 2005.
- [5] Vodoprivredno-projektni biro d.d., Knjiga 2, „Sustava obrane od poplava sr. Posavlja - Analiza visokovodnog režima Save“ Zagreb, 2005.
- [6] Kent State University Libraries (2024.) *Statistical and qualitative data analysis software: About R and Rstudio* [Online]. Dostupno: <https://libguides.library.kent.edu/statconsulting/r>
- [7] H. Hrelja, *Inženjerska hidrologija*. Fojnica: Štamparija Fojnica d.o.o.; 2007.
- [8] Zavod za hidrotehniku, Građevinski fakultet Zagreb. *Analize vremenskih serija* [Online]. Dostupno: http://www.grad.unizg.hr/predmet/hid_a
- [9] Conte, L. C., Bayer, D. M., & Bayer, F. M. (2019). Bootstrap Pettitt test for detecting change points in hydroclimatological data: case study od Itaipu Hydroelectric Plant, Brazil. *Hydrological Sciences Journal*, 64(11), 1312 - 1326.
Dostupno: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/02626667.2019.1632461#d1e517>
- [10] National Institute of Standards and Technology. *Kolmogorov-Smirnov Goodness-of-Fit Test* [Online].
Dostupno: <https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda35g.htm>
- [11] D. Frey. The Weibull Distribution and Parametar Estimation, *Mechanical Engineering and Engineering Systems* [Online]. Dostupno: <https://meche.mit.edu/>
- [12] V. Čuljak. (2011). „Teorijska distribucija“, Vjerojatnost i statistika, Građevinski fakultet, Zagreb [Online]. Dostupno: <https://www.grad.hr/vera/webnastava/vjerojatnostistatistika/vis-pdf.pdf>
- [13] Real Statistics. *One-Sample Anderson-Darling Test*. Dostupno: <https://real-statistics.com/non-parametric-tests/goodness-of-fit-tests/anderson-darling-test/>.
- [14] Yue, S., Ouarda, T.B.M.J., Bobée, B., Legendre, P., Bruneau, P., 2002. Approach for Describing Statistical Properties of Flood Hydrograph. *J. Hydrol. Eng.* 7, 147–153. Dostupno: [https://doi.org/10.1061/\(asce\)1084-0699\(2002\)7:2\(147\)](https://doi.org/10.1061/(asce)1084-0699(2002)7:2(147))

[15] N. Bezak, K. Lebar, M. Mikoš, S. Rusjan, M. Šraj. „Razvoj metodologije za proračun visokovodnih valova na osnovu ekstremnih kišnih događaja,“ Zavod za opću hidrotehniku, Fakultet u Ljubljani, Ljubljana, V2-2137, 2023.

[16] M. Lacko, K. Potočki, K.A. Škreb, N. Bezak. Joint Modelling of Flood Hydrograph Peak, Volume and Duration Using Copulas—Case Study of Sava and Drava River in Croatia, Europe. *Water* **2022**, *14*, 2481. Dostupno: <https://doi.org/10.3390/w14162481>

[17] M. Brunner, D. Viviroli, A. Sikorska, O. Vannier, A. Favre, J. Seibert. (2017.) „Flood type specific construction of synthetic design hydrographs“, *Water Resources Research*. Volume 53, issue 2, 1390-1406.

Dostupno: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/2016WR019535>

[18] Srebrenović D. *Problemi velikih voda*. Zagreb: Tehnička knjiga Zagreb, 1970.

[19] Srebrenović D. *Primijenjena hidrologija*. Zagreb: Tehnička knjiga Zagreb, 1986.

