Prednapete mreže kabela

Gaće, Ema

Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Ema Gaće

Prednapete mreže kabela

ZAVRŠNI ISPIT

Zagreb, 2025.

Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Ema Gaće

PREDNAPETE MREŽE KABELA

ZAVRŠNI ISPIT

prof. dr. sc. Krešimir Fresl

dr. sc. Elizabeta Šamec

Zagreb, 2025.

University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Ema Gaće

CABLE NETS

FINAL EXAM

prof. dr. sc. Krešimir Fresl

dr. sc. Elizabeta Šamec

Zagreb, 2025.

Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet

OBRAZAC 3

POTVRDA O POZITIVNOJ OCJENI PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Student/ica :

Ema Gaće	0082067210
(Ime i prezime)	(JMBAG)

zadovoljio/la je na pisanom dijelu završnog ispita pod naslovom:

Prednapete mreže kabela

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

Cable nets

(Naslov teme završnog ispita na engleskom jeziku)

i predlaže se provođenje daljnjeg postupka u skladu s Pravilnikom o završnom ispitu i diplomskom radu Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta.

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu znanstvenog projekta: (upisati ako je primjenjivo)

(Naziv projekta, šifra projekta, voditelj projekta)

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu stručne prakse na Fakultetu: (upisati ako je primjenjivo)

(Ime poslodavca, datum početka i kraja stručne prakse)

Datum: 18. veljače 2025.

Mentor: Krešimir Fresl

Potpis mentora: Krešimir Fresl

Komentor: Elizabeta Šamec

Građevinski fakultet
Fra Andrije Kačića-Miošića 26, HR – 10000 Zagreb, OIB: 62924153420
TEL.: +385 (0) 1 4639 115, FAKS: +385 (0) 1 4828 051
www.grad.unizg.hr

Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet

OBRAZAC 5

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja :

Ema Gaće, 0082067210

(Ime i prezime, JMBAG)

student/ica Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta ovim putem izjavljujem da je moj pisani dio završnog ispita pod naslovom:

Prednapete mreže kabela

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

izvorni rezultat mojega rada te da se u izradi istoga nisam koristio/la drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

Datum: 18. veljače 2025.

Potpis: Ema Gaće

Građevinski fakultet
Fra Andrije Kačića-Miošića 26, HR – 10000 Zagreb, OIB: 62924153420
TEL.: +385 (0) 1 4639 115, FAKS: +385 (0) 1 4828 051
www.grad.unizg.hr

Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet

OBRAZAC 6

IZJAVA O ODOBRENJU ZA POHRANU I OBJAVU PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Ja :

Ema Gaće, 29052374477

(Ime i prezime, OIB)

ovom izjavom potvrđujem da sam autor/ica predanog pisanog dijela završnog ispita i da sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti odgovara sadržaju dovršenog i obranjenog pisanog dijela završnog ispita pod naslovom:

Prednapete mreže kabela

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

koji je izrađen na sveučilišnom prijediplomskom studiju Građevinarstvo Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta pod mentorstvom:

prof. dr. sc. Krešimira Fresla

(Ime i prezime mentora)

i obranjen dana:

26. veljače 2025.

(Datum obrane)

Suglasan/suglasna sam da pisani dio završnog ispita bude javno dostupan, te da se trajno pohrani u digitalnom repozitoriju Građevinskog fakulteta, repozitoriju Sveučilišta u Zagrebu te nacionalnom repozitoriju.

Datum: 18. veljače 2025.

Potpis: Ema Gaće

Građevinski fakultet
Fra Andrije Kačića-Miošića 26, HR - 10000 Zagreb, OIB: 62924153420
TEL.: +385 (0) 1 4639 115, FAKS: +385 (0) 1 4828 051
www.grad.unizg.hr

ZAHVALE

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Krešimiru Freslu na strpljenu, vodstvu i pomoći pri izradi ovog rada, kao i komentorici dr. sc. Elizabeti Šamec na savjetima i pomoći pri izradi primjera koji su potrebni za kompletnost ovog rada.

Za jednu posebnu osobu, nedostaješ neizmjerno.

SAŽETAK

Prednapete mreže kabela su gipke vlačne konstrukcije. Uže kao konstruktivni element opterećenja prenosi isključivo pojavom uravnotežujućih vlačnih sila. Užad se prednapinje i slaže u mreže kako bi se osigurala geometrijska krutost i pojava isključivo vlačnih sila pri bilo kojoj kombinaciji opterećenja. Nalaženje oblika prednapetih mreža kabela je primarni zadatak projektanta, a najpovoljniji način za to je primjena metode gustoća sila. Metoda gustoća sila linearizirala je do tad nelinearan proračun i značajno olakšala projektiranje. U primjerima je prikazano nalaženje oblika mreža kabela uporabom metode gustoća sila kroz iteracije pomoću programskog paketa FALCON.

Ključne riječi: vlačne konstrukcije, nalaženje oblika, proračunski model, metoda gustoća sila, iteracijska primjena metode

SUMMARY

Cable nets are flexible tensile structures. Cable, as a structural element, transfers the load exclusively through the development of balancing tensile forces. The ropes are pre-tensioned and arranged into nets to ensure geometric stiffness and the occurrence of purely tensile forces under any load combination. Form-finding of the pre-tensioned cable nets is the primary task of the engineer, and the most favorable way to achieve this is by applying the force density method. The force density method linearized the previously nonlinear calculations and significantly simplified the design process. Examples are shown for determining the shape of cable nets using the force density method through iterations with the FALCON software package.

Key words: tensile structures, form-finding, numerical model, force density method, iterative force density method

SADRŽAJ

1 UVOD

Prednapete mreže kabela svrstavaju se u gipke konstrukcije. Prve primjere uporabe gipkih vlačnih konstrukcija pronalazimo u šatorima nomadskih plemena i visećim mostovima s užadi od bambusa u Kini, a zamjenom bambusa kovanim željezom omogućili su se puno veći rasponi.

Danas se gipke konstrukcije koriste kod natkrivanja velikih raspona, gdje je potrebno ostvariti veliku korisnu površinu neprekinutu elementima konstrukcije, kao što su izložbeni paviljoni, sportske dvorane, zračne luke i sl. (slika 1.).

Slika 1: Zračna luka u Denveru, 1991. (Izvor: [https://tinyurl.com/PKZLD])

Prednapeta užad pronašla je primjenu kod visećih i ovješenih mostova što je omogućilo ostvarivanje povijesnih raspona tih mostova koji nisu izvedivi primjenom ostalih građevnih materijala.

Noviji primjer uporabe prednapete mreže kabela je konstrukcija zabavnoga centra Khan Shatyr u Astani, Kazahstan (slika 3.). Najviša točka konstrukcije je na 90 m, što je čini najvišom vlačnom konstrukcijom [1].

Slika 2:Zabavni centar Khan Shatyr u Kazahstanu (Izvor: [https://tinyurl.com/FPKSEC])

Začetnikom uporabe gipkih konstrukcija može se smatrati Frei Otto, njemački arhitekt. Najpoznatije njegovo djelo je krovište sportskog kompleksa u Münchenu 1972. godine, izgrađenog za Ljetne olimpijske igre (slika 4.). „Od početaka, Otto je shvatio temeljna načela ove vrste konstrukcije: da su konstrukcija i arhitektonski oblik nerazdvojni, da je gipkost snaga, a ne slabost i da gradivo na površini mora biti podatnije od elemenata koji ga nose“ [2] Na ovom projektu je Otto pak morao odustati od svog načela o gipkom pokrovu te je mreža pokrivena prozirnim pločama od akrila.

Slika 3: Krovište Olimpijske dvorane u Münchenu (Izvor: [https://tinyurl.com/OHMFO])

Gipke konstrukcije se ističu zbog velikih mogućnosti oblikovanja što im daje estetsku vrijednost, mogu biti elegantne i lako se uklopiti u okoliš. Veliku prednost im daje to što su lagane čime je omogućena brza montaža i demontaža, olakšan je transport, a također se mogu i lako reciklirati.

2 KARAKTERISTIKE MREŽE KABELA

Uže, kao konstrukcijski element, ima zanemarivu fleksijsku krutost i nema mogućnost prijenosa tlačnih sila. Pod djelovanjem opterećenja, uže mijenja svoj oblik kako bi se u njemu razvile uravnotežujuće vlačne sile koje su jednoliko raspoređene po površinama poprečnih presjeka. Posljedično, promjenom sila koje djeluju na uže, bilo da mijenjaju položaj, smisao djelovanja ili pravac, mijenja se i njegov oblik kako bi se zadovoljila ravnoteža. Unatoč tome, uže je pri prijenosu opterećenja jako učinkovito jer su sve točke poprečnog presjeka jednako napregnute.

S projektantske strane, potrebno je osigurati da konstrukcija svojim oblikom zadovoljava konstrukcijske, funkcionalne i estetske zahtjeve. Održavanje oblika gipkih konstrukcija od užadi se postiže tako što se slažu u mrežu koja tvori sedlastu plohu (plohu negativne zakrivljenosti). Užad u mreži možemo podijeliti na dvije grupe - konkavna i konveksna, koje su međusobno približno okomite. Konkavna užad preuzimaju opterećenje, dok konveksna služe za stabilizaciju [3].

