

# Određivanje progiba ruba balkona

---

**Beljan, Leon**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:482615>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-10-14**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Leon Beljan

# **ODREĐIVANJE PROGIBA RUBA BALKONA**

ZAVRŠNI ISPIT

Zagreb, 2024.



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Leon Beljan

# **ODREĐIVANJE PROGIBA RUBA BALKONA**

ZAVRŠNI ISPIT

prof. dr. sc. Diana Šimić Penava

Zagreb, 2024.



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Leon Beljan

# **DETERMINATION OF BALCONY EDGE DEFLECTION**

FINAL EXAM

prof. dr. sc. Diana Šimić Penava

Zagreb, 2024.



OBRAZAC 2

TEMA ZAVRŠNOG ISPITA

Ime i prezime studenta:

JMBAG:

Završni ispit iz kolegija:

Naslov teme završnog ispita (HR):

Naslov teme završnog ispita (ENG):

Opis teme završnog ispita:

Datum:

Mentor:

Potpis mentora:

Komentor:



Leon Beljan

0082063498

Određvanje progiba ruba balkona

Determination of balcony edge deflection

15.9.2024.

Diana Šimić Penava



OBRAZAC 4

IZVJEŠĆE MENTORA O PROVEDENOJ PROVJERI IZVORNOSTI  
PISANOG DIJELA ZAVRŠNOGA ISPITA

Ime i prezime studenta:

JMBAG:

Naslov teme završnog ispita (HR):

Ukupna podudarnost:

Izvori s interneta:

Publikacije:

Studentski radovi:

Ime i prezime mentora:

Mišljenje mentora (rad (ne)zadovoljava uvjete izvornosti) s obrazloženjem:

Datum:

Potpis mentora:

*Dražen Bruncetec*

---

## SAŽETAK

U ovom radu baviti ćemo se temom određivanja progiba ruba balkona. Objasniti ćemo поближе nastanak i glavne uzroke progiba te detaljno prikazati postupke uz pomoć kojih se on može izračunati. Objasniti ćemo praktične načine mjerenja progiba i moguća rješenja za smanjenje progiba kod konstrukcija. U prvom numeričkom primjeru odrediti ćemo elastičnu liniju nosača te progib i kut zaokreta zadanih točaka pomoću grafoanalitičkog postupka. U drugom numeričkom primjeru ćemo odrediti progibnu liniju nosača uz pomoć analitičkog postupka te izračunati pripadajući progib i kut zaokreta zadane točke. Usporediti ćemo grafički, grafoanalitički i analitički postupak, njihovu primjenu te međusobne prednosti i nedostatke. Cilj ovog završnog rada je pružiti sveobuhvatan pregled metoda za određivanje progiba ruba balkona i samim time pružiti smjernice za buduće inženjere.

**Ključne riječi:** progib, progibna linija, elastična linija, deformacija, kut zaokreta, analitički postupak, grafoanalitički postupak, grafički postupak



---

## SUMMARY

In this paper, we will address the topic of determining the deflection of the balcony edge. We will explain the occurrence and main causes of deflection in detail and demonstrate the procedures for its calculation. We will describe practical methods for measuring deflection, the deformations it causes, and possible solutions for reducing deflection in structures. In the first numerical example, we will determine the elastic line of the beam, as well as the deflection and rotation angle of given points using the graphic-analytical method. In the second numerical example, we will determine the deflection line of the beam using the analytical method and calculate the corresponding deflection and rotation angle of a given point. We will compare the graphical, graphic-analytical, and analytical methods, their practical applications, and their respective advantages and disadvantages. The aim of this thesis is to provide a comprehensive overview of methods for determining the deflection of balcony edges and thereby offer guidelines for future engineers.

**Keywords:** deflection, deflection line, elastic line, deformation, rotation angle, analytical method, graphic-analytical method, graphical method.

---

## POPIS SLIKA

Slika 1: Deformacija štapa pri ravnom savijanju [2] .....	2
Slika 2: Stvarni nosači i njihovi odgovarajući fiktivni nosači [3] .....	12
Slika 3: Momentni dijagram stvarnog nosača, AutoCAD Autodesk 2024.....	17
Slika 4: Reducirani momentni dijagram na fiktivnom nosaču, AutoCAD Autodesk 2024....	18
Slika 5: Djelovanje koncentriranih fiktivnih opterećenja, AutoCAD Autodesk 2024.....	18
Slika 6: Rastavljeni fiktivni nosač, AutoCAD Autodesk 2024. ....	19
Slika 7: Progibna linija nosača, AutoCAD Autodesk 2024. ....	22
Slika 8: Ekvivalentno kontinuirano opterećenje, AutoCAD Autodesk 2024. ....	24
Slika 9: Progibna linija nosača, AutoCAD Autodesk 2024. ....	27

---

## SADRŽAJ

SAŽETAK.....	i
SUMMARY .....	ii
SADRŽAJ.....	iii
1. UVOD .....	1
2. PROGIBNA LINIJA.....	2
2.1. Pojam progibne linije i kuta zaokreta.....	2
2.2. Diferencijalna jednačba progibne linije nosača .....	4
2.3. Analitička metoda .....	7
2.4. Grafoanalitička metoda.....	10
2.5. Grafička metoda .....	13
3. NUMERIČKI PRIMJERI .....	16
3.1. Prvi numerički primjer – grafoanalitički postupak .....	16
3.2. Drugi numerički primjer – analitički postupak.....	23
4. ZAKLJUČAK .....	28
POPIS LITERATURE.....	29

---

## 1. UVOD

Konstrukcija i dizajn balkona predstavljaju izazovan i ključan aspekt građevinske prakse, koji zahtijeva pažljivo inženjersko razmatranje kako bi se osigurala sigurnost, dugovječnost i funkcionalnost. Jedan od ključnih parametara pri dizajnu balkona je progib ruba. Određivanje progiba ruba balkona zahtijeva preciznu analizu različitih faktora, uključujući vrstu materijala, geometriju konstrukcije, tip i veličinu opterećenja te način pričvršćenja. Pored statičkog proračuna, važno je uzeti u obzir i dinamičke efekte koji mogu nastati uslijed vanjskih utjecaja poput vjetrova, vibracija i seizmičkih aktivnosti, no u ovom radu, fokusirati ćemo se na analizu metoda i proračuna za određivanje progiba ruba balkona. Progib definiramo kao pomak neke točke konstrukcije nastao radi opterećenja ili drugoga djelovanja [1]. Promatrati ćemo balkon kao konzolu tj. upeti nosač te on kao takav mora zadovoljiti uvjete čvrstoće i uvjete krutosti. Kako bi nosač zadovoljio uvjete čvrstoće, njegova najveća naprezanja ne smiju biti veća od dopuštenih naprezanja. Analogno tome, kod uvjeta krutosti najveće deformacije ne smiju prelaziti dopuštene odnosno unaprijed zadane vrijednosti. Kraće zapisano, uvjet krutosti glasi:

