

Proračun uzdužno opterećenih konstrukcijskih elemenata

Vučemilović, Ivan

Undergraduate thesis / Završni rad

2025

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:684022>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-14**

Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Ivan Vučemilović

**PRORAČUN UZDUŽNO OPTEREĆENIH
KONSTRUKCIJSKIH ELEMENATA**

ZAVRŠNI ISPIT

Zagreb, 2025.



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Ivan Vučemilović

**PRORAČUN UZDUŽNO OPTEREĆENIH
KONSTRUKCIJSKIH ELEMENATA**

ZAVRŠNI ISPIT

Doc. dr. sc. Marina Frančić Smrkić

Zagreb, 2025.



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Ivan Vučemilović

CALCULATION OF AXIALLY LOADED STRUCTURAL ELEMENTS

FINAL EXAM

Doc. dr. sc. Marina Frančić Smrkić

Zagreb, 2025.



OBRAZAC 3

POTVRDA O POZITIVNOJ OCJENI PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Student/ica :

(Ime i prezime)

(JMBAG)

zadovoljio/la je na pisanom dijelu završnog ispita pod naslovom:

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

(Naslov teme završnog ispita na engleskom jeziku)

i predlaže se provođenje daljnjeg postupka u skladu s Pravilnikom o završnom ispitu i diplomskom radu Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta.

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu znanstvenog projekta: (upisati ako je primjenjivo)

(Naziv projekta, šifra projekta, voditelj projekta)

Pisani dio završnog ispita izrađen je u sklopu stručne prakse na Fakultetu: (upisati ako je primjenjivo)

(Ime poslodavca, datum početka i kraja stručne prakse)

Datum:

Mentor:

Potpis mentora:

Komentor:



OBRAZAC 5

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja :

(Ime i prezime, JMBAG)

student/ica Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta ovim putem izjavljujem da je moj pisani dio završnog ispita pod naslovom:

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

izvorni rezultat mojega rada te da se u izradi istoga nisam koristio/la drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

Datum:

Potpis:



OBRAZAC 6

IZJAVA O ODOBRENJU ZA POHRANU I OBJAVU PISANOG DIJELA ZAVRŠNOG ISPITA

Ja :

(Ime i prezime, OIB)

ovom izjavom potvrđujem da sam autor/ica predanog pisanog dijela završnog ispita i da sadržaj predane elektroničke datoteke u potpunosti odgovara sadržaju dovršenog i obranjenog pisanog dijela završnog ispita pod naslovom:

(Naslov teme završnog ispita na hrvatskom jeziku)

koji je izrađen na sveučilišnom prijediplomskom studiju Građevinarstvo Sveučilišta u Zagrebu Građevinskog fakulteta pod mentorstvom:

(Ime i prezime mentora)

i obranjen dana:

(Datum obrane)

Suglasan/suglasna sam da pisani dio završnog ispita bude javno dostupan, te da se trajno pohrani u digitalnom repozitoriju Građevinskog fakulteta, repozitoriju Sveučilišta u Zagrebu te nacionalnom repozitoriju.

Datum:

Potpis:

SAŽETAK

U radu je obrađena tema uzdužno opterećenih konstruktivnih elemenata. U uvodnom poglavlju opisan je štap kao konstruktivni element. U idućim je poglavljima analiziran slučaj štapa opterećenog koncentriranom silom u uzdužnom smjeru, pripadne deformacije i naprezanja te utjecaj promjene temperature na štapne elemente. Analiziran je problem izvijanja tlačno opterećenih štapnih elemenata pri proračunu graničnog stanja stabilnosti. Riješena su tri praktična računski primjera statički određenih i neodređenih štapnih sustava.

Ključne riječi: štap, uzdužno, opterećenje, naprezanje, deformacije, izvijanje

SUMMARY

The thesis deals with the topic of axially loaded structural elements. The introductory chapter describes the rod as a structural element. In the following chapters, the case of a rod loaded with a concentrated force in the longitudinal direction, the corresponding strains and stresses as well as the influence of temperature changes on the rod elements are analyzed. The problem of buckling of compressively loaded rod elements when calculating the stability limit state was analyzed. Three practical examples for statically determinate and indeterminate rod systems were solved.

