

# Zakrivljeni gredni nosači

---

**Capan, Matej**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:922418>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-28**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,  
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Matej Capan

# ZAKRIVLJENI GREDNI NOSAČI

ZAVRŠNI ISPIT

Zagreb, 2024.



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Matej Capan

# ZAKRIVLJENI GREDNI NOSAČI

ZAVRŠNI ISPIT

Izv.prof.dr.sc. Višnja Tkalčević Lakušić

Zagreb, 2024.



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Matej Capan

# **CURVED BEAM GIRDERS**

FINAL EXAM

Izv.prof.dr.sc. Višnja Tkalčević Lakušić

Zagreb, 2024.



OBRAZAC 3

POTVRDA O POZITIVNOJ OCJENI PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Student/ica :

(Ime i prezime)

(JMBAG)

zadovoljio/la je na pisanom dijelu završnog ispita pod naslovom:

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

(Naslov teme završnog ispita na engleskom jeziku)

i predlaže se provođenje daljnjeg postupka u skladu s Pravilnikom o završnom ispitu i diplomskom radu Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta.

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu znanstvenog projekta: (upisati ako je primjenjivo)

(Naziv projekta, šifra projekta, voditelj projekta)

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu stručne prakse na Fakultetu: (upisati ako je primjenjivo)

(Ime poslodavca, datum početka i kraja stručne prakse)

Datum:

Mentor:

Potpis mentora:

Komentor:



OBRAZAC 5

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja :

(Ime i prezime, JMBAG)

student/ica Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta ovim putem izjavljujem da je moj pisani dio završnog ispita pod naslovom:

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

izvorni rezultat mojega rada te da se u izradi istoga nisam koristio/la drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

Datum:

Potpis:

*Matej Capor*



OBRAZAC 6

IZJAVA O ODOBRENJU ZA POHRANU I OBJAVU PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Ja :

(Ime i prezime, OIB)

ovom izjavom potvrđujem da sam autor/ica predanog pisanog dijela završnog ispita i da sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti odgovara sadržaju dovršenog i obranjenog pisanog dijela završnog ispita pod naslovom:

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

koji je izrađen na sveučilišnom prijediplomskom studiju Građevinarstvo Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta pod mentorstvom:

(Ime i prezime mentora)

i obranjen dana:

(Datum obrane)

Suglasan/suglasna sam da pisani dio završnog ispita bude javno dostupan, te da se trajno pohrani u digitalnom repozitoriju Građevinskog fakulteta, repozitoriju Sveučilišta u Zagrebu te nacionalnom repozitoriju.

Datum:

Potpis:

## Sažetak

Predmet rada su zakrivljeni gredni nosači. Dana je definicija i podjela te osnovna obilježja i prednosti u odnosu na običnu ravnu gredu. Prikazana je primjena ovakvih nosača kroz povijest gdje je naglasak na razvoju i sve većoj upotrebi u vremenima suvremene tehnologije proizvodnje materijala. Na konkretnim primjerima prikazana je primjena u mostogradnji i visokogradnji. Opisani su analitički i grafički postupci proračuna ležajnih reakcija i crtanje dijagrama unutarnjih sila u ovakvim konstrukcijama. Na kraju je riješeno nekoliko numeričkih zadataka uz objašnjeni postupak i skice.

Ključne riječi: Zakrivljeni gredni nosač, primjena, proračun, lokalni koordinatni sustav



## Summary

The topic of this work are curved beam girders. The definition and division are given, as well as the basic characteristics and advantages in comparison to an ordinary straight beam. The application of such supports is presented throughout history and the emphasis is on the development and increasing use of in times of modern material production technology. The application in bridge construction and high-rise construction is shown on concrete examples. Analytical and graphical procedures for determining bearing reactions and drawing diagrams of internal forces in such structures are described. At the end, several numerical tasks were solved with the explained procedure and sketches.

Key words: Curved beam girder, application, calculation, local coordinate system

## Sadržaj

Sažetak .....	i
Summary .....	ii
Sadržaj .....	iii
1. Uvod .....	1
2. Definicija zakrivljenih grednih nosača .....	2
3. Primjena zakrivljenih grednih nosača .....	4
3.1. Povijesni pregled .....	4
3.2. Primjena u visokogradnji .....	5
3.3. Primjena u mostogradnji .....	7
4. Proračun zakrivljenih grednih nosača .....	9
4.1. Općenito .....	9
4.2. Analitički postupak .....	9
4.3. Grafički postupak .....	12
5. Numerički primjeri .....	15
5.1. Zadatak 1 .....	15
5.2. Zadatak 2 .....	23
6. Zaključak .....	29
7. Literatura .....	30
8. Popis slika .....	31

## 1. Uvod

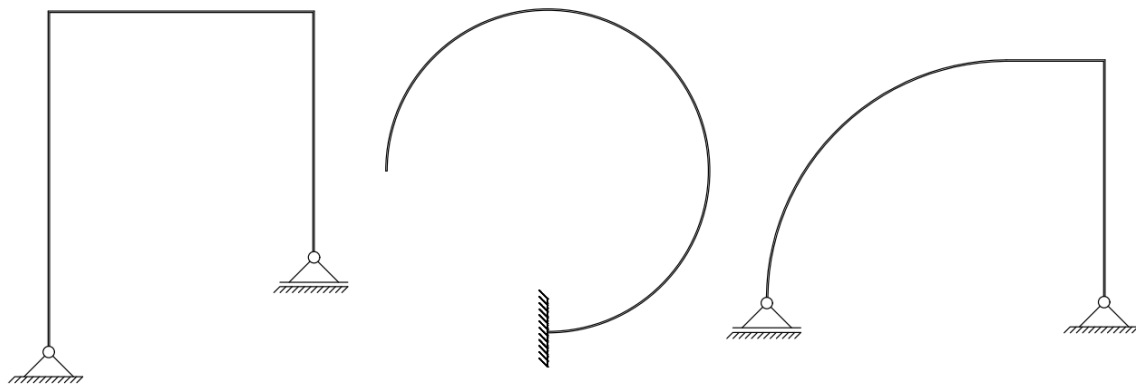
Zakrivljeni gredni nosači često se pojavljuju u građevinarstvu, samostalno kao konstrukcijski elementi ili kao dijelovi nekih složenijih elemenata. Spadaju u skupinu okvirnih nosača, a sastavljeni su od zakrivljenih štapova međusobno spojenih krutim vezama [1]. Najčešće se konstruiraju kao lukovi, odnosno zakrivljene grede konveksnog oblika koje su pretežno opterećene na tlak, a glavna prednost u odnosu na klasičnu gredu je smanjenje momenta savijanja ili čak njegovo iščezavanje. Tako se uz istu količinu materijala postiže veća nosivost.

U ovom radu, uz definiciju zakrivljenih grednih nosača, bit će opisana primjena i način proračuna ovakvih elemenata. Kod određivanja unutarnjih sila i reakcija u osloncima, nužno je zbog pojednostavljenja proračuna uvesti određene pretpostavke koje će biti opisane u kasnijim poglavljima. Za jednostavnije slučajeve, rješenja se mogu dobiti analitički metodama teorije elastičnosti, a za složenije slučajeve koriste se numeričke metode.

Na kraju rada prikazat će se nekoliko numeričkih primjera zakrivljenih grednih nosača sa postupkom određivanja reakcija u ležajevima i dijagrama unutarnjih sila.

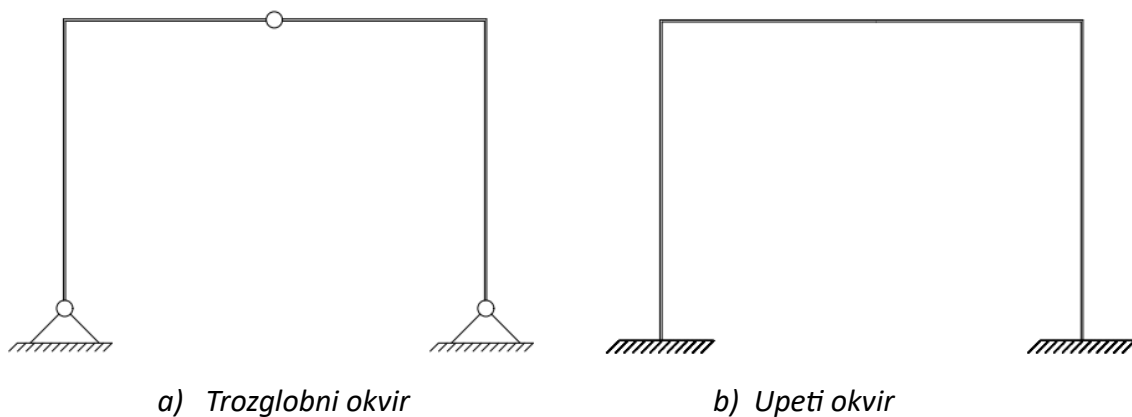
## 2. Definicija zakrivljenih grednih nosača

Okvirni nosač je sustav krutih štapova ili greda međusobno spojenih krutim vezama [2]. Ti štapovi, odnosno grede mogu biti ravni ili zakrivljeni, pa se tako prema dispoziciji razlikuju ravni, zakrivljeni i kombinirani nosači, slika 2.1.



Slika 2.1. Okvirni nosači

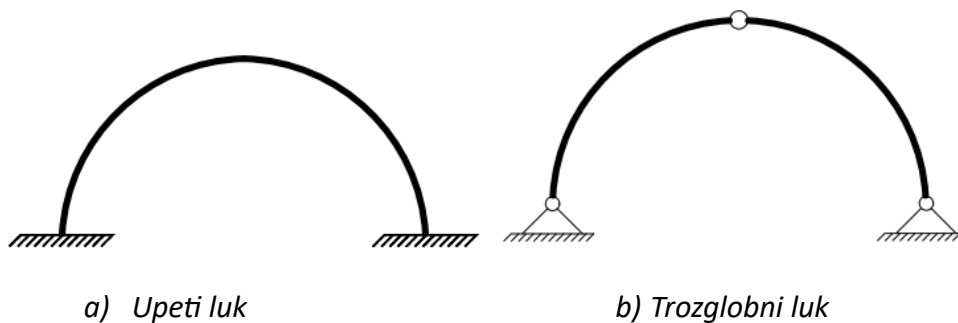
U statičkom smislu razlikuju se statički određeni i statički neodređeni okviri, a osnovni tipovi su upeti, dvozglojni i trozglojni okvir. U ovom radu analizirani su statički određeni zakrivljeni nosači. Na slici 2.2. prikazan je primjer statički određenog sustava (trozglojni okvir) i statički neodređenog sustava (upeti okvir).