$$w \leq w_{dop} \tag{1}$$

Dopuštena veličina progiba nosača varira ovisno o njegovoj namjeni i uvjetima rada konstrukcije, te se obično nalazi unutar sljedećih granica:

$$w_{dop} = \left( \frac{L}{200}; \frac{L}{1000} \right) \tag{2}$$

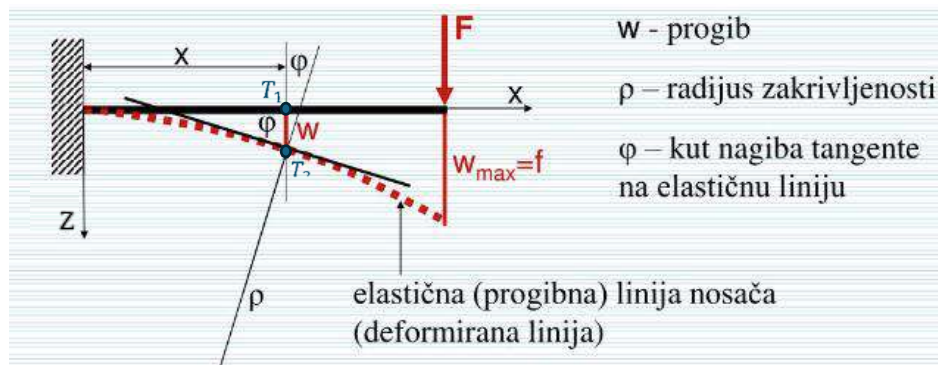
L – raspon nosača

U nastavku rada obraditi ćemo metode izračuna progiba i objasniti ćemo kako odrediti progibnu liniju nosača jer je veličina maksimalnog progiba određenog nosača ključni podatak pri projektiranju.

## 2. PROGIBNA LINIJA

### 1.1. Pojam progibne linije i kuta zaokreta

Neka na zadani nosač djeluju vanjska opterećenja koncentrirane sile  $F$  u ravnini  $xz$ . Pod djelovanjem opterećenja dolazi do postepenog savijanja, odnosno deformacije uzdužne osi u ravnini djelovanja opterećenja. Važno je napomenuti da se tada ravnina savijanja nosača i ravnina djelovanja opterećenja podudaraju. Dolazi do pomaka i zaokreta poprečnih presjeka oko neutralne osi, na način da za vrijeme zaokreta ostaju okomiti na savijenu os štapa. Rezultantnu savijenu uzdužnu os nazivamo elastičnom, odnosno progibnom linijom [2].



Slika 1. Deformacija štapa pri ravnom savijanju [2]

S obzirom da se nosaču pri savijanju ne mijenja duljina, možemo zaključiti da postoji pomak težišta presjeka u smjeru  $x$ -osi. Uzmemo li u obzir prisutni pomak u smjeru  $z$ -osi vidljivo je da je taj pomak znatno veći, odnosno pomak u smjeru  $x$ -osi je znatno manji te ga možemo zanemariti. Elastičnu liniju nosača prikazujemo kao ravninsku krivulju koja leži u ravnini  $xz$  te nema nikakvih pomaka u smjeru  $y$ -osi. Uzevši sve u obzir možemo preciznije definirati progib nosača kao pomak težišta proizvoljnog presjeka štapa u smjeru okomitom na nedeformiranu os štapa iz točke  $T_1$  u točku  $T_2$  [1]:

$$w = \overline{T_1 T_2} \quad (3)$$

Važno je također objasniti pojam kuta zaokreta jer uz progib on određuje stanje deformacija u ravnom štapa za vrijeme savijanja. Kut zaokreta je kut za koji se presjek zaokrene u odnosu na prvobitni položaj [1]. Ovisnost progiba i kuta zaokreta možemo izraziti preko formule:

---

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dw}{dx}$$

(4)

gdje je tangens kuta koji x-os zatvara sa tangentom na elastičnu liniju u točki  $T_2$  jednak kutu zaokreta presjeka. Kut  $\varphi$  je približno jednak svojem tangensu radi toga što je progib uobičajeno malen u usporedbi s rasponom nosača i 3omen time kut zaokreta je obično manji od  $1^\circ$ . Dakle, s točnošću možemo reći da je kut zaokreta traženog presjeka jednak derivaciji progiba po apscisi presjeka:

$$\varphi(x) = \frac{dw(x)}{dx}$$

(5)

Na taj način određivanje deformacija nosača svodi se na određivanje jednadžbe elastične linije nosača  $w(x)$ [2].

---

## 1.1. Diferencijalna jednadžba elastične linije nosača

Slučaj čistog savijanja izražavamo kao funkciju ordinate elastične linije nosača čiji je argument apscisa težišta nekog proizvoljnog poprečnog presjeka. Obzirom da nam je poznata zakrivljenost nosača, funkciju možemo odrediti na sljedeći način:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{EI_y} \quad (6)$$

Na nosače kojima je duljina znatno veća nego visina, poprečna sila  $T_z$  utječe zanemarivom vrijednošću te ju kao takvu ne uzimamo u obzir. Stoga, dovoljno je gledati prevladavajući utjecaj momenta savijanja  $M_y$  te modul elastičnosti  $E$  i moment inercije  $I_y$ , odnosno fleksijsku krutost  $EI_y$  kako bi dobili zakrivljenost nekog nosača. Iz matematike znamo da je zakrivljenost krivulje određena izrazom [2]:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (7)$$

Prethodna dva izraza možemo izjednačiti kako bi dobili:

$$\frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{M_y}{EI_y} \quad (8)$$

---

Izraz (8) je nelinearna diferencijalna jednačba drugog reda te iz nje možemo izračunati progibe i kutove zaokreta bilo kojeg presjeka nosača, no njena nelinearnost stvara poteškoće. Kako bi pojednostavili izraz, uzimamo u obzir prethodno spomenutu činjenicu da su veličine progiba u odnosu na duljinu nosača znatno male. U tom slučaju zapisujemo:  $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \ll 1$  i zanemarujemo  $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2$  te smo time dobili pojednostavljeni izraz:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \pm \frac{M_y}{EI_y} \quad (9)$$