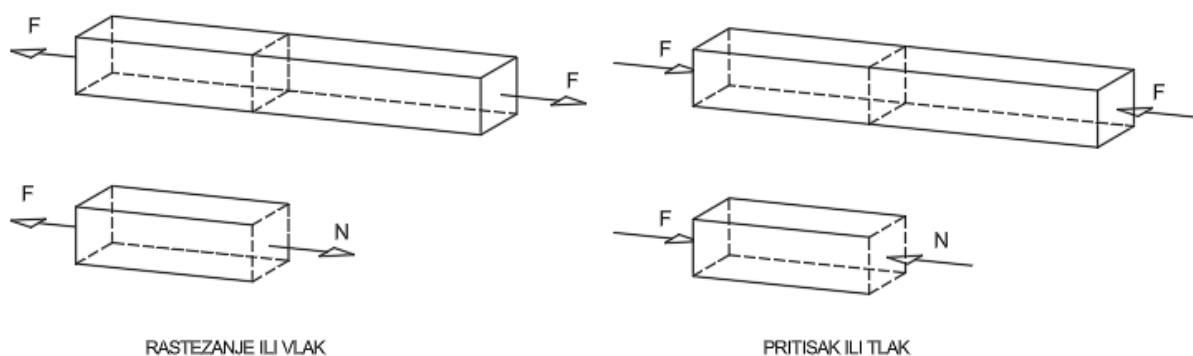
Key words: rod, axial, load, stress, strain, buckling

SADRŽAJ

SAŽETAK	i
SUMMARY	ii
SADRŽAJ	iii
1 UVOD	1
2 METODE I TEHNIKE RADA	3
3 AKSIJALNO OPTEREĆENJE ŠTAPA	4
3.1 Ravni štapovi.....	4
3.2 Utjecaj vlastite težine.....	6
3.3 Štapovi promjenjivog presjeka.....	7
3.4 Plan pomaka.....	8
3.5 Energija deformiranja.....	9
3.6 Toplinska naprezanja.....	11
3.7 Koncentracija naprezanja.....	12
3.8 Izvijanje.....	13
4 RAČUNSKI PRIMJERI	15
5 ZAKLJUČAK	28
POPIS LITERATURE	29
POPIS SLIKA	30

1 UVOD

Svaka konstrukcija sačinjena je od konstrukcijskih elemenata. Konstrukcijski elementi podvrgnuti su različitim vrstama opterećenja. Razlikuju se statička i dinamička opterećenja prema ovisnosti o tome ostaju li konstantna ili se mijenjaju s vremenom [1]. Sile, momenti sila i spregovi sila statičke su veličine koje uzrokuju gibanja nekog tijela na različite načine [2]. Kod sila se razlikuju: unutarnje sile, koje postoje uvijek unutar tijela i zahvaljujući kojima tijelo ima određen oblik, te vanjske sile, koje djeluju na tijelo, a uzrokovane su djelovanjem drugih tijela [3]. Načini djelovanja vanjskog opterećenja na tijelo dijele se na: osnovne oblike vanjskog opterećenja i složena opterećenja [2]. Složena opterećenja, koja nastupaju kombinacijom dva, tri ili više osnovnih oblika vanjskog opterećenja, vrlo su čest slučaj u praksi [2,3]. Osnovni su oblici vanjskog opterećenja: aksijalno opterećenje, smicanje (odrez), uvijanje (torzija) i savijanje [2,3]. Ovaj rad koncentriran je na analizu slučaja aksijalnog (uzdužnog) opterećenja. Ukoliko se vanjske sile svode na sile usmjerene uzduž osi, odnosno linije koja spaja težišnice poprečnih presjeka elementa, tako da u poprečnom presjeku djeluje samo uzdužna sila N , a sve su ostale komponente unutarnjih sila jednake nuli, tada je element opterećen aksijalno (uzdužno ili osno) [3,4]. Konstrukcijski elementi mogu se klasificirati i prema svojem geometrijskom obliku pa se tako, među elementima povezanim s aksijalnim opterećenjem, razlikuju: a) šipka ili štap: konstrukcijski element čija je duljina velika u usporedbi s njegovom poprečnom dimenzijom presjeka i koji može prenijeti tlačne i vlačne sile u smjeru svoje osi, b) kabel ili uža: konstrukcijski element čija je duljina, kao i kod štapa, velika u usporedbi s njegovom poprečnom dimenzijom presjeka, ali koji može prenijeti samo vlačne sile u smjeru svoje osi, c) zavojna opruga: konstrukcijski element izrađen savijanjem po zavojnici [5]. Među njima, najčešći i najjednostavniji tip je ravni štap ili šipka, a neki od primjera aksijalno opterećenih štapova su: rešetkasti elementi, stupovi u konstrukcijama i slično [1]. Prikazani su različiti slučajevi za ravni aksijalno opterećeni štap prerezan duž proizvoljno odabranog poprečnog presjeka.