Slika 2.2. Statički određeni i neodređeni sustavi

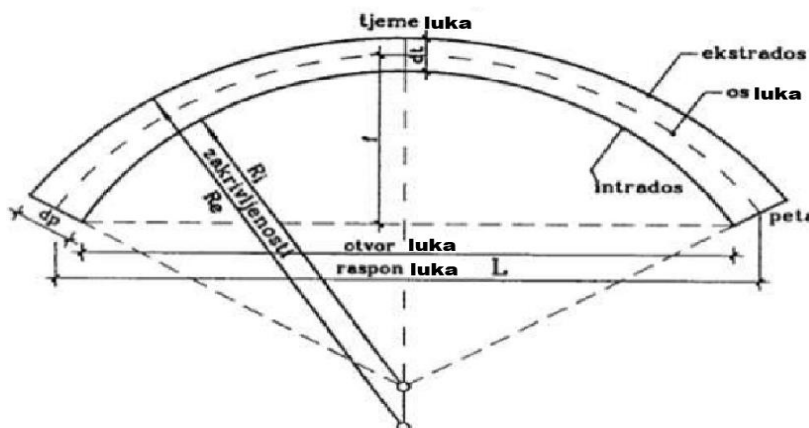
Luk je zakrivljeni gredni nosač konveksnog oblika pretežno opterećen na tlak. Glavna prednost u odnosu na klasičnu, ravnu gredu leži u temeljnom svojstvu luka da tlačnim naprežanjem prenosi do oslonaca sva opterećenja koja preuzima [3].

Statički neodređeni lukovi su: upeti, jednozglobni i dvozglobni, a statički određeni oblik koji se najčešće primjenjuje u građevinarstvu je trozglobni luk kojem se dva zgloba nalaze se u osloncima, a jedan u tjemenu luka. Takav luk primjenjuje se u slučaju opasnosti od pomicanja oslonaca kad je tlo lošijih karakteristika i kod lukova manje spljoštenosti. Glavni nedostatak mu je skuplja i kompliciranija izvedba zbog postojanja zgloba. Na slici 2.3. prikazani su upeti i trozglobni luk.



Slika 2.3. Statički određeni i neodređeni sustavi

Osnovni dijelovi luka prikazani su na slici 2.4. Dio luka uz oslonce naziva se peta luka, a najviša točka je tjeme luka. Os luka je spojnica središta poprečnih presjeka luka. Linija donjeg ruba luka naziva se intrados, a gornjeg ekstrados. Raspon luka ( $L$ ) je horizontalna udaljenost između oslonaca, a otvor luka je horizontalna udaljenost između intradosa. Strelica luka ( $f$ ) je vertikalna udaljenost između tjemena i peta luka. Parametar bitan za konstrukciju luka, posebice kod usklađivanja oblika luka sa tlačnom linijom naziva se spljoštenost luka, a predstavlja omjer strelice prema rasponu luka ( $f/L$ ) [4].



Slika 2.4. Dijelovi luka [5]

### 3. Primjena zakrivljenih grednih nosača

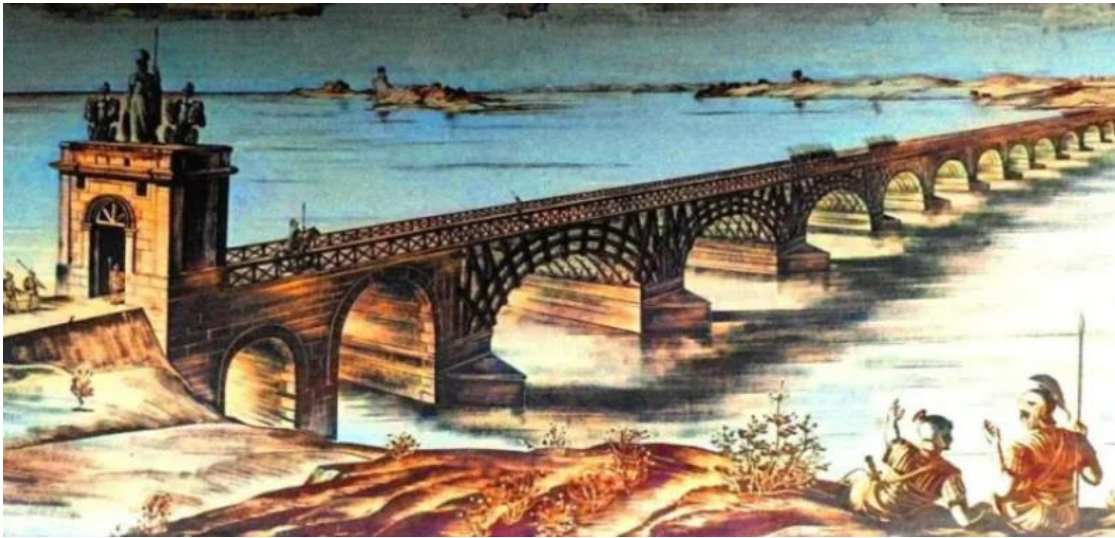
#### 3.1. Povijesni pregled

Kroz čitavu povijest civilizacije luk je bio glavni način premošćivanja prepreke. Prvi primitivni oblici lukova, građeni trskom i blatom, nastali su u Mezopotamiji otprilike 4000 godina prije Krista. Stari Grci i Etruščani gradili su lukove od kamenih blokova koje su povezivali bitumenskim vezivom. Najveći napredak postižu Rimljani čija je gradnja po prvi put uključivala upotrebu betona. Njihove impozantne građevine poput amfiteatra, mostova, akvadukta i kupola predmet su divljenja, ali i uzor mnogim budućim graditeljima u upotrebi zakrivljenih nosača. Na slici 3.1. prikazana je Pulska arena gdje su korišteni lukovi od vapnenca i betona, a na slici 3.2. rimski Trajanov most. U periodima Romanike i Gotike, a kasnije i Renesanse dolazi do značajnih napredaka u izgradnji mostova, a najveću revoluciju mostogradnja ostvaruje u 18. i 19. stoljeću razvojem željeznice. Unaprjeđenjem betona i čelika primjena lukova postaje sve raznovrsnija i masovnija [7]. Danas se lučni nosači najčešće primjenjuju kao glavni nosači krovnih konstrukcija i u mostogradnji.

U prošlosti su se lukovi gradili od materijala pretežno otpornih na tlak kao kamen i opeka, dok se danas koriste suvremeni materijali poput armiranog betona i čelika koji omogućavaju i vlačnu otpornost.



*Slika 3.1. Pulska arena [8]*



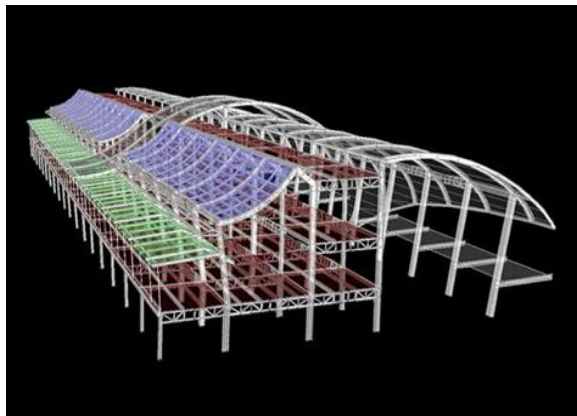
Slika 3.2. Trajanov most [9]

### 3.2. Primjena u visokogradnji

Danas se u visokogradnji najčešće primjenjuju čelične zakrivljene grede, posebno u krovovima konstrukcija gdje je potrebno savladati velike raspone poput hala i stadiona. Napredna tehnologija proizvodnje čelika raznih oblika i profila omogućava arhitektima i inženjerima stvaranje nevjerojatno lijepih i učinkovitih građevina. Čelične zakrivljene grede mogu biti izvedene kao pune ili kao rešetkaste [4]. Na slici 3.3. prikazana je čelična zakrivljena greda za krovnu konstrukciju, a na slici 3.4. zakrivljena konstrukcija aerodroma San Jose u Kaliforniji.



Slika 3.3. Čelična zakrivljena greda [10]



Slika 3.4. Konstrukcija aerodroma San Jose [10]



Još jedan materijal kojem moderne tehnike omogućavaju proizvodnju u različitim oblicima je lijepljeno lamelirano drvo. Dobiva se lijepljenjem tankih drvenih elemenata podjednake širine [11]. Zakrivljene grede od lijepljenog lameliranog drva koriste se najčešće u unutarnjim krovnim konstrukcijama zaštićene od vanjskih utjecaja. Estetski su vrlo povoljne, a mala vlastita težina od oko  $600 \text{ kg/m}^3$  omogućava savladavanje relativno velikih raspona. Ovakvi nosači često se primjenjuju za sportske hale i bazene. Na slici 3.5. prikazana je krovna konstrukcija bazena Utrine u Zagrebu gdje su drvene zakrivljene grede oslonjene na čelične nosače.



*Slika 3.5. Krovna konstrukcija bazena Utrine [11]*

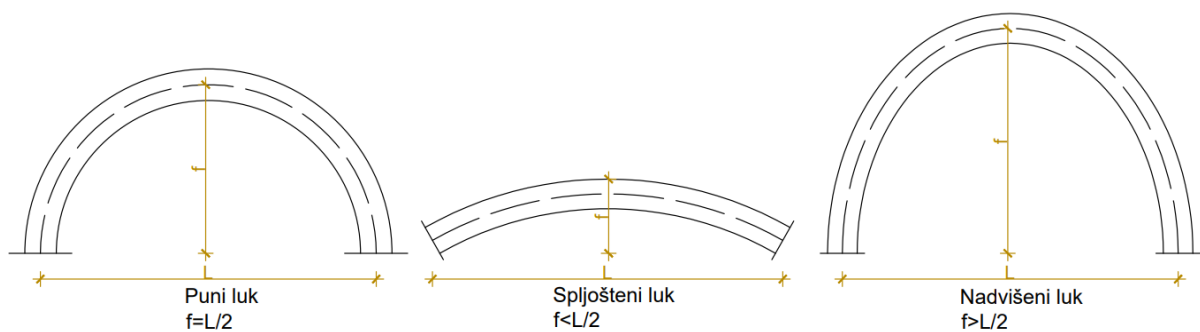


### 3.3. Primjena u mostogradnji

Zakrivljeni gredni nosači često se odabiru kao nosive konstrukcije u mostovima, i to najčešće kao lučni nosači. Zbog svojih obilježja u vidu prijenosa opterećenja, luk je idealna konstrukcija za premošćivanje prepreka koja se koristi kroz čitavu povijest graditeljstva.

Rasponi lučnih mostova kreću se od 50 do 300 metara, no kod povoljnih terenskih uvjeta i upotrebom suvremenih metoda građenja moguće je ostvariti i raspone do 500 metara [3]. Lučni mostovi izrađuju se od kamena, betona i armiranog betona, metala i drveta.

Velika je važnost oblika luka mosta kako bi se njegove karakteristike uskladile sa uvjetima projekta. Optimalan oblik ovisi o statičkim, oblikovnim, konstrukcijskim i ekonomskim parametrima. Na slici 3.6. prikazani su puni, spljošteni i nadvišeni luk.



Slika 3.6. Oblici luka [3]

U nastavku su prikazani primjeri lučnih mostova u Hrvatskoj.

Krčki most (slika 3.7.) lučni je armiranobetonski most dužine 1430 metara koji povezuje otok Krk sa obalom. Njegov luk raspona 390 metara smješten između kopna i otočića Sveti Marko, u vrijeme izgradnje (1980.) bio je najveći takav most na svijetu. Danas najveći raspon lučnog mosta iznosi 420 metara (Wanxian Bridge, Kina, 1997). Projektant Krčkog mosta je Ilija Stojadinović, a gradili su ga Mostogradnja iz Beograda i Hidroelektra iz Zagreba [12].



