

Gerberovi nosači

Škalic, Juraj

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:050854>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-27**

Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Juraj Škalic

GERBEROVI NOSAČI

ZAVRŠNI RAD

Zagreb, 2024.



Sveučilište u Zagrebu
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Juraj Škalic

GERBEROVI NOSAČI

ZAVRŠNI RAD

Mentor: Izv.prof.dr.sc. Višnja Tkalčević Lakušić

Zagreb, 2024.



Sveučilište u Zagrebu
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Juraj Škalic

GERBER BEAMS

FINAL EXAM

Supervisor: Izv.prof.dr.sc. Višnja Tkalčević Lakušić

Zagreb, 2024.



Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet



OBRAZAC 2

TEMA ZAVRŠNOG ISPITA

Ime i prezime studenta: Juraj Škalic

JMBAG: 0082064640

Završni ispit iz kolegija: Mehanika 1

Naslov teme završnog ispita (HR): Gerberovi nosači

Naslov teme završnog ispita (ENG): Gerber beams

Opis teme završnog ispita:

Sadržaj:
1. Uvod
2. Definicija Gerberovih nosača
3. Tipovi Gerberovih nosača
4. Primjena Gerberovih nosača
5. Proračun Gerberovih nosača
6. Numerički primjeri
7. Zaključak
8. Literatura

Datum: 8.4.2024.

Mentor: izv.prof.dr.sc. Višnja Tkalčević Lakušić

Potpis mentora:

Komentor:

SAŽETAK

Tema ovog završnog rada su Gerberovi nosači. Gerberovi nosači su statički određeni ravni nosači koji su kontinuirano položeni na dva ili više ležaja od kojih je u pravilu jedan nepomičan, a ostali su pomični u horizontalnom smjeru. Pri sastavljanju ovakvih nosača bitno je paziti na pravilan raspored zglobova, tako da u istom polju nisu više od dva zgloba i da u dva susjedna polja nisu po dva zgloba. Na početku rada definirane su osnovne karakteristike Gerberovih nosača. Nadalje je objašnjena njihova primjena u građevinarstvu te su dani primjeri izvedenih Gerberovih nosača. U nastavku je prikazan način proračuna Gerberovih nosača analitičkim, grafičkim i grafoanalitičkim postupkom. U radu su riješena dva primjera Gerberovih nosača od kojih je svaki riješen na analitički i superpozicijski način te su prikazani dijagrami unutarnjih sila.

Ključne riječi: Gerberov nosač, raspored zglobova, primjena u praksi, analitički postupak, grafo-analitički postupak, grafički postupak

SUMMARY

The topic of this final paper is Gerber brackets. Gerber supports are statically determined flat supports that are continuously laid on two or more bearings, one of which is usually stationary, and the others are movable in the horizontal direction. When assembling such supports, it is important to pay attention to the correct arrangement of the joints, so that there are no more than two joints in the same field and that there are no two joints in two adjacent fields. At the beginning of the work, the basic characteristics of Gerber supports are defined. Furthermore, their application in construction is explained, and examples of derived Gerber supports are given. The method of calculation of Gerber supports by analytical, graphical and graphoanalytical procedure is presented below. In the paper, two examples of Gerber supports are solved, each of which is solved in an analytical and superpositional way, and diagrams of internal forces are presented.

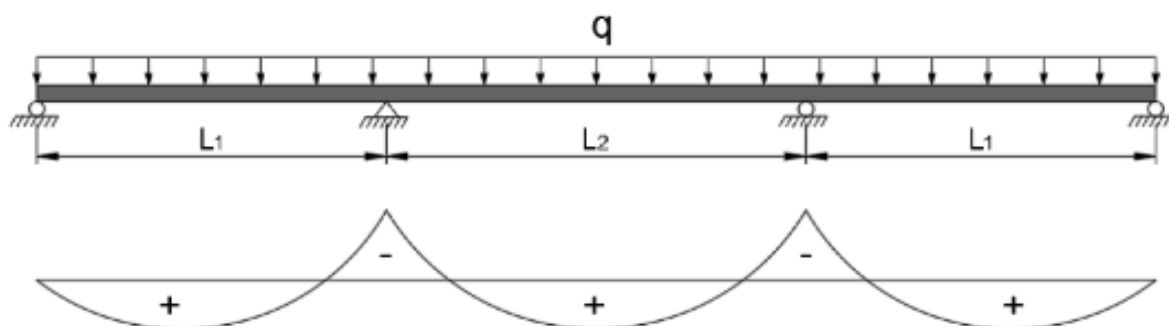
Key words: Gerber support, arrangement of joints, application in practice, analytical procedure, grapho-analytical procedure, graphic procedure

SADRŽAJ

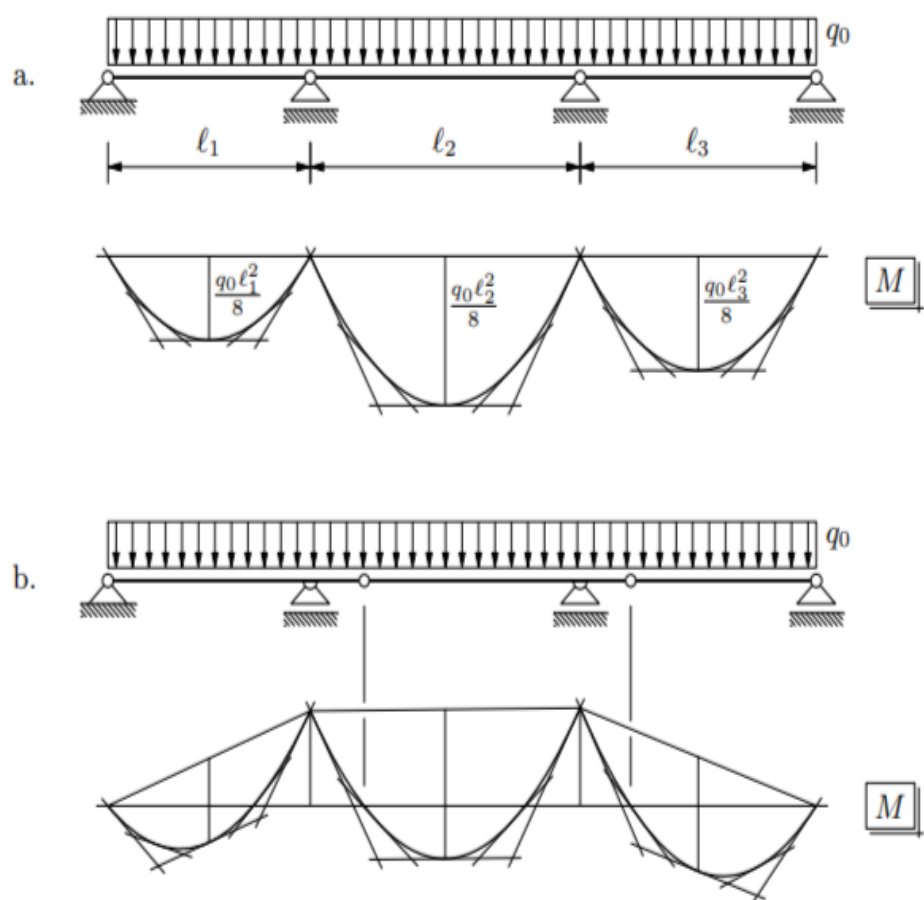
SAŽETAK	I
SUMMARY.....	II
SADRŽAJ.....	III
1. UVOD.....	1
2. DEFINICIJA GERBEROVIH NOSAČA	3
3. TIPOVI GERBEROVIH NOSAČA.....	6
4. PRIMJENA GERBEROVIH NOSAČA	8
5. PRORAČUN GERBEROVIH NOSAČA	10
5.1. ANALITIČKI POSTUPAK	10
5.1.1. <i>Neraščlanjeni postupak.....</i>	<i>11</i>
5.1.2. <i>Raščlanjeni postupak</i>	<i>12</i>
5.2. SUPERPOZICIJSKI POSTUPAK.....	16
5.3. GRAFIČKI POSTUPAK	18
6. NUMERIČKI PRIMJERI.....	20
6.1. ZADATAK 1	20
6.1.1. <i>Analitički postupak.....</i>	<i>20</i>
6.1.2. <i>Superpozicijski postupak.....</i>	<i>24</i>
6.2. ZADATAK 2	25
6.2.1. <i>Analitički postupak.....</i>	<i>26</i>
6.2.2. <i>Superpozicijski postupak.....</i>	<i>31</i>
7. ZAKLJUČAK.....	33
8. LITERATURA.....	34
POPIS SLIKA	35

1. UVOD

U konstrukterstvu se javljaju razni složeni zahtjevi koji se trebaju riješiti specijaliziranim inženjerskim metodama kako bi se postigla funkcionalnost, stabilnost i estetska usklađenost konstrukcija. Jedan od tih zahtjeva je statička neodređenost kontinuiranih nosača, što može dovesti do pojave velikih unutarnjih sila i reakcija u ležajevima u slučaju neujednačenih slijeganja ležaja i neravnomjernih temperaturnih promjena, slika 1.1. Na rješenje tog problema naišao je Heinrich Gerber (1832.-1912.) kada je primijetio da se postavljanjem zglobova na kontinuirani nosač smanjuju momenti u poljima i eliminiraju štetni utjecaji slijeganja. Godine 1868. svoju je ideju patentirao te su po njemu nosači sa zglobovima dobili ime Gerberovi nosači. Na slici 1.2.a. prikazana je raspodjela momenata savijanja na prostim gredama, a na slici 1.2.b. prikazana je redukcija momenata savijanja postavljanjem zglobova u polje nosača [1].



