

# Usporedba metoda definiranja vremenskog niza za proračun vjerojatnosti pojave velike vode na odabranim hidrološkim postajama na slivu Save

---

Ruk, Mihael

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:007294>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-15**

Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)







Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Mihael Ruk

**Usporedba metoda definiranja vremenskog  
niza za proračun vjerojatnosti pojave velike  
vode na odabranim hidrološkim postajama na  
slivu Save**

DIPLOMSKI RAD

Zagreb, 2024



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Mihael Ruk

**USPOREDBA METODA DEFINIRANJA  
VREMENSKOG NIZA ZA PRORAČUN  
VJEROJATNOSTI POJAVE VELIKE VODE NA  
ODABRANIM HIDROLOŠKIM POSTAJAMA NA  
SLIVU SAVE**

DIPLOMSKI RAD

Mentor: izv. prof. dr. sc. Kristina Potočki

Komentor: doc. dr. sc. Nikola Adžaga

Zagreb, 2024



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Mihael Ruk

**COMPARISON OF METHODS FOR DEFINING A  
TIME SERIES FOR CALCULATING THE  
PROBABILITY OF HIGH WATERS AT SELECTED  
HYDROLOGICAL STATIONS IN THE SAVA BASIN**

MASTER THESIS

Supervisor: Assoc. Prof. Kristina Potočki

Co-supervisor: Asst. Prof. Nikola Adžaga

Zagreb, 2024



OBRAZAC 3

POTVRDA O POZITIVNOJ OCJENI PISANOG DIJELA DIPLOMSKOG RADA

Student/ica :

Mihael Ruk

(Ime i prezime)

0082057506

(JMBAG)

zadovoljio/la je na pisanom dijelu diplomskog rada pod naslovom:

Usporedba metoda definiranja vremenskog niza za proračun vjerojatnosti pojave velike vode na odabranim hidrološkim postajama na slivu Save

(Naslov teme diplomskog rada na hrvatskom jeziku)

Comparison of time series formation methods for flood frequency analysis on the selected gauging stations on the Sava River Basin

(Naslov teme diplomskog rada na engleskom jeziku)

i predlaže se provođenje daljnjeg postupka u skladu s Pravilnikom o završnom ispitu i diplomskom radu Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta.

Pisani dio diplomskog rada izrađen je u sklopu znanstvenog projekta: (upisati ako je primjenjivo)

Interakcija hidrotehničkih građevina i okoliša u uvjetima klimatskih promjena, 2024-GF17, Kristina Potočki

(Naziv projekta, šifra projekta, voditelj projekta)

Pisani dio diplomskog rada izrađen je u sklopu stručne prakse na Fakultetu: (upisati ako je primjenjivo)

/

(Ime poslodavca, datum početka i kraja stručne prakse)

Datum:

18.09.2024.

Mentor:

izv. prof. dr. sc. Kristina Potočki

Potpis mentora:

*Kristina Potočki*

Komentor:

doc. dr. sc. Nikola Adžaga

*Nikola Adžaga*



**OBRAZAC 5**

**IZJAVA O IZVORNOSTI RADA**

Ja :

Mihael Ruk, 0082057506

(Ime i prezime, JMBAG)

student/ica Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta ovim putem izjavljujem da je moj pisani dio diplomskog rada pod naslovom:

Uporedba metoda definiranja vremensog niza za prora un vjerojatnosti pojave velike vode na odabranim hidrotloškim postajama na slivu Save

(Naslov teme diplomskog rada na hrvatskom jeziku)

izvorni rezultat mogega rada te da se u izradi istoga nisam koristio/la drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

Datum:

18.9.2024

Potpis:



OBRAZAC 6

IZJAVA O ODOBRENJU ZA POHRANU I OBJAVU PISANOG DIJELA DIPLOMSKOG RADA

Ja :

Mihael Ruk, 0082057506

(Ime i prezime, OIB)

ovom izjavom potvrđujem da sam autor/ica predanog pisanog dijela diplomskog rada i da sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti odgovara sadržaju dovršenog i obranjenog pisanog dijela diplomskog rada pod naslovom:

Usporedba metoda definiranja vremenskog niza za prora un vjerojatnosti pojave velike vode na odabranim hidrološkim postajama na slivu Save

(Naslov teme diplomskog rada na hrvatskom jeziku)

koji je izrađen na sveučilišnom diplomskom studiju Građevinarstvo Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta pod mentorstvom:

Kristina Potocki

(Ime i prezime mentora)

i obranjen dana:

26.9.2024

(Datum obrane)

Suglasan/suglasna sam da pisani dio diplomskog rada u cijelosti bude javno dostupan, te da se trajno pohrani u digitalnom repozitoriju Građevinskog fakulteta, repozitoriju Sveučilišta u Zagrebu te nacionalnom repozitoriju.

Datum:

18.9.2024

Potpis:



## ZAHVALE

Želim izraziti iskrenu zahvalnost Državnom hidrometeorološkom zavodu za ustupanje podataka koji su bili ključni za realizaciju diplomskog rada.

Posebnu zahvalu upućujem mentorici Kristini Potočki i komentoru Nikoli Adžagi za profesionalizam, ljubaznost i pomoć tijekom izrade diplomskog rada.

Posebnu zahvalu upućujem asistentici Martini Lacko za ljubaznost i pomoć pri izradi rada u *R-u*.

## SAŽETAK

Cilj ovog rada je usporedba dviju metoda formiranja niza za prognoziranje velikih voda za određeno razdoblje. Metode koje su korištene, su metoda godišnjih maksimuma (engl. annual maximum, AM) i metoda prekoračenja (engl. peaks over threshold, POT). Prognoze velikih voda napravljene su za povratne periode od 5, 10, 25, 50, 100 i 1000 godina, na temelju podataka o protocima dobivenih iz mjerenja na vodomjernim postajama Zagreb i Kupljenovo koje se nalaze na dijelu sliva Save u Hrvatskoj. Dobiveni rezultati prikazuju razlike u dobivenim vrijednostima za povratne periode gdje je POT pokazala veće prognozirane protoke. Metoda godišnjih maksimuma (AM) pruža jednostavnu i direktnu analizu koja je zbog toga široko rasprostranjena u inženjerskoj praksi. Ipak, može zanemariti ekstremne događaje koji se ne javljaju svake godine. S druge strane, metoda prekoračenja praga (POT) uzima u obzir sve protoke iznad određenog praga, pružajući detaljniji uvid u ekstremne događaje, ali zahtijeva složeniju analizu i pažljiviji izbor praga.

**Ključne riječi:** metoda godišnjih maksimuma, metoda prekoračenja praga, protok, rijeka Sava, teorijske funkcije raspodjele,

## SUMMARY

The aim of this paper is to compare two methods for forming a series used in forecasting high water levels for a specific period. The methods employed are the Annual Maximum (AM) method and the Peaks Over Threshold (POT) method. High water forecasts were made for return periods of 5, 10, 25, 50, 100, and 1000 years, based on flow data obtained from measurements at the Zagreb and Kupljenovo gauging stations, located in the Sava River basin in Croatia. The results show differences in the predicted values for the return periods, with the POT method showing higher forecasted flows. The Annual Maximum (AM) method provides a simple and straightforward analysis, which is why it is widely used in engineering practice. However, it can overlook extreme values that do not occur every year. On the other hand, the Peaks Over Threshold (POT) method considers all flows above a certain threshold, offering a more detailed insight into extreme values, but it requires more complex analysis and a more careful selection of the threshold.

**Key words:** Annual Maximum method, Peaks Over Threshold method, flow, Sava River, theoretical distribution functions

## POPIS SLIKA

Slika 1: Sliv rijeke Save(Izvor: [1]) .....	2
Slika 2: Položaj VS Zagreb i VS Kupljenovo [4] .....	2
Slika 3: Grafički prikaz srednjih dnevnih maksimuma za razdoblje od 1926. do 2022.....	5
Slika 4:Q-H krivulja očitana 6.7.2022. (izvor: DHMZ) .....	6
Slika 5: Grafički prikaza srednjih maksimalnih protoka na VS Kupljenovo(1964.-2022) .....	9
Slika 6: Prikaz ekstremno velikih godišnjih protoka za VS Zagreb za razdoblje od 1924. do 2022. .....	12
Slika 7: Prikaz ekstremno velikih godišnjih protoka za VS Kupljenovo za razdoblje od 1964. do 2022.....	12
Slika 8: Grafički prikaz ekstreme iznad praga u iznosu od 1300 m <sup>3</sup> /s za VS Zagreb za razdoblje od 1924. do 2022.....	15
Slika 9: Grafički prikaz ekstreme iznad praga u iznosu od 100 m <sup>3</sup> /s za razdoblje od 1964. do 2022.....	15
Slika 10: Rezultati KS testa homogenosti na nizu dobivenom od DHMZ-a za VS Zagreb .....	17
Slika 11: Rezultati KS testa homogenosti podataka od 1975. do 2022. za VS Zagreb .....	18
Slika 12: Pettitt test na nizu od 1975. do 2022. godine za VS Zagreb.....	18
Slika 13 : Rezultati KS testa za razdoblje od 1989. do 2022.....	18
Slika 14: Rezultati KS testa homogenosti na nizu dobivenom od DHMZ-a za VS Kupljenovo ..	19
Slika 15: Rezultati KS testa homogenosti podataka od 1975. do 2022. za VS Kupljenovo .....	19
Slika 16: Pettitt test na nizu od 1975. do 2022. godine za VS Kupljenovo.....	19
Slika 17: Rezultati KS testa homogenosti za VS Kupljenovo za razdoblje od 1989. do 2022....	20
Slika 18: Prikaz log-normalne distribucije [8] .....	23
Slika 19: Primjer Gumbllleove distribucije iz <i>R-studia</i> .....	24
Slika 20: Primjer Pearson III distribucije (izvor [10]).....	26
Slika 21: Prikaz K-S testa [7].....	27
Slika 22: Grafički prikaz empirijske kumulativne distribucije za VS Zagreb za razdoblje do 1989. do 2022.....	30
Slika 23: Dobivene vrijednosti za Anderson-Darling test za vrijednosti u tablici 5.1. ....	30
Slika 24: Dobivene vrijednosti za Kolmogorov-Smirnov test za vrijednosti u tablici 5.1.....	30
Slika 25 : Prilagodba teorijske razdiobe vjerojatnosti za VS Zagreb za razdoblje do 1989. do 2022.....	31
Slika 26: Grafički prikaz empirijske kumulativne distribucije za VS Kupljenovo za razdoblje do 1989. do 2022.....	33
Slika 27: Dobivene vrijednosti za Anderson-Darling test za vrijednosti u tablici 5.3 .....	33
Slika 28: Dobivene vrijednosti za Kolmogorov-Smirnov test za vrijednosti u tablici 5.3 .....	33
Slika 29: Prilagodba teorijske razdiobe vjerojatnosti za VS Kupljenovo za razdoblje do 1989. do 2022.....	34

---

Slika 30: Rezultati AD testa za POT metodu na VS Zagrebu pri 2 prekoračenja godišnje.....	36
Slika 31: Rezultati KS testa za POT metodu na VS Zagrebu pri 2 prekoračenja godišnje.....	37
Slika 32: Prilagodba teorijske razdiobe vjerojatnosti za VS Zagreb, 2 prekoračenja godišnje..	37
Slika 33: Dobivene vrijednosti za Anderson-Darling test za poklapanje empirijske i teorijske distribucije na VS Kupljenovo .....	39
Slika 34: Dobivene vrijednosti za Kolmogorov-Smirnov test poklapanje empirijske i teorijske distribucije na VS Zagreb .....	40
Slika 35: Prilagodba teorijske razdiobe vjerojatnosti za VS Kupljenovo, 2 prekoračenja godišnje .....	40

---

## POPIS TABLICA

Tablica 2.1: Prikaz karakterističnih vrijednosti niza za VS Zagreb.....	3
Tablica 2.2: Godišnji maksimumi VS Zagreb .....	4
Tablica 2.3: Karakteristične vrijednosti za godišnje maksimume VS Zagreb za razdoblje od 1926. do 2022.....	5
Tablica 2.4: Karakteristične vrijednosti dnevnih protoka VS Kupljenovo od 1964. do 2022. godine.....	7
Tablica 2.5: Prikaz godišnjih maksimuma za VS Kupljenovo.....	8
Tablica 2.6: Karakteristične vrijednosti godišnjih maksimuma za VS Kupljenovo za razdoblje od 1964. do 2022.....	9
Tablica 3.1: Poissonove vrijednosti za odabrane pragove prekoračenja za VS Zagreb i VS Kupljenovo.....	13
Tablica 3.2: Vrijednost praga i pripadajući broj prekoračenja godišnje za VS Zagreb i VS Kupljenovo.....	14
Tablica 5.1: Prikaz godišnjih maksimuma od najvećeg prema najmanje za VS Zagreb za razdoblje do 1989. do 2022.....	29
Tablica 5.2: Vrijednost povratnih perioda za Log-normalnu distribuciju za razdoblje do 1989. do 2022.....	31
Tablica 5.3: Prikaz godišnjih maksimuma od najvećeg prema najmanje za VS Kupljenovo za razdoblje do 1989. do 2022.....	32
Tablica 5.4: Vrijednost povratnih perioda za Log-normalnu distribuciju za razdoblje do 1989. do 2022.....	34
Tablica 5.5 Vrijednosti protoka za uzeti prag 1300 (m <sup>3</sup> /s) za VS Zagreb.....	36
Tablica 5.6: Vrijednost povratnih perioda za Lognormalnu distribuciju.....	38
Tablica 5.7: Vrijednosti protoka za uzeti prag 100 (m <sup>3</sup> /s) .....	39
Tablica 5.8: Vrijednost povratnih perioda za Eksponencijalnu distribuciju .....	41
Tablica 6.1: Usporedba sa rezultatima iz 2012 godine za VS Zagreb.....	42
Tablica 6.2: Usporedba sa rezultatima iz 2012 godine za VS Zagreb.....	43

## SADRŽAJ

<b>ZAHVALE .....</b>	<b>i</b>
<b>SAŽETAK .....</b>	<b>ii</b>
<b>SUMMARY .....</b>	<b>iii</b>
<b>SADRŽAJ .....</b>	<b>iv</b>
<b>1. UVOD .....</b>	<b>1</b>
<b>2. PREGLED PODLOGA I ALATA .....</b>	<b>3</b>
2.1. Podatci vodomjerne stanice Zagreb .....	3
2.2. Podatci vodomjerne stanice Kupljenovo .....	7
2.3. Alati .....	10
2.3.1. Programski jezik R i njegova primjena u hidrologiji i hidrotehnici .....	10
<b>3. FORMIRANJE I POČETNA ANALIZA VREMENSKOG NIZA .....</b>	<b>11</b>
3.1. Formiranje godišnjih nizova .....	11
3.1.1. Metoda godišnjih maksimuma .....	11
3.1.2. Metoda vršnih prekoračenja praga .....	13
3.2. Početna analiza nizova .....	16
3.3. Homogenost niza .....	16
3.3.1. Kolmogorov-Smirnov test homogenosti .....	16
3.3.1.1. Provjera homogenosti niza za podatke VS Zagreb .....	17
3.3.1.2. Provjera homogenosti niza za VS Kupljenovo .....	19
<b>4. STATISTIČKA OBRADA HIDROLOŠKIH PODATAKA .....</b>	<b>21</b>
4.1. Empirijske funkcije raspodjele vjerojatnosti .....	21
4.1.1. Primjena empirijskih funkcija raspodjele .....	21
4.2. Teorijske funkcije raspodjele vjerojatnosti .....	22
4.2.1. Log-normalna teorijska raspodjela .....	22
4.2.2. Gumbelova teorijska distribucija .....	23
4.2.3. Distribucija generalnih ekstremnih vrijednosti (GEV) .....	25
4.2.4. Pearson III raspodjela .....	25
4.3. Statistički testovi prilagodbe podataka .....	26
4.3.1. Kolmogorov-Smirnov test .....	27
4.3.2. Anderson-Darling test .....	28
<b>5. REZULTATI .....</b>	<b>29</b>
5.1. Metoda godišnjih maksimuma .....	29
5.1.1. VS Zagreb .....	29
5.1.2. VS Kupljenovo .....	32
5.2. Metoda prekoračenja praga .....	35
5.2.1. VS Zagreb .....	35

5.2.2. VS Kupljenovo .....	38
<b>6. DISKUSIJA .....</b>	<b>42</b>
6.1. VS Zagreb .....	42
6.2. VS Kupljenovo .....	43
<b>7. ZAKLJUČAK .....</b>	<b>45</b>
<b>POPIS LITERATURE .....</b>	<b>48</b>
<b>POPIS SLIKA .....</b>	<b>50</b>
<b>POPIS TABLICA.....</b>	<b>52</b>