Dobiveni izraz je linearna diferencijalna jednačba drugog reda te ju kao takvu možemo rješavati primjenom principa superpozicije. Predznak desne strane jednačbe uvjetovan je odabirom koordinatnog sustava. Izvodimo izraze za moment savijanja  $M_y$ , poprečnu silu  $T_z$  i opterećenje  $q$ ;

$$\frac{dT_z}{dx} = -q, \quad \frac{dM_y}{dx} = T, \quad \frac{d^2M_y}{dx^2} = -q \quad (10)$$

a prema izrazu (5) i (9):

$$\varphi = \frac{dw}{dx}$$
$$M_y = -EI_y \frac{d^2w}{dx^2} \quad (11)$$

Deriviramo li prethodni izraz po  $x$ , dobivamo:

$$T_z = \frac{dM_y}{dx} = -\frac{d}{dx} \left( EI_y \frac{d^2w}{dx^2} \right) \quad (12)$$



---

Deriviramo li još jednom izraz, slijedi:

$$q = -\frac{dT_z}{dx} = -\frac{d^2M_y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left( EI_y \frac{d^2w}{dx^2} \right) \quad (13)$$

Dakle, diferencijalne zavisnosti pri savijanju glase:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{dw}{dx} \\ M_y &= -EI_y \frac{d^2w}{dx^2} \\ T_z &= -\frac{d}{dx} \left( EI_y \frac{d^2w}{dx^2} \right) \\ q &= \frac{d^2}{dx^2} \left( EI_y \frac{d^2w}{dx^2} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

Iz navedenih izraza vidimo da, ako znamo opterećenje  $q(x)$  i uvjete oslanjanja nosača, možemo uzastopnim integriranjem odrediti  $T_z(x)$ ,  $M_y(x)$  i  $w(x)$ . Obratno, ako nam je zadana jednačba elastične linije nosača, možemo uzastopnim deriviranjem funkcije  $w(x)$  po  $x$  odrediti  $\varphi(x)$ ,  $M_y(x)$ ,  $T_z(x)$  i  $q(x)$  [2]. Ovi izvode možemo koristiti samo u slučajevima gdje su progibi iznimno mali u odnosu na duljinu nosača.

---

## 1.1. Analitička metoda

Analitička metoda određivanja kuta zaokreta  $\varphi(x)$  i progiba  $w(x)$  sastoji se od uzastopnog integriranja diferencijalne jednačbe elastične linije [3]. Izražavamo moment  $M_y(x)$  kao funkciju opterećenja i apscise presjeka  $x$ :

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y} \quad (15)$$

Izraz (15) integriramo prvi put kako bi dobili izraz kuta zaokreta  $\varphi(x)$ :

$$\varphi(x) = \frac{dw(x)}{dx} = -\int \frac{M_y(x)}{EI_y} dx + C \quad (16)$$

Narednim integriranjem dobivamo izraz za progib  $w(x)$ :

$$w(x) = -\int dx \int \frac{M_y(x)}{EI_y} dx + Cx + D \quad (17)$$

Kako bi dobili vrijednosti konstanti  $C$  i  $D$ , koristimo rubne uvjete tj. uvjete pričvršćenja štapa. Kod jednostrano upetog štapa, u tom presjeku vrijedi:

$$w(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0 \quad (18)$$

Nosači zglobno oslonjeni na krajevima imaju progibe na rubovima jednake nuli:

$$w(0) = 0, \quad w(l) = 0 \quad (19)$$

Kod svakog nosača možemo navesti po dva uvjeta izražena geometrijskim veličinama progiba  $w$  i kuta zaokreta  $\varphi$ . Radi toga te uvjete nazivamo geometrijskim uvjetima. U slučaju gdje je zadano opterećenje nosača  $q(x)$ , uzastopnim integriranjem jednadžbe iz izraza (14) dobivamo:

$$\begin{aligned}
 EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} &= q(x) \\
 EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} &= \int q(x) dx + C_1 \\
 EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} &= \int dx \int q(x) dx + C_1 x + C_2 \\
 EI_y \frac{dw}{dx} &= \int dx \int dx \int q(x) dx + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \\
 EI_y w &= \int dx \int dx \int dx \int q(x) dx + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Konstante integracije  $C_1, C_2, C_3$  i  $C_4$  određujemo iz rubnih uvjeta, koji sada ovise ne samo o načinu učvršćenja krajeva nosača nego i o vanjskom opterećenju koje djeluje na krajevima nosača. Za svaki kraj štapa možemo postaviti dva rubna uvjeta [2]:

$$\mathbf{w(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0}
 \tag{21}$$

Pošto na slobodnom kraju ne znamo rubne uvjete, postaviti ćemo uvjete za moment i poprečnu silu, a oni glase:

$$\mathbf{M_y(l) = 0, \quad T_z(l) = 0}
 \tag{22}$$

Rubne uvjete izražene preko momenta i poprečne sile nazivamo statičkim uvjetima

---

U slučajevima gdje je nosač na krajevima oslonjen zglobno, progibi i momenti savijanja su jednaki nuli:

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_y(0) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{w}(l) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_y(l) = \mathbf{0}$$

(23)

Takve uvjete nazivamo miješanimima jer u sebi sadrže geometrijske i statičke veličine. Vidimo da su u promatranim slučajevima oba rubna uvjeta, postavljena za krajnji presjek štapa, jednaka nuli. Takve uvjete nazivamo homogenim uvjetima [2]. U bilo kojem drugom slučaju gdje vrijednosti  $w, \varphi, M, T$  na krajevima štapa nisu jednaki nuli, imamo nehomogene uvjete. Analitička metoda pruža jednostavno i precizno rješenje za određivanje elastične linije nosača no njena praktičnost se dovodi u pitanje pri rješavanju kompleksnijih slučajeva