POPIS SLIKA

| | |
|---|----|
| Slika 1 Sliv rijeke Save [1] | 7 |
| Slika 2 Sliv rijeke Save – QGIS [2] | 8 |
| Slika 3 Vodomerne postaje Zagreb i Kupljenovo [3] | 9 |
| Slika 4 Shematski prikaz maksimalnih godišnjih protoka [7] | 11 |
| Slika 5 Primjer hidrograma po metodi TFH zajedno s razmatranjem intervala pouzdanosti [15] | 20 |
| Slika 6 Primjer projektnog hidrograma za VS Županja na rijeci Savi koji je izrađen na temelju izmjerenog AM hidrograma poplava iz 2014. godine [16] | 20 |
| Slika 7 Složenija metodologija za određivanje projektnih hidrograma [17] | 21 |
| Slika 8 Shematski prikaz metode jediničnog hidrograma [18] | 22 |
| Slika 9 Prikaz elemenata za proračun vodnog vala [19] | 23 |
| Slika 10 Izgled hidrograma prema vrijednosti koeficijenta "m" [18] | 24 |
| Slika 11 Grafički prikaz godišnjih maksimuma VS Zagreb (1926. - 2022.) | 28 |
| Slika 12 Grafički prikaz godišnjih maksimuma VS Kupljenovo (1964. - 2022.) | 29 |
| Slika 13 Krivulja trajanja protoka VS Zagreb (1926. - 2022.) | 30 |
| Slika 14 Krivulja trajanja protoka VS Kupljenovo (1964. - 2022.) | 31 |
| Slika 15 Godišnji maksimalni protoci od 1975. do 2022. na VS Zagreb..... | 34 |
| Slika 16 Godišnji maksimalni protoci od 1983. do 2022. na VS Zagreb..... | 34 |
| Slika 17 Godišnji maksimalni protoci od 1975. do 2022. na VS Kupljenovo..... | 35 |
| Slika 18 Godišnji maksimalni protoci od 1983. do 2022. na VS Kupljenovo | 35 |
| Slika 19 Grafički prikaz empirijske kumulativne distribucijske funkcije VS Zagreb (1926. - 2022.) | 38 |
| Slika 20 Grafički prikaz empirijske kumulativne distribucijske funkcije VS Kupljenovo (1964. - 2022.) | 38 |
| Slika 21 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Čegodajev - VS Zagreb (1926. - 2022.) | 39 |
| Slika 22 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Čegodajev - VS Kupljenovo (1964. - 2022.) | 39 |
| Slika 23 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Čegodajev i povratni period - VS Zagreb (1926. - 2022.) | 40 |

| | |
|---|----|
| Slika 24 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Čegodajev i povratni period - VS Kupljenovo (1964. - 2022.)..... | 40 |
| Slika 25 Sintetički hidrogram VS Zagreb (1926. - 2022.)..... | 43 |
| Slika 26 Sintetički hidrogram VS Zagreb (1975. - 2022.)..... | 44 |
| Slika 27 Volumeni vodnih valova tijekom godina 1975. -2022. - VS Zagreb..... | 45 |
| Slika 28 Sintetički hidrogram VS Zagreb (1983. - 2022.)..... | 46 |
| Slika 29 Volumeni vodnih valova tijekom godina 1983. - 2022. - VS Zagreb..... | 47 |
| Slika 30 Sintetički hidrogram VS Kupljenovo (1964. - 2022.)..... | 48 |
| Slika 31 Volumeni vodnih valova tijekom godina 1964. - 2022. - VS Kupljenovo..... | 49 |
| Slika 32 Sintetički hidrogram vodomjerne postaje Kupljenovo (1975. - 2022.)..... | 50 |
| Slika 33 Iznos volumena vodnih valova tijekom godina 1975. - 2022. - VS Kupljenovo..... | 51 |
| Slika 34 Sintetički hidrogram VS Kupljenovo (1983. - 2022.)..... | 52 |
| Slika 35 Sintetički hidrogram iz VPB projekta za PR = 100 godina [12]..... | 56 |