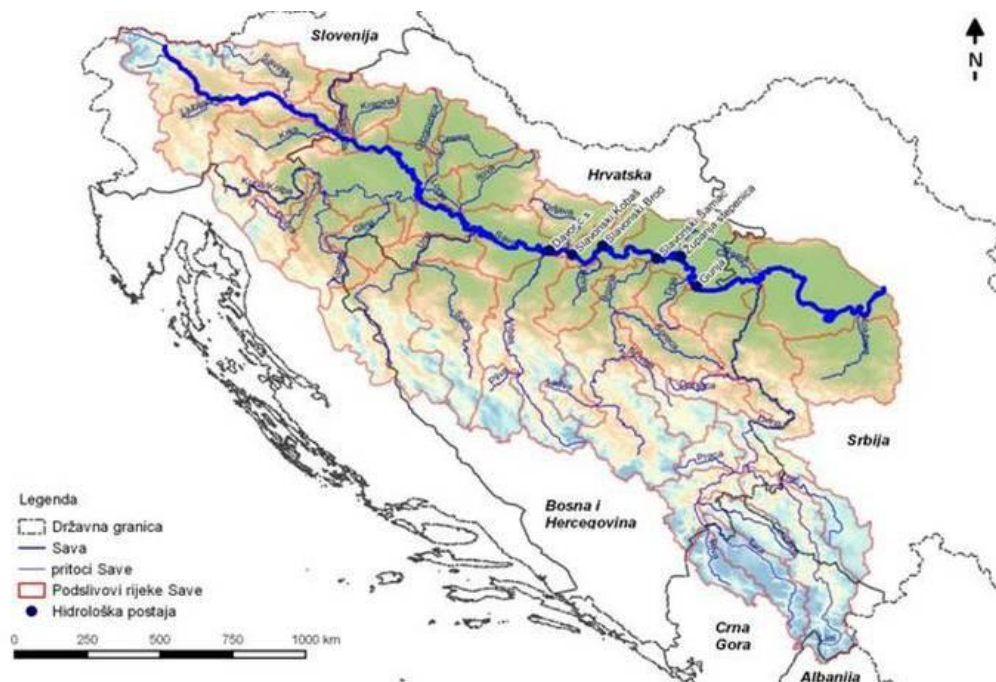
## 1. UVOD

Pod pojmom „velika voda“, smatra se pojava maksimalnog protoka ili najvišeg vodostaja. Pojava velikih voda predstavlja značajan problem, jer one mogu nanijeti veliku štetu i prouzročiti velike financijske gubitke, te u najgorem slučaju, ljudske žrtve. Pouzdani i homogeni mjereni podatci prava su rijetkost, a takve podloge su potrebne kako bi se mogli dobiti što bolji i sigurniji zaključci o prirodi pojavljivanja velikih voda [1]. Kako bismo dobili što pouzdaniju poplavu 100 godišnjeg povratnog perioda, trebali bi smo na raspolaganju imati najmanje 100 godina mjerenja podataka koji su homogeni i neprekidni. Obzirom da raspolažemo sa puno manjim vremenskim periodom (npr. 30, 50 ili 70 godina mjerenja) a prognoziramo 1000 godišnju vodu, vjerojatnost pojave velikih voda proračunavamo vjerojatnosnim metodama. Moramo uzeti u obzir da su podatci u velikom broju slučajeva nehomogeni te da su tome uzrok antropogeni utjecaji na slivu i u okolini hidroloških postaja [1].

Cilj ovog rada je usporedba dviju metoda formiranja niza za prognoziranje velikih voda za određeno razdoblje. Metode koje su korištene, su metoda godišnjih maksimuma (engl. *annual maximum, AM*) i metoda prekoračenja (engl. *peaks over threshold, POT*). Prognoze velikih voda napravljene su za povratne periode od 2, 5, 10, 25, 50, 100 i 1000 godina, na temelju podataka o protocima dobivenih iz mjerenja na vodomjernim postajama Zagreb i Kupljenovo koje se nalaze na dijelu sliva Save u Hrvatskoj. Podaci su dobiveni od Državnog hidrometeorološkog zavoda u obliku nizova srednjih dnevnih vrijednosti. Iako su u ovom radu korištene dnevne vrijednosti, bitno je napomenuti da u analizama velikih voda u praksi treba prednost dati satnim maksimumima ukoliko su dostupni (osobito na malim slivovima s naglim rastom vršnog protoka u kratkom vremenu, gdje razlika između srednjeg dnevnog protoka i satnog maksimuma može biti značajna). U radu su opisane korištene metode i alati, a u navedenim metodama za obradu niza podataka, korištene su empirijske vjerojatnosti, teorijske distribucije vjerojatnosti, provjere nizova podataka različitim testovima prilagodbe te su dobiveni rezultati grafički prikazani te je dan osvrt na dobivene podatke. U izradi rada korišten je alat „*R-studio*“, kako bi se postupak samog proračuna i prognoziranja ubrzao, te kako bi se omogućilo korištenje kodnog zapisa za daljnju uporabu na različitim vodomjernim postajama ili vodotocima.

Sava kao najdulja rijeka u Hrvatskoj ima veliko značenje za Hrvatsku državu, te stanovništvo koje se uz nju nalazi. Pripada crnomorskom slivu i najdulja je europska rijeka koja ne utječe direktno u more. Spajanjem Save Dolinke i Save Bohinjke, kod Bohinja u Sloveniji, nastaje rijeka Sava [2]. Duljina rijeke Save iznosi 945 km, a njezin plovni put iznosi 594 km (od Siska do ušća u Dunav). Sliv rijeke Save (slika 1) jedan je od najznačajnijih slivova Jugoistočne Europe, koji se prostire na približno 97 700 km<sup>2</sup> i kroz područje 6 zemalja, Slovenije, Hrvatske, Bosne i Hercegovine, Srbije, Crne Gore te manjeg dijela Albanije. Vodni resursi sliva od velike su

važnosti za opskrbu vodom stanovništva i privrede, te predstavljaju osnovu za rast i razvoj mnogih ekosustava, te mjesto za život za 8.1 milijun ljudi [3].



Slika 1: Sliv rijeke Save(Izvor: [2])

Vodomjerna postaja Zagreb (šifra 3121), nalazi se na 664.2 km udaljenosti od ušća Save u Dunav, a topografska površina sliva iznosi 12 450km<sup>2</sup> [4] (slika 2).

Postaja Kupljenovo (šifra 3054),nalazi se na rijeci Krapini, na 13.8 km udaljenosti od ušća Krapine u Savu, s površinom sliva od 1 150 km<sup>2</sup> (slika 2) [4]. Rijeka Krapina nalazi se u sjeverozapadnoj Hrvatskoj, također pripada crnomorskom slivu i lijeva je pritoka rijeke Save. Cijelim svojim tokom protječe kroz Hrvatsko zagorje, odnosno kroz Krapinsko-zagorsku i Zagrebačku županiju. Duga je oko 75 kilometara, a u Savu se ulijeva kod Zaprešića. Porječje rijeke Krapine obuhvaća 1123 km<sup>2</sup> [5].



Slika 2: Položaj VS Zagreb i VS Kupljenovo označen je na slici crvenim (prilagođeno prema [6])

## 2. PREGLED PODLOGA I ALATA

### 2.1. Podatci vodomjerne stanice Zagreb

Podatci za vodomjernu postaju Zagreb, na rijeci Savi, dobiveni su od Državnog hidrometeorološkog zavoda (DHMZ-a), u .csv i .txt obliku, te sadrže srednje dnevne maksimume za razdoblje od 1.1.1926. do 31.12.2022. godine (slika 3). Zbog potrebe proračuna metodom prekoračivanja praga, korištene su krivulja odnosa protoka i vodostaja (Q-H krivulje) dobivene od DHMZ-a, za navedenu vodomjernu postaju. Krivulje su dobivene u obliku slike, stavljene u .docx dokument (slika 4). Vrijednosti Q-H krivulja korištene su za okvirnu procjenu vrijednosti protoka pri kojem dolazi do izlivanja vode iz glavnog korita rijeke u inundaciju. Vrijednost tog protoka korištena je kako bi se odredio prag približan toj vrijednosti, a za daljnji proračun koriste se sva prekoračenja koja se pojavljuju u godinama koje razmatramo.

U tablici 2.1 prikazane su karakteristične vrijednosti dnevnih prosječnih protoka za dobiveni niz podataka, medijan uzorka i srednja vrijednost. Tablica prikazuje da se maksimalan protok zabilježio 1964. godine te je iznosio 3005 m<sup>3</sup>/s, dok minimalni protok od 47 m<sup>3</sup>/s zabilježen je 1993. godine.

Na temelju dnevnih prosječnih protoka dostavljenih od DHMZ-a, godišnji maksimumi su izdvojeni te prikazani na tablici 2.2. Maksimalne godišnje vrijednosti prosječnih dnevnih protoka su korištene u daljnjim proračunima.

**Tablica 2.1: Prikaz karakterističnih vrijednosti niza za VS Zagreb za razdoblje od 1926. do 2022.**

	Datum	Pripadna vrijednost [m <sup>3</sup> /s]
Min. Protok	23.08.1993.	47
Mak. Protok	26.10.1964.	3005
Medijan		225
Prvi kvartil		144
Treći kvartil		375
Srednji protok		308.91
Standardna devijacija		263.25

**Tablica 2.2: Godišnji maksimumi VS Zagreb za razdoblje od 1926. do 2022.**

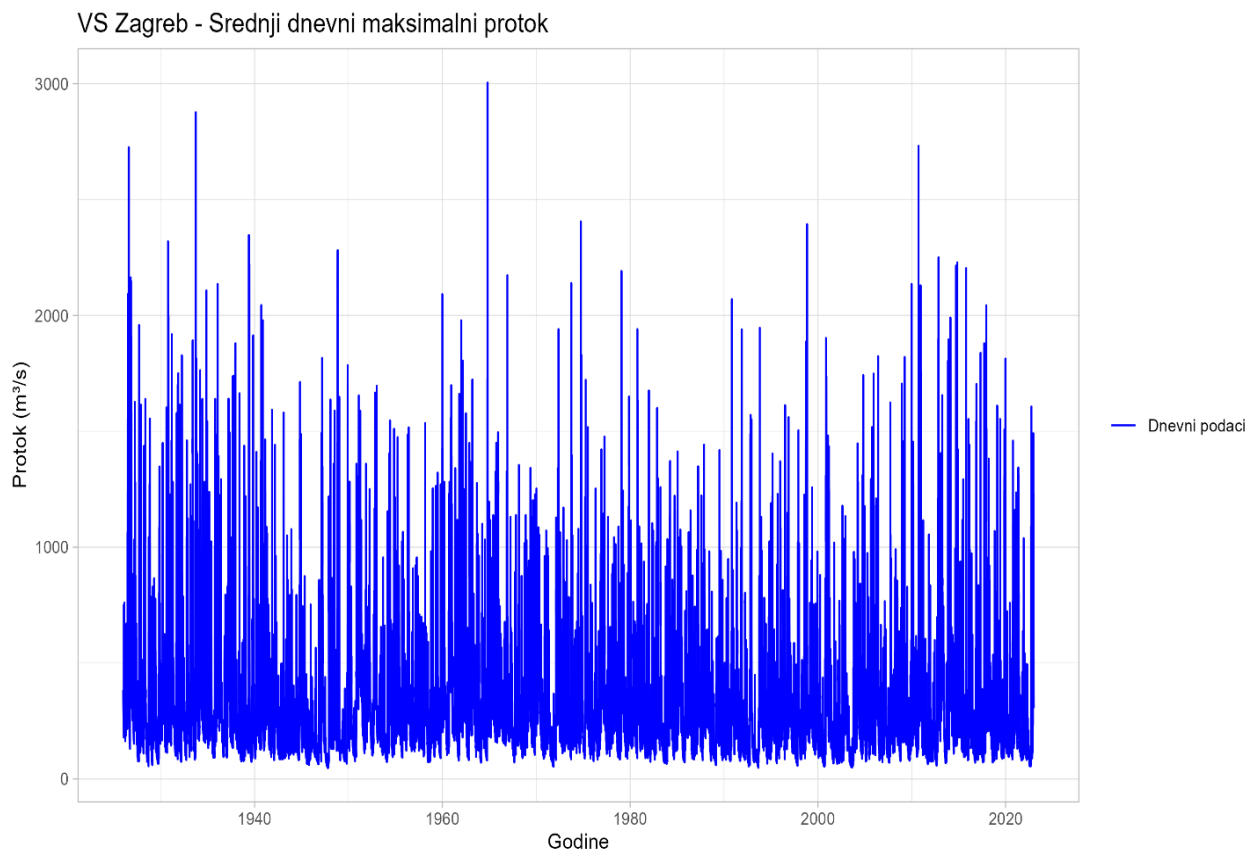
Godina	Protok [m <sup>3</sup> /s]	Godina	Protok [m <sup>3</sup> /s]	Godina	Protok [m <sup>3</sup> /s]
1926	2726	1958	1535	1990	2070
1927	1959	1959	2092	1991	1940
1928	1640	1960	1699	1992	1571
1929	1348	1961	1662	1993	1947
1930	2320	1962	1979	1994	1025
1931	1919	1963	1724	1995	1404
1932	1828	1964	3005	1996	1613
1933	2877	1965	1496	1997	1505
1934	2108	1966	2174	1998	2394
1935	1640	1967	1139	1999	1258
1936	2136	1968	1355	2000	1903
1937	1880	1969	1342	2001	1482
1938	1664	1970	1253	2002	1179
1939	2347	1971	1072	2003	980
1940	2045	1972	1941	2004	1743
1941	1593	1973	2140	2005	1749
1942	1442	1974	2406	2006	1824
1943	1581	1975	1722	2007	1624
1944	1713	1976	1422	2008	1706
1945	875	1977	1477	2009	2136
1946	859	1978	1089	2010	2732
1947	1817	1979	2192	2011	1116
1948	2282	1980	1941	2012	2251
1949	1785	1981	1016	2013	1896
1950	1360	1982	1676	2014	2229
1951	1655	1983	1259	2015	2204
1952	1667	1984	1372	2016	1704
1953	1696	1985	1413	2017	2044
1954	1547	1986	1159	2018	1382
1955	1475	1987	1443	2019	1814
1956	1517	1988	982	2020	1460
1957	956	1989	1419	2021	1344
				2022	1607

Tablica 2.3. prikazuje karakteristične vrijednosti niza koji se sastoji od godišnjih maksimalnih vrijednosti prosječnih protoka. Vidljivo je kako je najmanji protok koji se javio u godini iznosio  $859 \text{ m}^3/\text{s}$  dok srednji protok iznosi  $1697.83 \text{ m}^3/\text{s}$ .

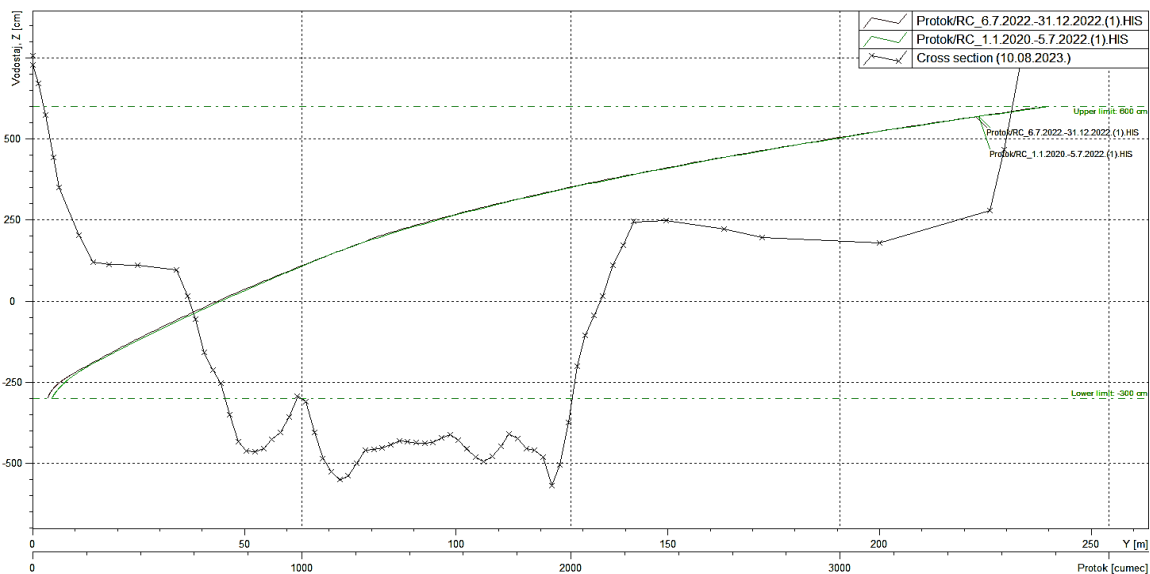
**Tablica 2.3: Karakteristične vrijednosti za godišnje maksimume VS Zagreb za razdoblje od 1926. do 2022.**

	Godina	Pripadna vrijednost [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]
Min. Protok	1926	859
Mak. Protok	1964	3005
Medijan		1705
Prvi kvartil		1413
Treći kvartil		1947
Srednji protok		1697.8
Standardna devijacija		441.53

Grafički prikaz dobivenih podataka, prikazan pomoću *R-studia*, nalazi se na slici 3.