Slika 1: Ravni aksijalno opterećeni štap

Rastezanje ili vlak je slučaj opterećenja štapa u kojem je uzdužna sila N usmjerena u smjeru vanjske normale ($N > 0$), dok je pritisak ili tlak slučaj opterećenja štapa u kojem je uzdužna sila N usmjerena suprotno od smjera vanjske normale ($N < 0$), pri čemu je predznak sile N jedina razlika između rastezanja i pritiska [3]. Glavne karakteristike deformiranja tijela pri djelovanju sile u aksijalnoj osi su promjena oblika i volumena tijela, pri čemu se nastala deformacija naziva produljenje ili skraćenje, a naprezanja koja se javljaju u poprečnom presjeku nazivaju se normalna naprezanja [2]. „Pri projektiranju konstrukcijskih elemenata, kao i konstrukcije u cijelosti, potrebno je osigurati njezinu čvrstoću, krutost i stabilnost kako bi time bila osigurana i njezina funkcionalnost“ [2]. Zbog toga je važno poznavati različite vrste uzročnika neželjenih pojava i utjecaj koji oni imaju na konstrukcijske elemente. Na taj način se ostvaruju uvjeti za razumno projektiranje konstrukcijskih elemenata kojim se postiže određena sigurnost da neće doći do loma konstrukcije. Aksijalno opterećenje nekog elementa može biti uzrokovano koncentriranim silama, vlastitom težinom, kontinuiranim opterećenjem, temperaturnim promjenama i slično [2]. Neki osnovni i važniji primjeri djelovanja uzročnika aksijalnog opterećenja pod različitim uvjetima razmatraju se u sljedećim poglavljima.

2 METODE I TEHNIKE RADA

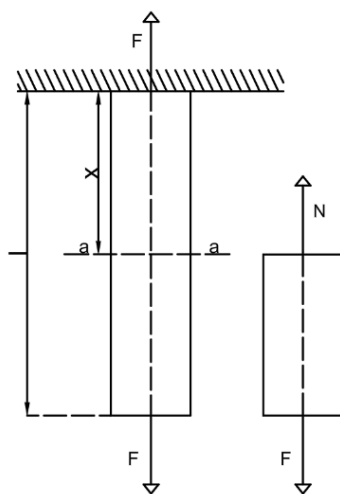
Pri analizi teme proračuna uzdužno opterećenih konstrukcijskih elemenata korišteni su podaci iz prikupljenih različitih publikacija mjerodavnog istraživačkog područja. Uspoređivanjem i razmatranjem različitih mjerenja, rezultata i spoznaja sistematizirana je raspodjela i međusobna ovisnost ključnih elemenata istraživanja. Pri izradi grafičkih prikaza pojedinih slučajeva koji su analizirani korišten je računalni program za tehničko crtanje: AutoCAD.

3 AKSIJALNO OPTEREĆENJE ŠTAPA

Kako bi se postigla funkcionalnost i sigurnost konstrukcije i njezinih elemenata tijekom eksploatacije, potrebno je pri projektiranju razmotriti sve slučajeve opterećenja. Analizirat ćemo zakone i ponašanja aksijalno opterećenih elemenata uslijed djelovanja koncentriranih sila (ravni štapovi i štapovi promjenjivog poprečnog presjeka) i vlastite težine. Također ćemo analizirati plan pomaka, energiju deformacija, učinke temperaturnih promjena i koncentracije naprezanja, te pojavu izvijanja tlačno opterećenih elemenata. Među vrijednostima kojima su izraženi rezultati analize pojedinih slučajeva, istaknut ćemo naprezanja i deformacije kao ključne faktore na temelju kojih se određuju karakteristike konstrukcijskih elemenata.