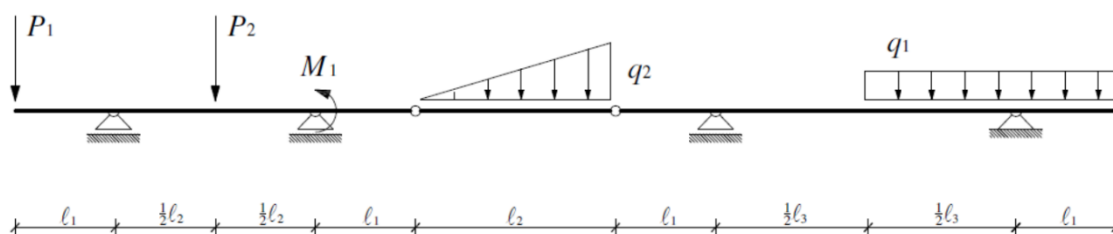
Slika 1.1. Raspodjela momenata na kontinuiranom nosaču [4]



Slika 1.2. Raspodjela momenata na Gerberovom nosaču [1]

2. DEFINICIJA GERBEROVIH NOSAČA

Gerberovi nosači, odnosno nosači sa zglobovima su statički određeni ravninski nosači koji kontinuirano leže na najmanje tri ležaja. Najosnovniji model takvih nosača sastavljen je isključivo od zglobnih ležajeva, od kojih je jedan nepomični, a ostali dopuštaju pomake uzdužno u smjeru osi nosača. Na slici 2.1. prikazan je primjer statički određenog Gerberovog nosača.



Slika 2.1. Primjer Gerberovog nosača [8]

Gerberovi nosači se formiraju na način da se na nosač postavi broj zglobova koji je jednak broju prekomjernih oslonaca, odnosno broju statičke neodređenosti [3]. Stupanj statičke neodređenosti može se odrediti prema sljedećem izrazu:

$$S = n \cdot 3 - z \cdot 2 - L \quad (2.1)$$

gdje je:

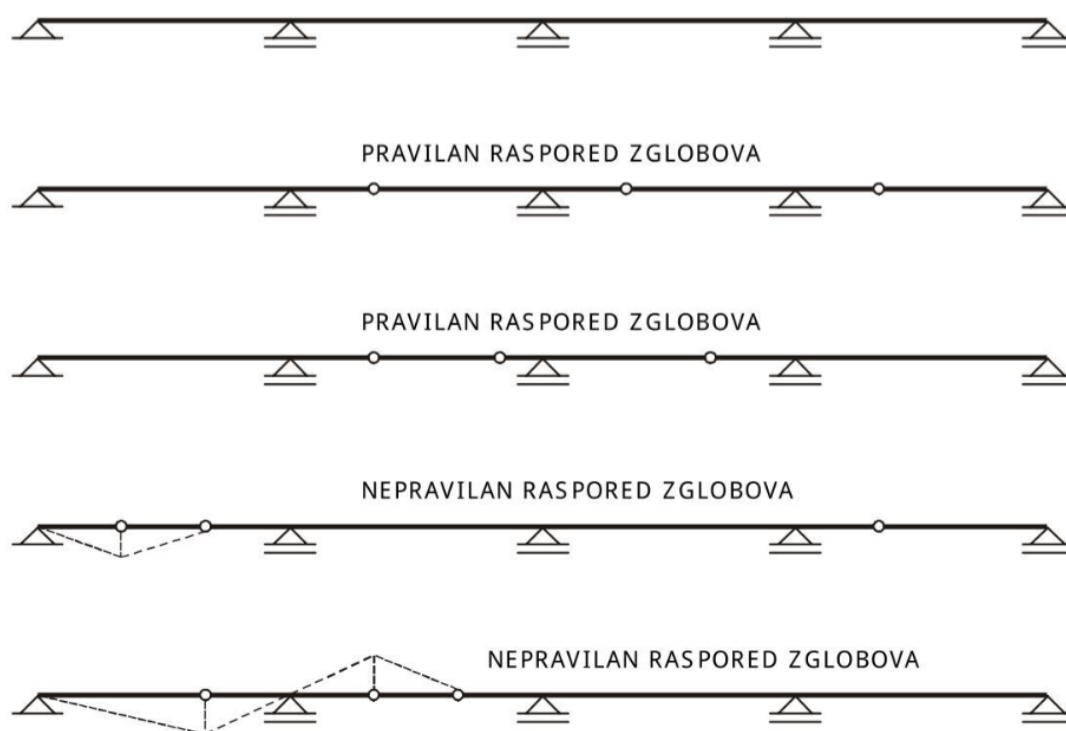
S – broj stupnjeva slobode,

n – broj diskova,

z – broj zglobova,

L – broj veza s podlogom.

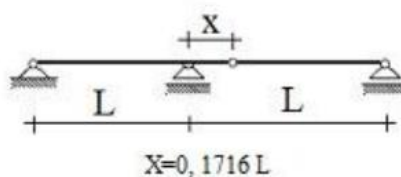
Samo dodavanje zglobova na statički neodređeni sustav nije dovoljno za osigurati statičku određenost i geometrijsku nepromjenjivost tog sistema. Vrlo bitan zahtjev je i pravilan raspored zglobova na nosaču. Pod rasporedom zglobova podrazumijeva se pozicija tih zglobova unutar određenih polja ili, u graničnim slučajevima, iznad određenih ležajeva. Na slici 2.2. prikazan je pravilan i nepravilan. Na temelju te slike može se vidjeti da se u susjednim poljima ne smiju smjestiti po dva zgloba [3].



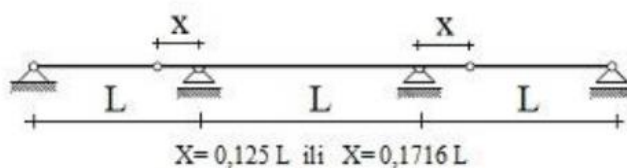
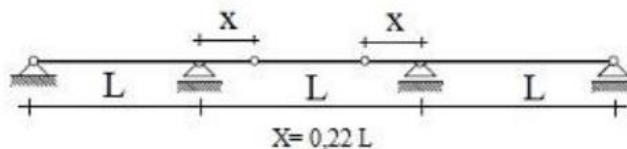
Slika 2.2. Pravilan i nepravilan raspored zglobova [9]

Pored pravilnog rasporeda zglobova po poljima, bitan aspekt čini i položaj zglobova unutar polja. Njihov položaj duž polja predstavlja udaljenost pojedinog zgloba od određenog ležaja. Spomenuta udaljenost je posebno bitna kako bi se ostvarili što manji momenti savijanja nad ležajevima, a samim time će i maksimalni moment nosača biti manji. Način na koji se zglobovi polažu na nosače do pet polja dan je na slici 2.3.

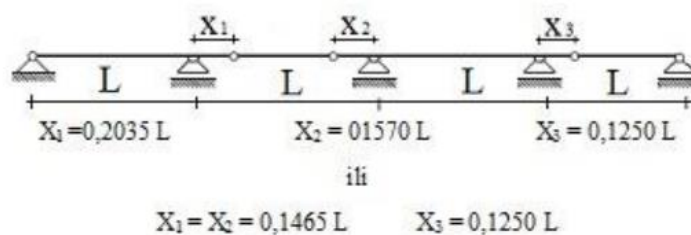
2 POLJA:



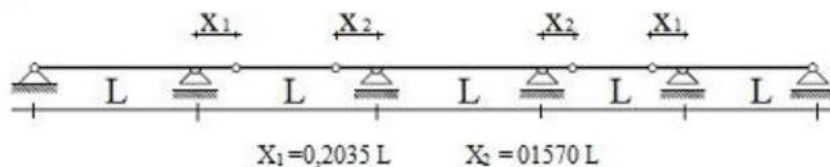
3 POLJA:



4 POLJA:



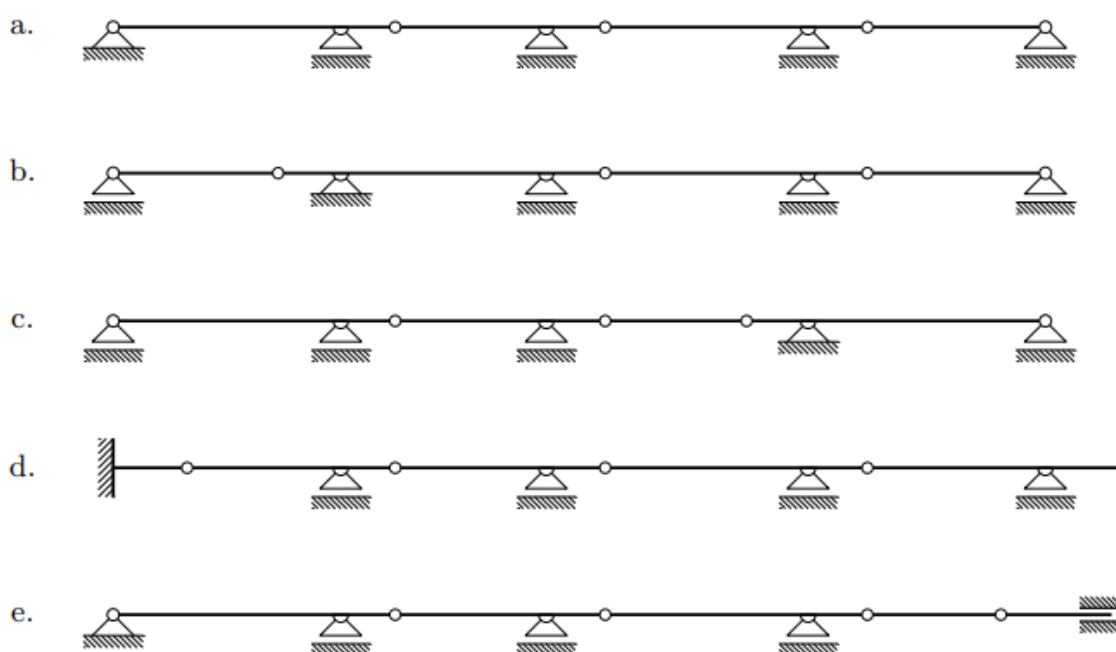
5 POLJA:



Slika 2.3. Raspored zglobova unutar polja [10]

3. TIPOVI GERBEROVIH NOSAČA

Kao što je već ranije rečeno, najosnovniji oblik Gerberovih nosača sastoji se isključivo od zglobnih ležajeva od kojih je jedan nepomični. Međutim, postoje i razni varijantni sustavi koji se također zovu Gerberovim nosačima. Primjeri takvih nosača prikazani su na slici 3.1. Sa slike se može vidjeti da su mogu izvesti i sustavi s prepustima, upetim nepomičnim ležajem i upetim pomičnim ležajem, ako sadrže zglobove koji su pravilno raspoređeni i statički su određeni. Također, u graničnim slučajevima zglobovi se mogu postaviti nad ležajevima te se time dobivaju sastavljeni nosači [3]. Na slikama 3.2. i 3.3. dani su primjeri Gerberovih nosača.