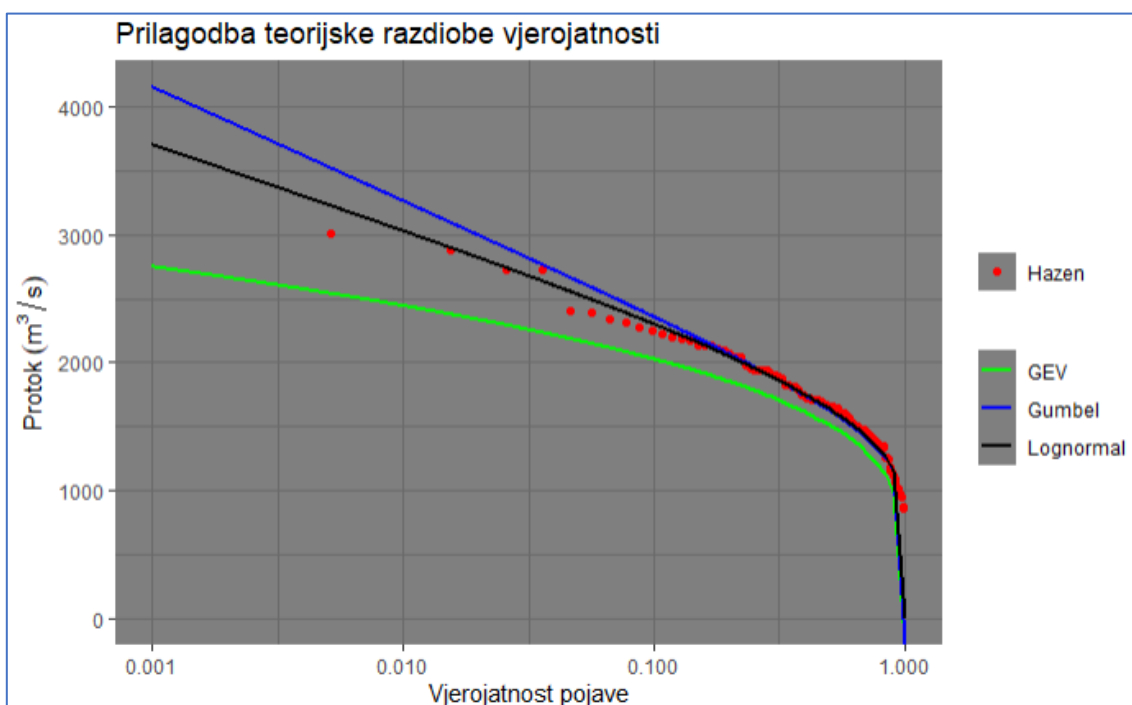
POPIS TABLICA

| | |
|---|----|
| Tablica 1 Tablični prikaz godišnjih maksimuma za VS Zagreb (1926. - 2022.) | 26 |
| Tablica 2 Tablični prikaz godišnjih maksimuma za VS Kupljenovo (1964. - 2022.) | 27 |
| Tablica 3 Karakteristične vrijednosti protoka za VS Zagreb (1926. - 2022.) | 29 |
| Tablica 4 Karakteristične vrijednosti protoka za VS Kupljenovo (1964. - 2022.) | 30 |
| Tablica 5 Rezultati Pettit testa za VS Zagreb | 32 |
| Tablica 6 Rezultati Pettit testa za VS Kupljenovo | 32 |
| Tablica 7 Rezultati Kolmogorov-Smirnov testa za VS Zagreb..... | 32 |
| Tablica 8 Rezultati Kolmogorov Smirnov testa za VS Kupljenovo..... | 32 |
| Tablica 9 Rezultati statističkih testova VS Zagreb (1926. - 2022.)..... | 36 |
| Tablica 10 Rezultati statističkih testova VS Kupljenovo (1964. - 2022.)..... | 36 |
| Tablica 11 Rezultati statističkih testova VS Zagreb (1975. - 2022.)..... | 36 |
| Tablica 12 Rezultati statističkih testova VS Kupljenovo (1975. - 2022.)..... | 37 |
| Tablica 13 Rezultati statističkih testova VS Zagreb (1983. - 2022.)..... | 37 |
| Tablica 14 Rezultati statističkih testova VS Kupljenovo (1983. - 2022.) | 37 |
| Tablica 15 Očitani protoci za karakteristična povratna razdoblja VS Zagreb..... | 41 |
| Tablica 16 Očitani protoci za karakteristična povratna razdoblja VS Kupljenovo..... | 41 |
| Tablica 17 Maksimalni protoci za karakteristična PR VS Zagreb (1926. – 2022.) | 43 |
| Tablica 18 Maksimalni protoci za karakteristična PR VS Zagreb (1975. – 2022.) | 44 |
| Tablica 19 Maksimalni protoci za karakteristična PR VS Zagreb (1983. – 2022.) | 46 |
| Tablica 20 Maksimalni protoci za karakteristična PR VS Kupljenovo (1964. – 2022.) | 48 |
| Tablica 21 Maksimalni protoci za karakteristična PR VS Kupljenovo (1975. – 2022.) | 50 |
| Tablica 22 Maksimalni protoci za karakteristična PR VS Kupljenovo (1983. – 2022.) | 53 |
| Tablica 23 Usporedba vrijednosti s VPB-ovim istraživanjem za VS Zagreb..... | 54 |
| Tablica 24 Razlika vrijednosti rada i VPB-ovog istraživanja – VS Zagreb | 55 |
| Tablica 25 Usporedba vrijednosti s VPB-ovim istraživanjem za VS Kupljenovo..... | 56 |