**Slika 3:** Grafički prikaz srednjih dnevnih maksimuma za razdoblje od 1926. do 2022.



**Slika 4: Q-H krivulja očitana 6.7.2022. (izvor: DHMZ)**

Krivulja prikazana na slici 4 prikazuje primjer Q-H krivulje za 2022. godinu. Vidljivo je kako pri protoku od 1000 dolazi do izlivanja vode iz glavnog korita na lijevu inundaciju dok pri protoku od otprilike 1450 dolazi do izlivanja vode iz glavnog korita i na desnu inundaciju.

Osim toga, dobiven je i historijat vodomjerne postaje Zagreb, koji pruža pregled povijesnih podataka i promjena u mjerenju protoka kroz godine. Ovi podatci uključuju informacije o značajnim događajima, tehničkim prilagodbama postaje i metodama mjerenja, što dodatno doprinosi razumijevanju promjena u hidrologiji rijeke Save i utječe na homogenost podataka.

Historijat VS Zagreb dobiven je u pdf obliku. VS Zagreb je počela sa radom 1.1.1849. godine, te je postavljena na lijevoj obali rijeke Save, na stupu mosta s nizvodne strane. 1.8.1961. dolazi do premještanja vodokaza na prvi stup mosta od lijeve strane obale. Nakon velike poplave 1964 dolazi do izgradnje sustava obrane od poplava Srednje Posavlje.

Prva veća rekonstrukcija se desila 3.8.1983. kada je vodokaz premješten na desnu obalu, te se vodokaz premještao još jednom 2000, kada je vodokaz premješten na posljednju stepenicu betonskog pokosa na lijevoj obali. Godine 2018. postavljen je radarski uređaj koji mjeri vodostaj i temperaturu. Također je bitno spomenuti kako se 26.10.1964 dogodila velika poplava u gradu Zagrebu gdje je došlo do izlivanja Save iz korita te podatci u tom razdoblju nisu pouzdani.

Mjerenja vodomjernog profila vršena su u profilu Bundek do 1996. godine, te se od 1997. mjerenja profila rade na položaju vodomjerne stanice Zagreb. Opisane promjene ukazuju na potrebu analize homogenosti podataka

---

## 2.2. Podatci vodomjerne stanice Kupljenovo

Podatci za VS Kupljenovo, također su dobiveni u csv. i txt. obliku, te sadržavaju srednje dnevne maksimume za razdoblje od 1.1.1964. do 31.12.2022. godine. Za navedenu postaju korištene su Q-H krivulje dobivene od DHMZ-a (slika 7). Korištenjem alata *R-studio* na podacima dobivenim od DHMZ-a dobivene su pripadajuće vrijednosti niza (tablica 2.4.). U tablici 2.4 prikazane su ekstremne vrijednosti niza, medijan uzorka i srednja vrijednost.

U tablici 2.4 vidljivo je kako je maksimalan protok na VS Kupljenovo iznosio 252 m<sup>3</sup>/s te je izmjeren 1989. godine dok, minimalan je iznosio 0.343 m<sup>3</sup>/s te je izmjeren 2000. godine.

**Tablica 2.4: Karakteristične vrijednosti dnevnih protoka VS Kupljenovo od 1964. do 2022. godine**

	Datum	Pripadna vrijednost [m <sup>3</sup> /s]
Min. Protok	1.3.2000.	0.343
Mak. Protok	4.7.1989.	252
Medijan		4.93
Prvi kvartil		2.64
Treći kvartil		11.2
Srednji protok		11.13
Standardna devijacija		17.87

Pomoću alata *R-studio* za podatke poslane od strane DHMZ-a, prikazane su godišnje maksimalne vrijednosti te su podatci prikazani u tablici 2.5. dok karakteristične vrijednosti tih nizova su prikazane na tablici 2.6.

Vidljivo je kako 2011. najveći srednji protok iznosi 33 m<sup>3</sup>/s dok je maksimalan srednji protok zabilježen 1989. godine te iznosi 252 m<sup>3</sup>/s.

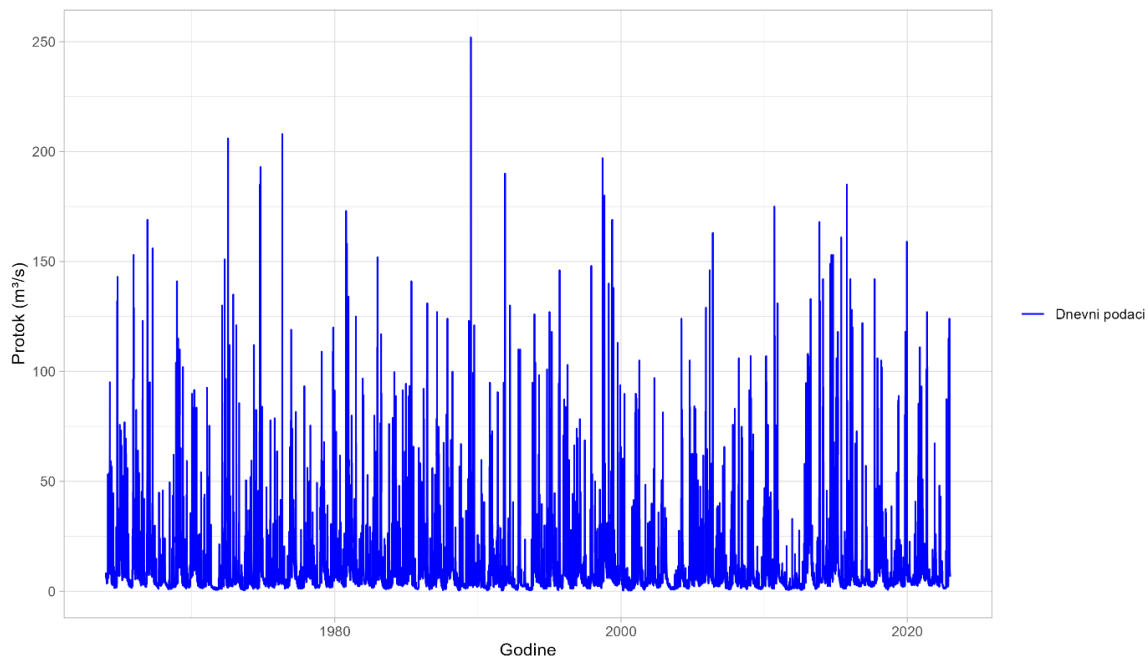
---

**Tablica 2.5: Prikaz godišnjih maksimuma za VS Kupljenovo**

Godina	Protok [m <sup>3</sup> /s]	Godina	Protok [m <sup>3</sup> /s]
1964	143	1993	126
1965	153	1994	106
1966	169	1995	146
1967	156	1996	103
1968	141	1997	148
1969	115	1998	197
1970	91.6	1999	169
1971	92.6	2000	89.8
1972	206	2001	105
1973	121	2002	97
1974	193	2003	38
1975	78.7	2004	124
1976	208	2005	129
1977	93.3	2006	163
1978	75.4	2007	83
1979	120	2008	106
1980	173	2009	107
1981	125	2010	175
1982	152	2011	33
1983	117	2012	94.7
1984	99.7	2013	168
1985	141	2014	153
1986	131	2015	185
1987	127	2016	142
1988	99.9	2017	142
1989	252	2018	105
1990	94.9	2019	159
1991	190	2020	111
1992	130	2021	127
		2022	124



Grafički prikaz dobivenih dnevnih mjerenja protoka, od DHMZ-a, za VS Kupljenovo u periodu od 1964. do 2022. prikazan je na slici 5.



**Slika 5:** Grafički prikaza srednjih dnevnih protoka na VS Kupljenovo (1964.-2022)

**Tablica 2.6:** Karakteristične vrijednosti godišnjih maksimuma za VS Kupljenovo za razdoblje od 1964. do 2022.

	Godina	Pripadna vrijednost [m <sup>3</sup> /s]
Min. Protok	2011	33
Mak. Protok	1989	251
Medijan		127
Prvi kvartil		2.55
Treći kvartil		10.1
Srednji protok		131.26
Standardna devijacija		17.44

Historijat za VS Kupljenovo dobiven je u pdf obliku gdje su podatci o promjenama na VS kroz povijest. Postaja je krenula sa radom 10.9.1963 godine, postavljena je izvan utjecaja uspora rijeke Save, na desnoj strani kolnog mosta kod mjesta Kupljenovo. U lipnju 1965. određena je apsolutna kota nule vodokaza na 128.877 m n/m, a do tad je kota nule bila relativna. Značajniju promjenu imamo 2013 godine kada su u srpnju izvršeni radovi u koritu, pri čemu je srušen preljevni prag uz hidrološku postaju.

---

## 2.3. Alati

### 2.3.1. Programski jezik R i njegova primjena u hidrologiji i hidrotehnici

R programski jezik razvijen za statističko računanje i grafiku. Njegova primjena u hidrologiji se proširila zbog dostupnosti raznih hidroloških i meteoroloških podataka te razvoja specifičnih alata za analize u hidrologiji. R omogućava korištenje velikim bazama podataka, kao što su razni klimatski podatci, podaci mjerenja vodostaja i protoka, koji su ključni za hidrotehničke analize i istraživanja. Korištenje R u hidrologiji posebno je značajno za analize velikih voda, uključujući modeliranje protoka, analizu ekstremnih hidroloških događaja i procjene rizika od poplava [7].

Važno je spomenuti da je *R-studio* integrirano razvojno okruženje (IDE- „*integrated development environment*“) za rad s *R jezikom*, a nije samostalni programski jezik. *R-studio* pruža korisnicima okruženje koje uključuje konzolu, uređivač koda s isticanjem sintakse i integriranu pomoć, što olakšava proces programiranja i analize. Razlika između *R-a* i *R-studio* je ta da je *R* programski jezik za statističke analize, dok je *R-studio* alat koji olakšava razvoj i izvršenje koda, omogućujući korisnicima bolju organizaciju rada i brži razvoj skripti [7].

Jedna od glavnih prednosti alata *R-studio* u hidrologiji je njegova sposobnost za ponavljanje analiza za različite skupove podataka, što znači da istraživači mogu ponavljati analize i primjenjivati ih na različitim mjernim postajama. Također, postoji čitav niz specijaliziranih paketa unutar *R-a* koji olakšavaju rad sa statističkim metodama, vremenskim serijama i prostornim analizama, što je ključan aspekt u hidrotehnici [7].

Paketi koji su korišteni u ovom radu su: *lubridate*, *lmomco*, *fitdistrplus*, *ADGofTest*, *dplyr*, *extraDistr*, *ggplot2*, *evd*, *VGAM*, *tidyr*, *reshape2* i *lmom*.

### 3. FORMIRANJE I POČETNA ANALIZA VREMENSKOG NIZA

Početna analiza vremenskog niza podrazumijeva korištenje negrupiranih podataka kao ulazne parametre u početak proračuna. Negrupirani podatci su dobiveni od DHMZ-a kao podloga za proračun velikih voda. Za proračun vjerojatnosti pojave velikih voda u radu su korištene metoda godišnjih maksimuma (AM metoda) i metoda vršnih prekoračenja praga (POT metoda). Za statističku analizu nam je potreban dovoljno dug i homogen niz, međutim izmjereni niz podataka nije pouzdan jer u historijatu su vidljive promjene na samoj vodomjernoj postaji, a također izgradnja sustava obrane od poplava kroz godine i uređenja obale su utjecale na homogenost i pouzdanost podataka.

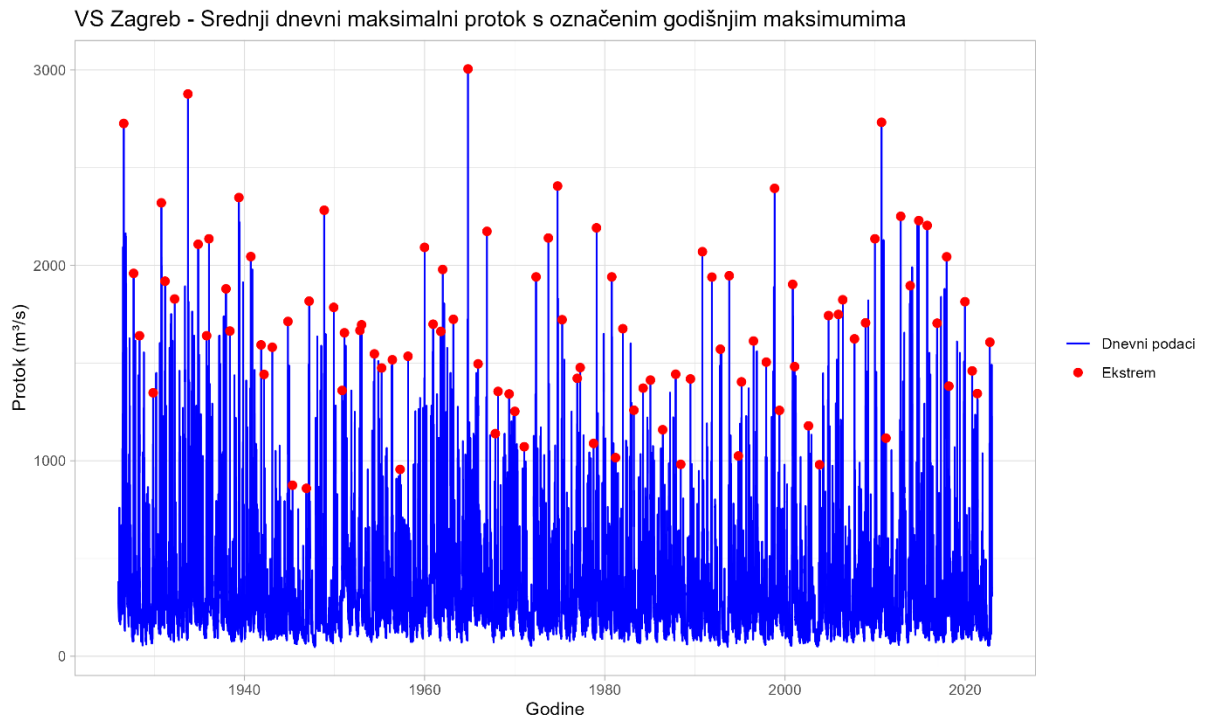
#### 3.1. Formiranje godišnjih nizova

Niz godišnjih maksimuma formira se odabirom maksimalnih vrijednosti promatranog parametra za svaku pojedinu godinu unutar vremenskog niza. Ovaj postupak omogućava identifikaciju ekstrema unutar svake godine, čime se dobiva niz maksimalnih godišnjih vrijednosti. S druge strane, nizovi za POT metodu formiraju se odabirom svih vrijednosti koje prelaze određeni prag unutar promatranog perioda.

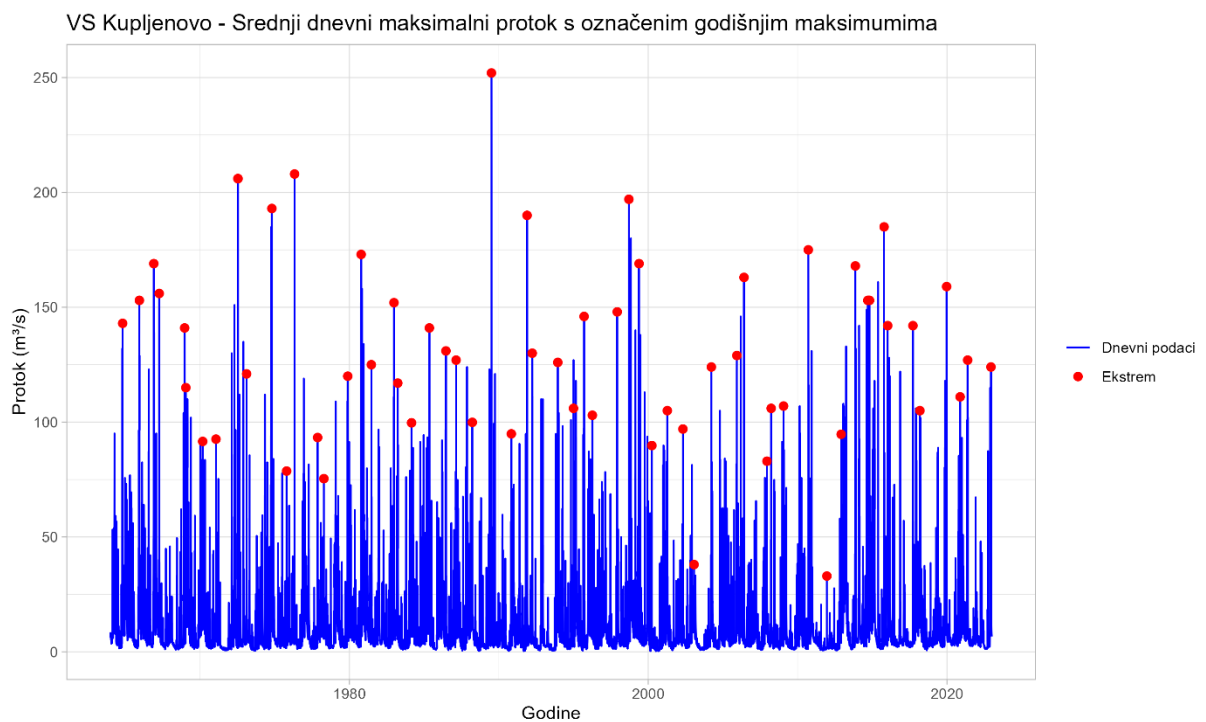
##### 3.1.1. Metoda godišnjih maksimuma

Metoda godišnjih maksimuma (AM metoda) temelji se na određivanju maksimalnih vrijednosti protoka za svaku godinu, sortiranju tih vrijednosti i korištenju statistike za prognoziranje vrijednosti velikih voda. Glavna zamjerka ove metode je to što odbacuje velik broj zabilježenih podataka iz razloga jer se uzimaju najveće vrijednosti protoka u godini, samim time jedan dio podataka se zanemaruje [1]. Sve analize i grafički prikazi izrađeni su pomoću R programskog jezika.