Slika 3.1. Primjeri Gerberovih nosača [1]



Slika 3.2. Željeznički most Loukou u Kini [7]



Slika 3.3. Most preko rijeke Kuma u Japanu [8]

4. PRIMJENA GERBEROVIH NOSAČA

Gerberovi nosači su konstrukcijski elementi koji imaju široku primjenu u građevinarstvu i arhitekturi. Osim što se koriste kao zasebne konstrukcije, mogu se koristiti i kao dijelovi nekih drugih konstrukcija. Neka od područja gdje se ovi nosači koriste su kod izgradnje mostova, industrijskih objekata, nadvožnjaka, podvožnjaka, muzeja, kulturnih centara, sportskih dvorana te kao ojačanje kod restauracije starijih građevina. Najčešće se primjenjuju u situacijama kada je potrebno podržati i stabilizirati konstrukcije velikih raspona. Postavljanjem zglobova na sustav dobivaju se osjetno manji momenti u poljima nego kod jednako opterećenih jednostavno oslonjenih greda. Time se povećava nosivost konstrukcije i smanjuju slijeganja, te se raspon konstrukcije može povećati. U visokim zgradama i konstrukcijama velikih dužina omogućavaju stvaranje velikih otvorenih prostora bez potrebe za dodatnim potpornim elementima, jer se zbog potpornih elemenata može javiti problem ometanja prometa i funkcionalnosti. Mogu biti izrađeni od raznih materijala kao što su čelik, drvo, beton ili od kompozitnih materijala. Izbor materijala za izgradnju takvih nosača ovisi o zahtjevima projekta, opterećenju i funkciji građevine. Na sljedećim slikama je prikazana primjena Gerberovih nosača kod raznih konstrukcija [5].



Slika 4.1. Most Forth u Škotskoj [11]



Slika 4.2. Zračna luka Bangkok, Tajland [12]



Slika 4.3. Šuhovljev toranj u Moskvi

Gerberovi nosači se također koriste kao nosači drugih elemenata ili kod stabilizacije. Tako se u industrijskim objektima koriste kao nosači za opremu, teške cijevi i sustave. Između ostalog, mogu se koristiti i za privremene građevinske konstrukcije, kao što su radničke platforme i skele [5].

5. PRORAČUN GERBEROVIH NOSAČA

Proračun Gerberovih nosača može se provoditi na više načina: analitičkim postupkom, koji se može izvesti na raščlanjeni i neraščlanjeni način, te grafonaličkim postupkom, odnosno superpozicijskim načinom i grafičkim postupkom. Na temelju proračuna Gerberovih nosača dobivaju se dijagrami unutarnjih sila u odnosu na zadana opterećenja koja djeluju na nosač. Dijagrami unutarnjih sila se kasnije koriste pri proračunu konstrukcija u građevinarstvu. U nastavku ovog rada biti će prikazani primjeri osnovnog proračuna statički određenih sustavapomoću navedenih postupaka [3].

5.1. Analitički postupak

Prvo se postavljaju uvjeti ravnoteže za nosač, a osnovni uvjeti ravnoteže zadani su izrazom:

$$\sum F_x = 0; \sum F_z = 0; \sum M = 0 \quad (5.1)$$

gdje je:

F_x – suma sila u smjeru osi x [N],

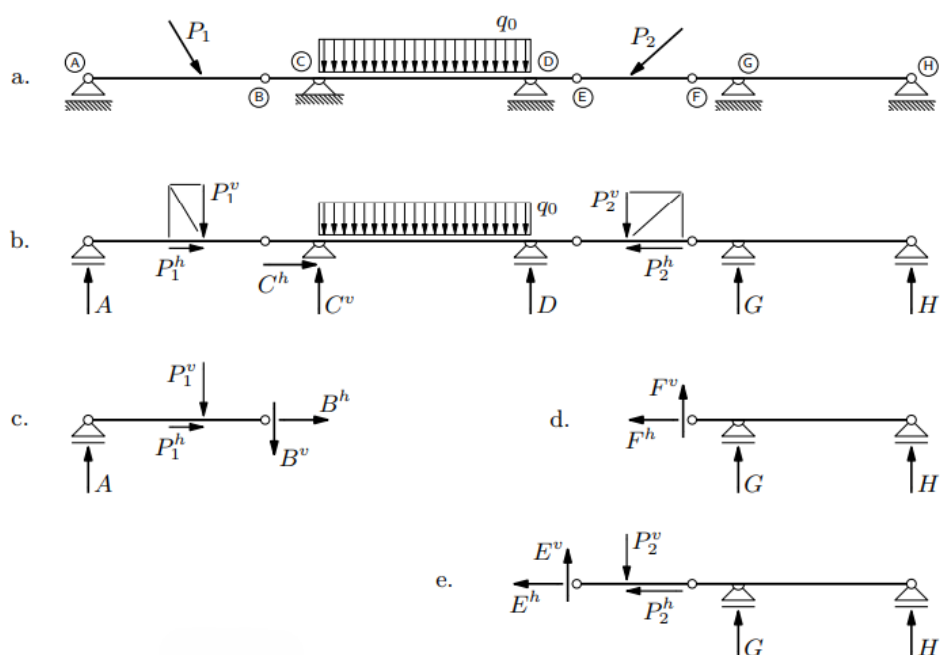
F_z – suma sila u smjeru osi z [N],

M – suma momenata oko točke [Nm].

Ukoliko se promatra nosač kao cjelina, može se vidjeti da se pojavljuje više nepoznatih sila nego što je raspoloživih jednadžbi ravnoteže. Do dodatnih jednadžbi može se doći na raščlanjeni i neraščlanjeni način.

5.1.1. Neraščlanjeni postupak

U ovome postupku se dijelovi nosača zasebno odvajaju i uravnotežavaju te se na taj način dobijaju nove jednačbe potrebne za rješavanje sustava. Na slici 5.1. prikazan je primjer neraščlanjenog postupka. Budući da je u presjeku na mjestu zgloba jednačba ravnoteže momenata jednaka nuli, ne uvode se nove nepoznanice u rješavanju jednačbi. Prednost ovoga postupka je rastavljanje kompleksnijih nosača na manje, jednostavnije i neovisne nosače [1].



Slika 5.1. Neraščlanjeni postupak [1]

Zadani sustav sadrži tri zgloba, što omogućava izradu tri presjeka i izdvajanje tri segmenta nosača, slika 5.1.c,d,e. Nakon što se izdvojeni dijelovi uravnoteže dobivaju se još tri jednačbe koje nedostaju, te se tako dobije šest jednačbi sa šest nepoznanica.

Jednadžbe ravnoteže za cijeli nosač:

$$\sum_{AH} F_X = 0, \sum_{AH} M_A = 0, \sum_{AH} M_H = 0 \quad (5.2)$$

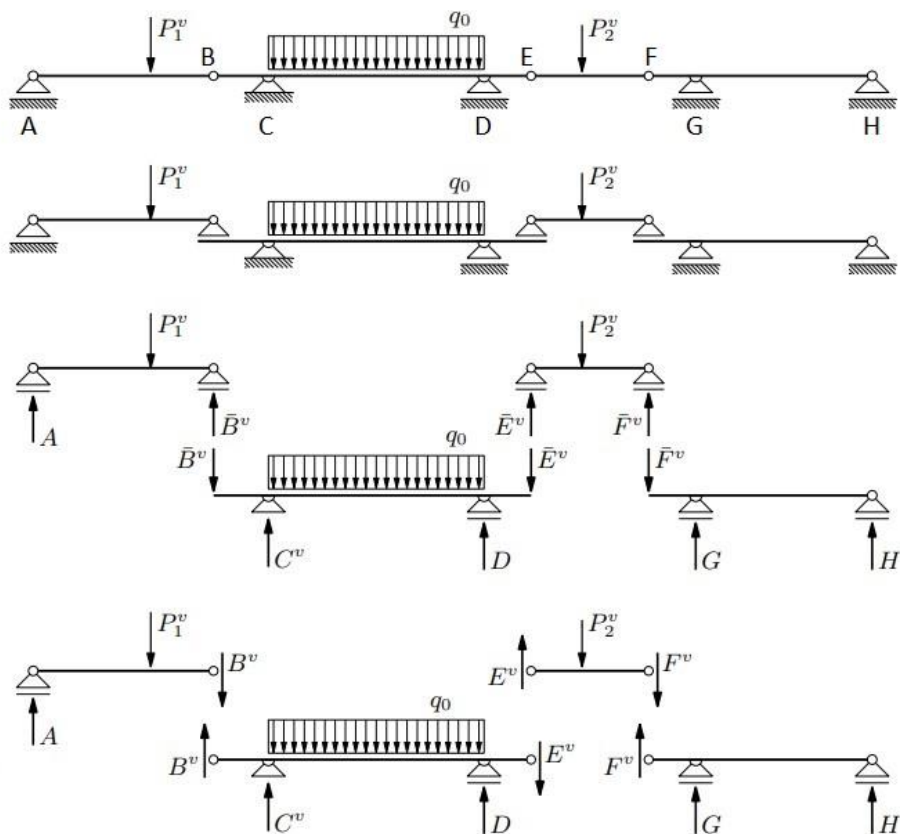
Jednadžbe ravnoteže za dijelove nosača:

$$\sum_{AB} M_B = 0, \sum_{FH} M_F = 0, \sum_{EH} M_E = 0 \quad (5.3)$$

Iako se na taj način dobiva veliki sustav jednadžbi, vrlo lako se može riješiti. Jako je bitan redoslijed rješavanja jednadžbi, budući da su određene jednadžbe ovisne jedne o drugima. No, postoje i one koje su neovisne, tako da se projekcijom sila po x osi vrlo lako može odrediti vrijednost sile C_H . Vrijednost sile A se može odrediti iz ravnoteže momenata oko zgloba B za dio AB nosača. Nadalje, nepoznanice G i H određuju se neovisnim sustavom dvije jednadžbe ravnoteži momenata za djelove F_H i E_H . Uz dobivene vrijednosti mogu se odrediti i preostale nepoznate sile [1].