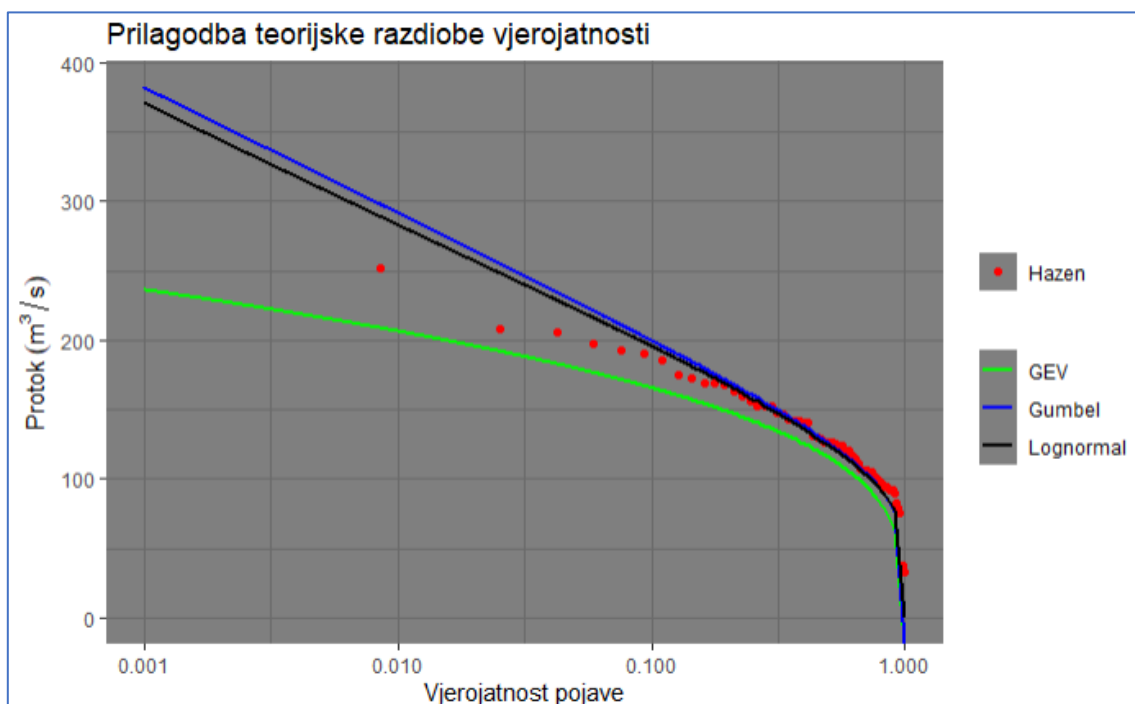
PRILOZI

Sadržaj priloga A.