---

## 1.1. Grafoanalitička metoda

Grafoanalitička metoda zasniva se na matematičkoj analogiji između diferencijalne jednačbe elastične linije nosača i diferencijalne jednačbe koja povezuje moment savijanja i intenzitet opterećenja [3]. Jednačbu elastične linije ne moramo znati, već iz maksimalnih vrijednosti progiba i kuteva zaokreta na karakterističnim mjestima možemo započeti proračun. Uvodimo fiktivni nosač, koji je jednak stvarnome nosaču po duljini i krutosti te ga opterećujemo fiktivnim opterećenjem  $\bar{q}$ . Fiktivno opterećenje  $\bar{q}$  nanosimo u obliku dijagrama momenta savijanja  $M_y$ , konstruiran na stvarnome nosaču. Iz navedenog slijedi:

$$\bar{q} = M_y \tag{24}$$

S obzirom na to da na fiktivnom nosaču moment proizlazi iz fiktivnog opterećenja  $\bar{q}$ , taj moment savijanja nazivamo fiktivnim momentom savijanja  $\bar{M}$ , a poprečnu silu fiktivnom poprečnom silom  $\bar{T}$ . Pozitivni dijagram momenta savijanja na stvarnome nosaču promatramo na fiktivnom nosaču kao pozitivno fiktivno opterećenje usmjereno prema dolje [2]. Izrazimo li za neki presjek fiktivnog nosača ovisnost između fiktivnog momenta savijanja i intenziteta fiktivnog opterećenja dobivamo:

$$\frac{d^2\bar{M}}{dx^2} = -\bar{q}$$

ili pomoću izraza (24):

$$\frac{d^2\bar{M}}{dx^2} = -M_y \tag{25}$$

Izjednačimo li diferencijalnu jednačbu elastične linije nosača sa jednačbom iz izraza (25) dobivamo:

$$EI_y \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d^2\bar{M}}{dx^2}$$

$$EI_y w = \bar{M} \tag{26}$$

---

U ovakvom obliku izraza, možemo lako zamjeniti moment savijanja u diferencijalnoj jednadžbi elastične linije nosača na desnoj strani sa drugom derivacijom fiktivnog momenta savijanja fiktivnog nosača. Izraz zatim integriramo te dobivamo:

$$EI_y \frac{dw}{dx} = \frac{d\bar{M}}{dx} + C \quad (27)$$

Na fiktivnom nosaču vrijedi:

$$\frac{d\bar{M}}{dx} = \bar{T} \quad (28)$$

Izraz (27) zatim ponovno integriramo te dobivamo sljedeće:

$$EI_y w = \bar{M} + Cx + D \quad (29)$$


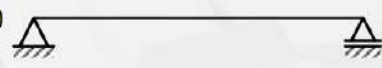



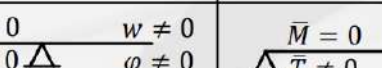

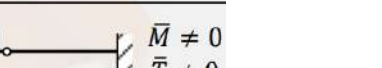
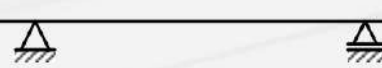



Kao i kod analitičke metode, konstante integracije ovise o rubnim uvjetima. Konstante integracije C i D biti će jednake nuli ako su kut zaokreta,  $\varphi$  i stvarni progib  $w$  jednaki nuli u onim presjecima fiktivnog nosača gdje su fiktivna poprečna sila  $\bar{T}$  i fiktivni moment savijanja  $\bar{M}$  također jednaki nuli. U tom slučaju izraz za kut zaokreta glasi:

$$\varphi = \frac{dw}{dx} = \frac{\bar{T}}{EI_y} \quad (30)$$

Iz izraza (29) dobivamo formulu za progib stvarnog nosača:

$$w = \frac{\bar{M}}{EI_y} \quad (31)$$

Grafoanalitička metoda se dakle svodi na određivanje fiktivnog momenta savijanja i fiktivne poprečne sile na fiktivnom nosaču u svrhu izračuna kuta zaokreta i progiba na stvarnom nosaču. Stvarni nosač i njegov odgovarajući fiktivni nosač nazivamo konjugiranim nosačima te se oni razlikuju samo po načinu učvršćenja. Uvjete oslanjanja fiktivnog nosača dobivamo iz rubnih uvjeta stvarnog nosača. Konstante C i D moraju biti jednake nuli u izrazu (29).

STVARNI NOSAČ	FIKTIVNI NOSAČ
$w = 0$ $\varphi \neq 0$  $w = 0$ $\varphi \neq 0$	$\bar{M} = 0$ $\bar{T} \neq 0$  $\bar{M} = 0$ $\bar{T} \neq 0$
$w = 0$ $\varphi = 0$  $w \neq 0$ $\varphi \neq 0$	$\bar{M} = 0$ $\bar{T} = 0$  $\bar{M} \neq 0$ $\bar{T} \neq 0$
$w = 0$ $\varphi \neq 0$  $w = 0$ $\varphi \neq 0$  $w \neq 0$ $\varphi \neq 0$	$\bar{M} = 0$ $\bar{T} \neq 0$  $\bar{M} = 0$ $\bar{T} \neq 0$  $\bar{M} \neq 0$ $\bar{T} \neq 0$
	
	

Slika 2. Stvarni nosači i njihovi odgovarajući fiktivni nosači [3]

---

## 1.1. Grafička metoda

Grafička metoda se kao i grafoanalitička bazira na određivanju ključnih podataka uz pomoć odgovarajućih fiktivnih nosača, ali uz određene razlike u postupcima. Ako vrijedi da je u određenim uvjetima oslanjanja fiktivnog nosača stvarni progib jednak kvocijentu fiktivnog momenta savijanja i fleksijske krutosti, onda je dijagram fiktivnog momenta savijanja na fiktivnome nosaču u određenom mjerilu elastična linija stvarnog nosača. Kod grafičke metode, dijagram fiktivnog momenta savijanja dobivamo primjenom plana sila i verižnog poligona.

Vrijedi da je:  $\bar{M}(x) = \bar{H} \cdot \bar{\eta}$ , gdje je  $\bar{H}$  polna udaljenost s dimenzijom fiktivne sile, crtana u mjerilu fiktivnih sila, a  $\bar{\eta}$  je ordinata u verižnome poligonu s dimenzijama dužine, crtana u mjerilu dužina u kojemu je crtan i nosač (1:m) [2]. Iz toga dobivamo sljedeći izraz:

$$w = \frac{\bar{H} \cdot \bar{\eta}}{EI_y} \quad (32)$$

Ako polnu udaljenost ne uzmemo proizvoljno već stavimo da je:

$$\bar{H} = EI_y$$

dobivamo da je:

$$w = \bar{\eta} \quad (33)$$

To znači da smo dobili progibe u mjerilu u kojem je crtan nosač (1:m) pa je:

$$w = \bar{\eta} = m\bar{\eta}^* \quad (34)$$

gdje je  $\bar{\eta}^*$  izmjerena ordinata u verižnome poligonu.