5.1.2. Raščlanjeni postupak

Ovim postupkom dodatne jednadžbe dobivaju se na način da se nosač između dva susjedna zgloba presiječe te se dijelovi nosača rastave. Pomoću sheme statičkog djelovanja nosača određuje se redoslijed rješavanja. Statičko djelovanje govori o prenosu sile s jednog dijela nosača do drugoga te konačno do podloge [1]. Na sljedećoj slici prikazan je primjer ovoga postupka:



Slika 5.2. Raščlanjeni postupak [1]

Gerberov nosač se može razmatrati kao nosač koji je sastavljen od jednostavno oslonjenih greda i greda s prepustom. Grede koje su obostrano oslonjene na podlogu nazivaju se osnovnim dijelovima nosača, dok su one koje su oslonjene na drugu gredu bar jednom vezom priključni dijelovi. U zadanom su primjeru osnovni dijelovi greda s prepustom BE koja je oslonjena na ležajeve C i D, te greda s prepustom FH koja se oslanja na ležajeve G i H. Jednostavno oslonjena greda AB koju pridržava realni ležaj A i imaginarni B te jednostavno oslonjena greda EF koja sadrži imaginarne ležajeve E i F su u ovom slučaju priključni dijelovi, slika 5.2.b. [1].

Redosljed kojim se rješava biti će suprotan onome od slaganja sustava. Opterećenja s osnovnih dijelova nemaju utjecaj na priključne dijelove, dok se one s priključnih dijelova prenose na osnovne dijelove. Budući da nisu poznata sva opterećenja koja djeluju na osnovne njih nije moguće rješavati, zato je potrebno prvo odrediti nepoznanice na priključnim dijelovima. Na djelu nosača AB djeluje sila P , reakcija na ležaju A i sila u zglobu B, slika 5.2.c.:

$$\sum_{AB} M_B = 0; (a_1 + a_2) \cdot A - a_2 \cdot P_1 = 0, \quad (5.4)$$

$$\sum_{AB} M_A = 0; (-a_1 \cdot P_1) - (a_1 + a_2) \cdot B = 0$$

S a_1 i a_2 označene udaljenosti sile P_1^v od ležajeva,

Iz čega se dobiva:

$$A = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \cdot P_1^v \quad (5.5)$$

$$B = -\frac{a_1}{a_1 + a_2} \cdot P_1^v$$

Dobivene vrijednosti možemo provjeriti sumom vertikalnih sila:

$$\sum_{AB} F_Z = 0; -A + B + P_1 = 0 \quad (5.6)$$

Na djelu nosača EF djeluje zadano opterećenje P i sile u zglobovima E i F:

$$\sum_{EF} M_F = 0; -(c_2 + c_3) \cdot E + c_3 \cdot P_2 = 0, \quad (5.7)$$

$$\sum_{EF} M_E = 0; -c_2 \cdot P_2 - (c_2 + c_3) \cdot F = 0$$

S c_2 i c_3 označene udaljenosti sile P_2^v od ležajeva,

Što daje vrijednosti:

$$E = \frac{c_3}{c_2 + c_3} \cdot P_2^v \quad (5.8)$$

$$F = -\frac{c_2}{c_2 + c_3} \cdot P_2^v$$

Provjera sumom vertikalnih sila:

$$\sum_{EF} F_Z = 0; -E + F + P_2 = 0 \quad (5.9)$$

Prelaskom na dio nosača FH, nepoznate reakcije su G i H, a već poznatu silu F može se smatrati zadanom silom:

$$\sum_{FH} M_H = 0; -(c_4 + d) \cdot F + d \cdot G = 0, \quad (5.10)$$

$$\sum_{FH} M_G = 0; -c_4 \cdot F - d \cdot H = 0$$

Uvrštavanjem u jednadžbu dobiju se:

$$G = -\frac{c_4 + d}{c_4} \cdot F^v \quad (5.11)$$

$$H = \frac{c_4}{d} \cdot F^v$$

Provjera:

$$\sum_{FH} F_Z = 0; -F - G - H = 0 \quad (5.12)$$

Ostaje samo dio BE kao neriješen. Na njemu djeluje jednoliko distribuirana sila i već proračunate sile u zglobovima B i E. Jednadžba ravnoteže momenata oko točke D daje:

$$\sum_{BE} M_D = 0; -(a_3 + b) \cdot B - b \cdot C + \frac{b}{2} \cdot (q \cdot b) - c_1 \cdot E = 0 \quad (5.13)$$

Što daje vrijednost reakcije C:

$$C = \frac{a_3 + b}{b} \cdot B^v + \frac{q_0 b}{2} - \frac{c_1}{b} \cdot E^v \quad (5.14)$$

Ravnoteža momenata oko točke C:

$$\sum_{BE} M_C = 0; -a_3 \cdot B - \frac{b}{2} \cdot (q \cdot b) + b \cdot D - (b + c_1) \cdot E = 0 \quad (5.15)$$

Čime se dobije vrijednost D:

$$D = \frac{a_3}{b} \cdot B^v + \frac{q_0 b}{2} + \frac{b + c_1}{b} \cdot E^v \quad (5.16)$$

Provjera:

$$\sum_{BE} F_Z = 0; \quad -B - C - q \cdot b - D + E = 0 \quad (5.17)$$

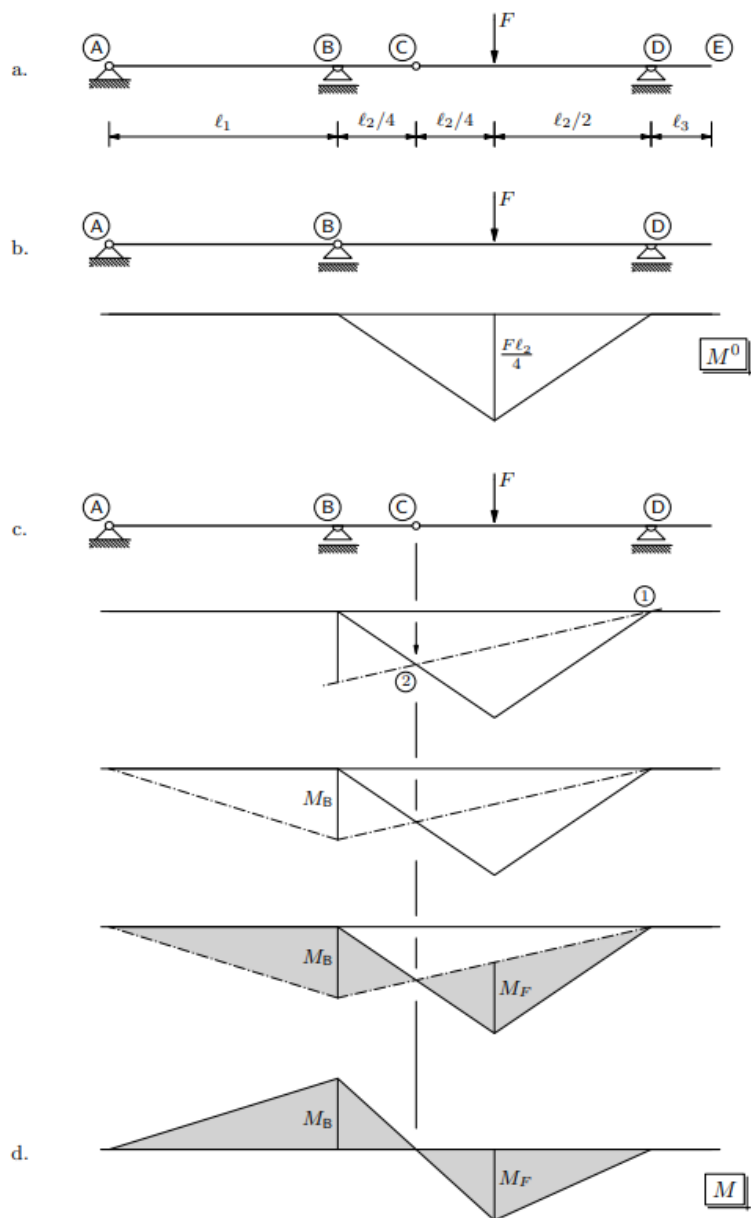
5.2 Superpozicijski postupak

Superpozicijski postupak se rješava na način da se zglobovi nosača prebacuju na ležajeve. Time se dobije sustav kojeg čini niz jednostavno oslonjenih greda. Raspored opterećenja na sustav se ne mijenja. Na zamjenskom sustavu se pomoću zadanog opterećenja određuje momentni dijagram M^0 . Nadalje, crta se momentni dijagram M^{dod} koji nastaje dodavanjem para koncentriranih momenata na mjestu ležajeva kojima se postiže poništenje momenata na mjestu zglobova [3].

$$M_0 + M_{dod} = 0 \quad (5.19)$$

$$M_0 = -M_{dod}$$

Crtanje dijagrama M^{dod} ovisi o rubnim uvjetima sustava. Na mjestu zglobova konačni momentni dijagram mora biti jednak nuli, što znači da će se na tom mjestu dva navedena dijagrama sijeći. Također, na mjestu ležajeva dogoditi će se lom dijagrama, budući da se u ležajevima javljaju reakcije. Na primjeru sa slike 5.3., jasno je da su momenti $M_D^B = 0$ i $M_C^B = -M_C^0$, stoga će se isječak dijagrama M^B nad poljem BD provući od točke nad ležajem D do točke dijagrama gdje M^0 daje M_C^0 . Pravac se nastavlja do točke iznad ležaja B te se ta točka spaja s točkom na osi iznad ležaja A, budući da je poznat moment u ležaju koji iznosi $M_A^B = 0$.