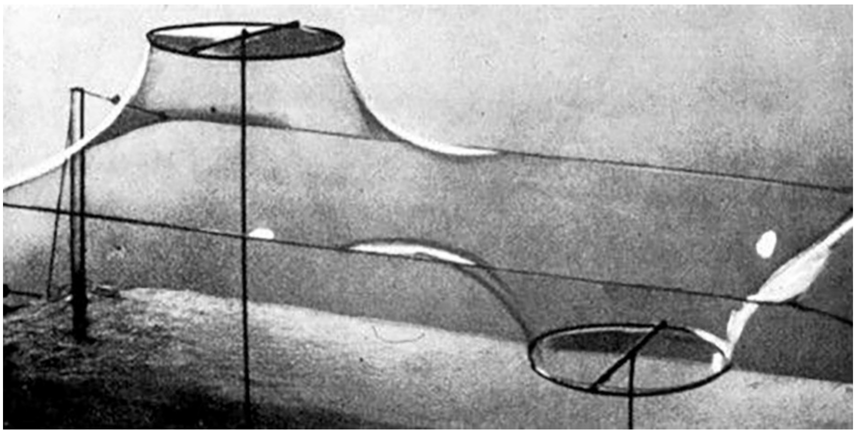
Uzimajući u obzir da užad može prenositi opterećenje isključivo pojavom uravnotežujuće vlačne sile, osim što ih je potrebno složiti u mrežu, potrebno je i da budu prednapeta. Prednaprezanjem se u element konstrukcije uvode sile koje pridonose povoljnom stanju naprezanja u konstrukciji nakon što se ista optereti [4]. U slučaju gipkih konstrukcija to znači da se osigurava pojava vlačnih unutarnjih sila u užadi pri bilo kojem opterećenju. Grupe užadi u mreži tako pri različitim djelovanjima mogu zamijeniti uloge.

Oblik mreže i vrijednosti prednaponskih sila su međusobno povezani jer njen oblik neposredno odražava ravnotežu unutarnjih sila [3], a samim time su ključni kad je u pitanju nosivost mreže prednapetih kabela [1]. Njihov oblik je naizgled nepravilan, no ipak određen zakonima statike.

3 NALAŽENJE OBLIKA

Konstrukcije od užadi zahtijevaju drugačiji pristup projektiranju nego uobičajene zidane, armiranobetonske i čelične konstrukcije. Projektiranje gipkih konstrukcija sastoji se od više faza, a prva je nalaženje oblika (eng. *form finding*) prije nanošenja korisnog opterećenja. Nalaženje oblika rezultira početnom ravnotežnom konfiguracijom, a ona obuhvaća geometrijski oblik te razdiobu prednaponskih sila u kabelima.

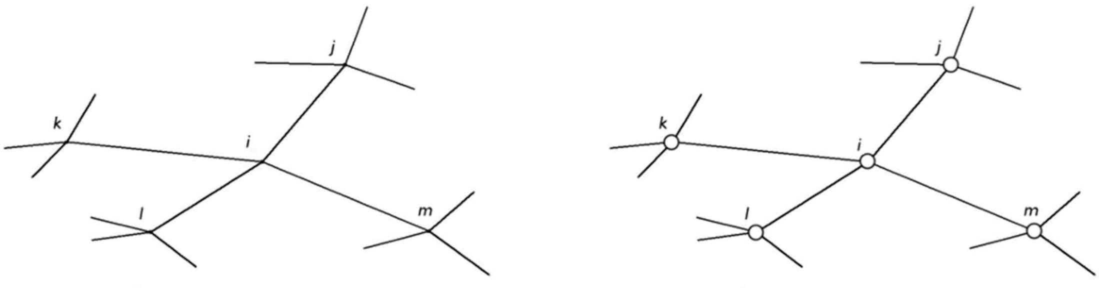
Prvotno jedini način nalaženja oblika bio je izrada fizičkih modela. Izrađivali su se korištenjem opne od sapunice, tkanine i gipkih niti (slika 3.). Iako su dobro pokazivali ponašanje gipkih konstrukcija, mana je bila gotovo nemoguće precizno određivanje koordinata točaka što u konačnici dovodi do neravnoteže mreže jer dolazi do pogrešaka u duljini kabela i promjeni vrijednosti prednaponskih sila. To je dovelo do potrebe za izradom numeričkih modela i novih metoda.



Slika 4: Model od sapunice (Izvor: [https://tinyurl.com/FOFOMS])

3.1 Numerički model mreže kabela

Za potrebe proračunskog modela uzimamo da su kabeli potpuno savitljivi i zanemarujemo njihovu težinu. Zbog malih poprečnih presjeka kabela, mjesta na kojima se kabeli križaju možemo smatrati geometrijskim točkama u kojima se njihove osi sijeku, a kontaktne sile koje se javljaju na mjestu križanja kabela koncentriranim silama. Obzirom na pretpostavku da je kabel potpuno savitljiv i da je opterećen koncentriranim silama, odsječci između točaka križanja kabela će biti ravni. Zbog toga možemo uzeti da su križišta zglobni čvorovi, a odsječci kabela zglobni štapovi. (slika 4).



Slika 5: Dio mreže prikazan kao sustav zglobnih štapova (Izvor: [3])

Točke u kojima su kabeli spojeni s krutim osloncima također smatramo zglobnim čvorovima. Krutim osloncem smatramo primjerice grede, lukove, jarbole i sl. gdje čvorove koji su na njima možemo smatrati nepomičnim.

Čvorove koji su na mjestima križanja kabela nazvat ćemo slobodnim čvorovima i označiti s n_f, a čvorove u kojim su kabeli spojeni s osloncima, ležajni čvorovi i označiti ih s n_s; Broj svih čvorova tada je $n = n_f + n_s$. Čvorove ćemo svrstati u niz *N*, gdje ćemo ih označiti indeksima, pa će tako čvor na *i*-tom mjestu biti čvor *i*. Štap koji se nalazi između čvorova *i* i *j*, $i \neq j$, označit ćemo sa $\{i,j\}$. Broj štapova u mreži označit ćemo s *b* [3].

Ako imamo mrežu s dvije grupe kabela, u prvoj imamo *a* kabela, a u drugoj *c* kabela, broj slobodnih čvorova tada je $a \cdot c$, a broj ležajnih čvorova je $2 \cdot (a + c)$. Svaki *a* kabel križa se s *c* kabela što znači da ima $c + 1$ odsječaka – štapova; *a* kabela ima $a \cdot (c + 1)$ odsječaka. Vrijedi i obratno, svaki *c* kabel križa se s *a* kabela što znači da ima $a + 1$ odsječaka; *c* kabela ima $c \cdot (a + 1)$ odsječaka. To nas dovodi do konačnog broja štapova u mreži: $b = 2 \cdot a \cdot c + a + c$ [5].

3.2 Temeljne varijable u nalaženju oblika

Temeljne „varijable" u postupku nalaženja oblika su topologija mreže, geometrija – oblik mreže, geometrijski rubni uvjeti te vrijednosti prednaponskih sila u kabelima [3].

Topologija mreže je poznati ulazni podatak, a određen je brojem i rasporedom kabela. Odnosi se na poveznicu kabela, štapova i čvorova u mreži.

Geometrija ili oblik mreže mora zadovoljiti konstrukcijske, funkcionalne i estetske zahtjeve, a u proračunskom modelu je određen koordinatama čvorova koje su temeljne nepoznanice u postupku nalaženja oblika. Promjenom koordinata čvorova, duljine štapova su podložne značajnim promjenama kroz proračun, no mogu se zadati kinematička ograničenja kao dodatni uvjeti čime se može ograničiti duljina pojedinih štapova.

Geometrijski rubni uvjeti su unaprijed zadani koordinatama ležajnih čvorova. Kroz njihovu promjenu tijekom projektiranja, može se značajno utjecati na konačni oblik mreže.

Vrijednosti prednaponskih sila u kabelima ili štapovima mogu biti nepoznanice, a mogu se i unaprijed zadati.

Osim mreža kabela gdje imamo krute rubove i gdje su koordinate svih rubnih čvorova poznate, moguće je oblikovati i mrežu s rubnim kabelima. Rubni kabeli su samo u nekim, najčešće u krajnjim, točkama spojeni s krutom konstrukcijom. U tom slučaju, poznate su koordinate samo tih čvorova, a nalaženje oblika uključuje i nalaženje oblika i rubnih kabela.

Rubni kabeli prenose puno veće sile nego unutarnji pa dolazi do mogućnosti da čvorovi u kojima su unutarnji kabeli spojeni na rubne otkližu u jednu točku. Dodavanjem kinematičkih ograničenja u vidu ograničavanja duljine štapova na rubnim kabelima, sprječava se klizanje na spoju unutarnjih kabela s rubnim.

3.3 Ravnoteža slobodnog čvora

Za svaki slobodni čvor u mreži, mogu se napisati tri jednadžbe ravnoteže projekcija sila iz štapova priključenih u njega.

$$\sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \overrightarrow{e_{i,j}} \cdot \vec{i} = 0,$$

$$\sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \overrightarrow{e_{i,j}} \cdot \vec{j} = 0,$$

$$\sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \overrightarrow{e_{i,j}} \cdot k = 0.$$

Skalar $S_{\{i,j\}}$ je vrijednost sile u štapu *{i,j}* ; za vlačnu silu je $S_{\{i,j\}} > 0$, a za tlačnu $S_{\{i,j\}} < 0$.