Prvi korak pri korištenju metode godišnjih maksimuma je izdvajanje maksimalnog protoka za određenu godinu te takvi su prikazani u tablicama 2.2 za VS Zagreb i 2.5 za VS Kupljenovo. Grafički prikaz ekstremnih događaja za svaku godinu prikazan je na slikama 6 za VS Zagreb i 7 za VS Kupljenovo.



**Slika 6:** Prikaz ekstremno velikih godišnjih protoka za VS Zagreb za razdoblje od 1924. do 2022.



**Slika 7:** Prikaz ekstremno velikih godišnjih protoka za VS Kupljenovo za razdoblje od 1964. do 2022.

### 3.1.2. Metoda vršnih prekoračenja praga

Metoda vršnih prekoračenja praga (POT metoda) temelji se na odabiru svih protoka koji prelaze određenu graničnu vrijednost ili prag. Ova metoda koristi veći broj podataka od godišnjih maksimuma jer uzima u obzir sve značajnije vrijednosti protoka iznad praga. Ova metoda je pogodnija za kraće vremenske serije ili za područja s učestalim poplavama gdje nemamo veliki skup podataka. Metoda prekoračenja je fleksibilnija zbog mogućnosti odabira različitih vrijednosti praga, pa se samim time mijenjaju ulazne vrijednosti u proračun [1].

Odabir praga jedan je od glavnih nedostataka ove metode pošto je to često subjektivni proces ili se za teoretske pristupe za odabir praga često ne mogu zadovoljiti pretpostavke potrebne za upotrebu određenih distribucija koji opisuju taj Markovljev proces [1]. U radu je odabrana vrijednost praga koja kako bi se dobila vrijednost od prosječno 2 prekoračenja godišnje. Znanstvenici predlažu kako bi za povoljnije rezultate POT-metode naspram AM metode, trebali uzeti minimalno 1.65 prekoračenja praga godišnje [8]. Odabrane vrijednosti pragova za vodomjerne stanice korištene u ovom radu dane su u tablici 3.1.

Variranjem praga može se izabrati prag pri kojemu je broj javljanja pikova raspodijeljen po Poissonovom zakonu tako da bude zadovoljen uvjet [1]:

$$\frac{VAR(\eta_t)}{E(\eta_t)} = 1$$

gdje je:

$VAR(\eta_t)$ ...odgovarajuća varijanca broju javljanja prekoračenja

$E(\eta_t)$ ... broj javljanja prekoračenja

$$0.8 < \frac{VAR(\eta_t)}{E(\eta_t)} < 1.2$$

Rezultati testiranja prethodno prikazana dva izraza Poissonove raspodjele za analizirane vodomjerne postaje prikazani su u tablici 3.1:

**Tablica 3.1: Poissonove vrijednosti za odabrane pragove prekoračenja za VS Zagreb i VS Kupljenovo**

VS Zagreb (1989.-2022.)		VS Kupljenovo (1989.-2022.)	
Prag	$VAR(\eta_t) / E(\eta_t)$	Prag	$VAR(\eta_t) / E(\eta_t)$
850	5.6	100	2.8
1100	6.9	70	3.2
1300	8.3		

---

Iz dobivenih rezultata vidljivo je kako nam dani uvjet ukazuje na povezanost događaja u danom nizu podataka te nam upućuje na odabir uvjeta razdvajanja određenih prekoračenja iznad praga.

Kako bi se osiguralo da uzete vrijednosti protoka koje premašuju prag nisu vezane pojave, uveli smo kriterij neovisnosti. Za potrebe proračuna uzet je kriterij kojeg je preporučilo USWRC 1982 godine [8]. Kriterij određuje broj dana između prekoračenja praga kako bi se osiguralo da nisu dio iste pojave.

$$\theta < 5 \text{ dana} + \log(A)$$

gdje je:

$\theta$ ... minimalan broj dana između dva mjerenja

A... površina sliva.

Kako bi osigurali da mjerenja protoka zavise, broj dana između pojava mora biti veći od vrijednosti  $\theta$ .

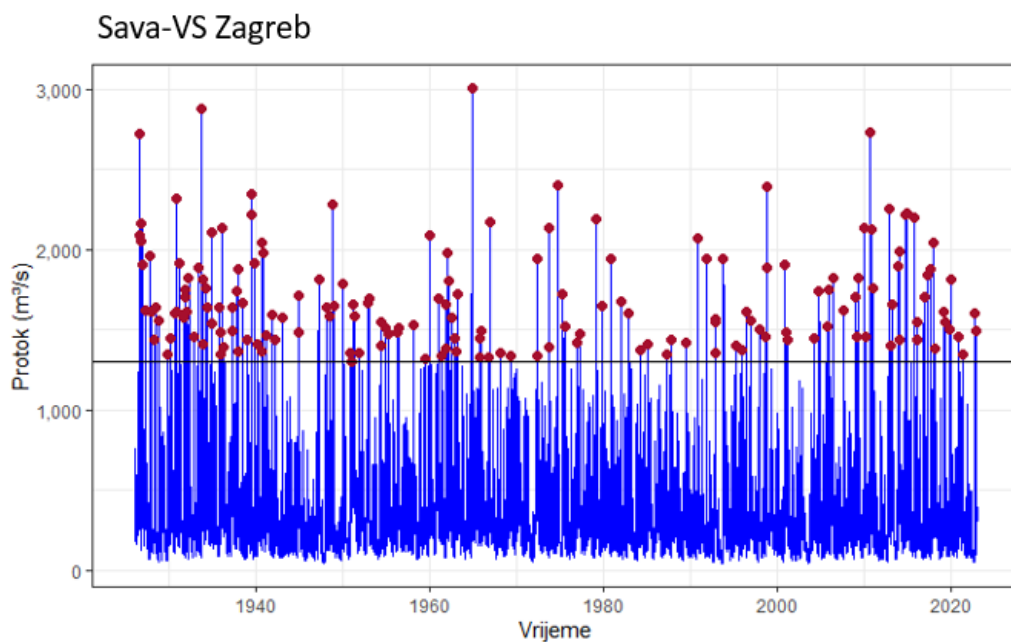
Za odabir praga preporučeno je koristiti se pragovima koji daju 2 do 5 prekoračenja godišnje kako bi dobili više rezultata koji ovise od odabiru praga prekoračenja [8]. Prikaz pragova te godišnjih prekoračenja za slivove prikazan je na tablici 3.2.

**Tablica 3.2: Vrijednost praga i pripadajući broj prekoračenja godišnje za VS Zagreb i VS Kupljenovo**

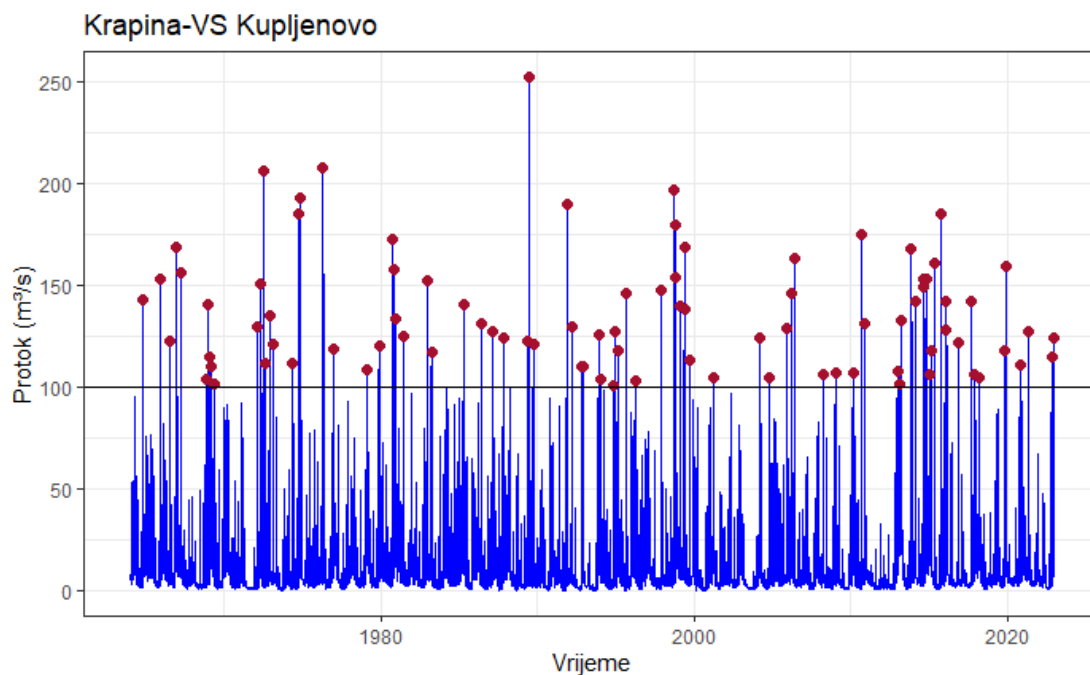
VS Zagreb (1989.-2022.)		VS Kupljenovo (1989.-2022.)	
Prag	Broj prekoračenja	Prag	Broj prekoračenja
850	3.8	100	0.94
1100	2.9	70	2.9
1300	2.1		

Nadalje u proračunu kao pragovi za proračun prekoračenja odabrani su 1300 m<sup>3</sup>/s za VS Zagreb te 70 m<sup>3</sup>/s za VS Kupljenovo. Obrazloženje odbacivanja drugih pragova pojašnjeno je kasnije u poglavlju 5. Rezultati.

Za VS Zagreb odabrani prag te ekstremi iznad praga prikazani su na slici 8, dok za VS Kupljenovo su prikazani na slici 9.



**Slika 8:** Grafički prikaz ekstrema iznad praga u iznosu od  $1300 \text{ m}^3/\text{s}$  za VS Zagreb za razdoblje od 1924. do 2022.



**Slika 9:** Grafički prikaz ekstrema iznad praga u iznosu od  $100 \text{ m}^3/\text{s}$  za razdoblje od 1964. do 2022.

---

## 3.2. Početna analiza nizova

Na statistički skup podataka, predstavljen nizom vrijednosti slučajne varijable, mogu se primijeniti metode matematičke statistike. Prije primjene metode matematičke statistike preporuča se provjeravanje sljedećih kriterija:

- Članovi niza su slučajne varijable
- Članovi niza su međusobno neovisni
- Niz mora biti dovoljno dug
- Niz mora biti homogen
- Članovi niza moraju biti stacionarni

Protoci kao i ostale hidrološke veličine mogu se smatrati slučajnima jer na njih utječu veliki broj faktora. Zbog velikog broja faktora koji utječu može se zaključiti kako su izmjereni protoci u našem radu slučajne veličine [9].

Uzastopna mjerenja ne smiju utjecati na iduće mjerenje, tako se za godišnje ekstreme može usvojiti da su međusobno neovisni jer se u AM metodi uzima jedan godišnje dok se kod POT metode, ovisnosti između ekstrema riješene kriterijem koji je prikazan prethodno.

U hidrološkoj praksi uobičajeno je pravilo da se za statističku analizu koriste nizovi izmjerenih podataka koji obuhvaćaju najmanje 30 godina [10]. S obzirom na to da na VS Zagreb imamo podatke unazad 96 godina možemo reći kako je naš niz dovoljno dug za analizu. Na VS Kupljenovo imamo niz podataka od otprilike 58 godina što također možemo smatrati dovoljno velikim nizom za korištenje u analizama [9].

## 3.3. Homogenost niza

Provjera niza provodi se kako bi se ustanovilo dali su podatci uzeti iz dvije ili više različitih pod skupova izmjerenih podataka. Niz se provjerava pomoću testa homogenosti koji osigurava da su svi podatci nekog skupa (vremenskog niza) uzeti iz istog podskupa. Do pojave nehomogenosti dolazi promjenom kote nule vodomjera na nekoj postaji, pri izgradnji preljeva koji utječu na pojavu maksimalnih protoka, izgradnja HE itd.

### 3.3.1. Kolmogorov-Smirnov test homogenosti

Kolmogorov-Smirnov test (KS-test) homogenosti se koristi za određivanje da li dva uzorka potječu iz iste distribucije. Kako bi mogli provesti test K-S test homogenosti potrebno je niz izmjerenih podataka podijeliti na dva niza gdje granica predstavlja promjenu u genezi podataka [11]:

$$d = \frac{z}{\sqrt{n}}$$



---

$$\sqrt{n} = \sqrt{\frac{k * l}{k + l}}$$

gdje :

k i l ...predstavljaju dva niza na koje su podijeljeni podatci

d...maksimalna razlika između dvije empirijske razdiobe vjerojatnosti

z...slučajna varijabla koja odgovara funkciji Kolmogorova L(z)

Nadalje, za nizove se računaju empirijske razdiobe vjerojatnosti te se pomoću funkcije Kolmogorova dobiju vrijednosti p koje se dobiju [11] :

$$p = 100[1 - L(z)]$$

gdje se vrijednosti p interpretiraju na sljedeći način:

p<1% - homogenost nije zadovoljena

1%<p<5% - hipoteza o homogenosti nije sigurna

p≥5% - homogenost nije zadovoljena

### 3.3.1.1. Provjera homogenosti niza za podatke VS Zagreb

Iz historijata je vidljivo kako podatci VS Zagreba kroz razdoblje od 96 godina odlučili smo uzeti godinu u kojoj je došlo do velike promjene na mjerenje protoka.

Godine izgradnje preljeva Jankomir i kanala Odra je uzeta kao godina provjere homogenosti dvaju skupa podataka jer ti objekti (dijelovi sustava obrane od poplava izgrađeni 1975.) imaju utjecaj na smanjenje velikih voda. Tako da je 1975. godina odabrana kao prijelomna godina gdje dijelimo podatke na dva niza na kojima provjeravamo homogenost.

Provjera homogenosti dvaju niza provedena je pomoću „R-studia“ (paket : *ADGofstest*) te na slici 10 su prikazani rezultati :

```
Asymptotic two-sample Kolmogorov-Smirnov test
```

```
data: flow_pre_1975 and flow_post_1975  
D = 0.077563, p-value < 2.2e-16  
alternative hypothesis: two-sided
```

**Slika 10:** Rezultati KS testa homogenosti na nizu dobivenom od DHMZ-a za VS Zagreb

---

Iz rezultata je vidljivo kako je p vrijednost iznimno mala što znači da su razdoblja nehomogena te je moguće zaključiti kako je izgradnja preljeva Jankomir i kanala Odra utjecala na homogenost podataka.

Kad dalje provjeravamo homogenost podataka od 1975. do 2022. dobijem sljedeće rezultate KS-testa (paket : *fitdistrplus*) koji su prikazani na slici 11:

```
Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: flow_post_1975
D = 0.16873, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided
```

**Slika 11:** Rezultati KS testa homogenosti podataka od 1975. do 2022. za VS Zagreb

U *R-studio* koristimo se *Pettitt testom* kako bismo odredili gdje dolazi do promjene homogenosti podataka. Rezultati su prikazani na slici 12.

```
Pettitt's test for single change-point detection

data: flow_post_1975
U* = 7110542, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two.sided
sample estimates:
probable change point at time K
                        4925
```

**Slika 12:** Pettitt test na nizu od 1975. do 2022. godine za VS Zagreb

Rezultati ukazuju kako dolazi do promjene u 4925. retku. Na tom mjestu se nalazi protok izmjeren 25.6.1988. godine.

Nadalje smo uzeli niz od 1989. godine do 2022. te na njemu provjerili homogenost. Rezultati testa prikazani su na slici 13:

```
data: flow_first_half and flow_second_half
D = 0.045096, p-value = 6.565e-06
alternative hypothesis: two-sided
```

**Slika 13 :** Rezultati KS testa za razdoblje od 1989. do 2022.

Iz rezultata je vidljivo kako p vrijednost je mala što ukazuje na nehomogenost podataka što bi uključivalo daljnje proračune homogenosti podataka te bi došlo do smanjena količine podataka što bi uvelike utjecalo na točnost podataka te se u daljnjim proračunima koriste podatci vodomjerne postaje od 1989. do 2022. , iako niz nije homogen.