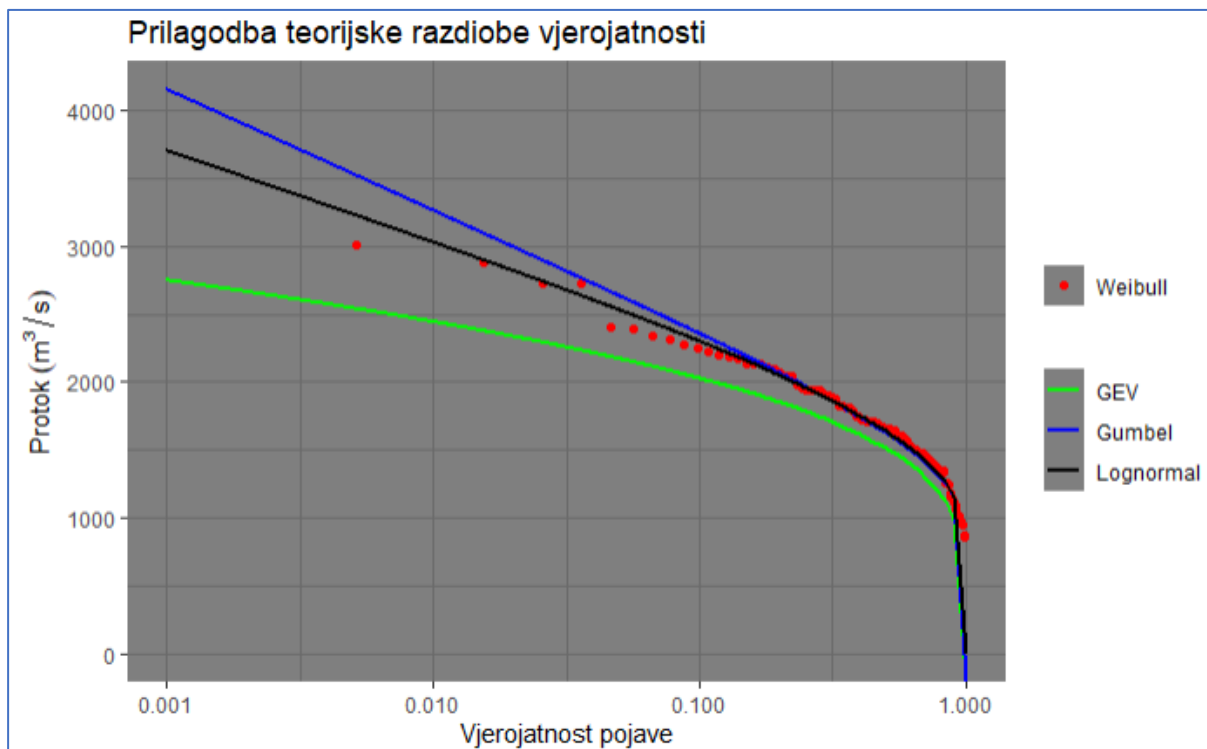
| | |
|---|----|
| Slika P1 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Hazen za VS-Zagreb (1926. – 2022.)..... | 65 |
| Slika P2 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Hazen za VS Kupljenovo (1964. – 2022.)..... | 65 |
| Slika P3 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Weibull za VS Zagreb (1926. – 2022.) | 66 |
| Slika P4 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Weibull za VS Zagreb (1964. – 2022.) | 66 |
| Slika P5 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Čegodajev i povratno razdoblje - VS Zagreb (1975. – 2022.) | 67 |
| Slika P6 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Čegodajev i povratno razdoblje - VS Zagreb (1983. – 2022.) | 67 |
| Slika P7 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Čegodajev i povratno razdoblje - VS Kupljenovo (1975. – 2022.) | 68 |
| Slika P8 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Čegodajev i povratno razdoblje - VS Kupljenovo (1983. – 2022.) | 68 |



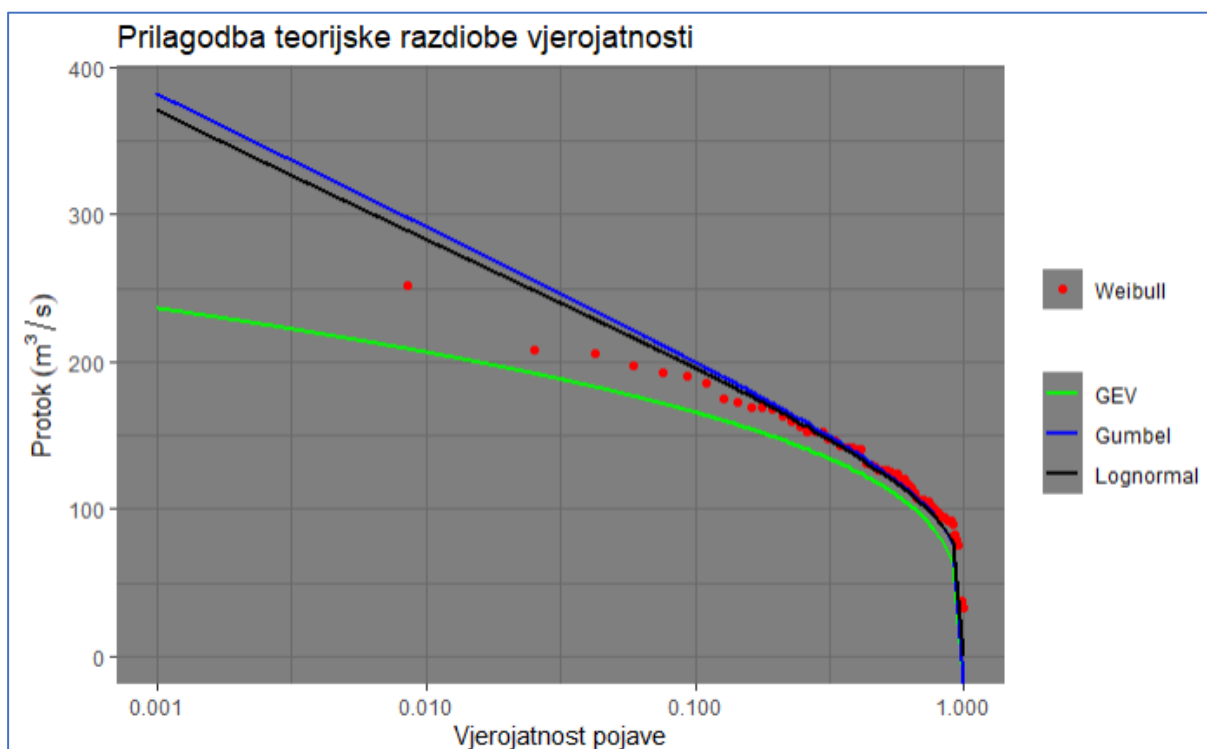
Slika P1 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Hazen za VS Zagreb (1926. – 2022.)