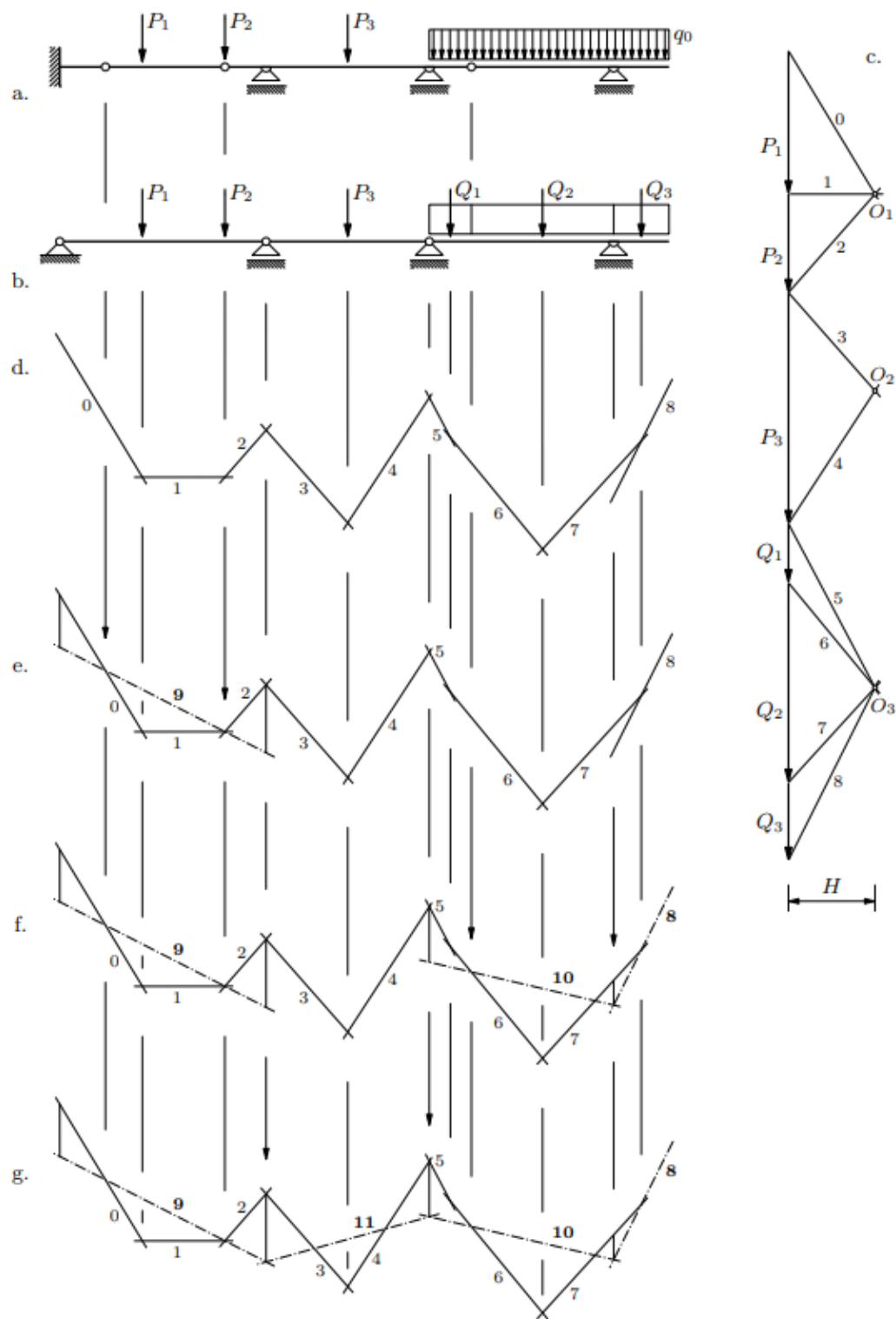
Slika 5.3. Primjer superpozicijskog postupka [1]

Najjednostavniji način kako bi se došlo do rješenja je da se momentni dijagram M^B prikaže na istoj osi kao i M^0 , na način da se crta preko njega. Takvim crtanjem dobije se direktna veza između dva momentna dijagrama. Vrijednosti na M^B predstavljaju izlomljenu os konačnog dijagrama te se od nje gleda vrijednosna razlika do vrijednosti nultog momentnog dijagrama. Nakon što su izračunate vrijednosti razlika između ta dva dijagrama, dobiju se veličine momenata u određenim točkama te se pomoću njih radi konačni momentni dijagram [1].

5.3 Grafički postupak

Gerberovi nosači se također mogu riješiti i na grafički način. Primjer grafičkog postupka prikazan je na slici 5.4. Prvi korak je pomicanje zglobova na prikladne položaje kako bi se dobio zamjenjujući sustav koji se sastoji od prostih greda i grede s prepustom, slika 5.4.b. U drugom koraku crta se poligon sila za zadana opterećenja na sustav što je prikazano na slici 5.4.c. Produkt poligona sila su linije momentnih dijagrama koje se crtaju kao verižni poligoni. Dobiveni poligoni se spajaju jedan na drugoga u točkama koje pripadaju zajedničkim ležajevima susjednih greda, slika 5.4.d. Sljedeći korak je postavljanje zaključne linije koja se dobiva pomoću dodatnih uravnoteženih koncentriranih momenata oko zglobova. Njihove vrijednosti nisu poznate, no zna se da na mjestima zglobova momenti savijanja koje oni izazivaju trebaju izjednačiti momente savijanja od koncentrirane sile i kontinuiranog opterećenja. Time se određuju točke u kojima zaključna linija mora sjeći verižni poligon [1].

U prvom polju nosača se nalaze dva zgloba što znači da u tim presjecima moment mora biti jednak nuli. Spajanjem tih dvaju točaka između ležajeva A i B dobije se odsječak zaključne linije te se pomoću njega mogu očitati vrijednosti momenta iznad tih ležajeva, slika 5.4.e. Drugo se polje mora preskočiti, budući da se zbog nepoznavanja momenta nad ležajem C ne može odrediti položaj zaključne linije. U trećem polju nalazi se zglob, a moment savijanja nad četvrtim ležajem poznat budući da preko njega nalazi opterećeni perpust. Sjecištem vertikale kroz četvrti ležaj i poligona broj 8 dobije se još jedna poznata točka kojom će prolaziti zaključna linija. Distribuiranu silu koja djeluje na sustav zamjenjuje se koncentriranim silama Q_1 i Q_2 , a vertikalni točke kojoj pripada zglob nosača nalaziti će se diralište verižne krivulje na stranici poligona između tih dvaju sila. Time se dobije i druga poznata točka kroz koju će prolaziti odsječak 8 zaključne linije, slika 5.4.f. Pomoću tog odsječka dobije se i vrijednost momenta savijanja iznad trećeg ležaja, stoga je moguće vratiti se na drugo polje i ucrtati finalni pravac zaključne linije koji je prikazan na slici 5.4.g. Nakon što je zaključna linija kompletna, nepoznate vrijednosti momenta u ležajevima vrlo se jednostavno očitaju kao razlika između zaključne linije i odgovarajuće stranice poligona [1].

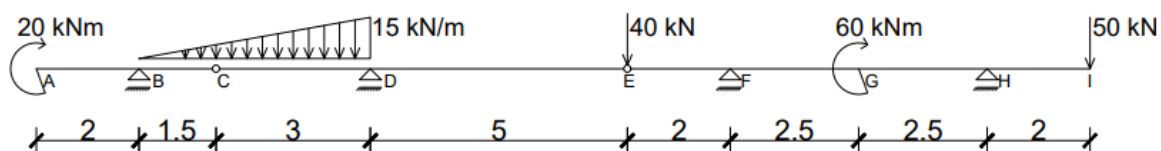


Slika 5.4. Primjer grafičkog postupka [1]

6. NUMERIČKI PRIMJERI

U ovome poglavlju biti će prikazani primjeri zadataka Gerberovih nosača. Zadana su dva zadatka, od kojih će svaki biti riješen analitičkom i superpozicijskom metodom. Za zadane primjere potrebno je odrediti reakcije, sile u zglobovima i nacrtati M, T i N dijagrame.