---

### 3.3.1.2. Provjera homogenosti niza za VS Kupljenovo

Za vodomjernu postaju stanicu Kupljenovo dobiveni period je 1964. do 2022. godine te se kao i u slučaju VS Zagreb test homogenosti provodi za razdoblje kad su izgrađene najutjecajnije hidrotehničke građevine za VS Kupljenovo, isto kao i za VS Zagreb 1975. godina je uzeta kao godina najveće promjene u mjerenju podataka. Rezultati testa prikazani su na slici 14:

```
data: flow_pre_1975 and flow_post_1975
D = 0.065096, p-value = 1.86e-12
alternative hypothesis: two-sided
```

**Slika 14:** Rezultati KS testa homogenosti na nizu dobivenom od DHMZ-a za VS Kupljenovo

Niske p-vrijednosti pokazuju nehomogenost između dvaju perioda mjerenih podataka što potvrđuje nehomogenost podataka od 1964. do 1975. i od 1975. do 2022. godine.

Nadalje KS-testom provjeravamo homogenost niza od 1975. do 2022. na VS Kupljenovo. Rezultati testa prikazani su na slici 15:

```
data: flow_post_1975
D = 0.27566, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided
```

**Slika 15:** Rezultati KS testa homogenosti podataka od 1975. do 2022. za VS Kupljenovo

Nadalje koristimo se naredbom *Pettitt-test* kako bismo odredili mjesto na kojem dolazi do promjene u mjerenju kako bismo dobili homogeni niz. Rezultati su prikazani na slici 16.

```
data: flow_post_1975
U* = 7921110, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two.sided
sample estimates:
probable change point at time K
                        4876
```

**Slika 16:** Pettitt test na nizu od 1975. do 2022. godine za VS Kupljenovo

Iz rezultata je vidljivo da test ukazuje na promjenu u 4876. retku što je 7.5.1988. godine te, kao i za VS Zagreb, uzimamo niz od 1989. do 2022. za provjeru homogenosti, a rezultati su prikazani na slici 17.

---

```
data: flow_first_half and flow_second_half
D = 0.052343, p-value = 8.184e-08
alternative hypothesis: two-sided
```

**Slika 17:** Rezultati KS testa homogenosti za VS Kupljenovo za razdoblje od 1989. do 2022.

Rezultati ukazuju na nehomogenost niza podataka te bismo daljnjim analizama došli do minimalnog niza podataka gdje bi većinu podataka odbacili te se u nastavku bavimo nizom od 1989. do 2022. na VS Kupljenovo, iako taj niz nije homogen.

---

## 4. STATISTIČKA OBRADA HIDROLOŠKIH PODATAKA

Vrijednost mjerenih protoka često ovisi o različitom broju faktora, koji različito utječu na vrijednost protoka, te iz tog razloga u hidrologiji protoke nazivamo slučajnim varijablama.

U analizi hidroloških podataka kao što su protoci i vodostaji statističkim metodama koriste se različite empirijske funkcije raspodjele vjerojatnosti (Weibull, Gringtorn, Hazen, Blom, Cunnane, California, Čegodajev, Adamowski i EWSD), te teorijske funkcije raspodjele vjerojatnosti, uključujući Gaussovu ili normalnu distribuciju, Galtonovu ili log-normalnu distribuciju, gama funkciju, GEV (*Generalized extreme value distribution*) distribuciju, Pearson III distribuciju, log-Pearson III distribuciju i Gumbelovu distribuciju [1].

U radu kao empirijske funkcije distribuciju vjerojatnosti korištene su Čegodajeva funkcija koja je najčešće korištena za rijeku Savu. Teorijske funkcije distribuciju koje smo koristili u analizama na dvije opisane vodomjerne stanice su log-normalna, GEV (*Generalized extreme value distribution*) raspodjela, Poissonova, eksponencijalna i Gumbelova raspodjela [1]. Nadalje log-Pearson III funkcija te Pearson III raspodjela korištena u hidrološkoj studiji čiji su rezultati korišteni u diskusiji.

Kako bismo odredili empirijske distribucije, odnosno kumulativne funkcije raspodjele vjerojatnosti, prethodno smo uradili početnu analizu nizova.

### 4.1. Empirijske funkcije raspodjele vjerojatnosti

Najveći dio podataka u hidrologiji proizlazi iz mjerenja podataka, ograničenih u smislu broja godina mjerenja. Iz tog razloga koristimo se empirijskim funkcijama raspodjele vjerojatnosti kako bismo matematičkim jednadžbama pokušali predvidjeti ponašanje sustava kojeg analiziramo.

U ovom poglavlju bit će prikazan pregled kroz empirijske vjerojatnosti korištene u proračunu, kao i njihove karakteristike. Korištene empirijske funkcije su proizašle iz statističke matematike te se koriste u hidrološkoj praksi [1].

#### 4.1.1. Primjena empirijskih funkcija raspodjele

Kada promatramo ekstremne vrijednosti hidrološkog procesa, minimalnog i maksimalnog protoka, uzorak se formira izdvajanjem jedne maksimalne vrijednosti iz svake godine kao što je i prije navedeno.

Niz podataka formira po padajućim vrijednostima :  $x_m \geq x_{m+1}$  , ili po rastućim vrijednostima  $x_m \leq x_{m+1}$  gdje je  $m = 1, 2, 3, \dots, N$ .

---

S takvim uređenim uzorkom možemo odrediti empirijsku krivulju učestalosti. Za korištenje podataka o godišnjim maksimuma u sklopu ovog rada korištena je sljedeća funkcija distribucije maksimuma:

Čegodajev :  $\frac{m-0.3}{N+0.4}$ , gdje je m (m=1, 2, 3 ... N) redni broj člana u uređenom uzorku promatranog niza.

## 4.2. Teorijske funkcije raspodjele vjerojatnosti

Teorijske funkcije raspodjele koristimo pri modeliranju različitih procesa čije karakteristike su dobro poznate. U hidrologiji često predviđamo ponašanje hidroloških veličina za povratna razdoblja 10, 20, 25, 50, 100 i 1000 godina, koja iziskuje korištenje podataka od 50 do 100 godina. Empirijskim funkcijama ne možemo prognozirati ponašanje hidroloških parametara za određeno razdoblje. Zaključno, teorijskim funkcijama koristimo se kako bi se na osnovu hidrometeoroloških podataka opažanih u prošlosti, pretpostavila vjerojatnost pojave veličina u budućnosti.

Prave funkcije ponašanja hidroloških veličina nikad nisu poznate, stoga je potrebno izabrati funkciju i odrediti njene parametre iz podataka u uzorku. Kada uočimo zadovoljavajuće poklapanje, možemo pretpostaviti vjerojatnost pojavljivanja ekstremnih događaja.

Iskustvo je pokazalo da se samo određeni broj teorijskih funkcija raspodjele koristi u hidrologiji. U radu korištene su log-normalna, Gumbelova i GEV distribucija za AM metodu te log-normalna i eksponencijalna za POT metodu [1].

### 4.2.1. Log-normalna teorijska raspodjela

Log-normalna naziva se i Galtonova distribucija, distribucija je neprekidna raspodjela slučajne varijable čiji je logaritam normalno distribuiran [12].

Mnoge hidrološke veličine imaju karakteristiku da nemaju negativnih vrijednosti, kao što su protok, padaline, pronos nanosa i druge. Također, karakteristično je da u tim veličinama ne postoji gornja granica koja bi označavala maksimalni doseg neke vrijednosti te veličine. Zbog prirode istih, često logaritamska raspodjela najbolje opisuje pojave spomenutih hidroloških veličina. Logaritamska vrijednost tih veličina kreće se između minus beskonačno i plus beskonačno. Zaključno tome, logaritamska funkcija je pogodna jer se može primijeniti na sve pozitivne vrijednosti. Najmanja vrijednost u nizu poprima vrijednost 0 dok gornje granice nema [12].

Kada se izraz  $y = \ln(x), x > 0$  uvrsti u funkciju gustoću normalne raspodjele vjerojatnosti dobijemo funkciju gustoće log-normalne raspodjele [1]:

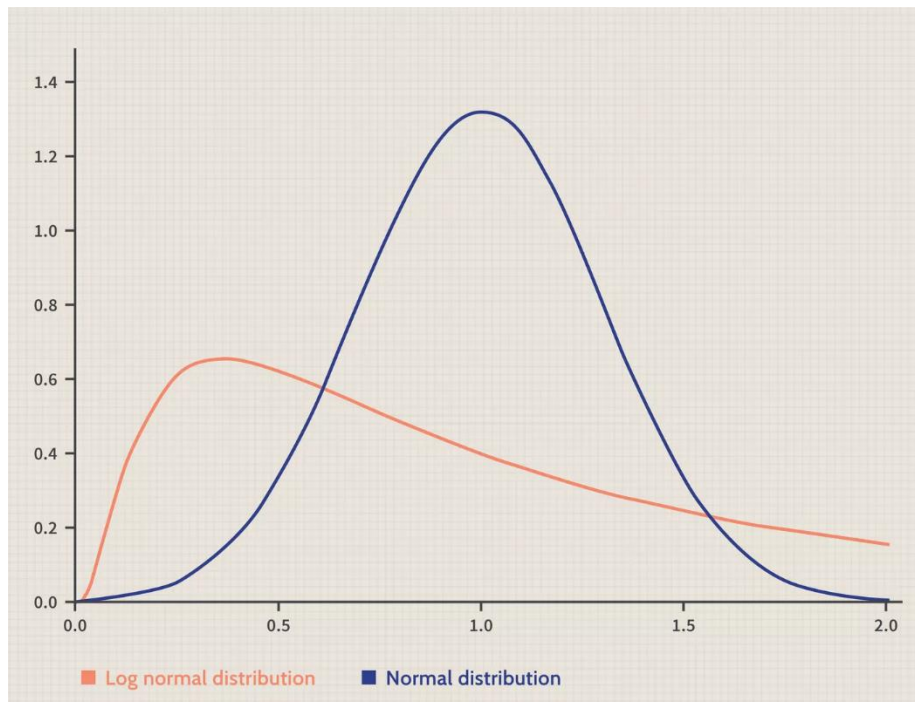
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < y < +\infty \quad \begin{cases} \text{za } x = e^y > 0 \\ 0 \text{ za } x \leq 0 \end{cases}$$

Gdje je :

$y = \ln x$  ( $x$  je moguća vrijednost slučajne varijable (npr. protoka))

$\mu$  .... srednja vrijednost prirodnog logaritma varijable

$\sigma$ .... standardna devijacija prirodnog logaritma varijable



**Slika 18:** Prikaz log-normalne distribucije [12]

Karakteristike log-normalne distribucije [13]:

- Log-normalna raspodjela je pozitivno asimetrična (tj. ima dugu desnu stranu repa).
- Varijanca log-normalne raspodjele je često velika
- Očekivana srednja vrijednost varijable veća je od medijana (zbog pozitivne asimetrije).

#### 4.2.2. Gumbelova teorijska distribucija

Ova teorijska distribucija poznata je kao generalizirana distribucija ekstremnih vrijednosti tipa I, koja se koristi za modeliranje distribucije maksimuma ili minimuma nekog niza podataka. Koristi se u predviđanju vjerojatnosti događaja ekstremnih vrijednosti potresa, poplava ili drugih prirodnih katastrofa [14].

---

Gumbelova distribucija ima dva oblika. Jedan koji se temelji na najmanjem ekstremu, a drugi se temelji na najvećem ekstremu, što nazivamo minimalnim i maksimalnim slučajevima. Za potrebe diplomskog rada korišten je oblik temeljen na najvećem ekstremu.

Funkcija gustoće vjerojatnosti definirana je sljedećim izrazom [1]:

$$P(x) = \frac{1}{\alpha} \exp \left[ \frac{-(x-u)}{\alpha} - e^{-\frac{(x-u)}{\alpha}} \right]$$

gdje je:

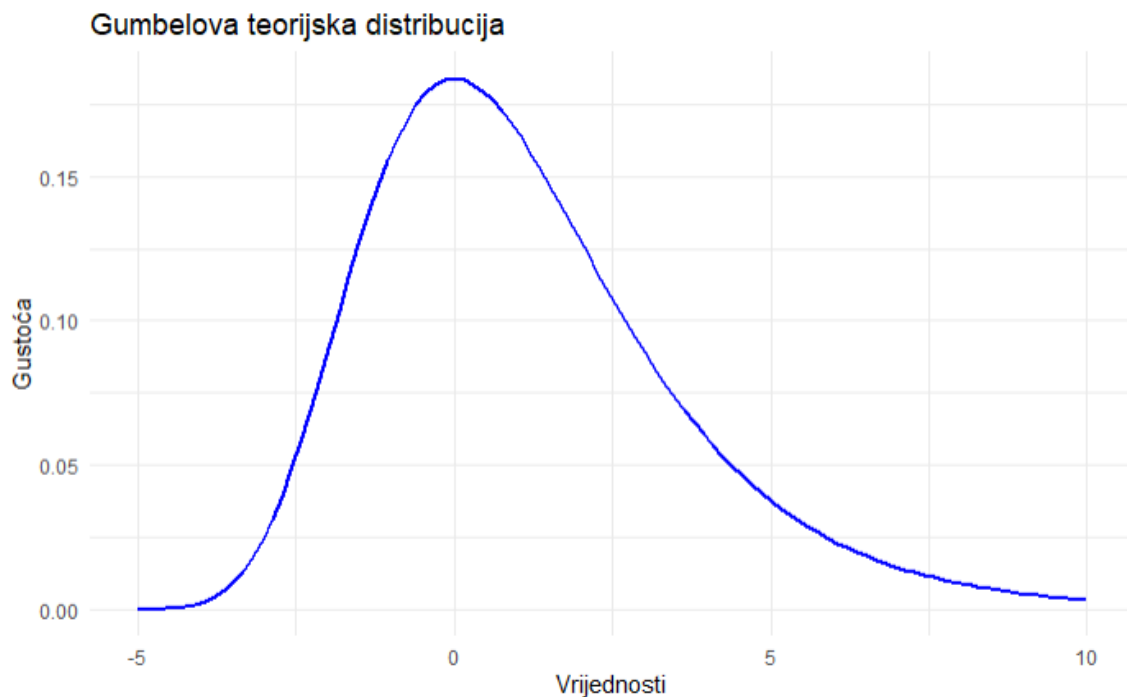
$\alpha$ ... parametar oblika raspodjele

$u$ ... parametar mjerila

Svojstva Gumbelove distribucije su:

- Distribucija je asimetrična s dugim repom na desnoj strani za maksimume ili na lijevoj strani za minimume
- Parametri distribucije mogu se mijenjati kroz vrijeme što omogućuje modeliranje promjena u ekstremnim vrijednostima.

Prikaz distribucije:



**Slika 19:** Primjer Gumbelove distribucije iz *R-studia*



---

### 4.2.3. Distribucija generalnih ekstremnih vrijednosti (GEV)

Distribucija generalnih ekstremnih vrijednosti, skraćeno „GEV“, koristi se za modeliranje ekstremnih događaja u hidrologiji, za maksimalne ili minimalne vrijednosti u skupu podataka koje promatramo. GEV distribucija se često koristi kao aproksimacija za modeliranje maksimuma dugih nizova slučajnih varijabli [15].

U statističkoj matematici, generalizirana distribucija ekstremnih vrijednosti je familija neprekidnih distribucija vjerojatnosti koje su razvijene kod teorije ekstremnih vrijednosti. Distribucija se koristi kako bi se poopćile Gumbel, Fréchet i Weibull distribucije, također poznate kao distribucije ekstremnih vrijednosti tipa I, II i III. GEV distribucija se često koristi kao aproksimacija za modeliranje maksimuma gdje proučavamo duge nizove slučajnih varijabli [1].

GEV funkcija definirana je izrazom:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma} t(x)^{\xi+1} e^{-t(x)},$$

$$\text{gdje } t(x) \equiv \begin{cases} \left[1 + \xi \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right), & \xi = 0 \end{cases}$$

$\mu$ ... parametar lokacije (može biti bilo koji realan broj)

$\sigma$ ... parametar mjerila

$\xi$ ...parametar oblika.

### 4.2.4. Pearson III raspodjela

Od Pearsonovih 14 funkcija raspodjele, kao najčešće korištena za opis hidrološkog ponašanja niza podataka, koristi se tip 3 raspodjele. Pearsonove raspodjele izvorno su osmišljene kako bi se modelirala vidljivo iskrivljena opažanja [1].

Pearson III raspodjela ili troparametarska gama (hi-kvadrat distribucija) raspodjela, jedna je od članica Pearsonove porodice raspodjela, koja uključuje širok spektar oblika raspodjela od simetričnih do izrazito asimetričnih [16].

Personova distribucija tipa 3 dobije se tako, da se u izraz za dvoparametarsku Gama raspodjelu, uvede i treći parametar, koji se naziva parametar položaja  $x_0$ . Parametar položaja predstavlja udaljenost od koordinate do početka raspodjele, u hidrologiji je to najmanja vrijednost hidrološke veličine [17].