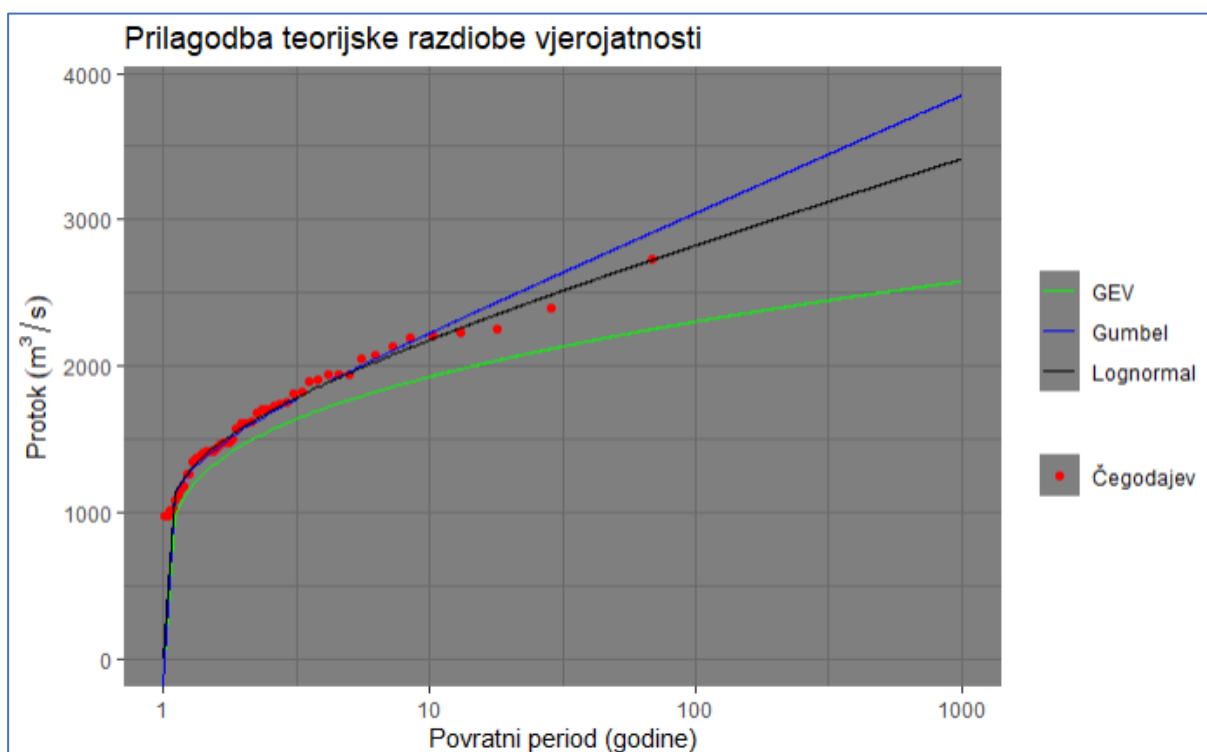
Slika P2 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Hazen za VS Kupljenovo (1926. – 2022.)