*Slika 3.7. Krčki most [12]*

Šibenski most (slika 3.8.) lučni je most koji premošćuje Šibenski zaljev na Jadranskoj magistrali. Posebnost ovog mosta njegov je 246 metara dug armiranobetonski luk koji je prvi u svijetu građen u cijelosti konzolnim postupkom. Luk je građen u odsječcima od 28 metara na skeli oslonjenoj samo na stupove i upornjake mosta. Izgrađen je 1966. godine, a projektant je Ilija Stojadinović [13].



*Slika 3.3. Maslenički most [13]*

## 4. Proračun zakrivljenih grednih nosača

### 4.1. Općenito

Proračun statički određenih zakrivljenih grednih nosača ne razlikuje se mnogo od proračuna okvirnih nosača. Proračun ležajnih reakcija je potpuno isti, a za određivanje unutarnjih sila potrebno je voditi računa o polumjeru zakrivljenosti nosača. Prije svega, uvode se određene pretpostavke koje olakšavaju proračun [14]:

- Uzdužna os nosača je ravninska krivulja,
- Poprečni presjek je konstantan i ima os simetrije,
- Os simetrije poprečnog presjeka i uzdužna os nosača leže u istoj ravnini koja se naziva uzdužna ravnina simetrije nosača,
- vanjsko opterećenje djeluje u uzdužnoj ravnini simetrije nosača.

Reakcije u osloncima moguće je dobiti analitičkim i grafičkim postupcima koji će biti opisani. Dijagrami unutarnjih sila crtaju se duž konture zakrivljenog nosača koja predstavlja nul-liniju dijagrama. Vrijednosti se nanose okomito na konturu zakrivljenog nosača i u mjerilu.

### 4.2. Analitički postupak

Postavljaju se tri neovisne jednadžbe ravnoteže (suma horizontalnih sila, suma vertikalnih sila i suma momenata u jednom od ležajeva izjednačuju se sa nulom) za nosač u cjelini, u globalnom koordinatnom sustavu x-y [15]:

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_A = 0 \quad (4.1)$$

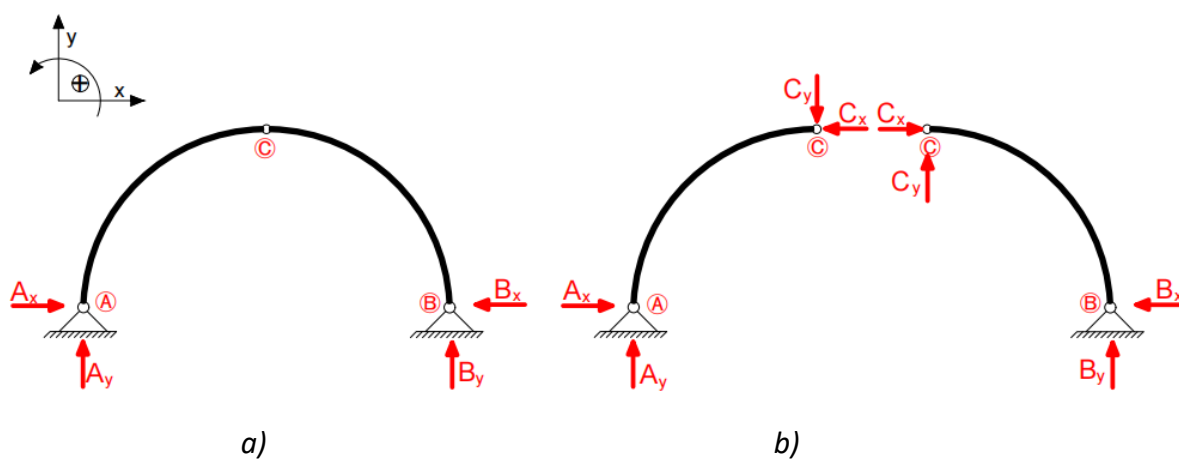
Kod proste grede i konzole, ove će tri jednadžbe biti dovoljne za određivanje ležajnih reakcija, no u slučaju trozglobnog nosača potrebno je postaviti dopunsku jednadžbu ravnoteže koja zadovoljava uvijet da je zbroj momenata savijanja u srednjem zglobu jednak nuli. Reakcije koje sudjeluju u jednadžbama ravnoteže prikazane su na slici 4.1., a mogu se postaviti na dva načina [2]:

- a) tri neovisne jednadžbe za nosač u cjelini i dodatna jednadžba momenata za zglob, gledajući sustav odvojeno sa jedne strane:

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_A = 0, \sum M_{C,lijevo} = 0 \text{ ili } \sum M_{C,desno} = 0 \quad (4.2)$$

- b) nosač se rastavlja na statičke dijelove ispred i iza zgloba. Dodaju se komponente reakcija u osloncima i komponente sile u zglobu. Za svaki dio nosača se postavljaju po tri jednadžbe što je ukupno šest jednadžbi sa šest nepoznanica:

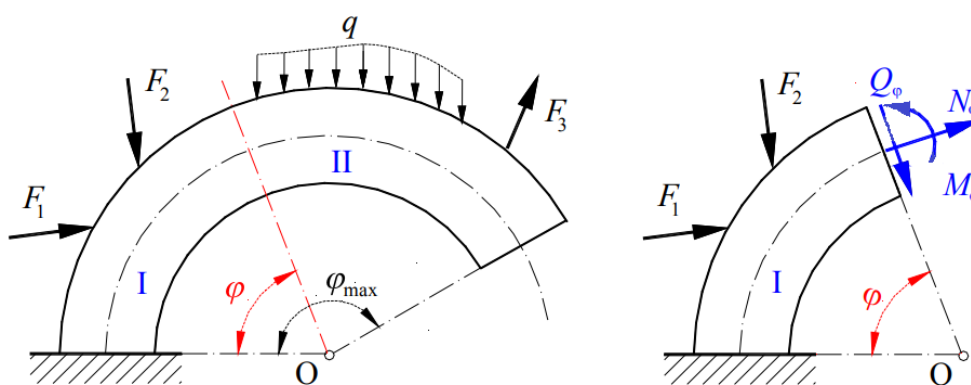
- za dio AC:  $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_A = 0$
  - za dio CB:  $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_B = 0,$
- (4.3)



Slika 4.1. Reakcije koje sudjeluju u jednadžbama ravnoteže [1]

Unutarnje sile kod zakrivljenih nosača određuju se na sljedeći način.

U presjeku zakrivljenog nosača određenog kutom zaokreta  $\varphi$ , uvodi se lokalni koordinatni sustav  $(n,t)$ , gdje je  $n$  os normale, a  $t$  os tangente zakrivljenosti. Uzdužna sila djeluje na pravcu tangente, a poprečna sila na pravcu normale [2]. Predznaci unutarnjih sila i momenta savijanja određuju se kao kod ravnih nosača. Uzdužna sila je pozitivna ako u presjeku elementa izaziva vlak. Poprečna sila je pozitivna ako dio sustava na koji djeluje nastoji zaokrenuti u smjeru kazaljke na satu. Moment savijanja je pozitivan ako izaziva vlak u donjim rubnim vlakancima elementa, a tlak u gornjim vlakancima elementa. Na slici 4.2. prikazan je presjek zakrivljenog grednog nosača i unutarnje sile pozitivnih predznaka.



Slika 4.2. Presjek zakrivljenog grednog nosača [14]

Ovisnost između vanjskog opterećenja i unutarnjih sila u diferencijalnom je odnosu za svaki element nosača  $ds = \rho d\varphi$  prema izrazima:

$$\frac{dN}{ds} = \frac{T}{\rho}, \quad \frac{dT}{ds} = -\left(\frac{N}{\rho} + q\right), \quad \frac{dM}{ds} = T \quad (4.4)$$

gdje je:

$\rho$  – polumjer zakrivljenosti nosača,

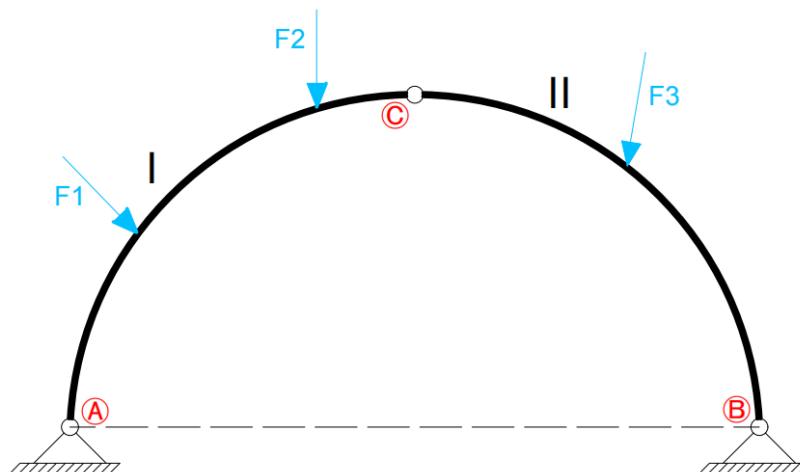
$\varphi$  – kut zaokreta elementa nosača.

Ako je nosač kružnog oblika ( $\rho=r$ ), vrijede izrazi:

$$\frac{dN}{d\varphi} = T, \quad \frac{dT}{d\varphi} = -(N + qr), \quad \frac{dM}{d\varphi} = Tr \quad (4.5)$$

### 4.3. Grafički postupak

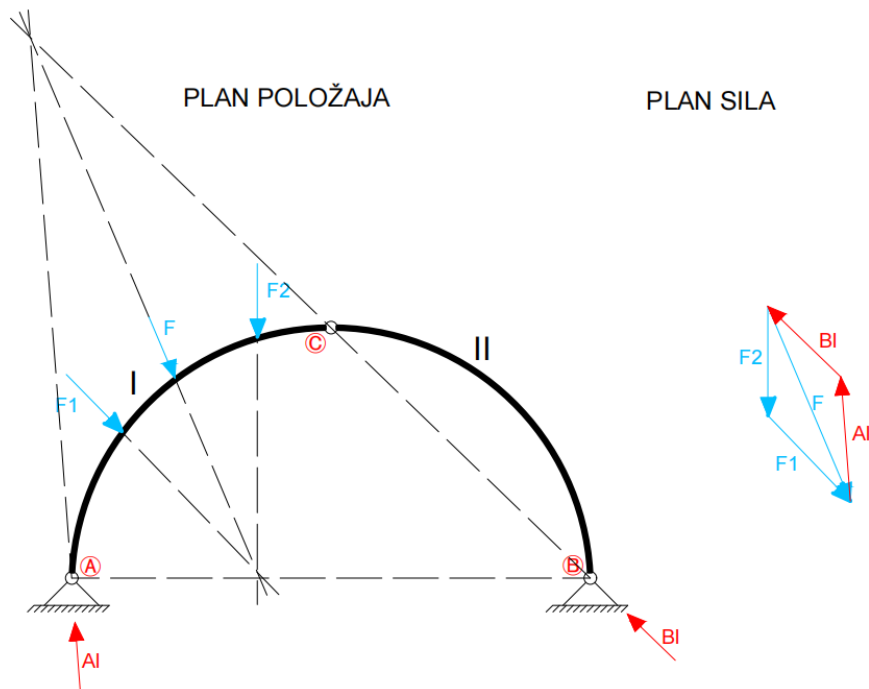
Ležajne reakcije u zakrivljenim grednim nosačima mogu se odrediti primjenom grafičkih metoda. Grafički postupak određivanja reakcija prikazat će se za trozglobni luk opterećen koncentriranim silama, slika 4.3.