Važno je napomenuti da troparametarska Pearsonova 3 raspodjela u nekim slučajevima može generirati nepouzdan koeficijent asimetrije, osobito kada se radi o vrlo dugim nizovima podataka koji obuhvaćaju više od 80 godina. To se događa zato što u dugim vremenskim nizovima može doći do ekstremnih vrijednosti ili promjena u distribuciji podataka koje

---

Pearsonova 3 raspodjela ne može adekvatno opisati, što rezultira nepouzdanim ili nestabilnim procjenama asimetrije [17].

Funkcija gustoće vjerojatnosti definirana je sljedećim izrazom:

$$p(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} (x - x_0)^{\alpha-1} e^{-\frac{x-x_0}{\beta}}, x_0 < x < \infty$$

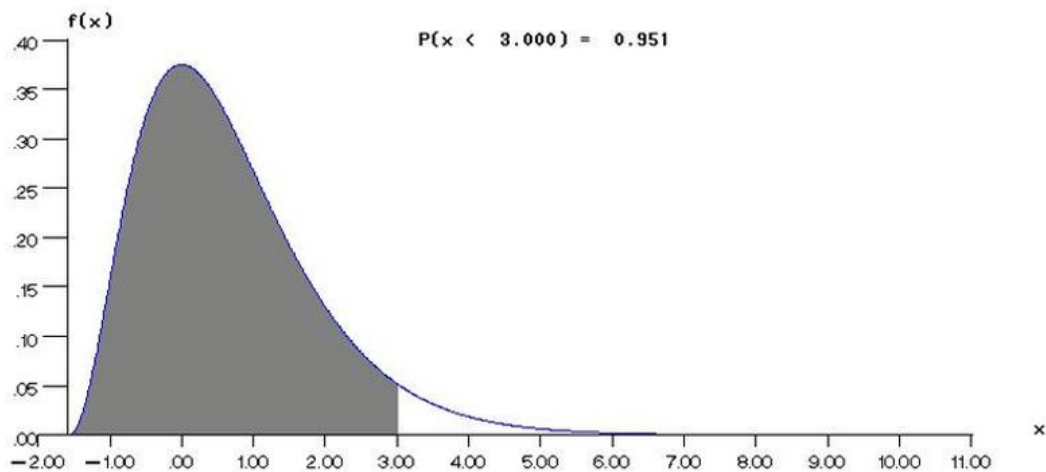
gdje je:

$\alpha$ ... parametar oblika raspodjele te ujedno i vrijednosti moda

$\beta$ ... parametar mjerila

$x_0$ ...parametar položaja

$\Gamma(\alpha)$ ... kompletna gama funkcija.



Slika 20: Primjer Pearson III distribucije (izvor [17])

### 4.3. Statistički testovi prilagodbe podataka

Statistički testovi su alati koji se koriste za donošenje zaključaka ili odluka o podacima, na temelju podudaranja izmjerenih podataka s teorijskim raspodjelama, s nekim drugim razmatranim podacima ili nekim matematičkim funkcijama. Testovi mogu biti parametarski ili neparametarski.

---

### 4.3.1. Kolmogorov-Smirnov test

Kolmogorov-Smirnov (K-S test) je neparametarski test, koji se koristi za usporedbu distribucije skupa podataka s teoretskom distribucijom, ili za usporedbu distribucija dvaju skupova podataka. K-S testom možemo procijeniti koliko se dvije distribucije razlikuju na temelju najveće razlike između njihovih kumulativnih distribucijskih funkcija [18].

U našem slučaju koristimo test kako bi smo odredili najveću udaljenost između empirijske i teorijske funkcije raspodjele. Izraz za K-S test je [14]:

$$D = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$$

gdje je :

sup... najveća vrijednost (supremum)

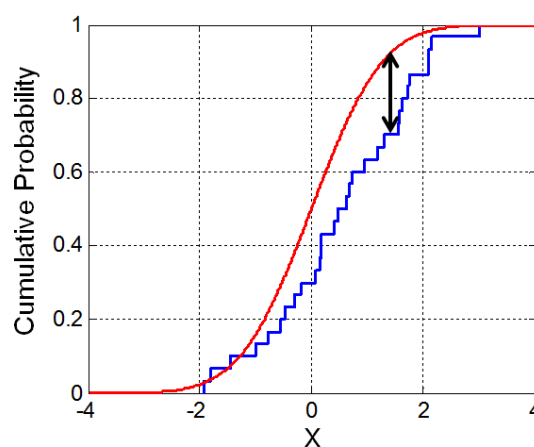
$F_n(x)$ ... empirijska distribucija uzorka

$F(x)$ ... teorijska distribucija uzorka.

K-S test vraća vrijednost statistike D, koja predstavlja najveću razliku između kumulativne distribucije uzorka i teorijske distribucije. Ako je ova razlika velika, to sugerira da se uzorak značajno razlikuje od teorijske distribucije, odnosno, da ne prati predviđeni model distribucije.

Pored statistike D, test također uključuje p-vrijednost, koja nam omogućava donošenje zaključaka o značajnosti tih razlika. Ako je p-vrijednost manja od odabranog nivoa značajnosti (obično 0.05), možemo odbaciti nultu hipotezu, što znači da postoji statistički značajna razlika između empirijske i teorijske distribucije [18].

Ako imamo uzorak podataka koji želimo testirati na normalnost, možemo primijeniti K-S test koristeći normalnu distribuciju kao teorijski model. Test će nam pokazati da li je razlika između uzorka i normalne distribucije dovoljno velika da sugerira kako uzorak nije izvučen iz normalne distribucije [18].



**Slika 21:** Prikaz K-S testa [18]

---

### 4.3.2. Anderson-Darling test

U provjeri podudarnosti teorijskih distribucija i empirijskih distribucija skupa korišten je i Anderson-Darling (A-D) test. A-D test je neparametarski statistički test, koji je proširenje Kolmogorov-Smirnov testa, ali je osjetljiviji na krajevima distribucija, što ga čini korisnim kada su krajevi odnosno maksimalne vrijednosti važne za analizu. Izraz koji predstavlja A-D test [1]:

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(2i - 1)(\ln(F(X_i)) + \ln(1 - F(X_{n+1-i})))]$$

gdje je:

n... broj podataka u nizu

X<sub>i</sub>...sortirane vrijednosti uzorka

F(X<sub>i</sub>)...teorijska kumulativna distribucija

Anderson-Darling test se koristi za procjenu koliko dobro empirijska distribucija podataka odgovara teorijskoj distribuciji, s posebnom pažnjom na krajeve distribucije. Statistika A-D testa daje vrijednost koja se uspoređuje s kritičnim vrijednostima koje ovise o odabranoj teorijskoj distribuciji i broju podataka u uzorku. Ako je vrijednost testa veća od kritične vrijednosti, nulta hipoteza da podatci slijede odabranu teoretsku distribuciju može se odbaciti [14].

A-D test je osobito koristan u slučajevima gdje su krajevi distribucije važni za analizu, kao što su analize ekstremnih vrijednosti ili distribucije s teškim repovima [1].

---

## 5. REZULTATI

### 5.1. Metoda godišnjih maksimuma

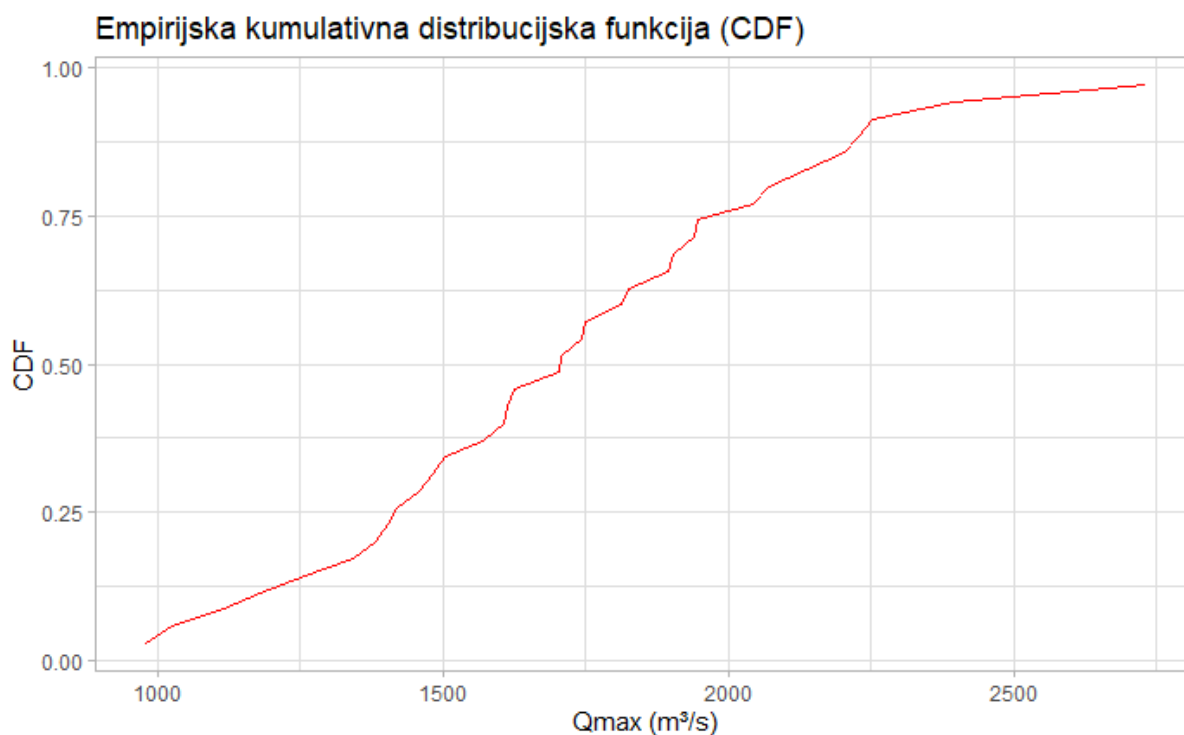
#### 5.1.1. VS Zagreb

Prvi korak pri korištenju metode godišnjih maksimuma je izdvajanje maksimalnog protoka za određenu godinu i rangiranje od najvišeg protoka prema najmanjem (tablica 5.1).

**Tablica 5.1:** Prikaz godišnjih maksimuma od najvećeg prema najmanje za VS Zagreb za razdoblje do 1989. do 2022.

n	Godina	Protok [m <sup>3</sup> /s]
1	2010	2732
2	1998	2394
3	2012	2251
4	2014	2229
5	2015	2204
6	2009	2136
7	1990	2070
8	2017	2044
9	1993	1947
10	1991	1940
11	2000	1903
12	2013	1896
13	2006	1824
14	2019	1814
15	2005	1749
16	2004	1743
17	2008	1706

n	Godina	Protok [m <sup>3</sup> /s]
18	2016	1704
19	2007	1624
20	1996	1613
21	2022	1607
22	1992	1571
23	1997	1505
24	2001	1482
25	2020	1460
26	1989	1419
27	1995	1404
28	2018	1382
29	2021	1344
30	1999	1258
31	2002	1179
32	2011	1116
33	1994	1025
34	2003	980



**Slika 22:** Grafički prikaz empirijske kumulativne distribucije za VS Zagreb za razdoblje do 1989. do 2022.

Nadalje prikazane su vrijednosti za K-S i A-D test (slika 23 i slika 25).

Distribution <chr>	Statistic <dbl>	AD_value <dbl>
Gumbel	0.2622048	0.9633959
Gev	0.2659956	0.9611119
Log-normal	0.1622813	0.9975511

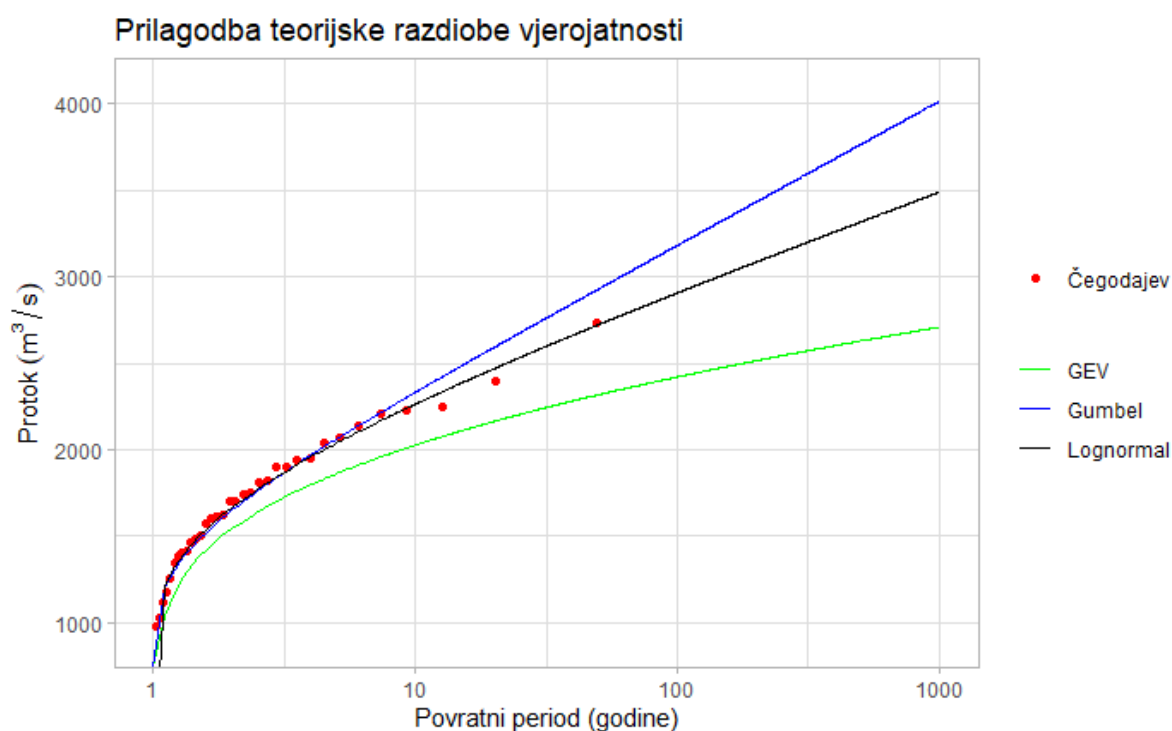
**Slika 23:** Dobivene vrijednosti za Anderson-Darling test za vrijednosti u tablici 5.1.

Distribution <chr>	Statistic <dbl>	D_value <dbl>
Gumbel	0.07833796	0.9745557
GEV	0.08308982	0.9575738
Log-normal	0.06667712	0.9956452

**Slika 24:** Dobivene vrijednosti za Kolmogorov-Smirnov test za vrijednosti u tablici 5.1.

Iz rezultata se očituje kako log-normalna distribucija pokazuje najbolje rezultate testa, odnosno ima najveće p-vrijednosti.

U nastavku je dan grafički prikaz prilagodbe empirijske vjerojatnosti sa teorijskim distribucijama.



**Slika 25** : Prilagodba teorijske razdiobe vjerojatnosti za VS Zagreb za razdoblje do 1989. do 2022.

Iz grafa je vidljivo kako log-normalna teorijska distribucija najbolje odgovara Čegodajevoj (empirijskoj) distribuciji. Očitane vrijednosti odabrane distribucije za karakteristično povratno razdoblje dane su u tablici 5.2:

**Tablica 5.2:** Vrijednost povratnih perioda za Log-normalnu distribuciju za razdoblje do 1989. do 2022.

Povratni period [god]	Log-normal [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]
5	2038
10	2264
25	2532
50	2723
100	2906
1000	3488

Vidljivo je kako je predviđanje za 1000 godišnju vodu u iznosu od 3488  $\text{m}^3/\text{s}$  što je otprilike 15 % veći protok od maksimalnog protoka mjernog na VS Zagreb (3005  $\text{m}^3/\text{s}$ ).