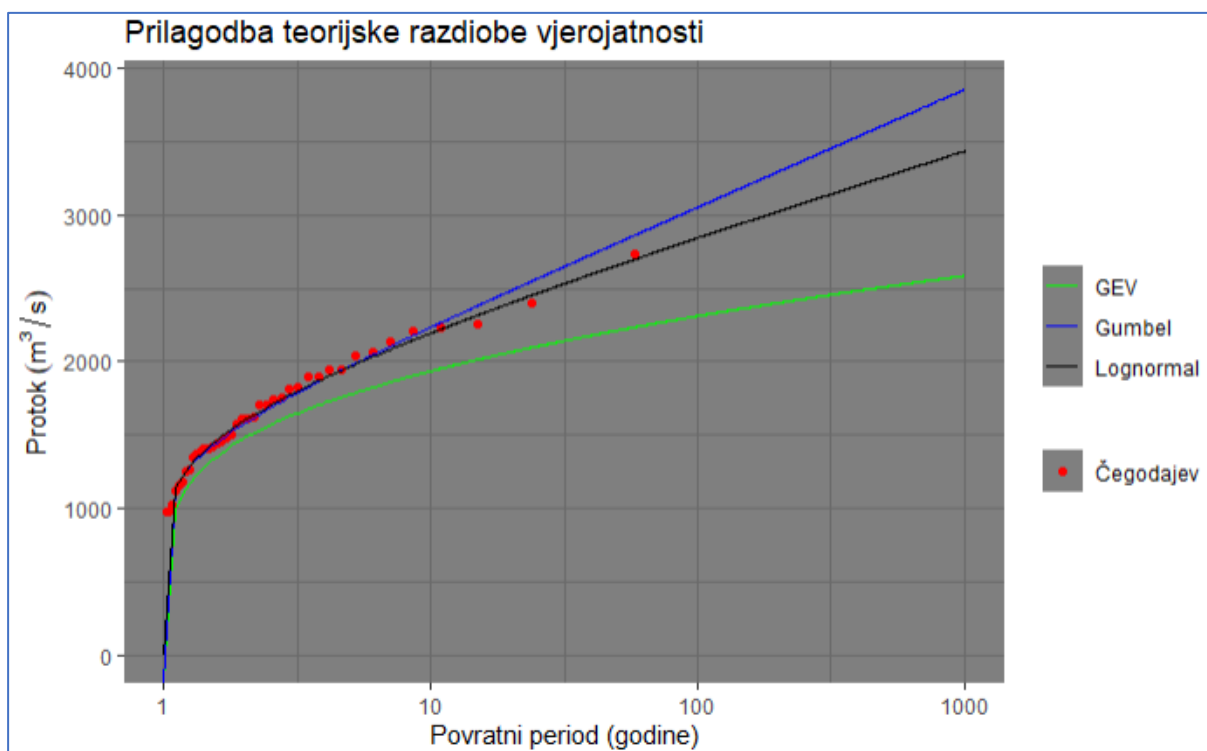
Slika P3 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Weibull za VS Zagreb (1926. – 2022.)



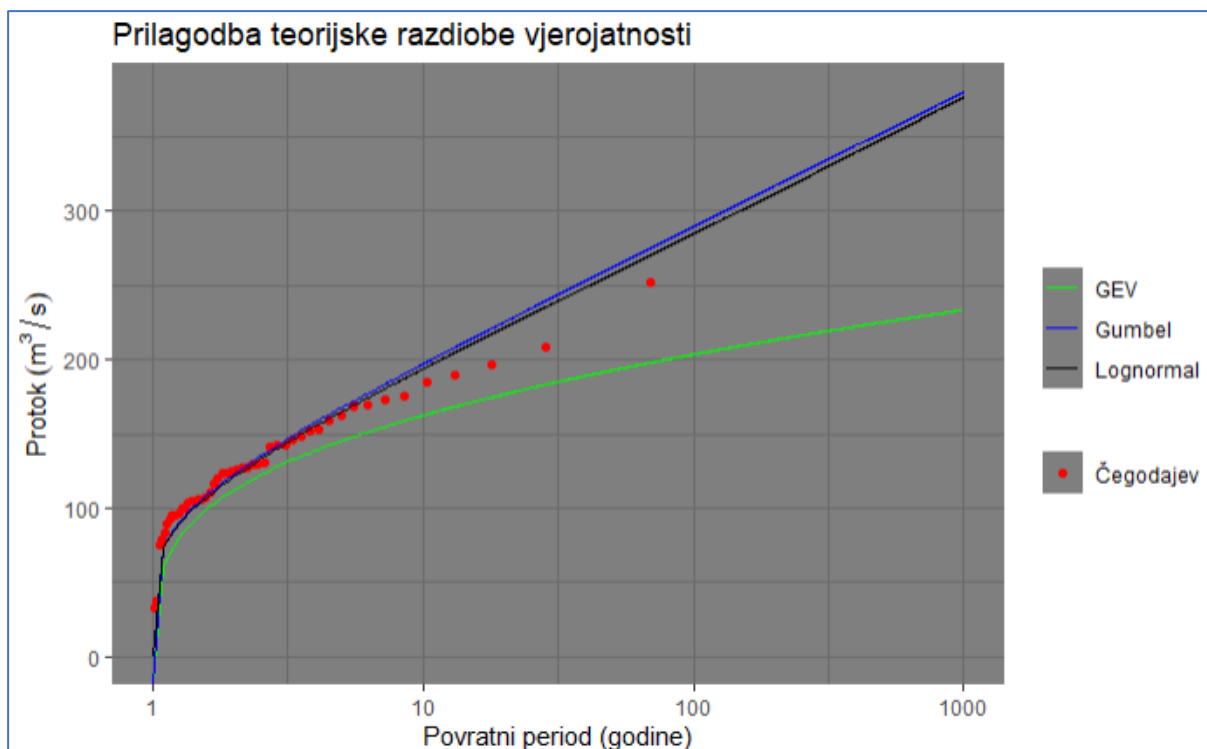
Slika P4 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Weibull za VS Kupljenovo (1926. – 2022.)