Vektor $\overrightarrow{e_{i,j}}$ je jedinični vektor na osi štapa *{i,j}*, orijentiran od od čvora *i* prema čvoru *j*.

$$\overrightarrow{e_{i,j}} = \frac{x_j - x_i}{l_{\{i,j\}}}\vec{i} + \frac{y_j - y_i}{l_{\{i,j\}}}\vec{j} + \frac{z_j - z_i}{l_{\{i,j\}}}\vec{k}$$

$l_{\{i,j\}}$ je duljina štapa {i,j}, $\quad l_{\{i,j\}} = \sqrt{\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2 + \left(z_j - z_i\right)^2}$

Uvrstimo li izraze za jedinični vektor i za duljinu štapa u izraze za ravnotežu čvora dobivamo:

$$\sum_{j\in N_i} S_{\{i,j\}} \frac{x_j - x_i}{l_{\{i,j\}}} \cdot \vec{\imath} = \sum_{j\in N_i} S_{\{i,j\}} \frac{x_j - x_i}{\sqrt{\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2 + \left(z_j - z_i\right)^2}} = 0,$$

$$\sum_{j\in N_i} S_{\{i,j\}} \frac{y_j - y_i}{l_{\{i,j\}}} \cdot \vec{\imath} = \sum_{j\in N_i} S_{\{i,j\}} \frac{y_j - y_i}{\sqrt{\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2 + \left(z_j - z_i\right)^2}} = 0,$$

$$\sum_{j\in N_i} S_{\{i,j\}} \frac{z_j - z_i}{l_{\{i,j\}}} \cdot \vec{\imath} = \sum_{j\in N_i} S_{\{i,j\}} \frac{z_j - z_i}{\sqrt{\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2 + \left(z_j - z_i\right)^2}} = 0.$$

Dolazimo do sustava nelinearnih jednadžbi koji sadrži ukupno $3n_f$ jednadžbi.

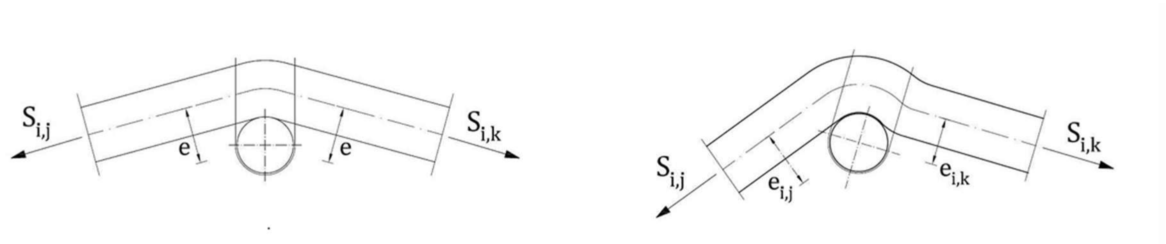
Sustavi nelinearnih jednadžbi se rješavaju numeričkim putem gdje se iteracijskim postupcima dolazi do približno točnog rješenja. Niz se ponavlja dok se ne zadovolji odabrani kriteriji, a svaki korak ovisi o ulaznim podacima. Ulazni podaci za prvi korak se moraju pretpostaviti, a za svaki sljedeći, ulazni podaci ovise o rezultatima prethodnog koraka.

3.4 Minimalna mreža kabela

Ako su vrijednosti sila u svim štapovima {*i,j*} međusobno jednake sustav jednadžbi ravnoteže može se gledati kao uvjet minimuma ukupne duljine užadi. Rješavanjem sustava dolazi se do koordinata slobodnih čvorova koji daju oblik mreže takav da je zbroj duljina kabela manji nego pri bilo kojem drugom obliku. Takav oblik mreže se zove minimalna ili geodetska mreža kabela. Minimalna mreža kabela ne ovisi o vrijednosti sile u kabelima, ali ona mora biti vlačna: S > 0.

Dolazak mreže u minimalnu konfiguraciju je moguć samo ako je tijekom prednaprezanja omogućeno klizanje kabela jednih po drugima. Kabeli se pričvršćuju u točkama u kojima se križaju nakon što je mreža došla u minimalnu konfiguraciju čime se povećava krutost mreže kao i onemogućuje značajna promjena oblika nakon što se nanese opterećenje.

Spojimo li dva mimoilazna kabela prije izjednačenja sile duž njih, dolazi do zakretanja čvora (slika 6.). Zakretanje čvora se događa da bi se uravnotežili momenti sila iz dva štapa jednog užeta u odnosu na os poprečnog užeta, smanjuje se krak sile koja ima veću vrijednost.



Slika 6: Zakretanje čvora (Izvor: [3])

Ako kabele napnemo različitima silama i spojimo ih tek kad dokližu u ravnotežni položaj, sila duž kabela će biti jednaka i neće doći do zakretanja čvora. Mreža u kojoj su sile u kabelima međusobno različite, ali duž jednog kabela jednake, zove se prirodno poopćena minimalna mreža kabela.

Mogućnost različitih vrijednosti sila u različitim kabelima povećava moguće oblike koje mreža kabela može postići. Pri tome, nisu bitne apsolutne vrijednosti sila u kabelima koliko njihov omjer. Dođe li do nerazmjernog povećanja sile u samo jednom kabelu, kabel se nateže pri čemu se ukupna duljina štapova tog kabela smanjuje, a poligonalna linija se izravnava.

4 METODA GUSTOĆA SILA

Metodu gustoća sila su razvili Hans-Jörg Schek, Klaus Linkwitz i njihovi suradnici početkom sedamdesetih godina prošlog stoljeća. Metoda je značajna za nalaženje oblika gipkih konstrukcija jer je nelinearni problem lineariziran tako što su omjer vrijednosti sile $S_{\{i,j\}}$ u štapu {*i,j*} i njegove duljine $l_{\{i,j\}}$ zamijenili oznakom $q_{\{i,j\}}$ koja predstavlja gustoću (koeficijent) sile.

$$q_{\{i,j\}} = \frac{S_{\{i,j\}}}{l_{\{i,j\}}}$$

Time je omogućeno da se jednadžbe ravnoteže zapišu u obliku

$$\sum\nolimits_{j \in N_i} q_{\{i,j\}} \left(x_j - x_i\right) = 0,$$
$$\sum\nolimits_{j \in N_i} q_{\{i,j\}} \left(y_j - y_i\right) = 0,$$
$$\sum\nolimits_{j \in N_i} q_{\{i,j\}} \left(z_j - z_i\right) = 0.$$

Nepoznanice i dalje ostaju i vrijednosti sila i koordinate čvorova, $n_b + 3n_f$ nepoznanica, ali ih sada povezuje dodatnih n_b jednadžbi što olakšava rješavanje sustava jer su vrijednosti gustoća sila zadane te imaju ulogu konstantnog koeficijenta u jednadžbama ravnoteže. Također, prednost je što više nije potrebno pretpostaviti približne koordinate slobodnih čvorova kako bi mogli krenuti u nalaženje oblika.

Rješavanjem sustava se dobivaju koordinate slobodnih čvorova, nakon čega se mogu izračunati duljine štapova te sile u njima.

$$S_{\{i,j\}} = q_{\{i,j\}} l_{\{i,j\}}$$

Za međusobno jednake gustoće sila u svim štapovima rješenje sustava je mreža kod koje je zbroj kvadrata duljina štapova minimalan.

Svako rješenje sustava, bez obzira na odabranu vrijednost gustoće sila, predstavlja ravnotežnu konfiguraciju mreže kabela. Gustoću sila treba odabrati tako da konačni oblik mreže ispunjava konstrukcijske i arhitektonske zahtjeve.

4.1 Iteracijska primjena metode gustoća sila

Da bi se došlo do traženog i zadovoljavajućeg rješenja, nije dovoljno jednom provesti proračun. Kao i u ranijim metodama, potrebno je nizom iteracija doći do rješenja sustava, a to je mreža čiji oblik zadovoljava postavljene zahtjeve.

U *k*-tom koraku postupka iteracije, gustoća sile u štapu {*i,j*} se računa prema izrazu

$$q_{\{i,j\}}^{(k)} = q_{\{i,j\}}^{(k-1)} \frac{\bar{S}}{S_{\{i,j\}}^{(k-1)}}$$

$q_{\{i,j\}}^{(k-1)}$ je gustoća sile u prethodnom koraku, $S_{\{i,j\}}^{(k-1)}$ dobivena vrijednost sile u štapu u prethodnom koraku, a $\bar{S}$ tražena vrijednost sile.

Izraz je proizašao iz definicije gustoće sile iz kojeg je vidljivo da je gustoća sile proporcionalna vrijednosti sile. Ako je u dva koraka iteracije duljina štapa ne promijeni, omjer vrijednosti sila je jednak omjeru gustoća sila. Budući da se promjenom gustoća sila mijenjaju duljine štapova, potrebno se nizom iteracija postupno približili traženoj vrijednosti.

Gore navedeni izrazi primjenjivi su u slučaju mreže gdje su svi rubni čvorovi zapravo i ležajni. Za mreže koje imaju rubne kabele, izraze i postupak je potrebno modificirati zbog potrebe za zadavanjem različitih sila u različitim kabelima, kao i ograničavanjem duljine pojedinih štapova.

U proširenom postupku, gustoća sile u štapu {*i,j*} u *k*-tom koraku se računa prema izrazu

$$q_{\{i,j\}}^{(k)} = q_{\{i,j\}}^{(k-1)} \frac{\bar{S}_{\{i,j\}}}{S_{\{i,j\}}^{(k-1)}}$$

Za oblikovanje prirodne poopćene minimalne mreže kabela, sile u svim štapovima jednog kabela moraju biti jednake. U tom slučaju gustoća sile se može računati prema izrazu

$$q_{\{i,j\}}^{(k)} = \frac{\bar{S}_{\{i,j\}}}{l_{\{i,j\}}^{(k-1)}}$$

$l_{\{i,j\}}^{(k-1)}$ je duljina štapa iz prethodnog koraka.