3.1 Ravni štapovi

Prikazan je ravni štap konstantnog poprečnog presjeka, duljine l , na jednom kraju opterećen uzdužnom silom F koja djeluje u težištu poprečnog presjeka, a na drugom kraju upet, slika 2 [3].



Slika 2: Ravni štap opterećen koncentriranom silom u težištu

Štap je prerezan duž proizvoljno odabranog poprečnog presjeka $a-a$, te se u njemu javljaju normalna naprezanja σ_x koja daju rezultantu unutarnjih sila: uzdužnu silu N , pa se iz uvjeta ravnoteže $\Sigma F_x = 0$ dobiva izraz:

$$\int_A \sigma_x \cdot dA = N = F \quad (1.1) \quad [3].$$

Slijedi da je uzdužna sila N jednaka vanjskoj sili F . Sila F djeluje tako da uzrokuje produljenje štapa u uzdužnom smjeru, odnosno suženje u poprečnom smjeru, ali presjeci štapa ostaju ravni

i okomiti na os štapa, što znači da je relativna deformacija uzdužnih vlakana u poprečnom presjeku: $\varepsilon_{xx} = \text{konst.}$ Uvrštavajući jednadžbu Hookeovog zakona za linijsko stanje naprezanja ($\sigma_x = \varepsilon_{xx} \cdot E$) u ranije izvedenu integralnu jednadžbu (1.1), dobiva se:

$$\sigma_x \cdot A = N = F \quad (1.2),$$

što znači da je naprezanje u slučaju rastezanja:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} \quad (1.3),$$

odnosno za slučaj pritiska:

$$\sigma_x = -\frac{F}{A} \quad (1.4),$$

pri čemu su normalna naprezanja štapa u poprečnom presjeku a-a raspodijeljena jednoliko [3]. „U praksi je redovno duljina štapa l mnogo veća od poprečne dimenzije h (50 do 100 puta ili više), pa se za izračunavanje produljenja štapa neravnomjernost naprezanja u blizini ruba može zanemariti, tj. možemo smatrati da su deformacije i naprezanja jednoliko raspodijeljeni po čitavoj duljini štapa“ [6]. Time se ostvaruje izjednačenje prave deformacije štapa i srednje duljinske deformacije štapa:

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon_{xsr} \quad (1.5),$$

te se pomoću Hookeova zakona za linijsko stanje naprezanja dobiva izraz:

$$\Delta l = \frac{\sigma_x}{E} \cdot l \quad (1.6),$$

a uzmemo li u obzir izraz (1.3), tada izraz (1.6) prelazi u:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{A \cdot E} \quad (1.7),$$

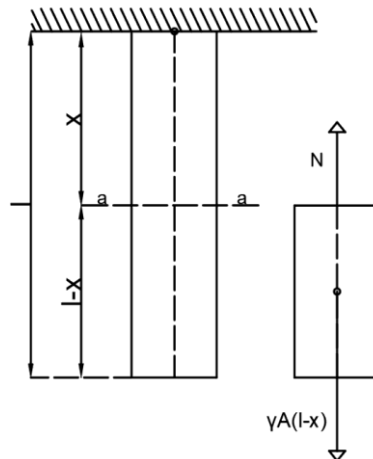
te predstavlja Hookeov zakon za rastezanje ravnoga štapa, pri čemu je produljenje Δl pozitivno s povećanjem duljine, a negativno sa smanjenjem duljine [3,6]. „Veličina AE poznata je kao aksijalna krutost“ [4]. Kada je štap promjenjive aksijalne krutosti AE , a opterećen nizom koncentriranih sila, tada izraz:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot l_i}{A_i \cdot E_i} \quad (1.8)$$

predstavlja apsolutnu deformaciju štapa [3]. Ukoliko se presjek aksijalno opterećenog štapa mijenja polagano, hipoteza ravnih poprečnih presjeka je i dalje prihvatljiva te vrijede izrazi kao i za ravni štap zbog toga što u tom slučaju raspodjela naprezanja po površini ne odstupa mnogo od jednolike raspodjele [3].