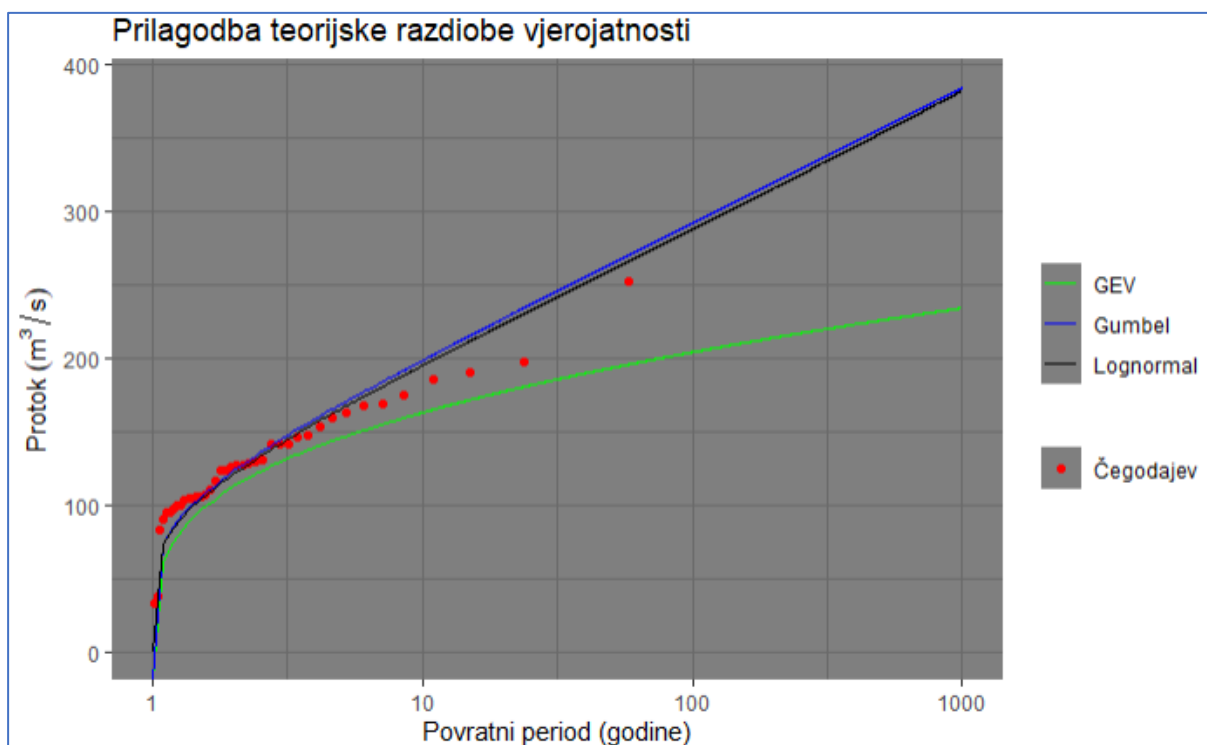
Slika P5 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Čegodajev i povratno razdoblje - VS Zagreb (1975. – 2022.)



Slika P6 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Čegodajev i povratno razdoblje - VS Zagreb (1983. – 2022.)



Slika P7 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Čegodajev i povratno razdoblje - VS Kupljenovo (1975. – 2022.)



Slika P8 Prilagodba teorijske raspodjele vjerojatnosti s empirijskim vrijednostima Čegodajev i povratno razdoblje - VS Kupljenovo (1983. – 2022.)