---

Izraz (32) možemo zapisati i u drugačijem obliku:

$$w = \frac{\bar{H}m\bar{\eta}^*}{EI_y} \quad (35)$$

Ako izrazimo polnu udaljenost tako da glasi;

$$\bar{H} = \frac{EI_y}{m} \quad (36)$$

i uvrstimo u izraz (35), dobivamo:

$$w = \bar{\eta}^* \quad (37)$$

Progibe koje dobivamo u ovom izrazu biti će u prirodnoj veličini (1 : 1), no možemo utjecati na mjerilo u drugačijem zapisu što će nam pomoći pri proračunu. Ako pomnožimo obje strane jednadžbe u izrazu (35) sa  $n$  (proizvoljno odabran prirodni broj), dobivamo sljedeći izraz:

$$nw = \frac{n\bar{H}m\bar{\eta}^*}{EI_y} \quad (38)$$

Ako polnu udaljenost zapišemo kao:

$$\bar{H} = \frac{EI_y}{mn} \quad (39)$$

---

Dobivamo novi izraz za progib koji glasi:

$$nw = \bar{\eta}^*$$

$$w = \frac{1}{n} \bar{\eta}^*$$

(40)

Dobiveni izraz daje rezultate za progibe koji su n-puta uvećani. Mjerilo progiba je tada  $(1 : \frac{1}{n})$ .

Sumirano, u grafičkoj metodi se uz pomoć verižnog poligona i plana sila konstruira elastična linija nosača. Vrijednost polne udaljenosti izračunamo te crtamo plan fiktivnih sila. U odnosu na plan sila, konstruiramo verižni poligon koji predstavlja tangente krivulje elastične linije i povlačimo zaključnu liniju prema rubnim uvjetima. Krivulja opisana verižnim poligonom je elastična linija nosača. Grafička metoda je jednostavan pristup rješavanju problema elastične linije nosača, no u pitanje se dovodi preciznost samog rezultata.

### 3. NUMERIČKI PRIMJERI

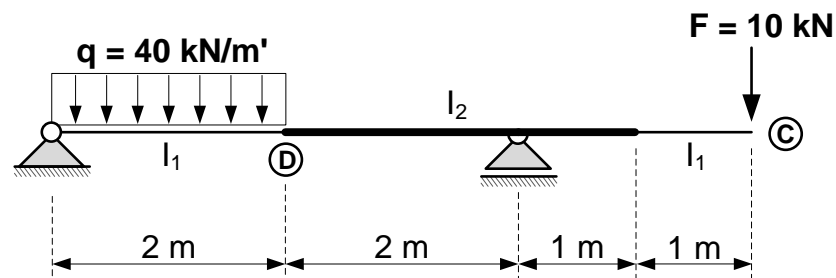
#### 3.1. Prvi numerički primjer – grafoanalitički postupak

- 1.) Za zadani statički sustav treba grafoanalitičkim postupkom odrediti progibe točaka C i D. Također, treba odrediti kut zaokreta presjeka C. Nadalje, potrebno je skicirati progibnu liniju nosača.

$$E=2,0 \cdot 10^5 \text{ Mpa}$$

$$I_1=10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_2=2 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$



Postupak rješavanja:

Prvi korak je prebaciti kontinuirano opterećenje  $q$  u koncentrirano  $Q$ , umnoškom  $q$  sa duljinom nosača  $l$ :

$$Q = q \cdot l = 40 \cdot 2 = \mathbf{80kN}$$

Reakcije ležajeva dobivamo iz uvjeta ravnoteže. U ovom slučaju uzeta je suma momenata u ležaju A i suma vertikalnih sila:

$$\sum M_A = 0$$

$$4 \cdot R_B - 6 \cdot F - 1 \cdot Q = 0$$

$$4 \cdot R_B = 6 \cdot 10 + 1 \cdot 80$$

$$4 \cdot R_B = 140 / \div 4$$

$$R_B = \mathbf{35kN}$$

$$\sum F_Y = 0$$

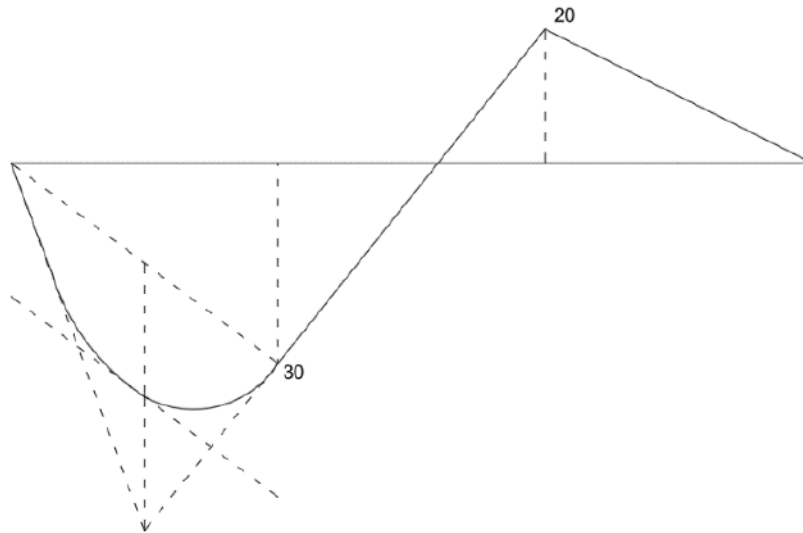
$$Q + F - R_B - R_A = 0$$

$$R_A = Q + F - R_B$$

$$R_A = 80 + 10 - 35$$

$$R_A = 55 \text{ kN}$$

Konstruiramo dijagram momenta stvarnog nosača:

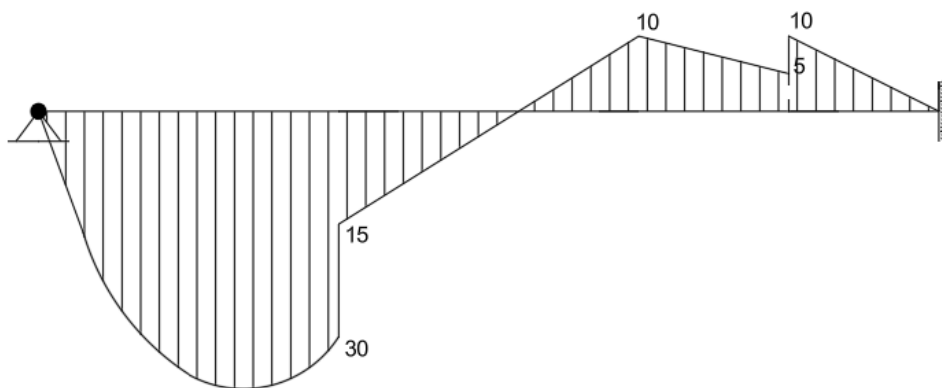


Slika 3. Momentni dijagram stvarnog nosača

$$\frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{40 \cdot 2^2}{8} = 20 \text{ kNm}$$

Zatim, odabiremo odgovarajući fiktivni nosač za naš stvarni nosač. U ovom numeričkom primjeru zadan je sustav s prepustom oslonjen zglobno na lijevom rubu i klizno na odmaku 2 metra od desnog ruba. Odgovarajući fiktivni nosač biti će oslonjen zglobno na lijevom rubu te upet u desnom.