3.2 Utjecaj vlastite težine

„Vlastita težina materijala jest volumenska sila koja je rasprostranjena po čitavom volumenu tijela i razmjerna je masi tijela“ [3]. Prikazan je ravni štap konstantnog poprečnog presjeka, duljine l , specifične težine γ , na gornjem kraju obješen i opterećen vlastitom težinom, slika 3 [3].



Slika 3: Ravni štap opterećen vlastitom težinom

Štap je presječen ravninom a-a pa se iz ravnoteže donjega djela dobiva:

$$N = \gamma \cdot A \cdot (l - x) \quad (2.1),$$

odnosno naprezanja:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \gamma \cdot (l - x) \quad (2.2),$$

gdje se najveće naprezanje javlja u gornjem upetom presjeku. Prema tome, iz uvjeta:

$$\sigma_{xmax} = \gamma \cdot l \leq \sigma_{dop} \quad (2.3),$$

proizlazi izraz za dopuštenu duljinu štapa:

$$l_{dop} \leq \frac{\sigma_{dop}}{\gamma} \quad (2.4),$$

dok iz uvjeta:

$$\sigma_{xmax} = \gamma \cdot l = \sigma_M \quad (2.5),$$

proizlazi izraz za kritičnu duljinu štapa:

$$l_k = \frac{\sigma_M}{\gamma} \quad (2.6),$$

pri kojoj dolazi do pucanja štapa pod utjecajem vlastite težine.

Produljenje štapa uslijed nepomičnog gornjeg presjeka glasi:

$$\Delta l = \frac{\gamma \cdot l^2}{2E} \quad (2.7),$$

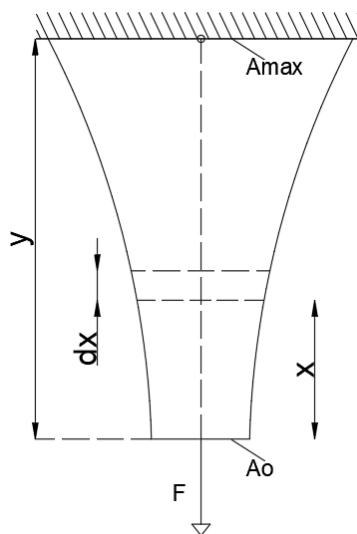
pa s obzirom na težinu štapa ($G = \gamma Al$) proizlazi izraz:

$$\Delta l = \frac{\gamma \cdot l^2}{2E} \cdot \frac{A}{A} = \frac{G \cdot l}{2 \cdot A \cdot E} \quad (2.8),$$

iz kojeg je vidljivo da je produljenje štapa uslijed djelovanja koncentriranog opterećenja na slobodnome kraju, kako je razmatrano u prethodnom poglavlju, dvaput veće od produljenja uslijed djelovanja vlastite težine [3].

3.3 Štapovi promjenjivog presjeka

Štap konstantnog poprečnog presjeka u kojem se zbog vlastite težine naprezanje po duljini mijenja linearno, a najveće naprezanje u opasnom presjeku mu je jednako dopuštenom, nije najbolje rješenje u smislu iskoristivosti materijala zbog činjenice da naprezanja u drugim presjecima štapa ostaju manja od dopuštenih [3]. Materijal se može bolje iskoristiti izvođenjem štapa čiji se presjek smanjuje prema slobodnom kraju te su tako u svim presjecima naprezanja ista i jednaka dopuštenim [3]. Takav štap kod kojeg su po cijeloj duljini svi poprečni presjeci jednako iskorišteni naziva se štapom jednake čvrstoće na rastezanje ili pritisak [3]. Međutim, važno je obratiti pozornost na to da promjena poprečnog presjeka ne bude nagla kako se ne bi pojavila koncentracija naprezanja, odnosno pojava mnogo većeg maksimalnog naprezanja od prosječnog naprezanja [6]. Više o koncentraciji naprezanja razmatrano je u jednom od slijedećih poglavlja. Prikazan je štap učvršćen na gornjem kraju, duljine l , i pod djelovanjem vlastite težine i sile F [3].