Slika 4.3. Sustav opterećen silama pod kutom

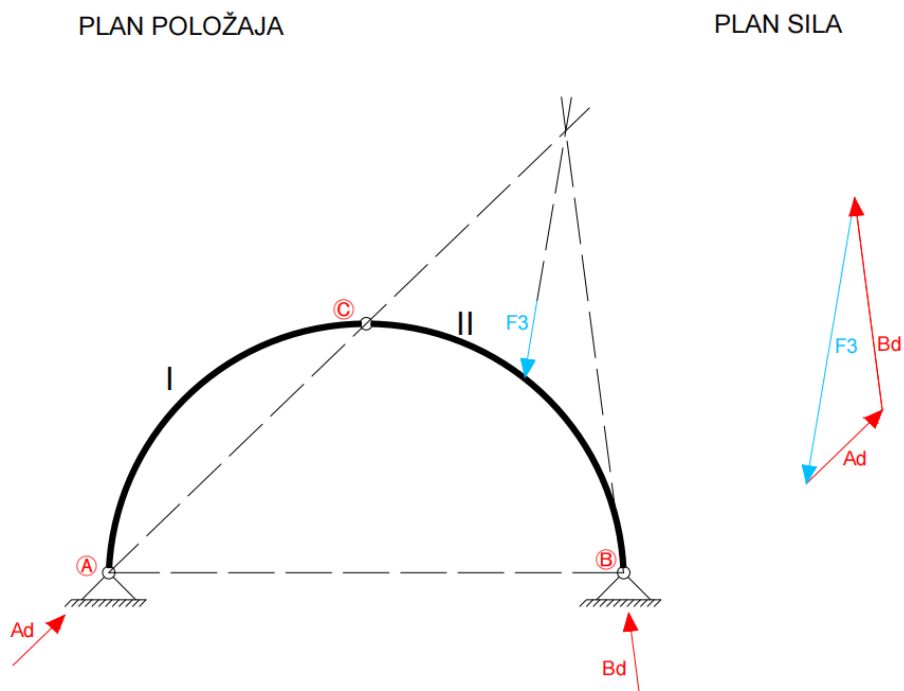
Obzirom da se radi o trozglobnom sustavu, nisu poznati pravci reakcija A i B. Reakcije se određuju posebno za lijevi i desni dio nosača, odnosno diskove I i II te se vektorskim zbrajanjem komponenti dobivaju ukupne reakcije.

U prvom slučaju, prikazanom na slici 4.4., uklanjaju se opterećenja sa diska II. Disk I opterećen je silama  $F_1$  i  $F_2$  kojima se grafički određuje rezultanta  $F$ . Pravac reakcije  $B_I$  u ležaju neopterećenog diska II mora u planu položaja prolaziti zglobovom C pa će pravac sile  $A_I$  prolaziti sjecištima pravaca sile  $B_I$  i  $F$ . Kako bi sustav bio u ravnoteži, sile  $F$ ,  $A_I$  i  $B_I$  moraju zatvarati poligon. Iz poligona sila očitavaju se vrijednosti sila  $A_I$  i  $B_I$  [16].



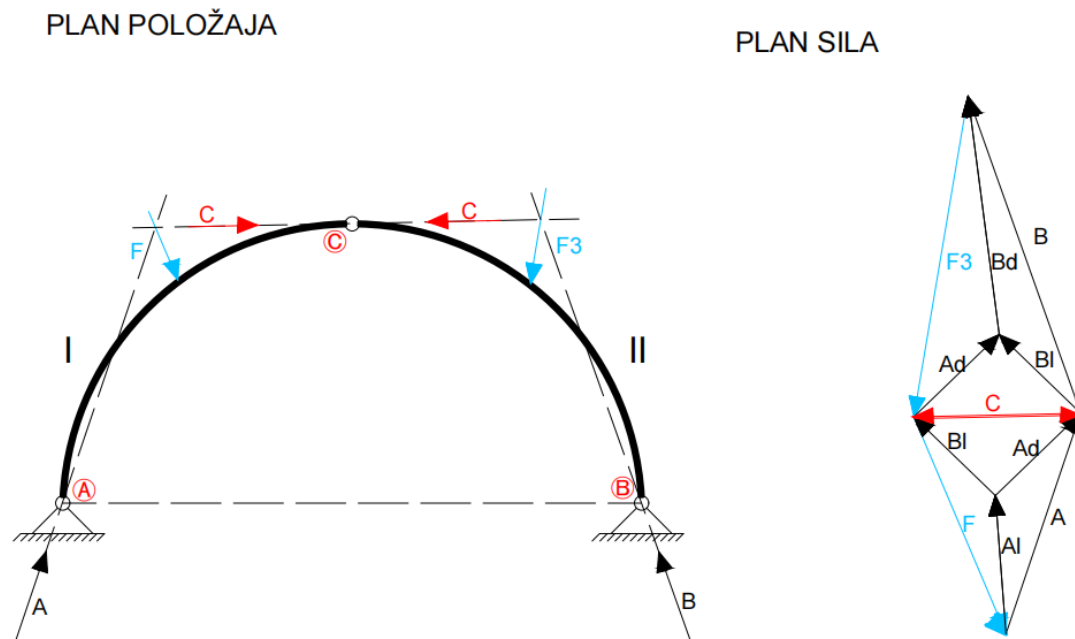
Slika 4.4. Određivanje reakcija ako je opterećen lijevi disk

Analognim postupkom prikazanim na slici 4.5., uklanjaju se opterećenja sa diska I i određuju reakcije  $A_d$  i  $B_d$ .



Slika 4.5. Određivanje reakcija ako je opterećen desni disk

Ukupne reakcije A i B dobivaju se vektorskim zbrajanjem komponenti  $A_d$  i  $A_l$  te  $B_d$  i  $B_l$ . U poligonu sila prikazanom na slici 4.6. vidi se da su sile A, B, F i  $F_3$  u ravnoteži. Rezultanta sila A i F koje djeluju na disku I i rezultante sila B i  $F_3$  koje djeluju na disku II djeluju na istom pravcu, jednakih su intenziteta, a suprotne orijentacije. Te sile predstavljaju silu u središnjem zglobu C kojom rastavimo li nosač, jedan disk uravnotežuje drugi [16].



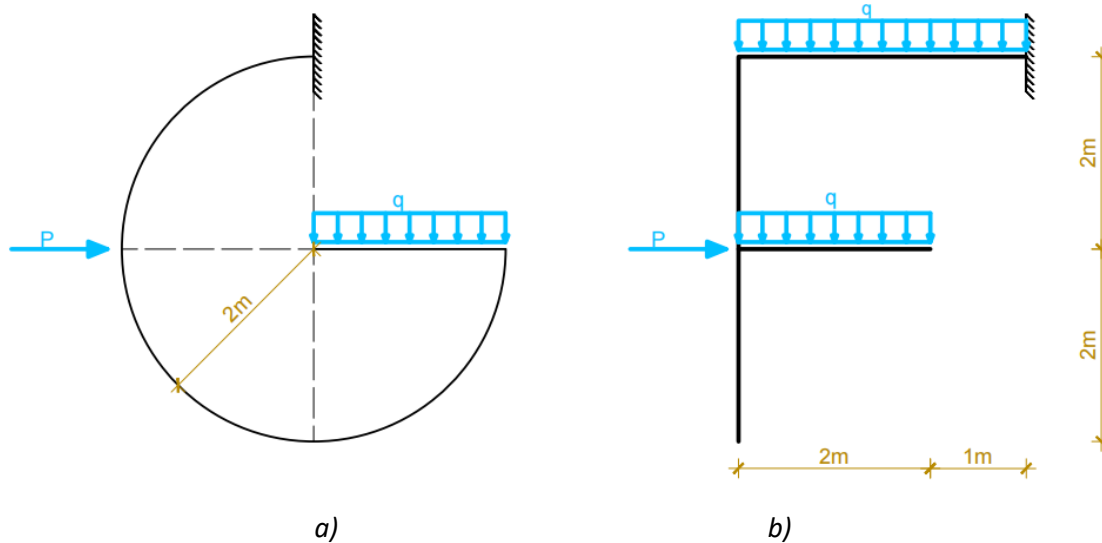
Slika 4.6. Određivanje sile u zglobu C



## 5. Numerički primjeri

### 5.1. Zadatak 1

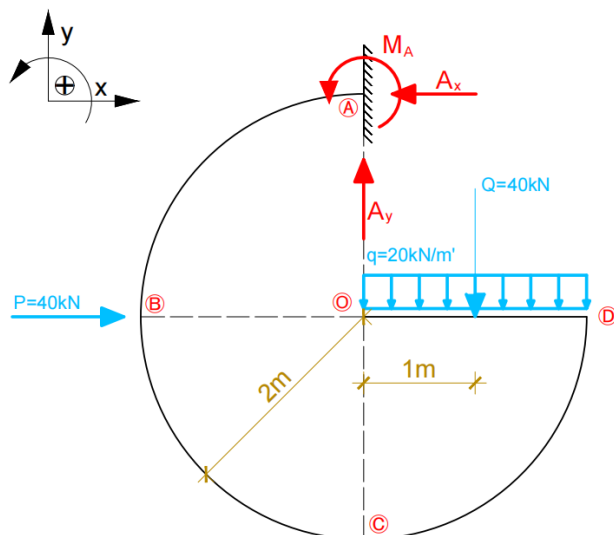
Potrebno je odrediti reakcije i nacrtati dijagrame unutarnjih sila za prikazane sustave. Zadano je:  $P = 40 \text{ kN}$  i  $q = 20 \text{ kN/m}'$



Slika 5.1. Zadani nosači

a)

Reakcije u ležaju A:



Slika 5.2. Zamjenska sila

Kontinuirano opterećenje  $q$  [ $\text{kN/m}'$ ] zamijenit će se koncentriranom silom koja djeluje u polovištu raspona opterećenja [ $\text{kN}$ ]

$$Q = q \cdot r = 20 \cdot 2 = 40 \text{ kN}$$

Jednadžbe ravnoteže:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$P - A_x = 0$$

$$A_x = 40 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$Q - A_y = 0$$

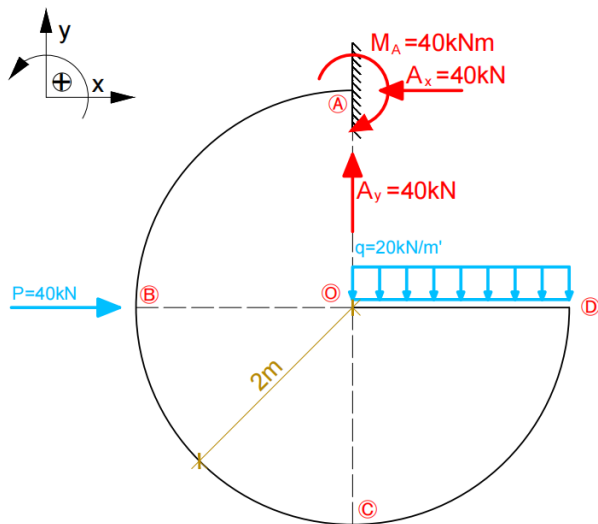
$$A_y = 40 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$M_A + P \cdot 2 + Q \cdot 1 = 0$$

$$M_A = -40 \cdot 2 + 40 \cdot 1$$

$$M_A = -40 \text{ kNm (smjer suprotan od pretpostavljenog)}$$



Slika 5.3. Skica stvarnih djelovanja

Unutarnje sile u presjecima računaju se koristeći lokalne koordinatne sustave  $x'-y'$