Kod potrebe za ograničavanjem duljine štapa, gustoća sile u njemu se računa prema izrazu

$$q_{\{i,j\}}^{(k)} = \frac{S_{\{i,j\}}^{(k-1)}}{\bar{l}_{\{i,j\}}}$$

$S_{\{i,j\}}^{(k-1)}$ je vrijednost sile u štapu iz prethodnog koraka.

Izraz je također proizašao iz definicije gustoće sile gdje je vidljivo i da je gustoća sile obrnuto proporcionalna duljini štapa. Dakle ako se vrijednost sile u štapu ne mijenja dolazimo do sljedećeg izraza

$$q_{\{i,j\}}^{(k)} = q_{\{i,j\}}^{(k-1)} \frac{l_{\{i,j\}}^{(k-1)}}{\bar{l}_{\{i,j\}}}$$

Međutim, promjenom gustoća sila, promijenit će se i vrijednosti sila pa je potrebno nizom iteracija postupno se približiti traženoj vrijednosti.

U svakom koraku iteracijskog postupka, gustoća sila se računa na temelju uvjeta koji su postavljeni i rezultata dobivenih u prethodnom koraku. Postupak se prekida kada apsolutna vrijednost najveće razlike između izračunatih i traženih vrijednosti, bilo sile u štapu ili duljine štapa, bude manja od $1 \cdot 10^{-5}$ [6].

Prednosti iteracijske ili višekoračne metode gustoća sila u odnosu na ostale ranije primjenjivane iteracijske postupke su to da nije potrebno prije prvog koraka pretpostaviti koordinate slobodnih čvorova, postupak je većinom prihvatljivo brz te da u svakom koraku iteraciju možemo zaustaviti i ako nismo dosegli zadovoljavajuću točnost ili se ona ne može doseći jer unatoč tomu, imamo mrežu u ravnoteži.

5 PRIMJERI

Postupak nalaženja oblika mreža kabela u primjerima provodimo u računalnom programu FALCON (*Form-finding Algorithm for Linear Constrained Optimisation of Networks*).

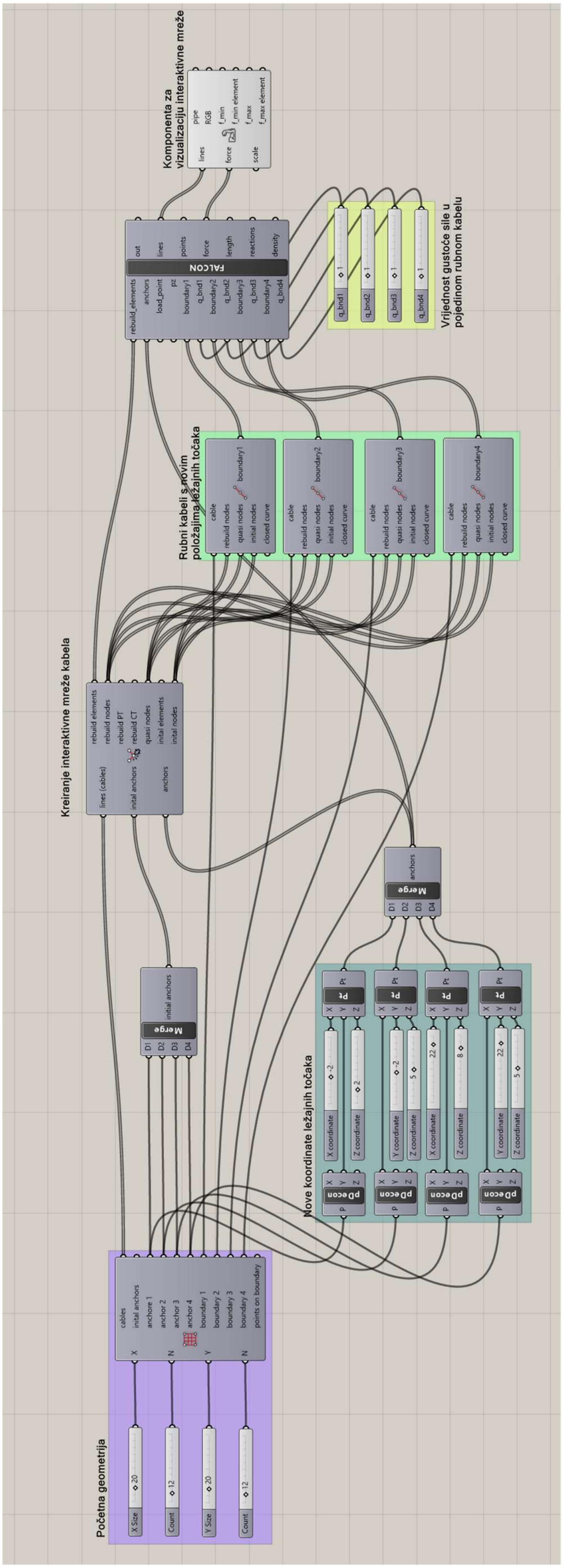
Nalaženje oblika temelji se na iteracijskoj primjeni metode gustoća sila. Uporaba je interaktivna pomoću programa za vizualno programiranje *Grasshopper* gdje korisnik može mijenjati rubne uvijete modela, vrijednosti gustoća sila i sl., a u realnom vremenu vidjeti kako svaka promjena utječe na oblik konstrukcije u CAD alatu *Rhinoceros* [7].

Komponente koje nudi FALCON su podijeljene u četiri grupe *geometrija*, kojima se postavlja osnovna geometrija mreže (broj kabela, način oslanjanja i sl.), *mreža*, kojima se postavljena geometrija pretvara u interaktivnu mrežu kabela, *pronalazak oblika*, jedan korak metode gustoća sila i *vizualizacija* koje prikazuju rješenja u vidu različitih boja za različite iznose sila u kabelima u mreži, iznose reakcija i sl.

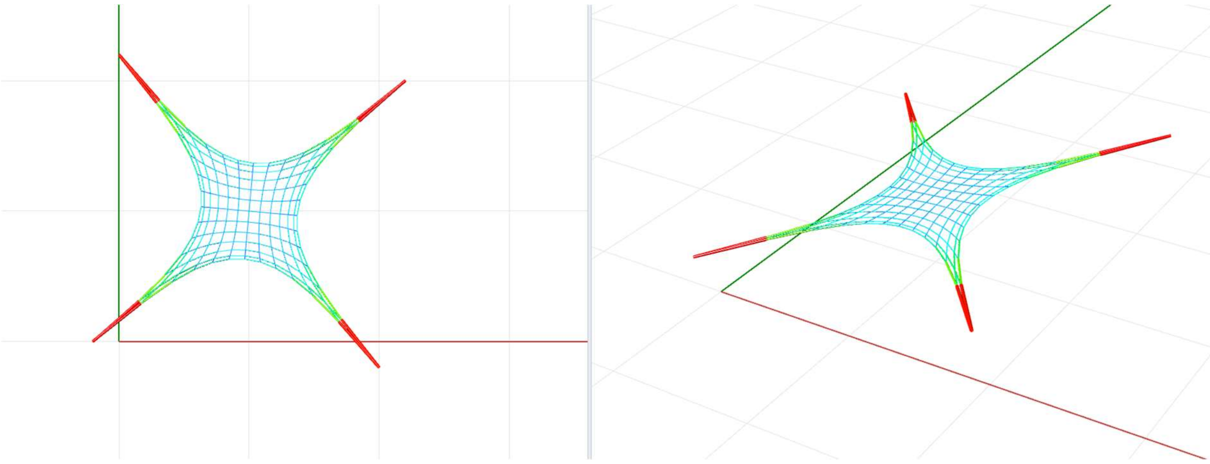
5.1 Primjer 1

U ovom primjeru prikazan je postupak pronalaženja oblika jednostavne mreže kabela. Odabrana je mreža s rubnim kabelima (eng. *Net with edge cables*), tlocrtna površina te broj kabela se reguliraju klizačima s lijeve strane (ulazni podaci). Izlazni podaci koje koristimo dalje su lista svih kabela (eng. *cables*), ležajni čvorovi (eng. *anchor 1 – 4*) te rubni kabeli (eng. *boundary 1 – 4)*. Ležajnim čvorovima zadajemo nove koordinate kako bi iz ravninske mreže mogli doći do prostorne. Komponentom *„interactive net"* od kabela se stvara interaktivna mreža elemenata koja uz komponentu *„interactive elements on cable"* kojom se rubni kabeli prilagođavaju novim koordinatama ležajnih čvorova dobivamo ulazne podatke za nalaženje oblika. Početna gustoća sila svih kabela je zadana i iznosi q = 1. Vizualizacija rezultata je omogućena komponentom *„force visualisation"*.

Programski kod u programu *Grasshopper* je vidjiv na slici 7., dok na slici 8. vidimo izgled konstrukcije sa zadanom gustoćom sila q = 1 u tlocrtnom prikazu lijevo te desno u 3D-u.