---

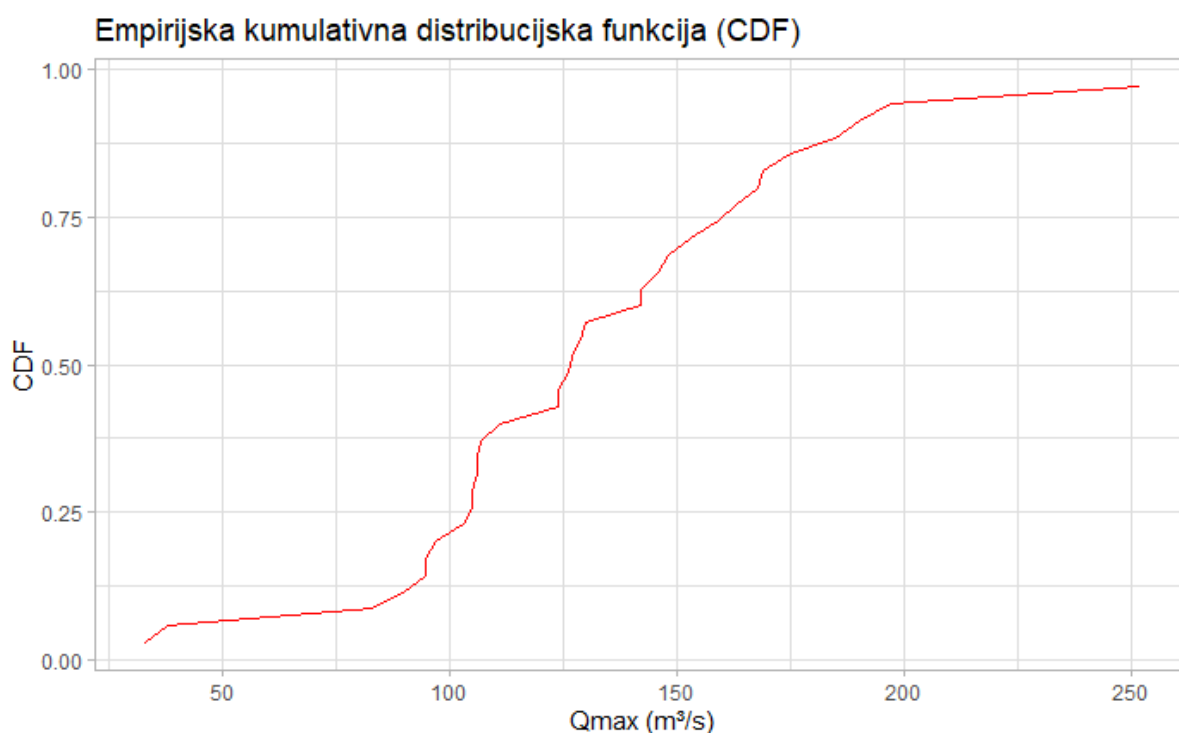
### 5.1.2. VS Kupljenovo

Za VS Kupljenovo na rijeci Krapini očitani protoci su nam dosta manje, te iz tablice 5.3 vidimo kako je razlika između najvećeg zabilježenog na nizu, te najmanjeg zabilježenog iznosi 219 m<sup>3</sup>/s.

**Tablica 5.3:** Prikaz godišnjih maksimuma od najvećeg prema najmanje za VS Kupljenovo za razdoblje do 1989. do 2022.

n	Godina	Protok [m <sup>3</sup> /s]
1	1989	252
2	1998	197
3	1991	190
4	2015	185
5	2010	175
6	1999	169
7	2013	168
8	2006	163
9	2019	159
10	2014	153
11	1997	148
12	1995	146
13	2016	142
14	2017	142
15	1992	130
16	2005	129
17	2021	127
18	1993	126
19	2004	124
20	2022	124
21	2020	111
22	2009	107
23	1994	106
24	2008	106
25	2001	105
26	2018	105
27	1996	103
28	2002	97
29	1990	94.9
30	2012	94.7
31	2000	89.8
32	2007	83
33	2003	38
34	2011	33





**Slika 26:** Grafički prikaz empirijske kumulativne distribucije za VS Kupljenovo za razdoblje do 1989. do 2022.

Vrijednosti testova proračunatih pomoću „R-studia“ za VS Kupljenovo dani su na slikama 27 i 28 :

Distribution <chr>	Statistic <dbl>	AD_value <dbl>
Gumbel	0.8120334	0.4714718
Gev	0.7938433	0.4845029
Log-normal	1.0966814	0.3098365

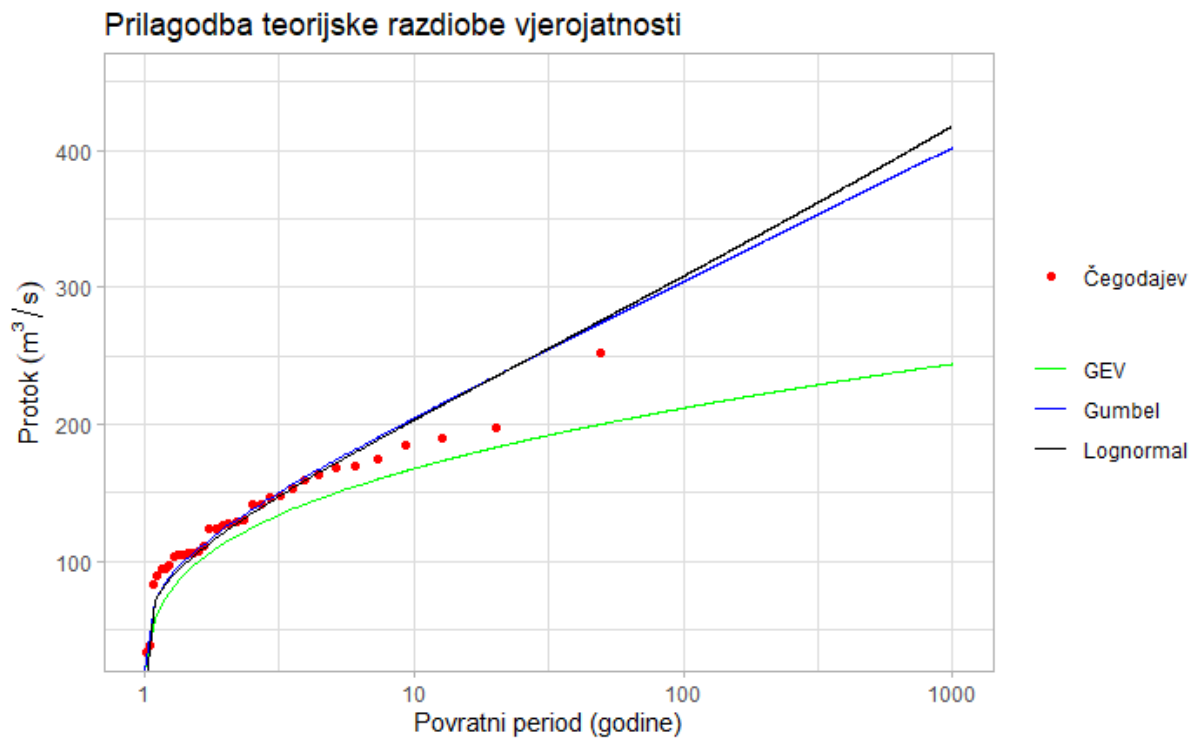
**Slika 27:** Dobivene vrijednosti za Anderson-Darling test za vrijednosti u tablici 5.3

Distribution <chr>	Statistic <dbl>	D_value <dbl>
Gumbel	0.13023929	0.5669086
GEV	0.09957588	0.8559178
Log-normal	0.14806277	0.4057536

**Slika 28:** Dobivene vrijednosti za Kolmogorov-Smirnov test za vrijednosti u tablici 5.3

Prikazani testovi prikazuju da GEV teorijska distribucija najbolje odgovara empirijskoj distribuciji za mjerene podatke na VS Kupljenovo.

Grafički prikaz empirijske funkcije distribucije mjerenih protoka kao i teorijske distribucije prikazani su na slici 29.



**Slika 29:** Prilagodba teorijske razdiobe vjerojatnosti za VS Kupljenovo za razdoblje do 1989. do 2022.

Iz grafa je uočljivo kako ni jedna od danih teorijskih distribucija ne pokazuje dobro podudaranje sa empirijskom distribucijom. U povratnim periodima za 100 i 50 godišnju vodu vidimo velike razlike između teorijskih i empirijske distribucije. Predlaže se upotrebe drugih empirijskih distribucija (npr. Pearsonove distribucije [8]), no one u ovom radu nisu uzete u obzir.

Iz navedenog odabrana je log-normalna teorijska funkcija iz razloga jer GEV distribucija pokazuje manje protoke od očitanih. Dobiveni prognozirani protoci za povratne godine dani su u tablici 5.4.

**Tablica 5.4:** Vrijednost povratnih perioda za Log-normalnu distribuciju za razdoblje do 1989. do 2022.

Povratni period [god]	Lognormal [ $m^3/s$ ]
5	170
10	203
25	245
50	276
100	308
1000	418

---

Dane vrijednosti nam prikazuju kako je za 1000 godišnju vodu, predviđeni protok 40% veći od najvećeg izmjerenog na VS Kupljenovo.

## **5.2. Metoda prekoračenja praga**

U nastavku su dani rezultati analiza za POT metodu na vodomjernim postajama.

### **5.2.1. VS Zagreb**

Odabrani prag iznosi 1300 m<sup>3</sup>/s (objašnjeno u poglavlju 3.1.2.), te tima dobivamo 56 ekstremnih događaja na danom slivu vodomjerne postaje Zagreb. Dobivene vrijednosti oduzeli smo od vrijednosti praga te smo njih koristili pri izračunu vjerojatnosti pojave velikih voda (tablica 5.5).

**Tablica 5.5** Vrijednosti protoka za uzeti prag 1300 (m<sup>3</sup>/s) za VS Zagreb

Godina	Protok (m <sup>3</sup> /s)	protok - prag (m <sup>3</sup> /s)	Godina	Protok (m <sup>3</sup> /s)	protok- prag (m <sup>3</sup> /s)
1989	1419	119	2010	1455	155
1990	2070	770	2010	1758	458
1991	1940	640	2010	2130	830
1992	1359	59	2010	2732	1432
1992	1551	251	2012	2251	951
1992	1571	271	2013	1406	106
1993	1947	647	2013	1656	356
1995	1371	71	2013	1896	596
1995	1404	104	2014	1442	142
1996	1561	261	2014	1991	691
1996	1613	313	2014	2215	915
1997	1505	205	2014	2229	929
1998	1458	158	2015	2204	904
1998	1889	589	2016	1442	142
1998	2394	1094	2016	1553	253
2000	1903	603	2016	1704	404
2001	1435	135	2017	1839	539
2001	1482	182	2017	1880	580
2004	1448	148	2017	2044	744
2004	1743	443	2018	1382	82
2005	1518	218	2019	1508	208
2005	1749	449	2019	1553	253
2006	1824	524	2019	1611	311
2007	1624	324	2019	1814	514
2008	1706	406	2020	1460	160
2009	1457	157	2021	1344	44
2009	1821	521	2022	1492	192
2009	2136	836	2022	1607	307

Nadalje provodimo KS test i AD testove prilagodbe te su njihovi rezultati prikazani na slikama 30 i 31.

Distribution <chr>	AD_Statistic <dbl>	AD_p_value <dbl>
Log-normal	0.4830925	0.7633991
Exponential	1.8659634	0.1091695

2 rows

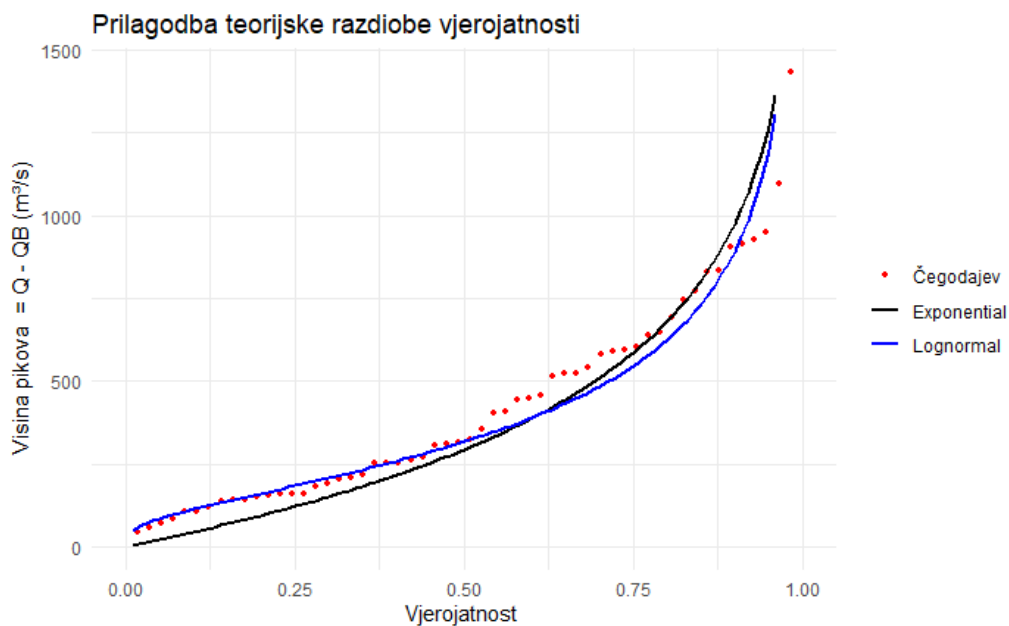
**Slika 30:** Rezultati AD testa za POT metodu na VS Zagrebu pri 2 prekoračenja godišnje

Distribution <chr>	KS_Statistic <dbl>	KS_p_value <dbl>
Log-normal	0.1004018	0.6249142
Exponential	0.1481544	0.1710416

2 rows

**Slika 31:** Rezultati KS testa za POT metodu na VS Zagrebu pri 2 prekoračenja godišnje

Iz danih rezultata vidljivo je kako oba testa pokazuju najveću vrijednost P za Log-normalnu teorijsku distribuciju. Grafički prikaz empirijske i teorijske distribucije prikazan je na slici 32.



**Slika 32:** Prilagodba teorijske razdiobe vjerojatnosti za VS Zagreb, 2 prekoračenja godišnje

Na grafu se očituje kako Log-normalna distribucija najbolje odgovara empirijskoj raspodijeli podataka prema Čegodajevu.

Kako bismo odredili povratni period, koristimo se izrazom prikazanim u nastavku [19]:

$$x_{Pr} = Q_b + F^{-1} \left( 1 - \frac{1}{\frac{M}{N} * Pr} \right)$$

gdje je:

$x_{Pr}$ ...protok za povratni period

$Q_b$ ... vrijednost praga (m³/s)

$M$ ... ukupan broj članova niza prekoračenja

$N$ ... broja godina koji promatramo

$F$ ... vjerojatnost pojave

---

Nadalje kada smo uveli jednadžbu u *R-studio* dodajemo vrijednost praga, koju smo oduzimali od vrijednosti protoka iznad praga, te dobijemo sljedeće vrijednosti prikazane na tablici 5.6.

**Tablica 5.6:** Vrijednost povratnih perioda za Lognormalnu distribuciju

Povratni period [god]	Lognormal [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]
5	2114
10	2407
25	2858
50	3253
100	3701
1000	5619

Dobiveni protok za 1000 godišnju vodu je 38 % veći u odnosu na dobiveni u AM metodi.

Kasnije kada se uzima manja vrijednost praga s više prekoračenja godišnje, vrijednost AD i KS testa je jako mala što ukazuje na nedovoljno poklapanje te smo time odbacili korištenje nižih pragova.

### 5.2.2. VS Kupljenovo

Na VS Kupljenovo prag u iznosu od  $100 \text{ m}^3/\text{s}$  daje vrijednost od 2.1 prekoračenja godišnje, što je uzeto u proračun. Dalje u tablici 5.7 su prikazani protoci te godine u kojima su zabilježeni.

**Tablica 5.7:** Vrijednosti protoka za uzeti prag 100 (m<sup>3</sup>/s)

Godina	Protok (m <sup>3</sup> /s)	protok - prag (m <sup>3</sup> /s)
1989	123	23
1989	252	152
1989	121	21
1991	190	90
1992	130	30
1992	110	10
1992	110	10
1993	126	26
1994	104	4
1994	101	1
1995	127	27
1995	118	18
1995	146	46
1996	103	3
1997	148	48
1998	197	97
1998	154	54
1998	180	80
1999	140	40
1999	169	69
1999	138	38
1999	113	13
2001	105	5
2004	124	24
2004	105	5
2005	129	29
2006	146	46
2006	163	63

Godina	Protok (m <sup>3</sup> /s)	protok - prag (m <sup>3</sup> /s)
2008	106	6
2009	107	7
2010	107	7
2010	175	75
2010	131	31
2013	108	8
2013	102	2
2013	133	33
2013	168	68
2014	142	42
2014	149	49
2014	153	53
2014	153	53
2015	106	6
2015	118	18
2015	161	61
2015	185	85
2016	142	42
2016	128	28
2016	122	22
2017	142	42
2017	106	6
2018	105	5
2019	118	18
2019	159	59
2020	111	11
2021	127	27
2022	115	15
2022	124	24

U nastavku su prikazani rezultati testova prikladnosti (slika 23 i slika 24):

Distribution <chr>	AD_Statistic <dbl>	AD_p_value <dbl>
Log-normal	0.9853104	0.3646999
Exponential	0.5348155	0.7108417

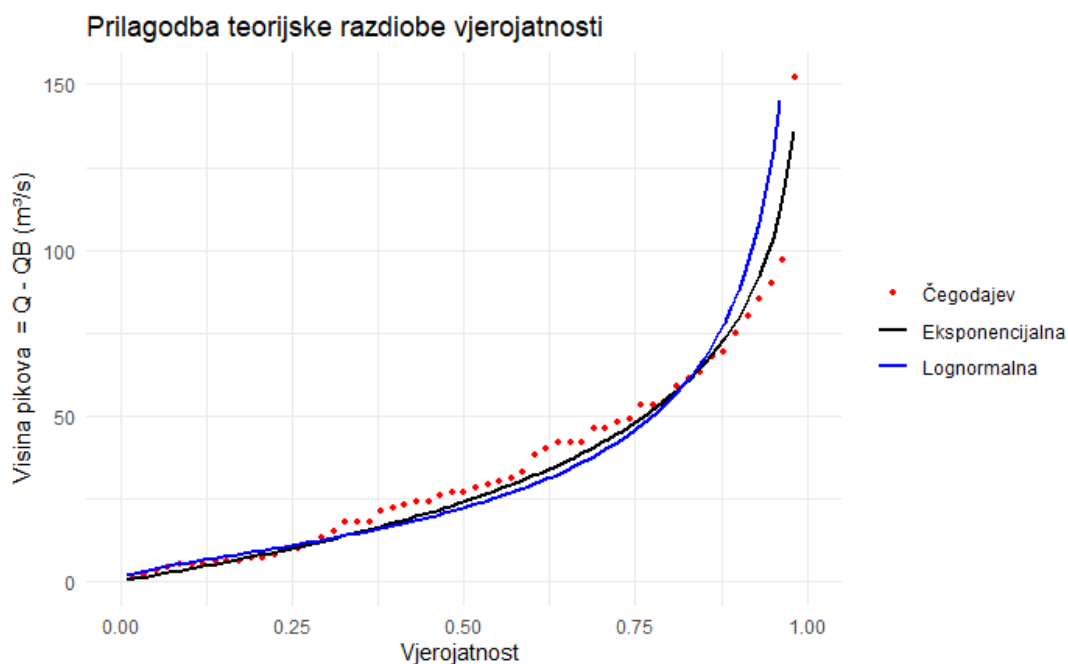
**Slika 33:** Dobivene vrijednosti za Anderson-Darling test za poklapanje empirijske i teorijske distribucije na VS Kupljenovo

Distribution <chr>	KS_Statistic <dbl>	KS_p_value <dbl>
Log-normal	0.11080630	0.4859462
Exponential	0.08938888	0.7525562

**Slika 34:** Dobivene vrijednosti za Kolmogorov-Smirnov test poklapanje empirijske i teorijske distribucije na VS Zagreb

Rezultati testa pokazuju da prema AD-testu i KS-testu najbolje podudaranje ima eksponencijalna distribucija.