Presjek A-A

$$\Sigma M_A = 0$$

$$M_A = 40 \text{ kNm}$$

$$\Sigma F_{x'} = 0$$

$$T_A = A_y = 40 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_{y'} = 0$$

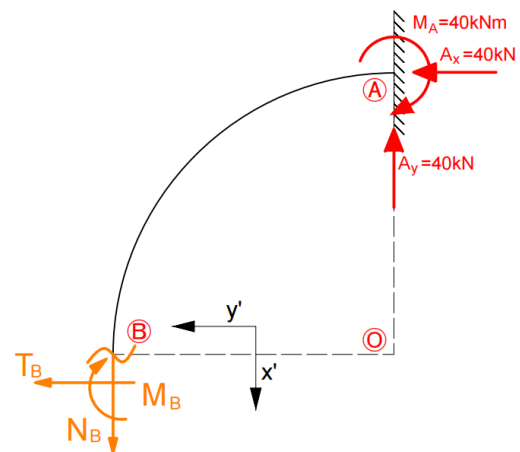
$$N_A = A_x = 40 \text{ kN (tlak)}$$

Presjek B-B (gore)

$$\begin{aligned}\Sigma M_B &= 0 \\ M_B + M_A - A_x \cdot r - A_y \cdot r &= 0 \\ M_B &= -40 + 40 \cdot 2 + 40 \cdot 2 = \\ &= 120 \text{ kNm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x'} &= 0 \\ T_B &= -A_x = -40 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_{y'} &= 0 \\ N_B &= A_y = 40 \text{ kN (vlak)}\end{aligned}$$



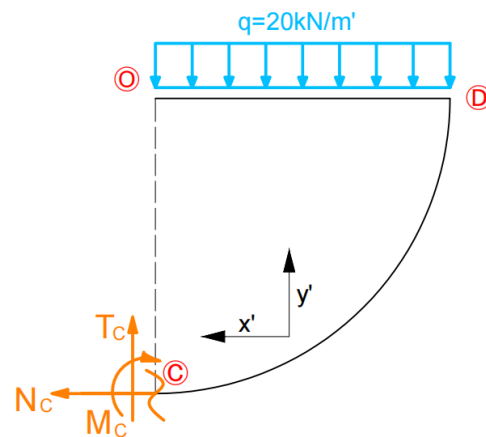
Slika 5.4. Presjek B-B

Presjek C-C (gore)

$$\begin{aligned}\Sigma M_C &= 0 \\ M_C &= Q \cdot 1 = 40 \text{ kNm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x'} &= 0 \\ T_C &= Q = 40 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_{y'} &= 0 \\ N_C &= 0\end{aligned}$$



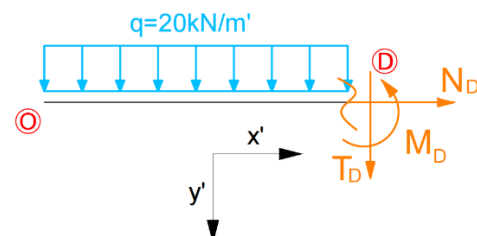
Slika 5.5. Presjek C-C

Presjek D-D (lijevo)

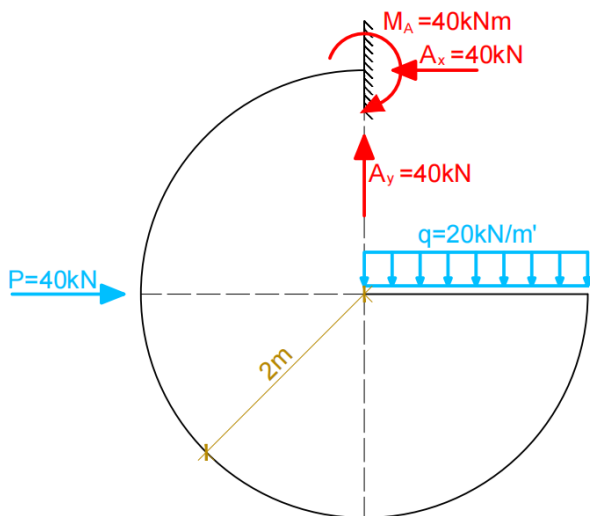
$$\begin{aligned}\Sigma M_D &= 0 \\ M_D &= Q \cdot 1 = 40 \text{ kNm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x'} &= 0 \\ T_D &= -Q = -40 \text{ kN}\end{aligned}$$

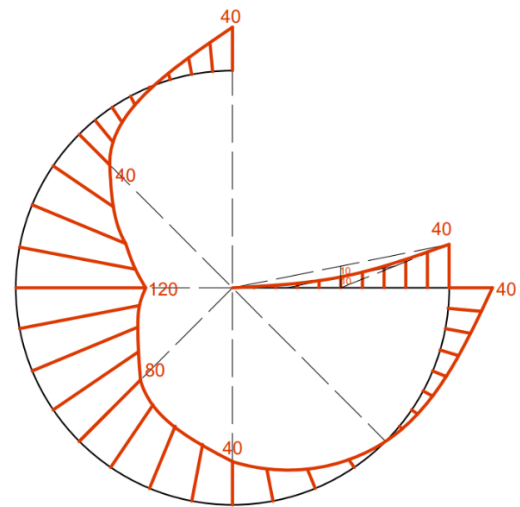
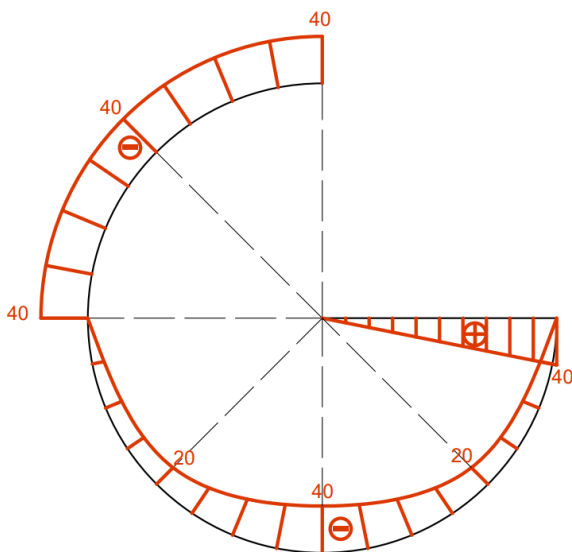
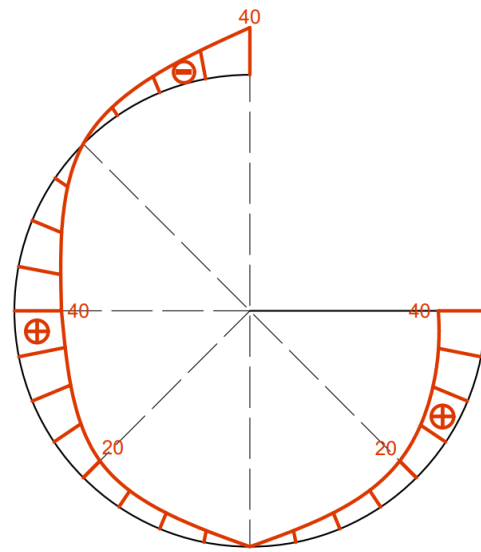
$$\begin{aligned}\Sigma F_{y'} &= 0 \\ N_D &= 0\end{aligned}$$



Slika 5.6. Presjek D-D

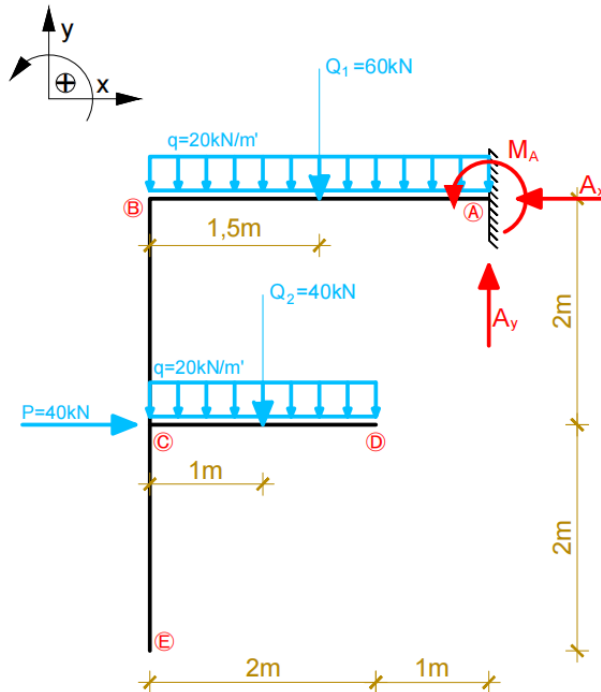


Slika 5.7. Zadani nosač

Slika 5.8. Dijagram momenata savijanja  
 $M$  [kNm]Slika 5.9. Dijagram poprečnih sila  
 $T$  [kN]Slika 5.10. Dijagram uzdužnih sila  
 $N$  [kN]

b)

Reakcije u ležaju A:



Slika 5.11. Zamjenske sile

Kontinuirano opterećenje  $q$  [kN/m'] zamijenit će se koncentriranim silama koje djeluju u polovištu raspona opterećenja [kN]

$$Q_1 = q \cdot 3 = 20 \cdot 3 = 60 \text{ kN}$$

$$Q_2 = q \cdot 3 = 20 \cdot 2 = 40 \text{ kN}$$

Jednadžbe ravnoteže

$$\Sigma M_A = 0$$

$$M_A + Q_1 \cdot 1,5 + P \cdot 2 + Q_2 \cdot 2 = 0$$

$$M_A = -60 \cdot 1,5 - 40 \cdot 2 - 40 \cdot 2$$

$$M_A = -250 \text{ kNm} \quad (\text{smjer suprotan od pretpostavljenog})$$

$$\Sigma F_y = 0$$

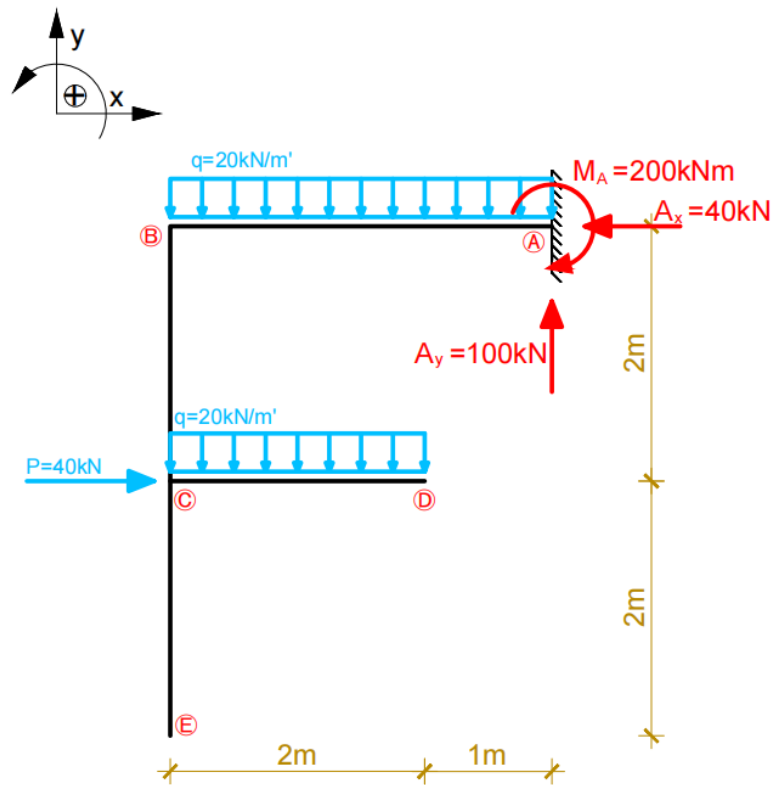
$$Q_1 + Q_2 - A_y = 0$$

$$A_y = 60 + 40 = 100 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$P - A_x = 0$$

$$A_x = 40 \text{ kN}$$



Slika 5.12. Skica stvarnih djelovanja

Unutarnje sile u presjecima računaju se koristeći lokalne koordinatne sustave  $x'-y'$

Presjek A-A

$$\Sigma M_A = 0$$

$$M_A = 250 \text{ kNm}$$

$$\Sigma F_{x'} = 0$$

$$T_A = A_y = 100 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_{y'} = 0$$

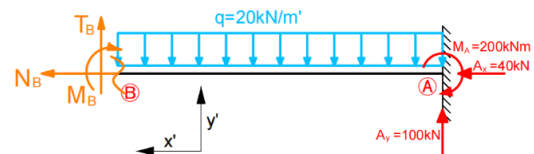
$$N_A = A_x = 40 \text{ kN (tlak)}$$

Presjek B-B (desno)

$$\begin{aligned}\Sigma M_B &= 0 \\ M_B + M_A - A_y \cdot 3 + Q_1 \cdot 1,5 &= 0 \\ M_B &= -250 + 100 \cdot 3 - 60 \cdot 1,5 \\ M_B &= -40 \text{ kNm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_{y'} &= 0 \\ T_B - A_y + Q_1 &= -100 + 60 \\ T_B &= -40 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x'} &= 0 \\ N_B - A_x &= -40 \text{ kN (tlak)}\end{aligned}$$



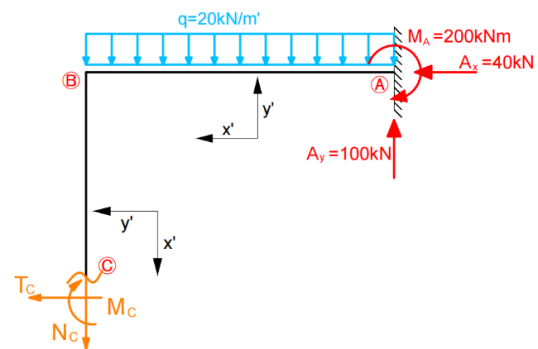
Slika 5.13. Presjek B-B

Presjek C-C (gore)

$$\begin{aligned}\Sigma M_C &= 0 \\ M_C + M_A - A_y \cdot 3 + Q_1 \cdot 1,5 - A_x \cdot 2 &= 0 \\ M_C &= -250 + 100 \cdot 3 - 60 \cdot 1,5 + 40 \cdot 2 \\ M_C &= 40 \text{ kNm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x'} &= 0 \\ T_C - A_x &= -40 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_{y'} &= 0 \\ N_C = A_y - Q_1 &= 100 - 60 \\ N_C &= 40 \text{ kN (vlak)}\end{aligned}$$



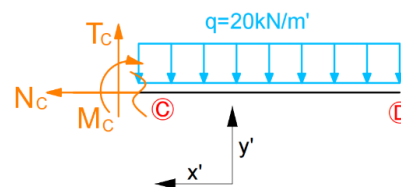
Slika 5.14. Presjek C-C (gore)

Presjek C-C (desno)

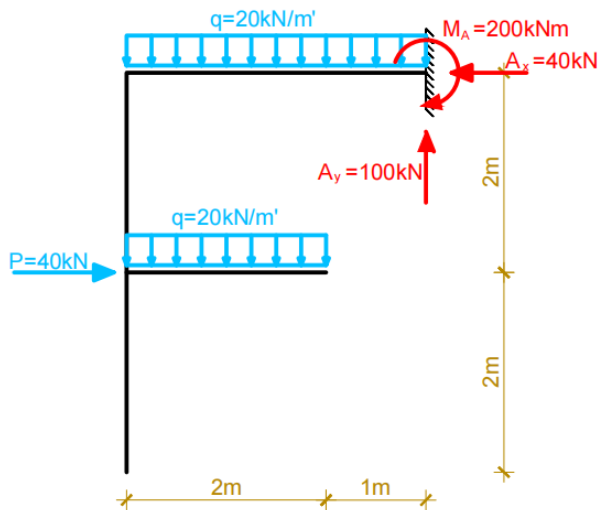
$$\begin{aligned}\Sigma M_C &= 0 \\ M_C + Q_2 \cdot 1 &= 0 \\ M_C &= -40 \text{ kNm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x'} &= 0 \\ T_C = Q_2 &= 40 \text{ kN}\end{aligned}$$

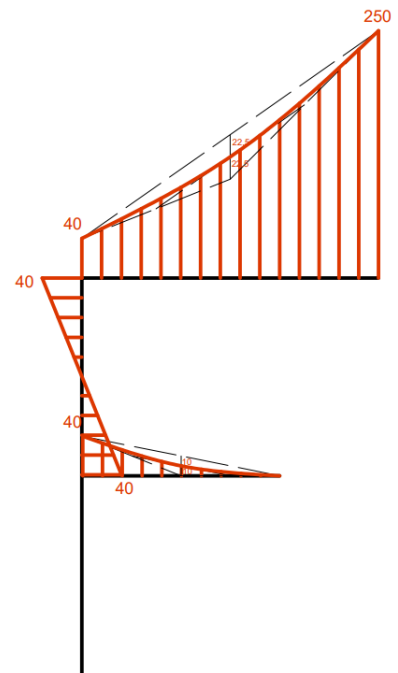
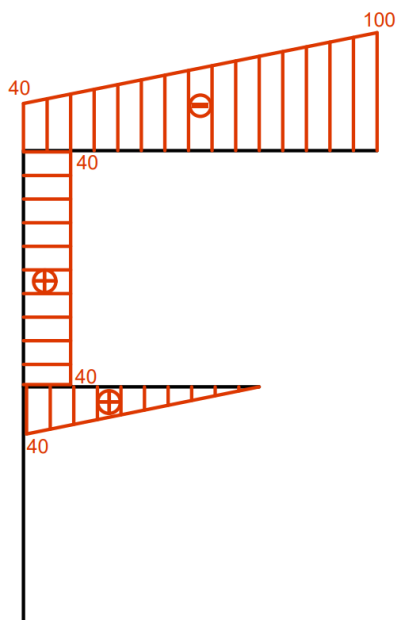
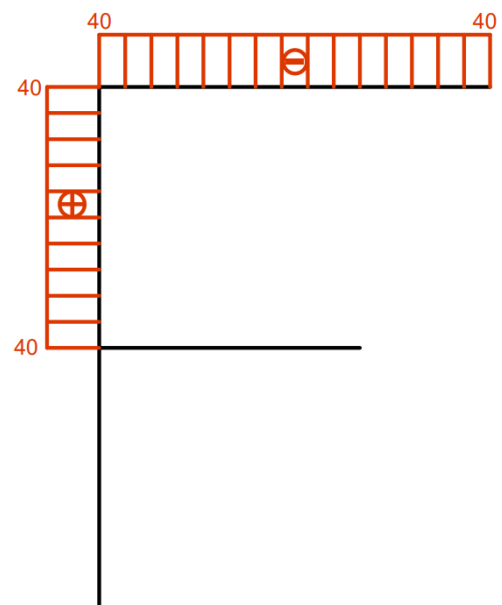
$$\begin{aligned}\Sigma F_{y'} &= 0 \\ N_C &= 0\end{aligned}$$



Slika 5.15. Presjek C-C (desno)



Slika 5.16. Zadani nosač

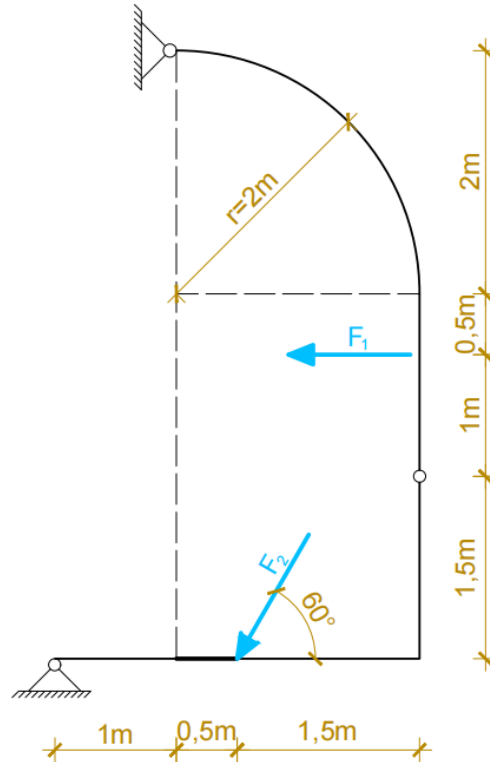
Slika 5.17. Dijagram momenata savijanja  
 $M$  [kNm]Slika 5.18. Dijagram poprečnih sila  
 $T$  [kN]Slika 5.19. Dijagram uzdužnih sila  
 $N$  [kN]



## 5.2. Zadatak 2

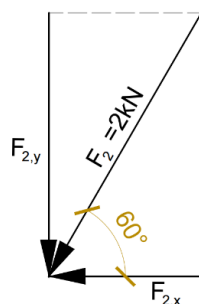
Za nosač prikazan na slici 5.x. potrebno je odrediti reakcije i dijagrame unutarnjih sila.