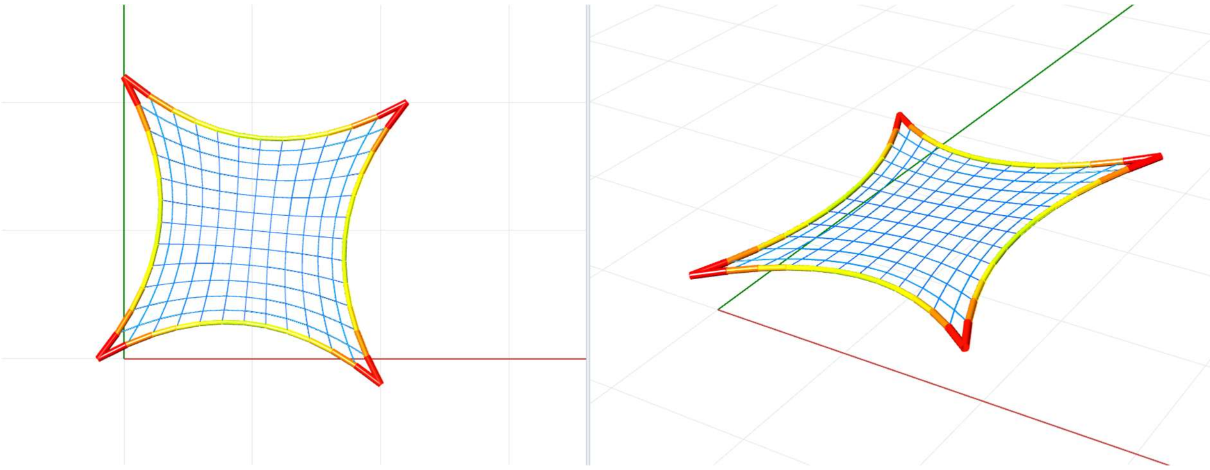
Slika 7: Programski kod za primjer 1



Slika 8: Izgled konstrukcije s q = 1

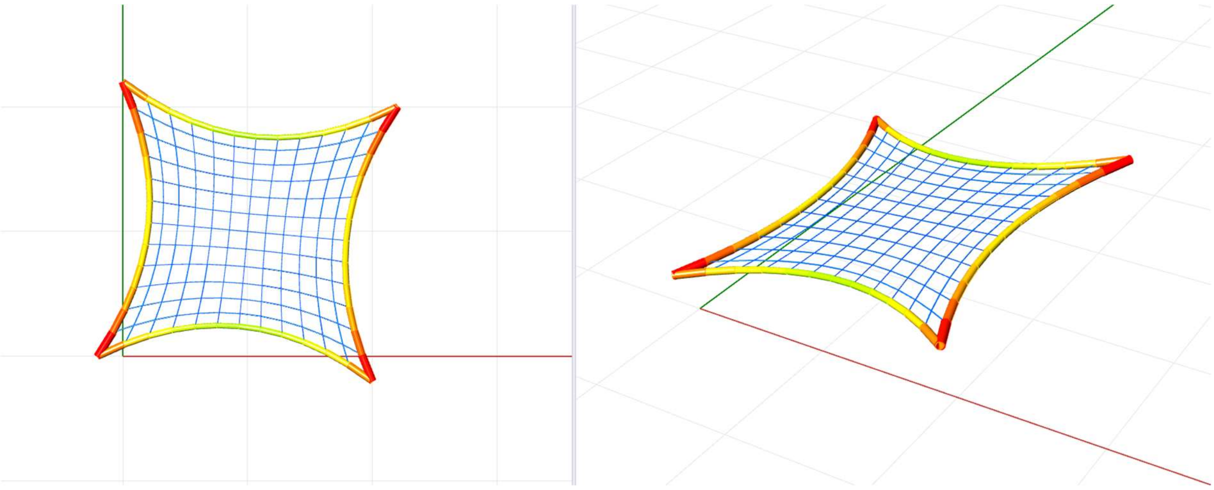
Dobivena mreža je u ravnoteži, a dalje se može modificirati kako bi zadovoljila sve potrebne kriterije.

U idućoj iteraciji gustoća sila povećana je na q = 5 (slika 9.). Usporedbom slike 8. i slike 9. može se zaključiti da povećana vrijednost gustoće sila daje prihvatljiviji (prirodniji) oblik mreže.

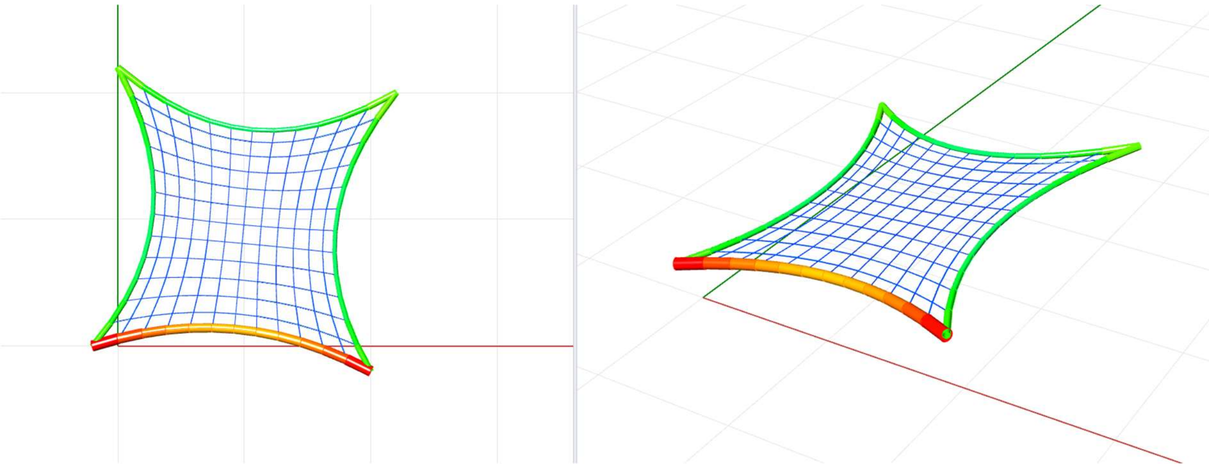


Slika 9: Izgled konstrukcije s q = 5

U oba slučaju imamo zadane iste vrijednosti gustoće sila u svim rubnim kabelima. Na idućim slikama možemo vidjeti izgled konstrukcije kada se u dva nasuprotna kabela gustoća sila promjeni za 1 (slika 10.) te što se dogodi ukoliko jednom kabelu zadamo duplo veću gustoću sila (slika 11.)



Slika 10: Različite vrijednosti gustoća sila u različitim kabelima



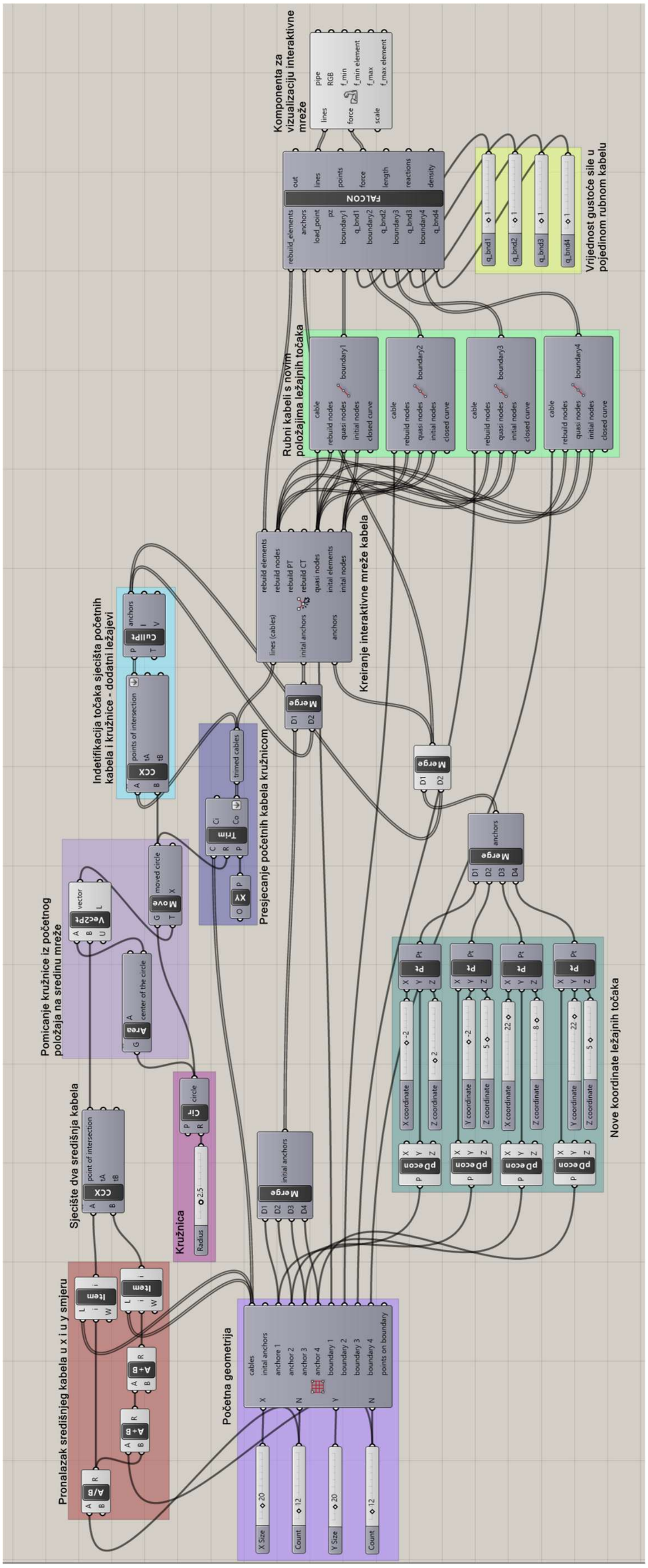
Slika 11: Jedan kabel s duplom većom zadanom gustoćom sila

Usporedbom svih slika možemo zaključiti da vrijednost gustoće sila u kabelima igra značajnu ulogu u izgledu mreže, iznosu sile u štapovima kabela te duljini pojedinih kabela.