U nastavku je grafički prikaz empirijske distribucije i teorijskih distribucija (slika 35).



**Slika 35:** Prilagodba teorijske razdiobe vjerojatnosti za VS Kupljenovo, 2 prekoračenja godišnje

Iz grafa se očituje kako najbolje poklapanje sa empirijskom distribucijom ima eksponencijalna teorijska distribucija.

Kako bi odredili povratne periode iz dobivenih vjerojatnosti pojave velikih voda koristimo isti izraz kao u poglavlju 5.2.1. Tablica 5.8. prikazuje vrijednosti dobivene za povratne periode od 5 do 1000 godina.



---

**Tablica 5.8:** Vrijednost povratnih perioda za eksponencijalnu distribuciju

Povratni period [god]	Eksponencijalna [m <sup>3</sup> /s]
5	179
10	218
25	286
50	351
100	430
1000	818

Dobiveni rezultati ukazuju kako za period od 1000 godišnjeg povratnog perioda dobijemo protok od 718 [m<sup>3</sup>/s] što je za 49 % više u odnosu na onaj dobiven AM metodom.

## 6. DISKUSIJA

Dobiveni rezultati AM i POT metode su međusobno uspoređeni za svaku VS, te su dodatno uspoređeni rezultati AM metode s prethodnom studijom analize velikih voda iz 2012. na istim VS koja koristi AM metodu. Hidrološka analiza velikih voda u studiji napravljena je u okviru studije gdje su izrađeni 1000 godišnje prognoze vodomjernih stanica na rijeci Savi koji je izrađen 2012. godine [19].

### 6.1. VS Zagreb

Usporedba dobivenih rezultata u radu i rezultata analiza iz 2012. godine prikazana je na tablici 9.1:

**Tablica 6.1:** Usporedba sa rezultatima iz 2012. godine za VS Zagreb

VS Zagreb						
Metoda	AM [m <sup>3</sup> /s]	POT [m <sup>3</sup> /s]	Studija VPB-a (2012)  VPB AM [m <sup>3</sup> /s]	% razlika (AM i POT)	% razlika (POT i VPB AM)	% razlika (AM i VPB AM)
Vremensko razdoblje	(1989.-2022)		(1975.- 2010.)	/		
Povratni period [god]		2 prekoračenja godišnje				
5	2038	2114	2153	-3.59%	1.84%	-5.34%
10	2264	2407	2376	-5.94%	-1.29%	-4.72%
25	2532	2858	2631	-11.41%	-7.94%	-3.76%
50	2723	3253	2805	-16.30%	-13.79%	-2.93%
100	2906	3701	2966	-21.48%	-19.86%	-2.02%
1000	3488	5619	3452	-37.92%	-38.58%	1.04%

U rezultatima studije iz 2012. godine najbolje poklapanje teorijske funkcije s empirijskim je pokazala Pearson III teorijska distribucija. U našim rezultatima za AM metodu, teorijska funkcija raspodjele je log-normalna. U analizi POT metodom kod 2 prekoračenja godišnje vizualno najbolje rješenje je dobivena log-normalna distribucija.

Rezultati pokazuju relativno mala odstupanja od analize napravljene 2012. godine, no potrebno je napomenuti kako je taj niz rađen da uzorku od 1975. do 2010. godine.

## 6.2. VS Kupljenovo

Na VS Kupljenovo analiza velikih voda je rađena 2012. godine, te je rađena na nizu od 1975. do 2010. godine. Usporedba rezultata dobivenih u radu te rezultata 2012. prikazana je u tablici 6.2.

**Tablica 6.2:** Usporedba s rezultatima iz 2012 godine za VS Zagreb

VS Kupljenovo						
Metoda	AM [m <sup>3</sup> /s]	POT [m <sup>3</sup> /s]	Studija VPB-a (2012) [m <sup>3</sup> /s]	% razlika (AM i POT)	% razlika (POT i VPB AM)	% razlika (AM i VPB AM)
Vremensko razdoblje	(1989.-2022)		(1975.-2010.)	/		
Povratni period [god]		2 prekoračenja godišnje				
5	170	179	178	-5.03%	-0.56%	-4.49%
10	203	218	201	-6.88%	-7.80%	0.99%
25	245	286	231	-14.34%	-19.23%	6.07%
50	276	351	253	-21.37%	-27.92%	9.09%
100	308	430	275	-28.37%	-36.05%	12.00%
1000	418	818	353	-48.90%	-56.84%	18.64%

Studija velikih voda iz 2012. je pokazala Pearson III teorijsku distribuciju kao najprikladniju za korišteni uzorak podataka. Rezultati rada prikazali su log-normalnu distribuciju prihvatljivijom za AM metodu i POT metodu sa više od 4 prekoračenja godišnje, dok je za više od 2 prekoračenja godišnje to bila eksponencijalna teorijska distribucija.

U literaturi za POT metodu možemo naći preporuke kombinacije raspodjela za broj prekoračenja preko praga i pripadajućih raspodjela godišnjih maksimuma [20]. Ako se godišnji maksimumi distribuiraju po log-normalnoj kao je to slučaj u ovoj analizi, nije poznata distribucija koja dobro opisuje prekoračenja iznad praga, kao što se vidi u Tablici 6.3. Zato nije neobično da ne dobivamo dobre rezultate u POT-u.

---

**Tablica 6.3:** Kombinacije distribucija za broj prekoračenja preko praga i veličine, te pripadajuća raspodjela godišnjeg maksimuma (preuzeto iz [20]).

<b>Stopa prekoračenja</b>	<b>Veličina prekoračenja</b>	<b>Godišnji maksimum</b>	<b>Referenca</b>
Poisson	Eksponencijalna	Gumbel (GUM)	Todorovic i Zelenhasic (1970)
Poisson	Generalizirana Pareto (GPA)	Generalizirana ekstremna vrijednost (GEV)	Coles (2001)
Geometrijska	Generalizirana Pareto (GPA)	Generalizirana logistička (GLO)	Eastoe i Tawn (2010)
Negativna binomijalna	Generalizirana Pareto (GPA)	Kappa (KAP)	Eastoe i Tawn (2010)

---

## 7. ZAKLJUČAK

U ovom diplomskom radu analizirani su maksimalni godišnji protoci na temelju podataka s vodomjernih stanica (VS) Zagreb na rijeci Savi i VS Kupljenovo na rijeci Krapini. Korištene su dvije metode: analiza maksimalnih godišnjih protoka (AM) i analiza protoka iznad praga (POT), a rezultati su dobiveni primjenom jezika R. Metoda godišnjih maksimuma (AM) se temelji na maksimalnim godišnjim protocima, pružajući jednostavnu i direktnu analizu koja je zbog toga široko rasprostranjena u inženjerskoj praksi. Ipak, može zanemariti ekstremne događaje koji se ne javljaju svake godine. S druge strane, metoda prekoračenja praga (POT) uzima u obzir sve protoke iznad određenog praga, pružajući detaljniji uvid u ekstremne događaje, ali zahtijeva složeniju analizu i pažljiviji izbor praga.

Usporedba dobivenih rezultata za VS Zagreb je pokazala:

- Na VS Zagreb metoda POT daje veće procijenjene protoke za povratna razdoblja, od 3.59% za povratni period od 10 godine do 37.92% za povratni period od 1000 godina.
- Korištenje POT metode je u obzir uzelo više vodnih valova u nekim godinama koje se obično u AM metodi odbacuju ako nisu vrijednosti koje predstavljaju godišnji maksimum.
- POT metoda prikazuje prosječno 16.11% veće vrijednosti protoka u odnosu na AM metodu

Usporedba dobivenih rezultata za VS Kupljenovo je pokazala:

- Na VS Kupljenovo, metoda POT daje veće procijenjene protoke za povratna razdoblja, od 5.03% za povratni period od 10 godine do 48.90% za povratni period od 1000 godina.
- POT metoda prikazuje prosječno 20.82% veće vrijednosti protoka u odnosu na AM metodu

Usporedba rezultata za VS Zagreb i VS Kupljenovo dobivenih u ovom radu s ranijim istraživanjima uz određene razlike u teorijskim distribucijama za pojedine metode pokazala je sljedeće na analiziranim VS:

VS Zagreb:

- Rezultati analize iz ovog rada uspoređeni su s analizom iz 2012. godine [19]. Najbolje teorijske funkcije raspodjele u tom radu iz 2012. bile su Pearson III i log-normalna distribucija za AM metodu te je također u ovom radu dobro poklapanje pokazivala log-normalna distribucija
- Usporedba s prijašnjim studijama pokazuje da su rezultati AM metode dobiveni u ovom radu konzistentni s rezultatima iz 2012. jer najveća razlika u rezultatima iznosi 5.34%

---

VS Kupljenovo:

- Rezultati za VS Kupljenovo također su uspoređeni s rezultatima iz 2012. godine. Najbolje prilagođene teorijske funkcije raspodjele u tom radu bile su Pearson III i Log-normalna distribucija za AM metodu te je također u ovom radu dobro poklapanje pokazivala log-normalna distribucija
- Usporedba s prijašnjim studijama pokazuje kako postoje razlike u dobivenim rezultatima koje premašuju i 50% (1000 godišnji povratni period)

Rezultati analize maksimalnih godišnjih protoka primjenom metoda AM i POT pokazali su da obje metode imaju svoje specifične prednosti i nedostatke:

- Metoda AM daje konzistentnije rezultate za godišnje maksimalne protoke.
- Metoda POT pruža detaljniji uvid u ekstremne događaje i omogućuje bolje poklapanje empirijskih funkcija raspodjele s teorijskim.

Ove metode imaju značajnu primjenu u hidrotehničkoj praksi, posebice u planiranju i projektiranju sustava zaštite od poplava. Omogućuju prognoziranje i bolje razumijevanje ekstremnih hidroloških događaja, što je ključno za smanjenje rizika od poplava i poboljšanje upravljanja vodnim resursima. Rezultati ovog rada pružaju korisne informacije za buduće istraživanje i primjenu na slivovima u Hrvatskoj.



---

## POPIS LITERATURE

- [1] Hrelja H. Inženjerska hidrologija. Sarajevo: Sveučilište u Sarajevu; 2007.
- [2] Dinarsko gorje. Sliv rijeke Save [Internet]. Dostupno na: <https://www.dinarskogorje.com/sliv-rijeke-save.html> [pristupljeno 25. 4. 2024].
- [3] Savska komisija. Sliv rijeke Save [Internet]. Dostupno na: <https://www.savacommission.org/o-nama-1848/sliv-rijeke-save-1844/1844> [pristupljeno 22.4. 2024].
- [4] Državni hidrometeorološki zavod. Hidrološki podaci [Internet]. Dostupno na: <https://hidro.dhz.hr> [pristupljeno 16. 5. 2024].
- [5] Wikipedia: Krapina (rijeka) [Internet]. Dostupno na : [https://hr.wikipedia.org/wiki/Krapina\\_\(rijeka\)](https://hr.wikipedia.org/wiki/Krapina_(rijeka)) [pristupljeno 2.8.2024].
- [6] Edutorij: Hrvatske rijeke [Internet]. Dostupno na: <https://edutorij-admin-api.carnet.hr/storage/extracted/2251514/hrvatske-rijeke-1.html> [pristupljeno 2.8.2024].
- [7] Slater LJ, Thirel G, Harrigan S, Delaigue O, Hurley A, Khouakhi A, et al. Using R in hydrology: a review of recent developments and future directions. Hydrol Earth Syst Sci [Internet]. 2019;23:2939–63. Available from: <https://doi.org/10.5194/hess-23-2939-2019> [accessed 16. 9. 2024].
- [8] Bezak N, Brilly M, Šraj M. Comparison between the peaks-over-threshold method and the annual maximum method for flood frequency analysis. Hydrol Sci J. 2014;59(5):959–77. doi: 10.1080/02626667.2013.831174.
- [9] Obrada podataka u hidrotehnici: Hidrološka analiza - Analize vremenskih serija [predavanje]. Dostupno na: /mnt/data/H2p03\_2017.pdf [pristupljeno 25. 6. 2024].
- [10] Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet. Hidrologija [Internet]. Available from: [https://www.grad.hr/nastava/hidrotehnika/gf/hidrologija/PREDAVANJA/H1\\_13%20%5BCompatibility%20Mode%5D.pdf](https://www.grad.hr/nastava/hidrotehnika/gf/hidrologija/PREDAVANJA/H1_13%20%5BCompatibility%20Mode%5D.pdf) [pristupljeno 25. 7. 2024].
- [11] Towards Data Science. Comparing sample distributions with the Kolmogorov-Smirnov (KS) test [Internet]. [pristupljeno 2.5.2024]. Dostupno na: <https://towardsdatascience.com/comparing-sample-distributions-with-the-kolmogorov-smirnov-ks-test-a2292ad6fee5>
- [12] Investopedia. Log-Normal Distribution [Internet]. Available from: <https://www.investopedia.com/terms/l/log-normal-distribution.asp> [pristupljeno 25. 7. 2024].



- [13] Bruce, P., & Bruce, A. (2017). *Practical Statistics for Data Scientists: 50 Essential Concepts*. O'Reilly Media. [pristupljeno 25.8.2024]. Dostupno na: <https://www.oreilly.com/library/view/practical-statistics-for/9781491952955/>
- [14] Bickel, P. J., & Doksum, K. A. (2007). *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics, Volume I*. Springer. [pristupljeno 25.8.2024]. Dostupno na: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-387-71565-4>
- [15] NASA Global Modeling and Assimilation Office. GEV-RV description [Internet]. [pristupljeno 3.5.2024] Dostupno na: <https://gmao.gsfc.nasa.gov/research/subseasonal/atlas/GEV-RV-html/GEV-RV-description.html>
- [16] ResearchGate. A type III Pearson distribution with a probability value indicated [Internet]. [pristupljeno 6.5.2024]. Dostupno na: [https://www.researchgate.net/figure/A-type-III-Pearson-distribution-with-a-probability-value-indicated\\_fig1\\_315882419](https://www.researchgate.net/figure/A-type-III-Pearson-distribution-with-a-probability-value-indicated_fig1_315882419)
- [17] NIST/SEMATECH. EDA - Section 3: A type III Pearson distribution with a probability value indicated [Internet]. Dostupno na: <https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda3674.htm> [pristupljeno 5. 6. 2024].
- [18] Anderson, T. W., & Darling, D. A. (1952). Asymptotic Theory of Certain "Goodness of Fit" Criteria Based on Stochastic Processes. *The Annals of Mathematical Statistics*, 23(2), 193-212. [pristupljeno 25.8.2024]. Dostupno na: <https://projecteuclid.org/euclid.aoms/1177729437>
- [19] Brkić, B., Kolarić, D., & Lotina, D. (2012). Matematički model sustava obrane od poplava Srednje Posavlje - kalibracija i verifikacija na velikovodne događaje u 2010. godini. Vodoprivredno-projektni biro d.d., Zagreb. [Pristupljeno 25.8.2024].
- [20] Kjeldsen TR, Prosdocimi I. Use of peak over threshold data for flood frequency estimation: An application at the UK national scale. *J Hydrol* [Internet]. 2023;626:130235. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2023.130235> [Pristupljeno 26. 8. 2024].