Zadano je:  $F_1 = 1,2 \text{ kN}$ ,  $F_2 = 2 \text{ kN}$  i  $r = 2 \text{ m}$



Slika 5.20. Zadani nosač

Radi jednostavnijeg postavljanja jednadžbi ravnoteže, sila  $F_2$  rastavit će se na horizontalnu i vertikalnu komponentu:

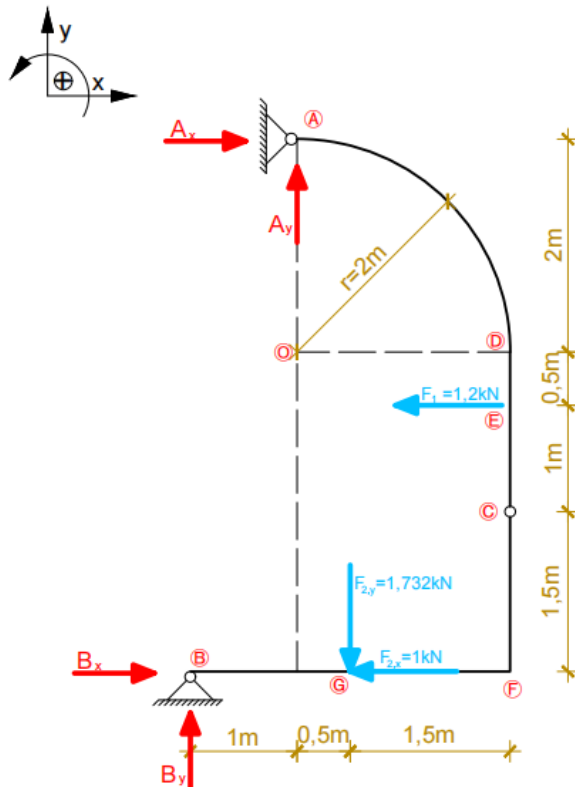


Slika 5.21. Rastavljanje sile na komponente

$$F_{2,x} = F_2 \cos 60^\circ = 2 \cdot \cos 60^\circ = 1 \text{ kN}$$

$$F_{2,y} = F_2 \sin 60^\circ = 2 \cdot \sin 60^\circ = 1,732 \text{ kN}$$

Reakcije u ležajevima A i B:



Slika 5.22. Pretpostavljeni smjerovi reakcija

Postavit će se tri osnovne jednadžbe ravnoteže globalno za sustav u cjelini i jedna dodatna koja zadovoljava uvjet da je moment u zglobu C jednak nuli ako se promatra dio sustava ispod zgloba C.

Jednadžbe ravnoteže

$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= 0 \\ F_1 \cdot 2,5 + F_{2,y} \cdot 5 + F_{2,x} \cdot 0,5 - B_x \cdot 5 + B_y \cdot 1 &= 0 \\ 1,2 \cdot 2,5 + 1,732 \cdot 5 + 1 \cdot 0,5 &= 5B_x - B_y \\ 5B_x - B_y &= 8,866 \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= 0 \\ A_y + B_y - F_{2,y} &= 0 \\ A_y + B_y &= 1,732 \quad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0 \\ A_x + B_x - F_1 - F_{2,x} &= 0 \\ A_x + B_x &= 2,2 \quad (3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_{C,dolje} &= 0 \\ B_y \cdot 3 - B_x \cdot 1,5 - F_{2,y} \cdot 1,5 + F_{2,x} \cdot 1,5 &= 0 \\ 3B_y - 1,5B_x &= 1,098 \quad (4)\end{aligned}$$

Iz jednadžbi (1) i (4) dobiva se:

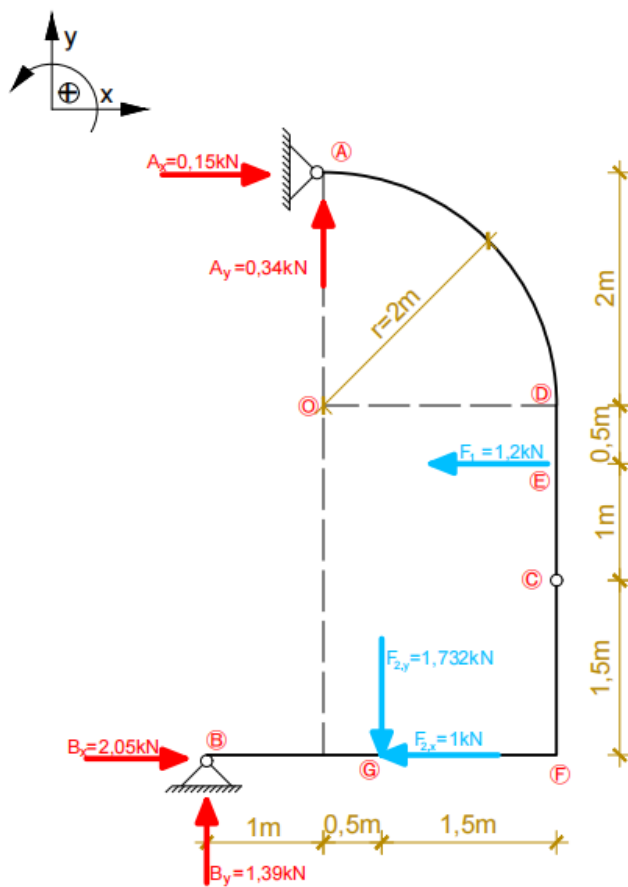
$$B_x = 2,05 \text{ kN}$$

$$B_y = 1,39 \text{ kN}$$

Iz jednadžbi (2) i (3) dobiva se:

$$A_x = 0,15 \text{ kN}$$

$$A_y = 0,34 \text{ kN}$$



Slika 5.23. Skica stvarnih djelovanja

Unutarnje sile u presjecima računaju se koristeći lokalne koordinatne sustave  $x'$ - $y'$

Presjek D-D (gore)

$$\Sigma M_D = 0$$

$$M_D - A_x \cdot r - A_y \cdot r = 0$$

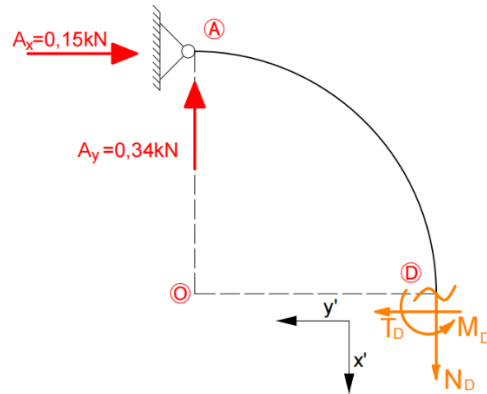
$$M_D = 0,15 \cdot 2 + 0,34 \cdot 2 = 0,98 \text{ kNm}$$

$$\Sigma F_{y'} = 0$$

$$T_D = A_x = 0,15 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_{x'} = 0$$

$$N_D = A_y = 0,34 \text{ kN (vlak)}$$



Slika 5.24. Presjek D-D

Presjek E-E (gore)

$$\Sigma M_E = 0$$

$$M_E - A_x \cdot (r + 0,5) - A_y \cdot r = 0$$

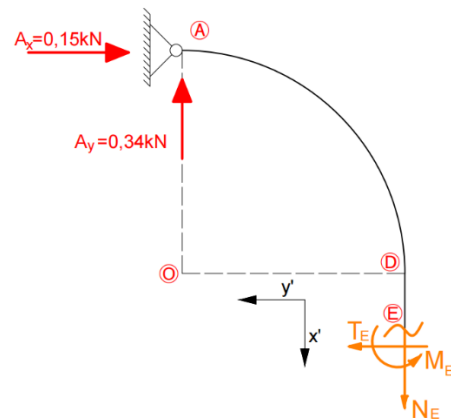
$$M_E = 0,15 \cdot 2,5 + 0,34 \cdot 2 = 1,06 \text{ kNm}$$

$$\Sigma F_{y'} = 0$$

$$T_E = A_x = 0,15 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_{x'} = 0$$

$$N_E = A_y = 0,34 \text{ kN (vlak)}$$



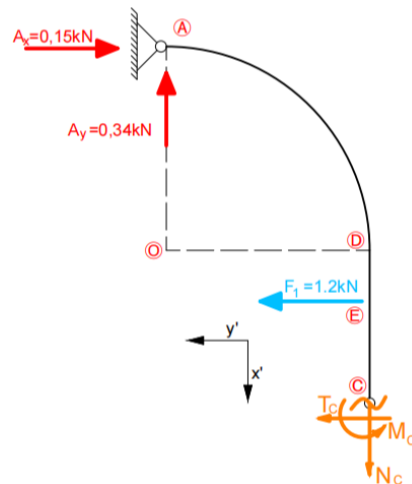
Slika 5.25. Presjek E-E

Presjek C-C (gore)

$$\begin{aligned}\Sigma M_C &= 0 \\ M_C - A_x \cdot (r + 1,5) - A_y \cdot r + F_1 \cdot 1 &= 0 \\ M_C &= 0,15 \cdot 3,5 + 0,34 \cdot 2 - 1,2 \cdot 1 \\ M_C &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_{y'} &= 0 \\ T_C = A_x - F_1 &= 0,15 - 1,2 = -1,05 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x'} &= 0 \\ N_C = A_y &= 0,34 \text{ kN (vlak)}\end{aligned}$$



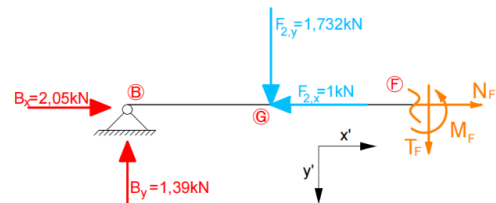
Slika 5.26. Presjek C-C

Presjek F-F (lijevo)

$$\begin{aligned}\Sigma M_F &= 0 \\ M_F - B_y \cdot 3 + F_{2,y} \cdot 1,5 &= 0 \\ M_F &= 1,39 \cdot 3 - 1,732 \cdot 1,5 = 1,58 \text{ kNm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_{y'} &= 0 \\ T_F = B_y - F_{2,y} &= 1,39 - 1,73 = -0,34 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x'} &= 0 \\ N_F = -B_x + F_{2,x} \\ N_F &= -2,05 + 1 = -1,05 \text{ kN (tlak)}\end{aligned}$$



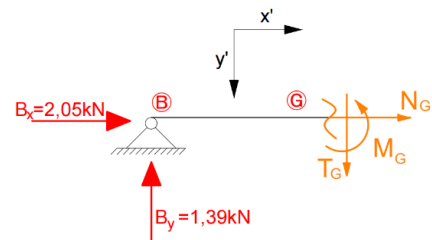
Slika 5.27. Presjek F-F

Presjek G-G (lijevo)

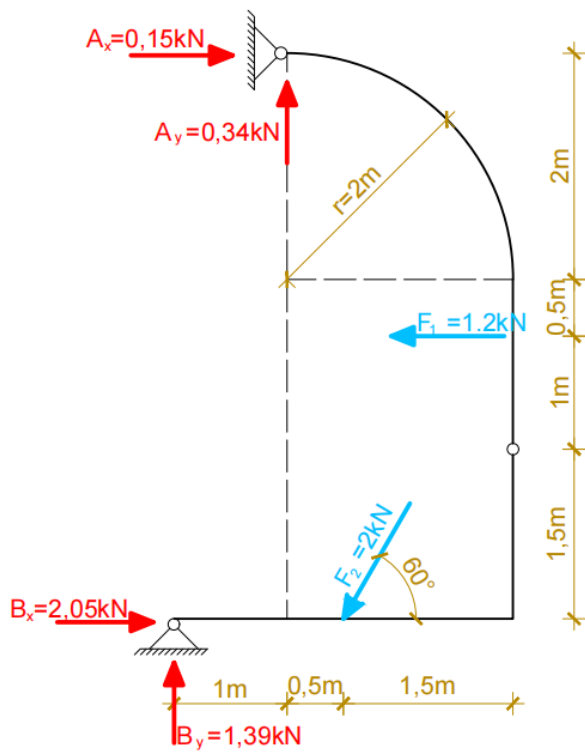
$$\begin{aligned}\Sigma M_G &= 0 \\ M_G = B_y \cdot 1,5 &= 1,39 \cdot 1,5 = 2,09 \text{ kNm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_{y'} &= 0 \\ T_G = B_y &= 1,39 \text{ kN}\end{aligned}$$