Na odabrani fiktivni nosač nanosimo momentni dijagram stvarnog nosača te provodimo redukciju momenta:



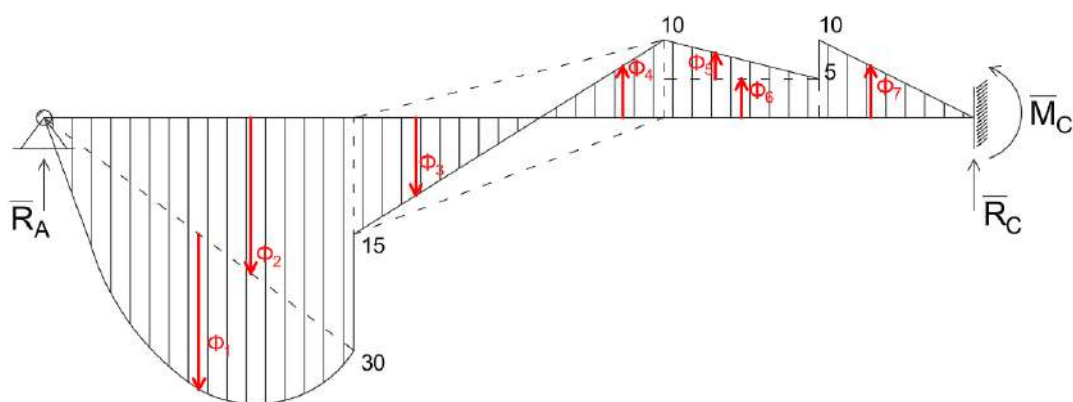
Slika 4. Reducirani momentni dijagram na fiktivnom nosaču

$$M_B^* = M \cdot \frac{I_0}{I_1} = 20 \cdot \frac{10^8}{2 \cdot 10^8} = \mathbf{10kNm}$$

$$M_D^* = M \cdot \frac{I_0}{I_1} = 30 \cdot \frac{10^8}{2 \cdot 10^8} = \mathbf{15kNm}$$

$$M_E^* = M \cdot \frac{I_0}{I_1} = 10 \cdot \frac{10^8}{2 \cdot 10^8} = \mathbf{5kNm}$$

Dobiveno fiktivno kontinuirano opterećenje zamjenjujemo s koncentriranim fiktivnim opterećenjem u odgovarajućim smjerovima djelovanja. Sljedeći je korak izračunati vrijednosti koncentriranih fiktivnih opterećenja.



Slika 5. Djelovanje koncentriranih fiktivnih opterećenja

$$\Phi_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot l = \frac{2 \cdot 40 \cdot 2^2}{3 \cdot 8} = 26.67 \text{ kNm}$$

$$\Phi_2 = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{30 \cdot 2}{2} = 30 \text{ kNm}^2$$

$$\Phi_3 = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{15 \cdot 2}{2} = 15 \text{ kNm}^2$$

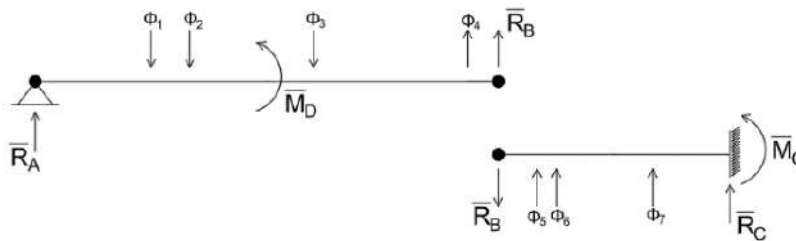
$$\Phi_4 = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{10 \cdot 2}{2} = 10 \text{ kNm}^2$$

$$\Phi_5 = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{5 \cdot 1}{2} = 2.5 \text{ kNm}^2$$

$$\Phi_6 = a \cdot b = 5 \cdot 1 = 5 \text{ kNm}^2$$

$$\Phi_7 = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{10 \cdot 1}{2} = 5 \text{ kNm}^2$$

Zatim djelimo fiktivni nosač na lijevu i desnu stranu. Pojedinačno na svakoj strani proračunvamo tražene vrijednosti. Na lijevoj strani dobivamo  $\bar{R}_B$ ,  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{M}_D$  dok na desnoj dobivamo  $\bar{M}_C$  i  $\bar{R}_C$ .



Slika 6. Rastavljeni fiktivni nosač

---

LIJEVA STRANA NOSAČA

$$\sum \bar{M}_A = 0$$

$$4 \cdot \bar{R}_B - \Phi_1 \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \Phi_2 - \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 2\right) \cdot \Phi_3 + \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 2\right) \cdot \Phi_4 = 0$$

$$4 \cdot \bar{R}_B = \Phi_1 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \Phi_2 + \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 2\right) \cdot \Phi_3 - \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 2\right) \cdot \Phi_4$$

$$4 \cdot \bar{R}_B = 26.67 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 30 + \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 2\right) \cdot 15 - \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 2\right) \cdot 10$$

$$4 \cdot \bar{R}_B = 26.67 + 40 + 40 - 33.33$$

$$4 \cdot \bar{R}_B = 73.34 / \div 4$$

$$\bar{R}_B = \mathbf{18.33kNm^2}$$

$$\sum \bar{F}_Y = 0$$

$$\bar{R}_A - \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 + \Phi_4 + \bar{R}_B = 0$$

$$\bar{R}_A = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 - \Phi_4 - \bar{R}_B$$

$$\bar{R}_A = 26.67 + 30 + 15 - 10 - 18.33$$

$$\bar{R}_A = \mathbf{43.34kNm^2}$$

$$\sum \bar{M}_D = 0$$

$$2\bar{R}_A - \bar{M}_D - \Phi_1 - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \Phi_2 = 0$$

$$\bar{M}_D = 2 \cdot \bar{R}_A - \Phi_1 - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \Phi_2$$