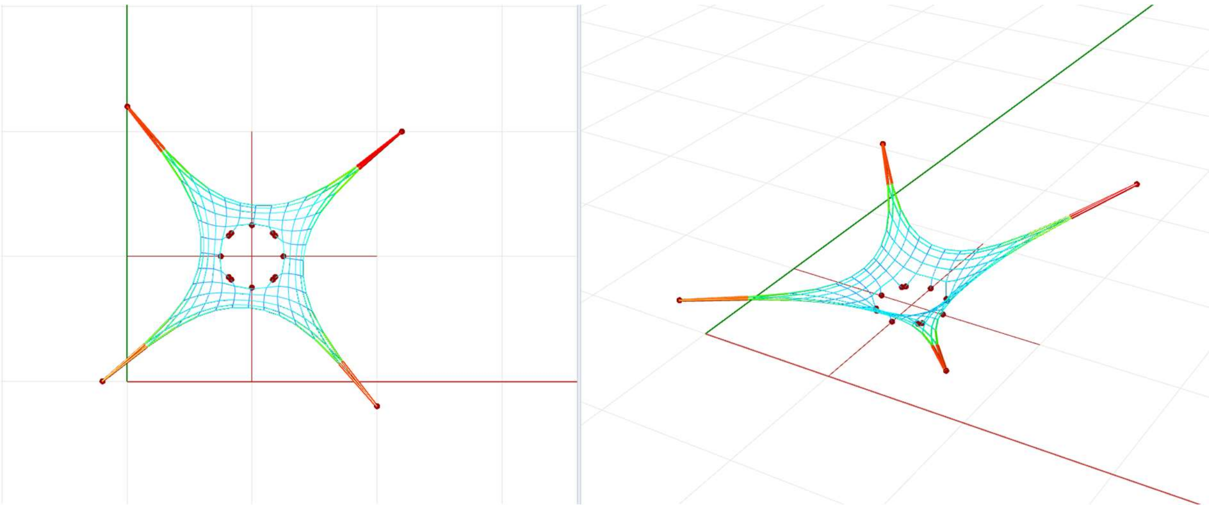
5.2 Primjer 2

U drugom primjeru korištena je ista osnovna geometrija mreže kao i u primjeru 1, ostavljena je ista tlocrtna površina, broj kabela kao i koordinate četiri ležajna čvora na krajevima rubnih kabela.

U ovom primjeru je konačna geometrija bitno izmijenjena dodavanjem rupe u središte mreže. U sjecište središnjih kabela dodana je kružnica polumjera 2.5. Dodavanje kružnice je popraćeno „rezanjem" unutarnjih kabela u točkama sjecišta s dodanom kružnicom čime je mreža dobila novih 12 ležajnih čvorova. Novi ležajni čvorovi ostaju na „tlu" odnosno z koordinata im je z = 0. Na slici 12. prikazan je programski kod za ovaj primjer, a na slici 13. vidimo izgled konstrukcije kada je zadana gustoća sila q = 1.

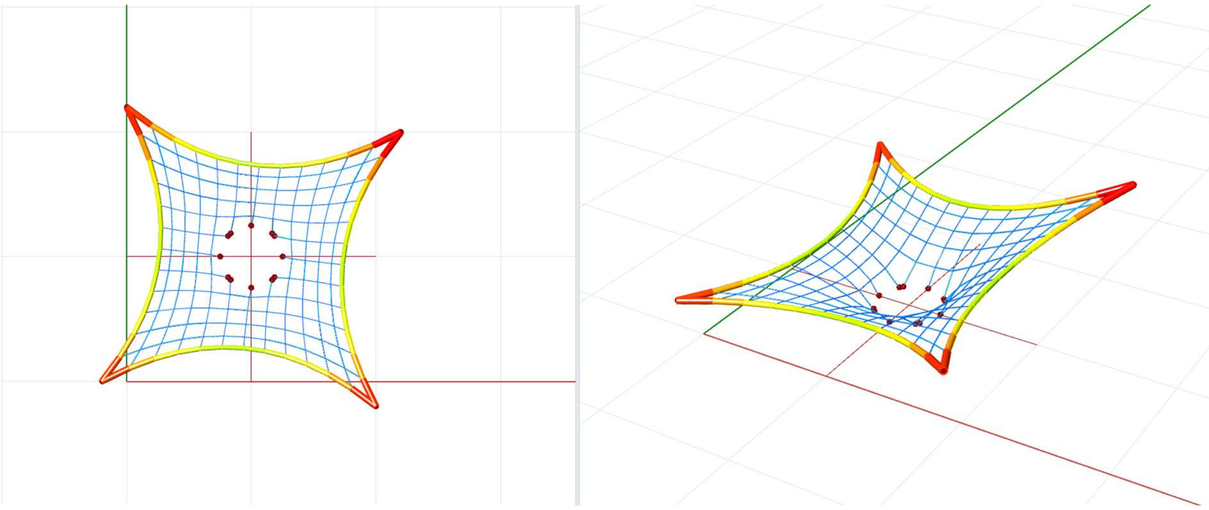


Slika 12: Programski kod za primjer 2



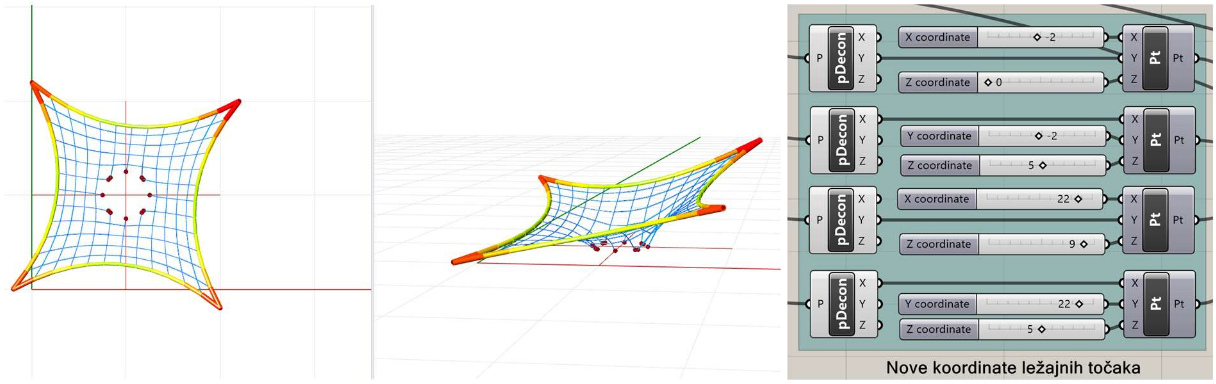
Slika 13: Izgled konstrukcije s q = 1

Da bi dobili “prirodniji” izgled mreže, kao u primjeru 1, povećat ćemo gustoću sila u rubnim kabelima na q = 5 (slika 14.).

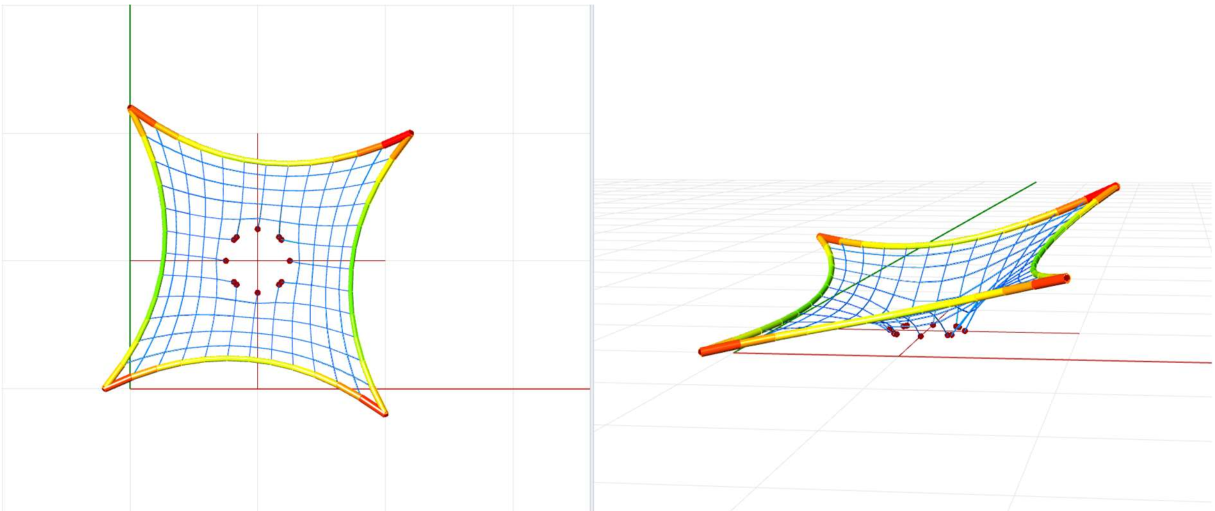


Slika 14: Izgled konstrukcije s q = 5

Promjene u geometriji mreže nastaju i uslijed promjena rubnih uvjeta, primjerice na slici 15. lijevo možemo vidjeti što se događa kada se promijene koordinate ležajnih čvorova na krajevima rubnih kabela, a desno vide se promjene u programskom kodu vezano za koordinate ležajnih čvorova. Na slici 16. vidimo promjene u napetosti kabela ukoliko se u dva nasuprotna kabela poveća gustoća sila na q = 6.