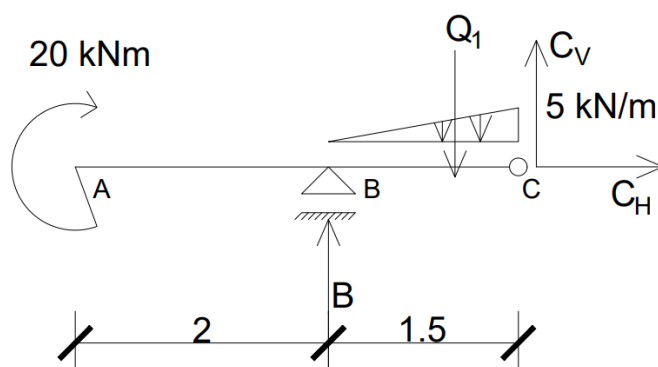
6.1 Zadatak 1



Slika 6.1. Zadani sustav 1

6.1.1. Analitički postupak

Disk 1:



Slika 6.2. Prikaz diska 1

Reakcije:

$$Q_1 = \frac{5,0 \cdot 1,5}{2,0} = 3,75 \text{ kN}$$

$$\sum M_C = 0$$

$$-20 - B \cdot 1,5 + Q_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,5 = 0$$

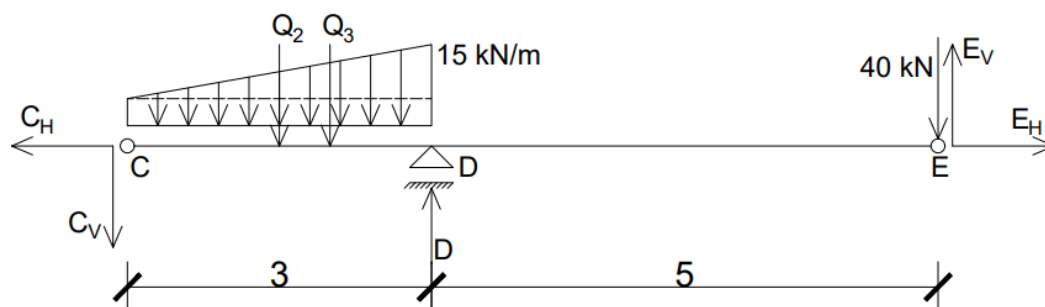
$$B = -12,08 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 0$$

$$12,08 + 3,75 - C = 0$$

$$C = 15,83 \text{ kN}$$

Disk 2:



Slika 6.3. Prikaz diska 2

Reakcije:

$$Q_2 = 5,0 \cdot 3,0 = 15,0 \text{ kN}$$

$$Q_3 = \frac{(15,0 - 5,0) \cdot 3,0}{2,0} = 15,0 \text{ kN}$$

$$\sum M_E = 0$$

$$-D \cdot 5,0 + Q_2 \cdot 6,5 + Q_3 \cdot \left(5,0 + \frac{1}{3} \cdot 3,0\right) + 15,83 \cdot 8,0 = 0$$

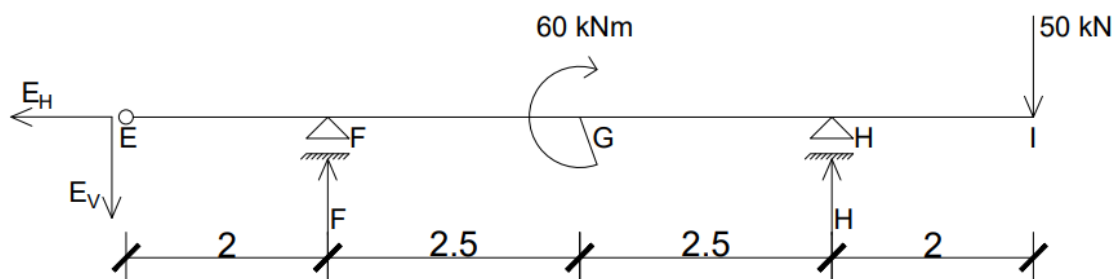
$$D = 62,83 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 0$$

$$-E + 15,83 + 15,0 + 15,0 + 40,0 - 62,83 = 0$$

$$E = 23,0 \text{ kN}$$

Disk 3:



Slika 6.4. Prikaz diska 3

Reakcije:

$$\sum M_F = 0$$

$$23,0 \cdot 2,0 - 60,0 + H \cdot 5,0 - 50,0 \cdot 7,0 = 0$$

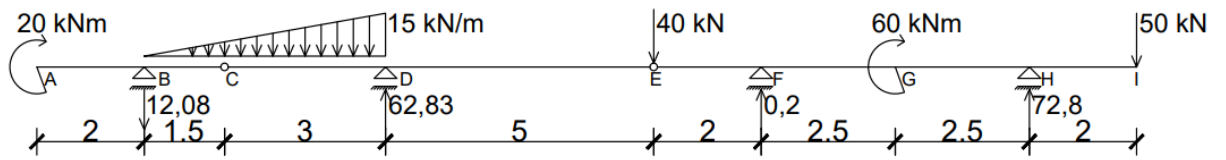
$$H = 72,8 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 0$$

$$23,0 - F - 80,89 + 50,0 = 0$$

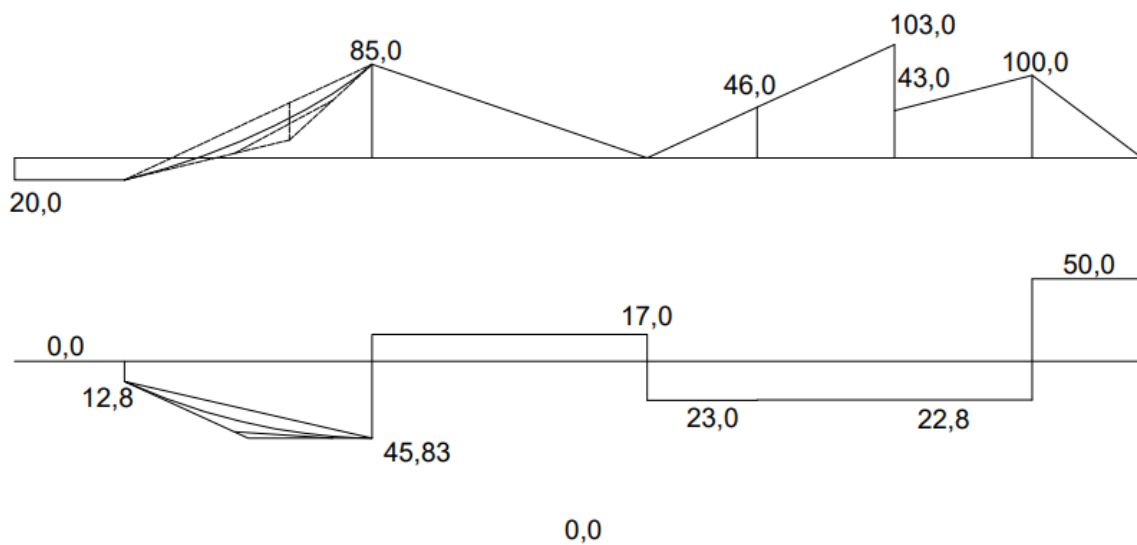
$$F = 0,2 \text{ kN}$$

Skica stvarnih djelovanja:



Slika 6.5. Skica stvarnih djelovanja

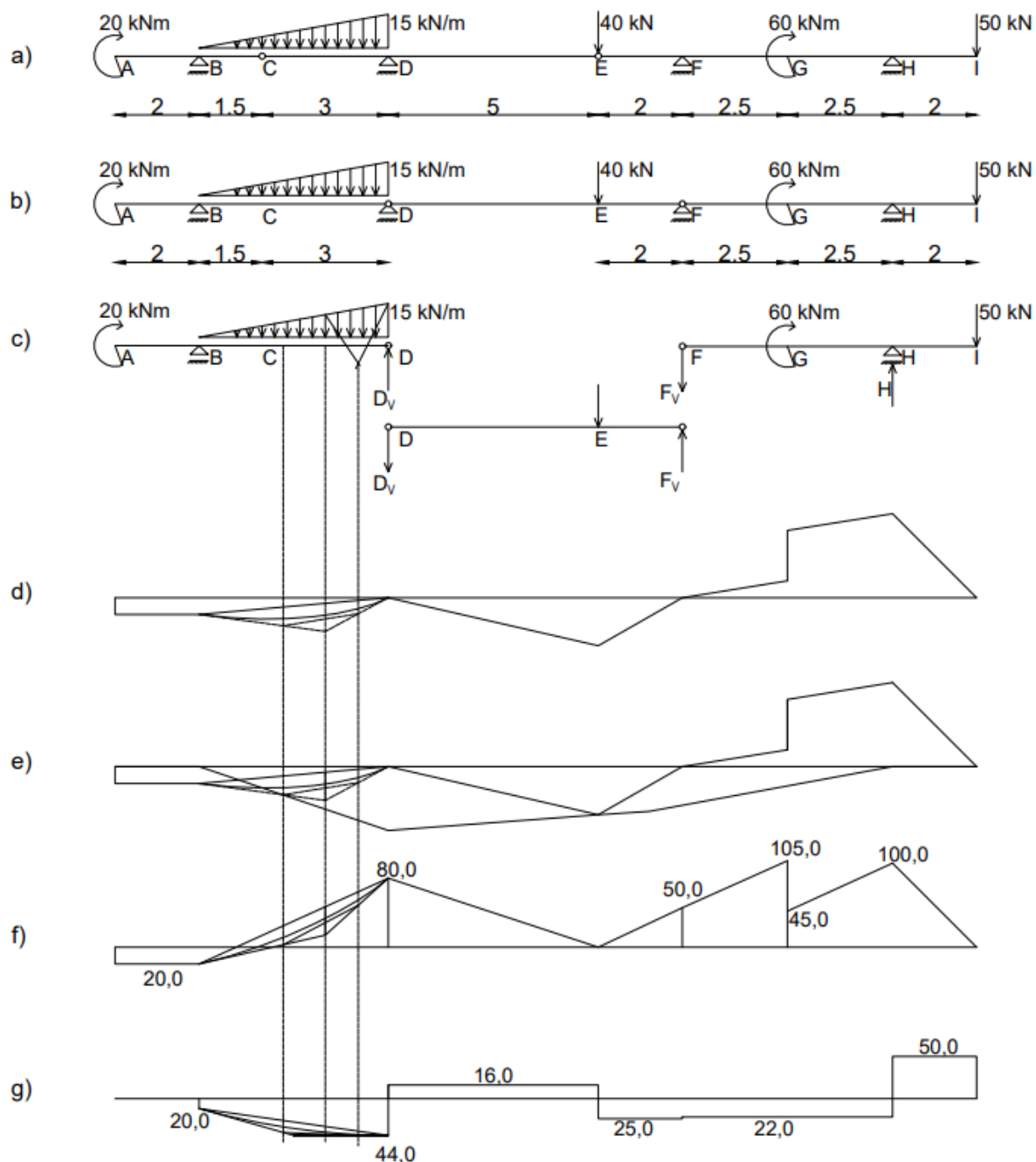
Dijagrami unutarnjih sila:



Slika 6.6. Prikaz M, T i N dijagrama

6.1.2. Superpozicijski postupak

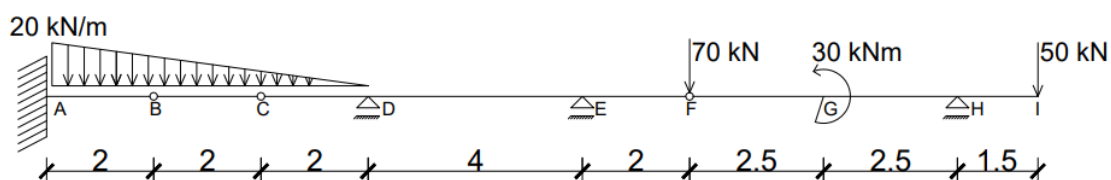
Superpozicija 1. zadatka:



Slika 6.7. Superpozicijski postupak

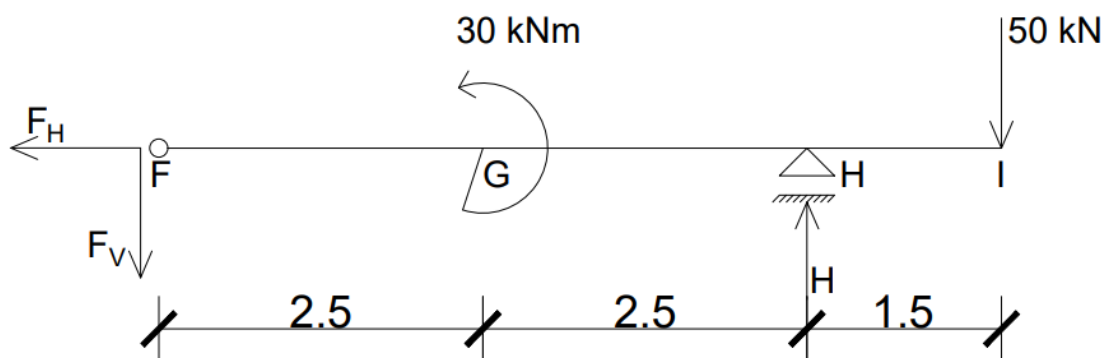
U prvom koraku zglobovi se na susjedne ležajeve kako bi se dobio sustav prostih greda, slika 6.7.b. Nakon toga se grede odvajaju kao što je prikazano na slici 6.7.c. te se za svaku zasebno radi momentni dijagram za opterećenja koja djeluju na njih, slika 6.7.d. Sljedeći je korak ucrtavanje zaključne linije koja se dobije na temelju rubnih uvjeta, a ona je prikazana na slici 6.7.e. Konačne vrijednosti momenata dobivaju se očitavanjem udaljenosti dijagrama M^0 od zaključne linije, slika 6.7.f. Dijagram poprečnih sile na slici 6.7.g. određuje se pomoću diferencijalnog odnosa $M(x)$ i $T(x)$.

6.2 Zadatak 2



Slika 6.8. Zadani sustav

6.2.1. Analitički postupak



Slika 6.9. Prikaz diska 4

Reakcije:

$$\sum M_F = 0$$

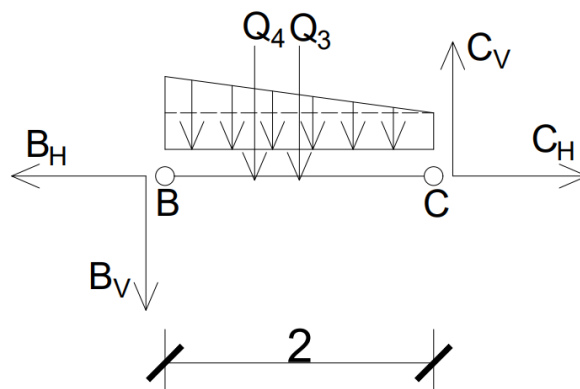
$$30 + H \cdot 5 - 50 \cdot 6,5 = 0$$

$$H = 59 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 0$$

$$59 - 50 = 9 \text{ kN} = F$$

Disk 2:



Slika 6.10. Prikaz diska 2

Reakcije:

$$Q_3 = 6,67 \cdot 2,0 = 13,33 \text{ kN}$$

$$Q_4 = \frac{(13,33 - 6,67) \cdot 2,0}{2,0} = 6,67 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-Q_3 \cdot \frac{2}{2} - Q_4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + C \cdot 2 = 0$$

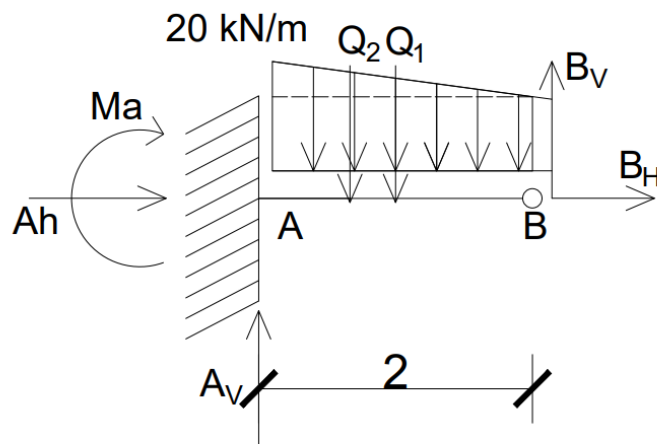
$$C = 8,89 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 0$$

$$13,34 + 6,67 - 8,89 + B = 0$$

$$B = -11,11 \text{ kN}$$

Disk 1:



Slika 6.11. Prikaz diska 1

Reakcije:

$$Q_3 = 13,33 \cdot 2,0 = 26,67 \text{ kN}$$

$$Q_4 = \frac{(20,0 - 13,37) \cdot 2,0}{2,0} = 6,67 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$-Q_1 \cdot \frac{2}{2} - Q_2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 - M_A - 11,11 = 0$$

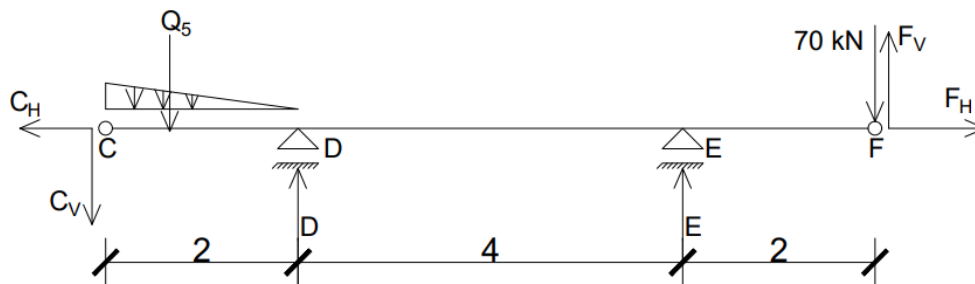
$$M_A = -53,33 \text{ kNm}$$

$$\sum F_z = 0$$

$$26,67 + 6,67 + 11,11 - A = 0$$

$$A = 44,44 \text{ kN}$$

Disk 3:



Slika 6.12. Prikaz diska 3

Reakcije:

$$\sum M_D = 0$$

$$6,67 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 8,89 \cdot 2 + E \cdot 4 + 9 \cdot 6 = 0$$

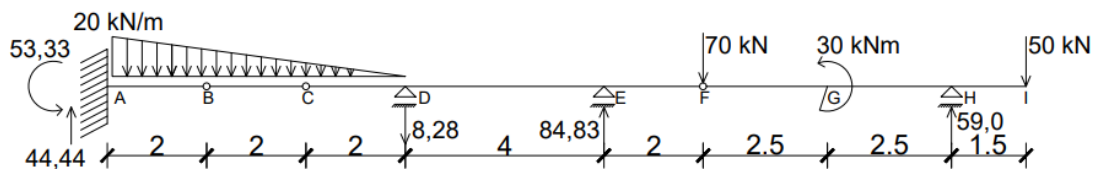
$$E = 84,83 \text{ kN}$$

$$\sum M_E = 0$$

$$-D \cdot 4 + 6,67 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + 4 \right) + 8,89 \cdot 6 + 9 \cdot 2 - 70 \cdot 2 = 0$$

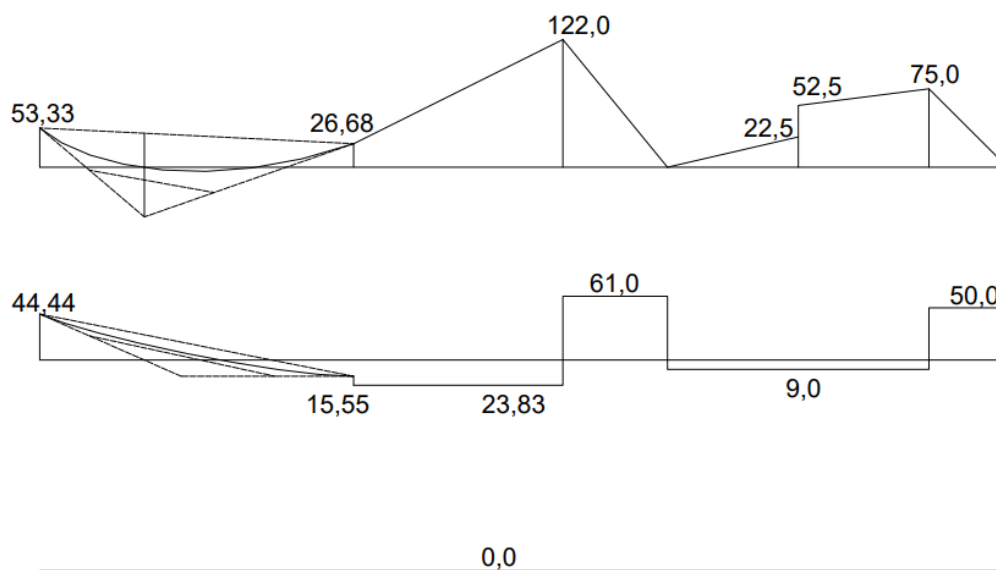
$$D = -8,28 \text{ kN}$$

Skica stvarnih djelovanja:



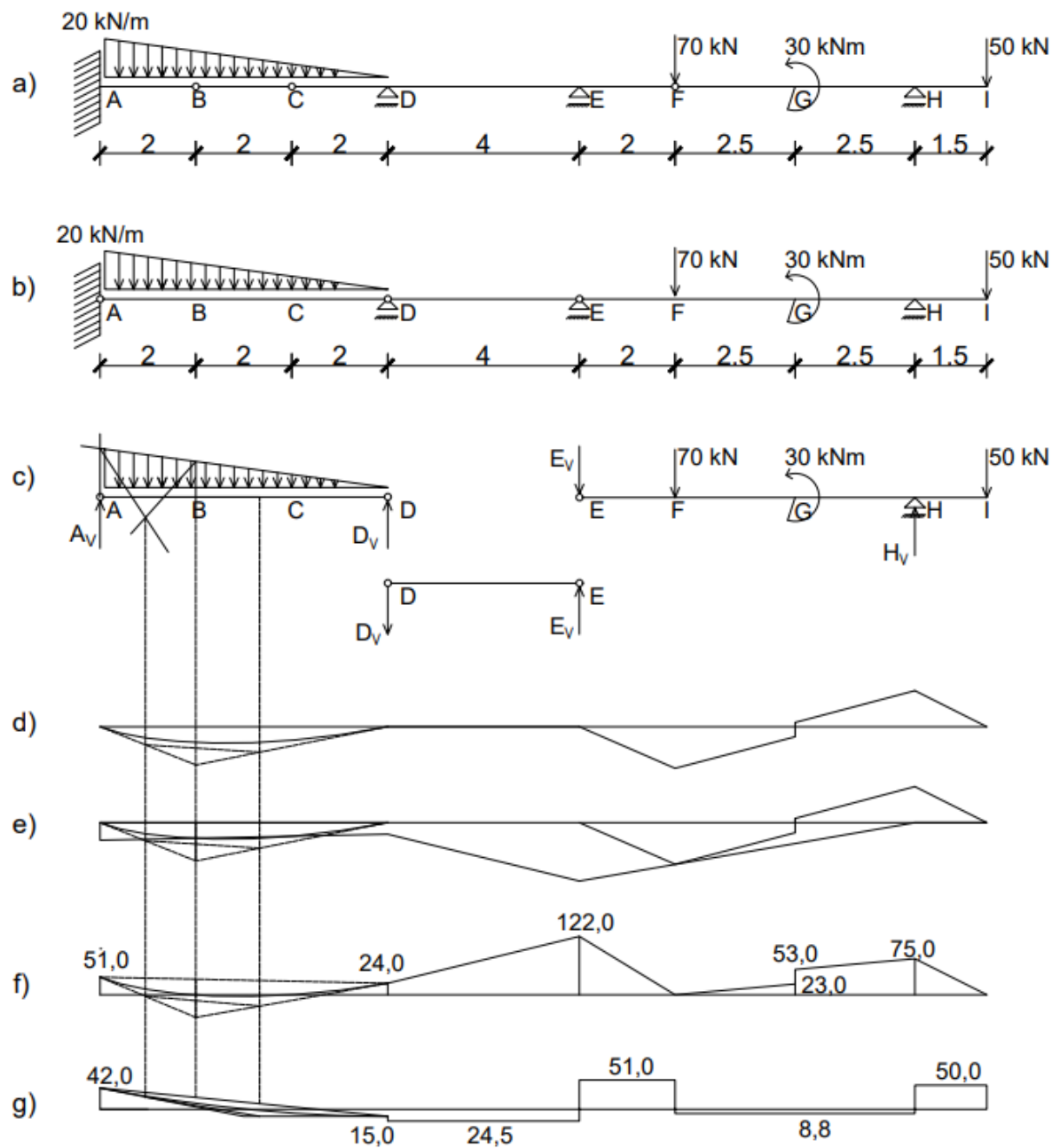
Slika 6.13. Prikaz stvarnih djelovanja

Dijagrami unutarnjih sila:



Slika 6.14. Prikaz M,T i N dijagrama

6.2.2. Superpozicijski postupak



Slika 6.15. Prikaz superpozicijskog postupka

Najprije se zglobovi s početnog sustava pomiču do susjednih ležajeva kao što je prikazano na slici 6.15.b. čime se dobiju tri jednostavno oslonjene grede koje se pojedinačno odvajaju, slika 6.15.c. Nakon toga se crta momentni dijagram M^0 , slika 6.15.d. Ovisno o rubnim uvjetima početnog sustava, crta se M^{dod} koji predstavlja djelovanje dodatnih koncentriranih momenata na mjestu ležajeva, slika 6.15.e. Usporedbom ta dva momentna dijagrama očitavaju se vrijednosti za početni sustav što je vizualizirano na slici 6.15.f., a pomoću diferencijalne jednadže se dobiva T dijagram sa slike 6.15.g.

7. ZAKLJUČAK

Gerberovi nosači su statički određeni nosači s zglobovima koji kontinuirano leže na najmanje tri ležaja. Najčešće se sastoje od jednog nepomičnog i ostalih pomičnih zglobnih ležajeva, no postoje i razne varijante s upetim ležajevima i prepustima. Raspored zglobova posebno je bitan, budući da se pravilnim rasporedom smanjuju maksimalni momemnti u odnosu na jednako opterećene kontinuirane nosače. Zbog svoje jednostavnosti i učinkovitosti imaju široku primjenu u građevinarstvu. Najčešće se koriste kod izgradnje građevina gdje je potrebno premostiti velike raspone kao što su mostovi, podvožnjaci, nadvožnjaci, muzeji i industrijske hale. Velika prednost takvih nosača je učinkovita raspodjela opterećenja, zbog čega se koriste za izgradnju velikih i otvorenih unutrašnjih prostora tako da nisu potrebni potporni elementi. Gerberovi nosači se mogu proračunavati analitičkim, grafičkim i grafo-analitičkim postupkom. Rezultat proračuna su vrijednosti reakcija i unutarnjih sila, pomoću kojih se dalje proračunavaju nosivosti i stabilnosti konstrukcija u projektiranju.

8. LITERATURA

- [1] Fresl, K.: Statika 1 (<http://www.grad.hr/nastava/gS/gS1/index.html>)
- [2] H. Werner, Mehanika I - Statika, HSGI, Zagreb, 2007.
- [3] V. Simović: Građevna Statika 1, Građevinski institut Zagreb, 1988.
- [4] <https://www.mdpi.com/2076-3417/13/2/778>
- [5] https://www.aisc.org/globalassets/continuing-education/ssrc-proceedings/2019/elmaraghy_et_al_ssrc_2019.pdf
- [6] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gerber_beam_Bridge,Kuma_village,Japan.jpg
- [7] <https://structurae.net/en/media/336187-luokou-yellow-river-railway-bridge>
- [8] https://www.grad.hr/nastava/gS1/GS1_programi/Z1%20%20%20%20gerberici/gerberi.htm
- [9] https://www.yumpu.com/xx/document/read/49040536/gerberovi-nosaci-poligonalni-nosaci#google_vignette
- [10] Gojković, M., Stevanović, B., Komnenović, M., Kuzmanović, S., Stojić, D. (1986).
Drvene konstrukcije-rešeni primeri iz teorije i prakse. Građevinski fakultet u Beogradu
"Naučna knjiga", Beograd
- [11] <https://whc.unesco.org/en/list/1485/>
- [12] <https://jahn.studio/work/suvarnabhumi-airport/>
- [13] <https://uzbekistan.travel/en/o/shukhov-tower-in-bukhara/>

POPIS SLIKA

Slika 1.1. Raspodjela momenata na kontinuiranom nosaču [4].....	1
Slika 1.2. Raspodjela momenata na Gerberovom nosaču [1].....	2
Slika 2.1. Primjer Gerberovog nosača [8].....	3
Slika 2.2. Pravilan i nepravilan raspored zglobova [9]	4
Slika 2.3. Raspored zglobova unutar polja [10].....	5
Slika 3.1. Primjeri Gerberovih nosača [1]	6
Slika 3.2. Željeznički most Loukou u Kini [7].....	7
Slika 3.3. Most preko rijeke Kuma u Japanu [8].....	7
Slika 4.1. Most Forth u Škotskoj [11].....	8
Slika 4.2. Zračna luka Bangkok, Tajland [12]	9
Slika 4.3. Šuhovljev toranj u Moskvi.....	9
Slika 5.1. Neraščlanjeni postupak [1].....	11
Slika 5.2. Raščlanjeni postupak [1].....	13
Slika 5.3. Primjer superpozicijskog postupka [1].....	17
Slika 5.4. Primjer grafičkog postupka [1].....	19
Slika 6.1. Zadani sustav 1	20
Slika 6.2. Prikaz diska 1.....	20
Slika 6.3. Prikaz diska 2.....	21
Slika 6.4. Prikaz diska 3.....	22
Slika 6.5. Skica stvarnih djelovanja.....	23
Slika 6.6. Prikaz M,T i N dijagrama.....	23
Slika 6.7. Superpozicijski postupak.....	24
Slika 6.8. Zadani sustav.....	25
Slika 6.9. Prikaz diska 4.....	26
Slika 6.10. Prikaz diska 2	27
Slika 6.11. Prikaz diska 1	28
Slika 6.12. Prikaz diska 3	29
Slika 6.13. Prikaz stvarnih djelovanja.....	30
Slika 6.14. Prikaz M,T i N dijagrama.....	30
Slika 6.15. Prikaz superpozicijskog postupka	31