$$\bar{M}_D = 2 \cdot 43.34 - 26.67 - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 30$$

$$\bar{M}_D = \mathbf{40.01kNm^3}$$

---

DESNA STRANA NOSAČA

$$\sum \bar{M}_C = 0$$

$$\bar{M}_C + 2 \cdot \bar{R}_B - \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + 1\right) \cdot \Phi_5 - 1.5 \cdot \Phi_6 - \frac{2}{3} \cdot \Phi_7 = 0$$

$$\bar{M}_C = -2 \cdot \bar{R}_B + \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + 1\right) \cdot \Phi_5 + 1.5 \cdot \Phi_6 + \frac{2}{3} \cdot \Phi_7$$

$$\bar{M}_C = -2 \cdot 18.33 + \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + 1\right) \cdot 2.5 + 1.5 \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot 5$$

$$\bar{M}_C = -36.66 + 4.17 + 7.5 + 3.33$$

$$\bar{M}_C = -21.66 \text{ kNm}^3$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$\bar{R}_B - \Phi_5 - \Phi_6 - \Phi_7 - \bar{R}_C = 0$$

$$\bar{R}_C = \bar{R}_B - \Phi_5 - \Phi_6 - \Phi_7$$

$$\bar{R}_C = 18.33 - 2.5 - 5 - 5$$

$$\bar{R}_C = 5.83 \text{ kNm}^2$$

Nakon izračuna svih unutrašnjih fiktivnih sila možemo izračunati progibe u traženim točkama.

$$w_C = \frac{M_C}{E \cdot I_0} = \frac{-21.66 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^8} = -1.08 \text{ mm}$$

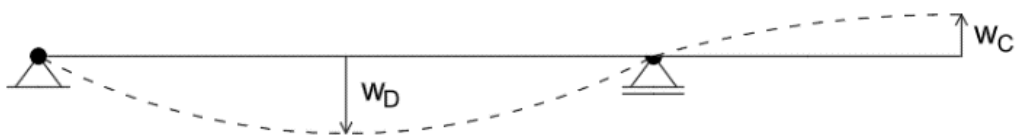
$$w_D = \frac{\bar{M}_D}{E \cdot I_0} = \frac{40.01 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^8} = 2 \text{ mm}$$

$$\varphi_C = \frac{\bar{R}_C}{E \cdot I_1} = \frac{5.83 \cdot 10^{19}}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^8} = 0.0003 \text{ rad}$$



---

Završno skiciramo progibnu liniju nosača:



Slika 7. Progibna linija nosača

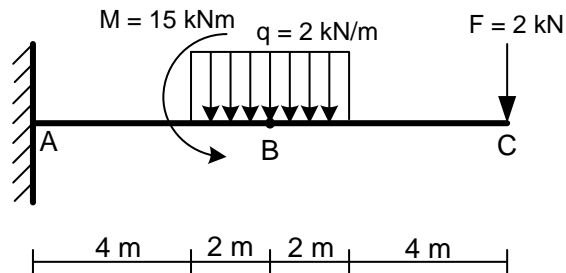
### 3.2. Drugi numerički primjer – analitički postupak

2. Za nosač prikazan na slici analitičkim postupkom treba odrediti progib i kut zaokreta u točki B te skicirati progibnu liniju.

Zadano je:

$$E=2,0 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$I=8,0 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$



Prvi korak je pretvoriti kontinuirano opterećenje  $q$  u koncentriranu silu  $Q$ :

$$Q = q \cdot l = 2 \cdot 4 = \mathbf{8kN}$$

Iz uvjeta ravnoteže dobivamo nepoznate vrijednosti reakcija u ležaju:

$$M_A = 0$$

$$M + M_A - 6 \cdot Q - 12 \cdot F = 0$$

$$M_A = -M + 6 \cdot Q + 12 \cdot F$$

$$M_A = -15 + 6 \cdot 8 + 12 \cdot 2$$

$$M_A = \mathbf{57kNm}$$

$$\sum F_Y = 0$$

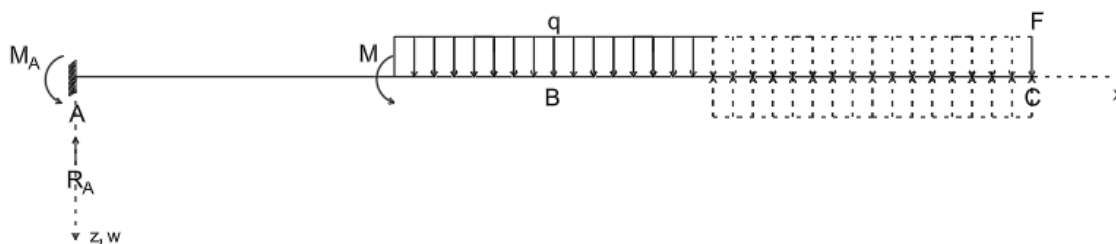
$$F + Q - R_A = 0$$

$$R_A = F + Q$$

$$R_A = 2 + 8$$

$$R_A = \mathbf{10kN}$$

Potrebno je zatim izraziti jednadžbu momenta savijanja. Pošto kontinuirano opterećenje ne djeluje uzduž cijelog nosača, potrebno je produljiti to opterećenje po nosaču i na produžetku dodati ekvivalentno opterećenje:



Slika 8. Ekvivalentno kontinuirano opterećenje

$$\frac{d^2 w}{dx^2} EI_Y = -M(x)$$

$$M(x) = M_A \cdot x^0 - R_A \cdot x + M \cdot (x - 4)^0 + q \cdot \frac{(x - 4)^2}{2} - q \cdot \frac{(x - 8)^2}{2}; (x - a_i) > 0$$

Jednažbu uzastopno integriramo kako bi dobili izraze za progib i kut zaokreta:

$$EI_Y \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_A \cdot x^0 + R_A \cdot x - M \cdot (x - 4)^0 - q \cdot \frac{(x - 4)^2}{2} + q \cdot \frac{(x - 8)^2}{2} / \int$$

$$EI_Y \cdot \frac{dw}{dx} = -M_A \cdot x + R_A \cdot \frac{x^2}{2} - M \cdot (x - 4) - q \cdot \frac{(x - 4)^3}{6} + q \cdot \frac{(x - 8)^3}{6} + C / \int$$

$$EI_Y \cdot w(x) = -M_A \cdot \frac{x^2}{2} + R_A \cdot \frac{x^3}{6} - M \cdot \frac{(x - 4)^2}{2} - q \cdot \frac{(x - 4)^4}{24} + q \cdot \frac{(x - 8)^4}{24} + C \cdot x + D$$