Slika 15: Izgled konstrukcije kod promjene koordinata četiri ležajna čvora (lijevo) i nove koordinate ležajnih čvorova (desno



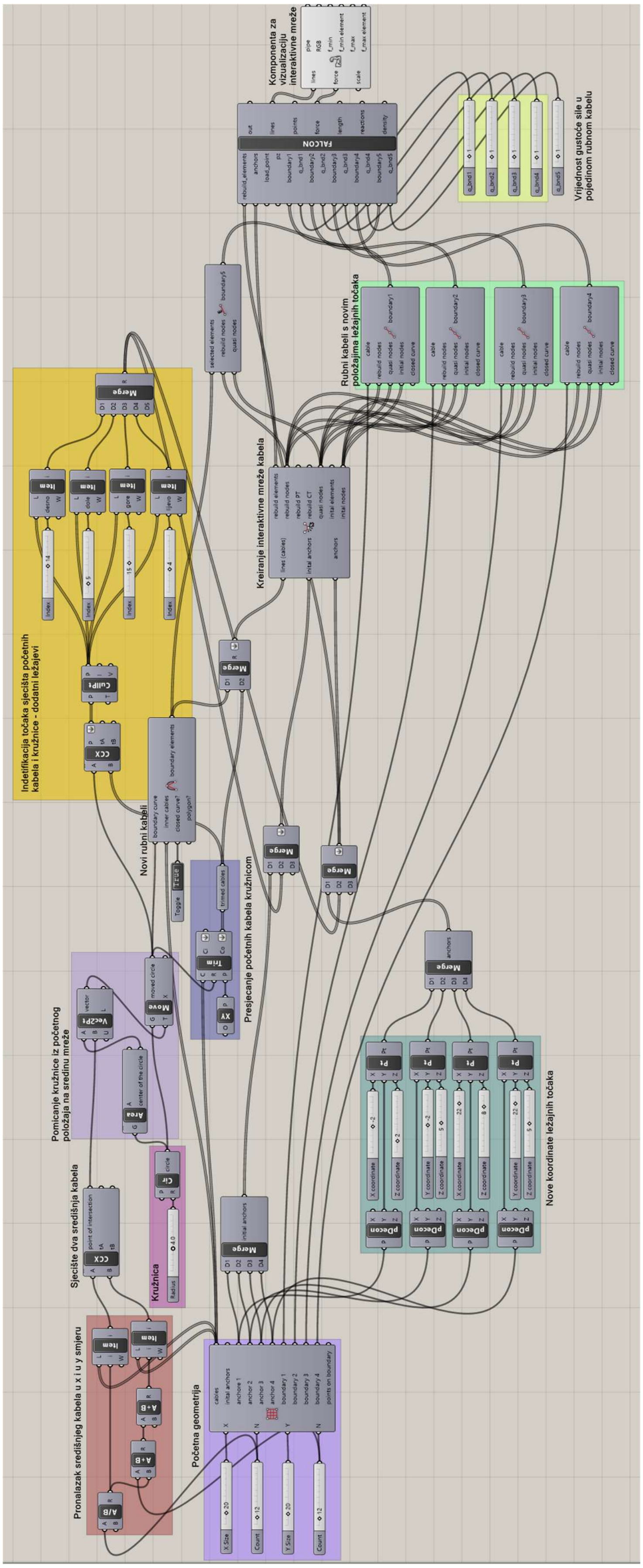
Slika 16: Promjena napetosti rubnih kabela kod promjene zadane gustoće sila

5.3 Primjer 3

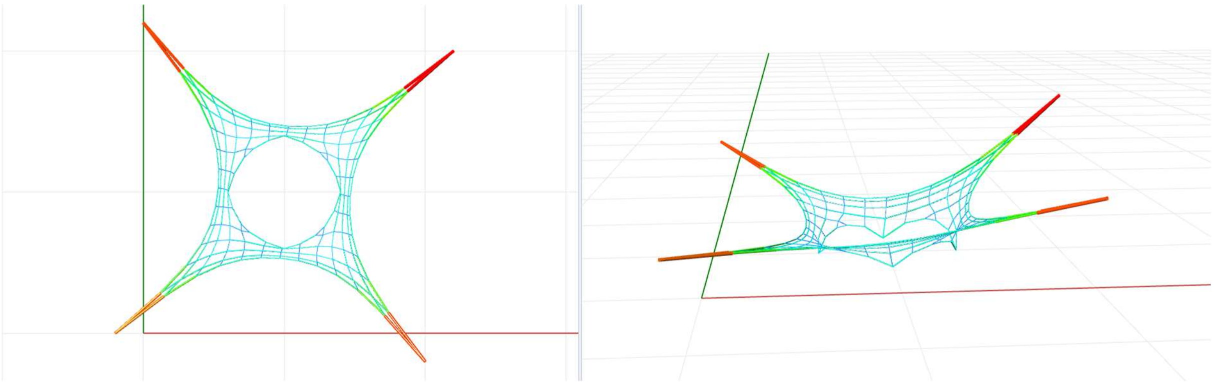
U trećem primjeru preuzimamo osnovnu geometriju iz primjera 2, no uvodimo razliku u rubnim uvjetima. Ostavljamo rupu u sredini mreže, ali rubovi više nisu svi ležajni čvorovi nego uvodimo rubne kabele, a ostavljamo 4 ležajna čvora na krajevima novih rubnih kabela.

Na slici 17. vidimo promjene u programskom kodu. Potrebno je bilo identificirati rubne kabele funkcijom *„boundary element"* koja dijeli krivulju (u našem primjeru kružnicu) na elemente prema unutarnjim kabelima mreže. Zatim je trebalo iz liste prethodnih 12 rubnih i ujedno ležajnih čvorova odabrati četiri koja želimo da ostanu ležajni.

Slika 18 prikazuje izgled konstrukcije nakon promjene u rubnim uvjetima, uz gustoću sila q = 1.

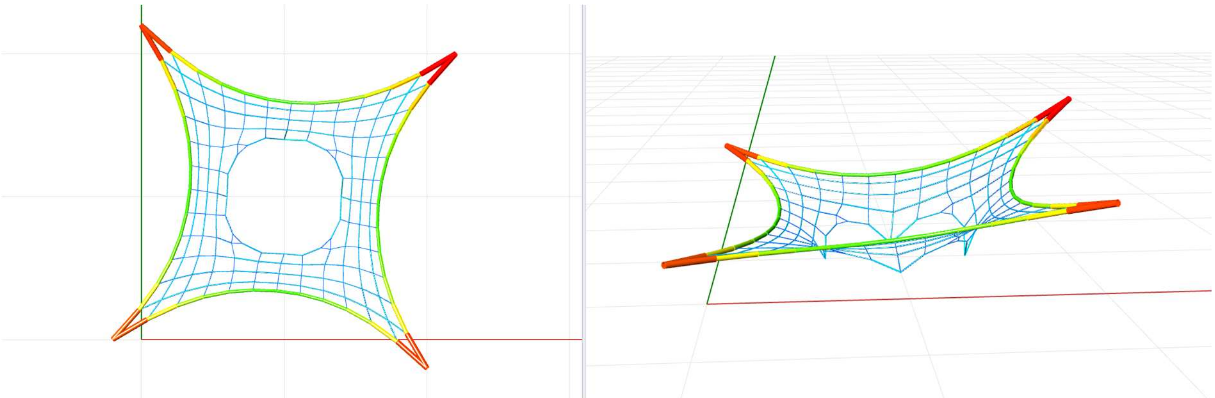


Slika 17: Programski kod za primjer 3



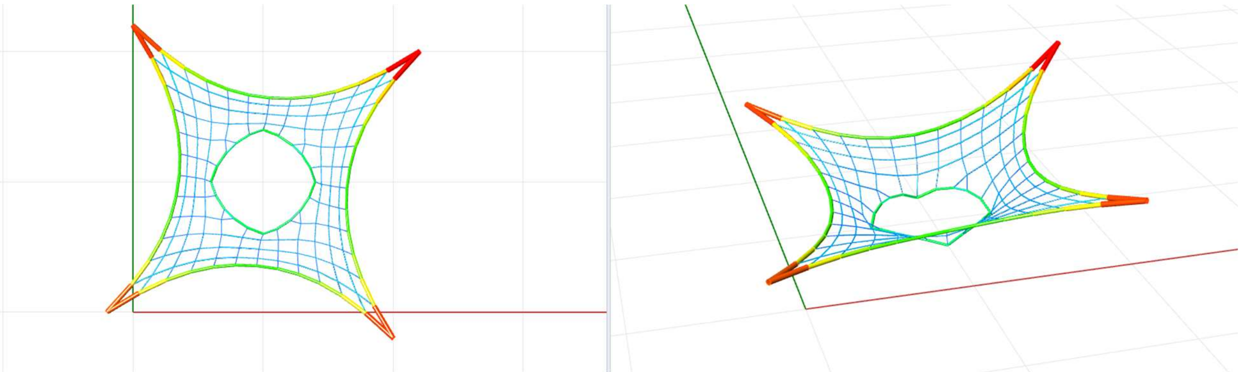
Slika 18: Izgled konstrukcije s q = 1 u svim rubnim kabelima

Prvu iteraciju radimo promjenom gustoće sile vanjskih rubnih kabela na q = 3 (slika 19.)