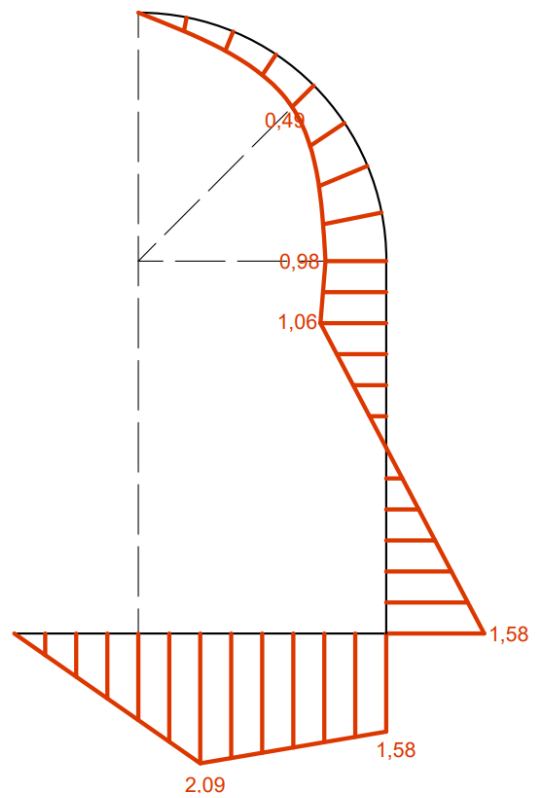
$$\begin{aligned}\Sigma F_{x'} &= 0 \\ N_G = -B_x &= 2,05 \text{ kN (tlak)}\end{aligned}$$



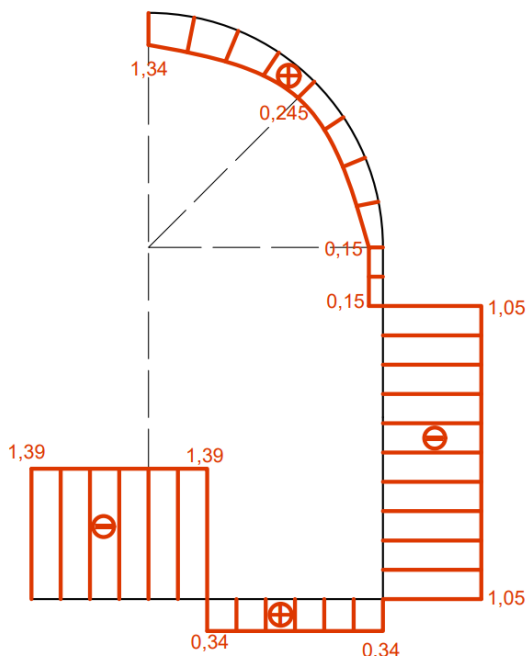
Slika 5.28. Presjek G-G



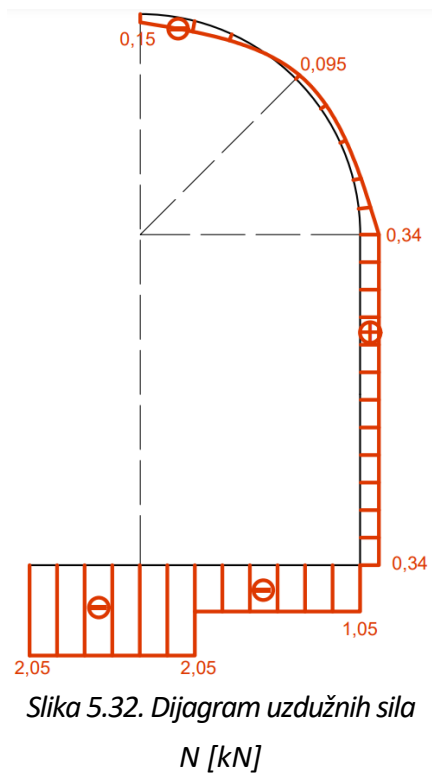
Slika 5.29. Zadani nosač



Slika 5.30. Dijagram momenata savijanja  
 $M$  [kNm]



Slika 5.31. Dijagram poprečnih sila  
 $T$  [kN]



Slika 5.32. Dijagram uzdužnih sila  
 $N$  [kN]

## 6. Zaključak

Zakrivljeni gredni nosači izuzetno su bitni u građevinarstvu. Njihove povoljne konstrukcijske i statičke osobine razlog su korištenja kroz čitavu povijest. Također su estetski jedne od najljepših konstrukcija pa su graditeljima posebno zanimljive u mostogradnji i ostalim uočljivim građevinama. Današnje tehnologije omogućavaju proizvodnju zakrivljenih nosača od gotovo svih materijala i stalan napredak u svojstvima istih pa se može zaključiti da će zakrivljeni gredni nosači biti vrlo primjenjivani i u budućnosti.

Kad se govori o statičkom proračunu ovakvih elemenata, danas se koriste računalni programi i numeričke metode. Ipak, analitičke i grafičke metoda opisane u ovom radu, objašnjene i na nekoliko numeričkih primjera, osnova su za proračun takvih sustava.

## 7. Literatura

- [1] F. Matejiček, D. Semenski, Z. Vnučec: Uvod u statiku sa zbirkom zadataka, Strojarski fakultet, Slavonski Brod, 2016.
- [2] D. Bazjanac: Tehnička mehanika - Statika, Tehnička knjiga, Zagreb, 1963.
- [3] J. Radić: Uvod u Mostarstvo, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, 2009.
- [4] V Vukobratović: Konstruktivni sistemi 1, materijal za vežbe, Novi Sad, 2012.
- [5] Skripta uz predavanja: Lučni mostovi, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2003.
- [6] Masonry arch with nominal geometry: thrust line in the initial, dostupno na: [https://www.researchgate.net/figure/Masonry-arch-with-nominal-geometry-thrust-line-in-the-initial-a-and-438\\_fig1\\_326699396](https://www.researchgate.net/figure/Masonry-arch-with-nominal-geometry-thrust-line-in-the-initial-a-and-438_fig1_326699396)
- [7] Wikipedija: Luk (arhitektura), dostupno na: [https://hr.wikipedia.org/wiki/Luk\\_\(arhitektura\)](https://hr.wikipedia.org/wiki/Luk_(arhitektura))
- [8] Wikipedija: Amfiteatar u Puli, dostupno na: [https://sh.wikipedia.org/wiki/Amfiteatar\\_u\\_Puli](https://sh.wikipedia.org/wiki/Amfiteatar_u_Puli)
- [9] Wikipedija: Trajanov most, dostupno na: [https://sl.wikipedia.org/wiki/Trajanov\\_most](https://sl.wikipedia.org/wiki/Trajanov_most)
- [10] Chicago metal rolled products: Defining "Curved Steel" in Construction, dostupno na: <https://www.cmrp.com/blog/fag/defining-curved-steel-in-construction.html>
- [11] Drvene konstrukcije d.o.o: Karakteristike LLD, dostupno na: <https://www.drvene-konstrukcije.hr/karakteristike-lll/>
- [12] Wikipedija: Krčki most, dostupno na: [https://hr.wikipedia.org/wiki/Kr%C4%8Dki\\_most](https://hr.wikipedia.org/wiki/Kr%C4%8Dki_most)
- [13] Wikipedija: Šibenski most, dostupno na: [https://hr.wikipedia.org/wiki/%C5%A0ibenski\\_most](https://hr.wikipedia.org/wiki/%C5%A0ibenski_most)
- [14] G. Turkalj, Zakrivljeni gredni nosači, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet
- [15] O. Muftić, Mehanika I - Statika, Tehnička knjiga, Zagreb 1991.
- [16] K. Fresl, Građevna statika 1, Bilješke sa predavanja, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, 2017.



## 8. Popis slika

Slika 2.1. Okvirni nosači.....	2
Slika 2.2. Statički određeni i neodređeni sustavi.....	2
Slika 2.3. Statički određeni i neodređeni sustavi.....	3
Slika 2.4. Dijelovi luka [5].....	3
Slika 3.1. Pulska arena [8].....	4
Slika 3.2. Trajanov most [9].....	5
Slika 3.3. Čelična zakrivljena greda [10].....	5
Slika 3.5. Krovna konstrukcija bazena Utrine [11].....	6
Slika 3.6. Oblici luka [3].....	7
Slika 3.7. Krčki most [12].....	8
Slika 3.3. Maslenički most [13].....	8
Slika 4.1. Reakcije koje sudjeluju u jednadžbama ravnoteže [1].....	10
Slika 4.2. Presjek zakrivljenog grednog nosača [14].....	11
Slika 4.3. Sustav opterećen silama pod kutom.....	12
Slika 4.4. Određivanje reakcija ako je opterećen lijevi disk.....	13
Slika 4.5. Određivanje reakcija ako je opterećen desni disk.....	13
Slika 4.6. Određivanje sile u zglobu C.....	14
Slika 5.1. Zadani nosači.....	15
Slika 5.2. Zamjenska sila.....	15
Slika 5.3. Skica stvarnih djelovanja.....	16
Slika 5.4. Presjek B-B.....	17
Slika 5.5. Presjek C-C.....	17
Slika 5.6. Presjek D-D.....	17
Slika 5.7. Zadani nosač.....	18
Slika 5.8. Dijagram momenata savijanja.....	18
Slika 5.9. Dijagram poprečnih sila.....	18
Slika 5.10. Dijagram uzdužnih sila.....	18
Slika 5.11. Zamjenske sile.....	19
Slika 5.12. Skica stvarnih djelovanja.....	20
Slika 5.13. Presjek B-B.....	21
Slika 5.14. Presjek C-C (gore).....	21
Slika 5.15. Presjek C-C (desno).....	21
Slika 5.16. Zadani nosač.....	22
Slika 5.17. Dijagram momenata savijanja.....	22
Slika 5.18. Dijagram poprečnih sila.....	22
Slika 5.19. Dijagram uzdužnih sila.....	22
Slika 5.20. Zadani nosač.....	23
Slika 5.21. Rastavljanje sile na komponente.....	23
Slika 5.22. Pretpostavljeni smjerovi reakcija.....	24

---

Slika 5.23. Skica stvarnih djelovanja .....	25
Slika 5.24. Presjek D-D.....	26
Slika 5.25. Presjek E-E .....	26
Slika 5.26. Presjek C-C.....	27
Slika 5.27. Presjek F-F .....	27
Slika 5.28. Presjek G-G.....	27
Slika 5.29. Zadani nosač.....	28
Slika 5.30. Dijagram momenata savijanja.....	28
Slika 5.31. Dijagram poprečnih sila .....	28
Slika 5.32. Dijagram uzdužnih sila .....	28