---

Konstante integracije su nam nepoznate te ih moramo izračunati preko rubnih uvjeta:

**1.)  $x = 0, w = 0$**

$$EI_Y \cdot 0 = -M_A \cdot \frac{0^2}{2} + R_A \cdot \frac{0^3}{6} - M \cdot \frac{(0-4)^2}{2} - q \cdot \frac{(0-4)^4}{24} + q \cdot \frac{(0-8)^4}{24} + C \cdot 0 + D$$

$$0 = -M \cdot \frac{(-4)^2}{2} - q \cdot \frac{(-4)^4}{24} + q \cdot \frac{(-8)^4}{24} + D$$

$$0 = -15 \cdot \frac{(-4)^2}{2} - 2 \cdot \frac{(-4)^4}{24} + 2 \cdot \frac{(-8)^4}{24} + D$$

$$0 = -120 - 21.33 + 341.33 + D$$

$$D = 120 + 21.33 - 341.33$$

$$\mathbf{D = -200kNm^2}$$

**2.)  $x = L, \varphi = 0$**

$$EI_Y \cdot 0 = -M_A \cdot 12 + R_A \cdot \frac{12^2}{2} - M \cdot (12-4) - q \cdot \frac{(12-4)^3}{6} + q \cdot \frac{(12-8)^3}{6} + C$$

$$0 = -57 \cdot 12 + 10 \cdot \frac{12^2}{2} - 15 \cdot (8) - 2 \cdot \frac{(8)^3}{6} + 2 \cdot \frac{(4)^3}{6} + C$$

$$0 = -684 + 720 - 120 - 170.67 + 21.33 + C$$

$$C = 684 - 720 + 120 + 170.67 - 21.33$$

$$\mathbf{C = 233.34kNm^2}$$

Sa svim izračunatim podacima vraćamo se u formulu za progib te dobivamo traženu vrijednost:

**$w_B = ?, x = 6$**

$$w_B = \frac{-M_A \cdot \frac{x^2}{2} + R_A \cdot \frac{x^3}{6} - M \cdot \frac{(x-4)^2}{2} - q \cdot \frac{(x-4)^4}{24} + q \cdot \frac{(x-8)^4}{24} + C \cdot x + D}{E \cdot I_y}$$

$$w_B = \frac{\left(-57 \cdot \frac{6^2}{2} + 10 \cdot \frac{6^3}{6} - 15 \cdot \frac{(2)^2}{2} - 2 \cdot \frac{(2)^4}{24} + 2 \cdot \frac{(-2)^4}{24} + 233.34 \cdot 6 - 200\right) \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^8}$$

$$w_B = \frac{(-1026 + 360 - 30 - 1.33 + 1.33 + 233.34 \cdot 6 - 200) \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^8}$$

$$w_B = \frac{(504.04) \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^8}$$

$$w_B = 3.15 \text{ mm}$$

Također, možemo izračunati i traženi kut zaokreta:

$$\varphi_B = 0, x = 6$$

$$\varphi_B = \frac{-M_A \cdot 6 + R_A \cdot \frac{6^2}{2} - M \cdot (6 - 4) - q \cdot \frac{(6 - 4)^3}{6} + q \cdot \frac{(6 - 8)^3}{6} + C}{E \cdot I_y}$$

$$\varphi_B = \frac{-57 \cdot 6 + 10 \cdot \frac{6^2}{2} - 15 \cdot (2) - 2 \cdot \frac{(2)^3}{6} + 2 \cdot \frac{(-2)^3}{6} + 233.34}{2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^8}$$

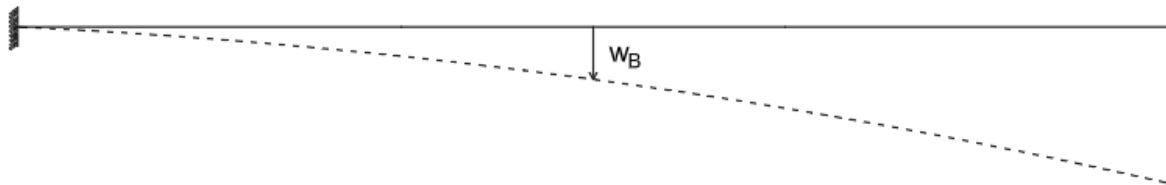
$$\varphi_B = \frac{-342 + 180 - 30 - 2.67 + 2.67 + 233.34}{2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^8}$$

$$\varphi_B = \frac{41.34 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^8}$$

$$\varphi_B = 0.000258 \text{ rad}$$

---

Nakraju skiciramo progibnu liniju traženog nosača:



Slika 9. Progibna linija nosača

---

## 4. ZAKLJUČAK

U ovom radu detaljno smo obradili temu određivanja progiba ruba balkona, što je ključan aspekt u projektiranju i izvedbi građevinskih konstrukcija. Analizirali smo i usporedili tri različite metode: analitičku, grafoanalitičku i grafičku, za određivanje progiba i kuta zaokreta nosača.

Analitička metoda, koja se temelji na uzastopnom integriranju diferencijalnih jednadžbi, pokazala se preciznom i jednostavnom za primjenu u jednostavnijim slučajevima, ali njezina primjena može postati složena kod kompleksnijih konstrukcija. Grafoanalitička metoda, koja koristi fiktivni nosač i analogiju s dijagramima momenta savijanja, omogućuje jednostavnije rješavanje složenijih problema, dok grafička metoda, koja se također oslanja na fiktivne nosače, nudi vizualno intuitivan pristup i praktična rješenja za određivanje progiba.

Usporedbom ovih metoda došli smo do zaključka da svaka od njih ima svoje prednosti i nedostatke te da izbor metode ovisi o specifičnostima konstrukcije i potrebama projektiranja. U konačnici, cilj je bio pružiti sveobuhvatan pregled i razumijevanje metoda za određivanje progiba ruba balkona kako bi se budućim inženjerima omogućilo da odaberu najprikladniji pristup za svoje projekte.

---

## POPIS LITERATURE

- [1] *Tehnički leksikon (2007), mrežno izdanje*. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2024
- [2] "Otpornost materijala 1", Vice Šimić, Školska knjiga, Zagreb, 2002.
- [3] Otpornost materijala 1, predavanja, Građevinski fakultet Zagreb
- [4] Otpornost materijala 1, auditorne vježbe, Građevinski fakultet Zagreb