Slika 19: Iteracija 1

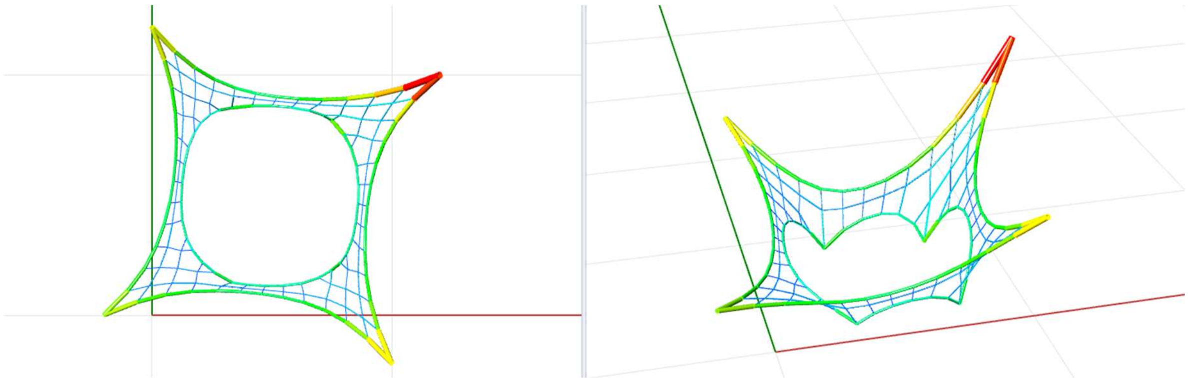
Izgled konstrukcije ako je gustoća sila u svim rubnim kabelima jednaka q = 3.



Slika 20: Iteracija 2

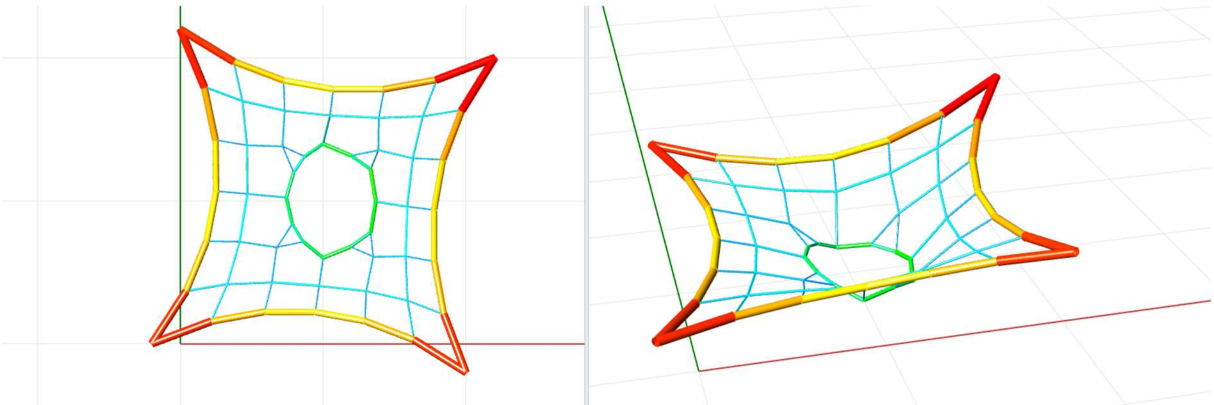
Usporedbom slika, uočavamo značajne razlike u izgledu mreže. Velika razlika se primijeti u izgledu rupe, gdje u tlocrtnom prikazu imamo, u prvom primjeru najsličniji izgled kružnici, dok u trećem primjeru dolazimo do izgleda četverokuta. Razlog tomu je što povećanjem gustoće sile dolazi do povećanja sile u štapovima kabela i do skraćenja njegove dužine.

Iteracije se mogu provoditi i promjenom izvorne geometrije u smislu promjene tlocrtne površine, primjerice na slici 21. vidimo izgled mreže ukoliko tlocrtnu površinu ekstremno smanjimo da dobivamo izrazito deformirani izgled konstrukcije (gustoća sila, kao i polumjer kružnice ostaju isti)



Slika 21: Smanjenje tlocrtne površine

Drugi primjer promjene izvorne geometrije je promjena gustoće kabela, pa tako umjesto 13 kabela u x i y smjeru, brojku možemo smanjiti na primjerice 7 (slika 22.). Kao u prethodnom slučaju, također dobivamo drugačiju sliku izgleda konstrukcije, koja u ovom slučaju izgleda "prazno".



Slika 22: Smanjenje gustoće kabela

6 ZAKLJUČAK

Prednapete mreže kabela su gipke vlačne konstrukcije, a začetnikom njihove uporabe se može smatrati njemački arhitekt Frei Otto.

Uže kao konstruktivni element opterećenja prenosi isključivo pojavom uravnotežujućih vlačnih sila. Užad se prednapinje i slaže u mreže kako bi se osigurala geometrijska krutost i pojava isključivo vlačnih sila pri bilo kojoj kombinaciji opterećenja. Konstrukcija svojim oblikom treba zadovoljiti konstrukcijske, funkcionalne i estetske zahtjeve.

Proces projektiranja prednapetih konstrukcija od užadi započinje nalaženjem oblika. Za nalaženje oblika prvotno su se koristili fizički modeli, no zbog velikih nedostataka ubrzo su ih zamijenili numerički modeli. Za potrebe numeričkog modela zanemarujemo vlastitu težinu kabela, smatramo ih potpuno savitljivima te zapravo mrežu promatramo kao prostorni sustav zglobno spojenih štapova.

Nepoznanice kod nalaženja oblika su koordinate slobodnih čvorova, duljine štapova te sile u štapovima. Raspisujući jednadžbe ravnoteže, dobivamo sustav nelinearnih jednadžbi koji je potrebno rješavati numeričkim metodama. Numeričke metode su zahtijevale puno iteracija, kao i početnu pretpostavku koordinata čvorova, što zna odvesti proračun u skroz krivom smjeru. U cilju lakšeg proračuna, sedamdesetih godina prošlog stoljeća, razvijena je metoda gustoća sila. U metodi gustoća sila je omjer veličine sile i duljine štapa zamijenjen je oznakom q, nazvanom gustoća sila. Uvođenjem te zamjene nelinearne jednadžbe su postale linearne i postupak je znatno olakšan. Metoda gustoća sila se mora primjenjivati iterativno, postupnim približavanjem traženim vrijednostima do zadovoljavajuće točnosti. Prednosti metode gustoća sila u odnosu na ostale iterativne postupke je svakako to što ne traži početnu pretpostavku, brže se dolazi do rješenja, a također u svakom koraku iteracije mreža je u ravnoteži što omogućava da se postupak prekine u bilo kojem koraku.

Postupak nalaženja oblika gipkih konstrukcija u primjerima je proveden primjenom računalnog programa FALCON. Program se temelji na iteracijskoj primjeni metode gustoća sila u programu za vizualno programiranje uz vizualizacije svakog koraka iteracije u realnom vremenu. Kroz primjere je pokazano kako promjena gustoće sila u kabelima utječe na promjenu veličine sile i dužine kabela, a samim time i na konačni izgled mreže. Također je pokazano kako se mijenja konačni izgled mreže ovisno o tome koliko ima ležajnih točaka, gdje su smještene te ima li mreža rubne kabele ili ne. Promjene, koje mogu biti vrlo značajne, događaju se i uz promjene početne geometrije mreže u smislu tlocrtnog područja nad kojim se rasprostire kao i gustoće kabela.

POPIS LITERATURE

[1] Gidak, P., Šamec, E., Fresl, K., Vukadin, J.: Traženje oblika vlačnih konstrukcija u nastavi na Građevinskom fakultetu, *GRAĐEVINAR, 73* (2021) 4, pp. 349-363, doi: https://doi.org/10.14256/JCE.3168.2021 [Pristupljeno: 11.09.2024.]

[2] H. Berger: *Light Structures, Structures of Light. The Art and Engineering of Ten sile Architecture*, Birkhäuser, Basel, 1996

[3] Fresl, K. *Građevna statika 2.*: *Prednapete gipke konstrukcije od užadi kao uvod u geometrijsku nelinearnost.* Zagreb: Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet; 2017. Dostupno: http://grad.hr/nastava/gs/gs2/index.html [Pristupljeno: 11.09.2024.]

[4] Leksikografski zavod Miroslav Krleža. *Portal Znanja Leksikografskog zavoda Miroslav Krleža: Tehnički leksikon*. Dostupno: https://tehnicki.lzmk.hr/clanak/prednapinjanje [Pristupljeno: 13.02.2025.]

[5] Fresl, K. *Nelinearna statika štapnih konstrukcija.*: *Prednapeti vlačni i vlačno-tlačni sistemi zglobnih štapova.* Zagreb: Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet; 2023. Dostupno: http://grad.hr/nastava/gs/nls/index.html [Pristupljeno: 11.09.2024.]

[6] Fresl, K., Gidak, P., Vrančić, R. *.:* Poopćene minimalne mreže u oblikovanju prednapetih konstrukcija od užadi *, GRAĐEVINAR, 65 (2013)* 8, pp. 707-720, doi*:* https://doi.org/10.14256/JCE.902.2013 [Pristupljeno: 11.09.2024.]

[7] Šamec, E., Fresl, K..: *FALCON: Form-finding Algorithm for Linear Condtrained Optimisation of Networks.* Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet; 2021. Dostupno: https://master.grad.hr/nastava/gs/falcon/falcon.html [Pristupljeno: 08.07.2024.]

POPIS SLIKA