Slika 4: Štap promjenjivog presjeka

Na udaljenosti x od donjega presjeka izrezan je beskonačno mali element štapa duljine dx i težine:

$$dG = \gamma \cdot A_x \cdot dx \quad (3.1),$$

dok izraz:

$$A_0 = \frac{F}{\sigma_{dop}} \quad (3.2)$$

predstavlja potrebnu površinu donjega presjeka [3]. Primjenom uvjeta ravnoteže za taj element štapa te integriranjem jednadžbi dobiva se izraz:

$$A_x = A_0 \cdot e^{\frac{\gamma \cdot x}{\sigma_{dop}}} = \frac{F}{\sigma_{dop}} \cdot e^{\frac{\gamma \cdot x}{\sigma_{dop}}} \quad (3.3),$$

koji predstavlja zakon promjene površine poprečnog presjeka štapa jednake čvrstoće [3]. Primjenom uvjeta ravnoteže za čitav štap:

$$F + G = \sigma_{dop} \cdot A_{max} \quad (3.4),$$

dobiva se izraz:

$$G = \sigma_{dop} \cdot (A_{max} - A_0) \quad (3.5),$$

koji predstavlja vlastitu težinu štapa jednake čvrstoće. Štap jednake čvrstoće na pritisak razlikuje se od štapa jednake čvrstoće na rastezanje po tome što je kod njega donji presjek upet i ima najveću površinu, te se površina presjeka smanjuje eksponencijalno prema gornjem slobodnom kraju. Iako su oblici štapova jednake čvrstoće najekonomičnije rješenje, skupa i složena izrada vrlo često sprječava njihovu upotrebu, pa se u praksi obično koriste sastavljeni štapovi. To su štapovi stepenasta oblika sastavljeni od nekoliko prizmatičnih dijelova različitih presjeka tako da su na kraju svakog dijela naprezanja jednaka dopuštenim, a u svim ostalim presjecima manja od dopuštenih. Prema iskorištenju materijala sastavljeni štapovi bolje su rješenje od štapova konstantnog poprečnog presjeka, ali lošije nego štapovi jednake čvrstoće [3].

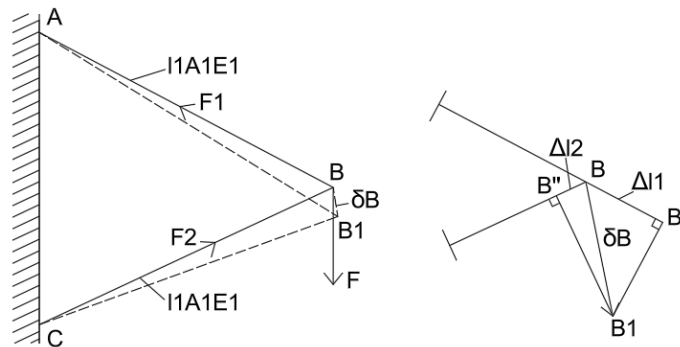
3.4 Plan pomaka

Ako vanjsko opterećenje djeluje u čvorovima kojima je dva ili više štapova spojeno kod konstrukcija sastavljenih od štapova, tada su štapovi aksijalno opterećeni te dolazi do njihovog produljenja ili skraćanja, ovisno o tome je li štap opterećen na rastezanje ili pritisak [3]. Deformacije štapova uzrokuju pomicanje čvorova, a njihovi pomaci mogu se odrediti preko geometrijskih odnosa [3]. Ako na konstrukciju sastavljenu od dva štapa djeluje sila F u čvoru B, kako je prikazano na slici 5, u štapovima će se pojaviti sile F_1 i F_2 koje izazivaju produljenje odnosno skraćanje štapova Δl_1 i Δl_2 [6]. Iz uvjeta ravnoteže točke B određuju se vrijednosti sila F_1 i F_2 , dok se pomoću Hookeovog zakona određuju produljenja odnosno skraćanja štapova:

$$\Delta l_1 = \frac{F_1 \cdot l_1}{A_1 \cdot E_1} \quad (4.1),$$

$$\Delta l_2 = \frac{F_2 \cdot l_2}{A_2 \cdot E_2} \quad (4.2) \quad [6].$$

Kako bi se odredio pomak točke B, primijenjena je zamišljena situacija u kojoj štapovi nisu spojeni u točki B, ali su ostali paralelni s prvobitnim položajem te su opterećeni silama F_1 i F_2 [6]. Sile F_1 i F_2 uzrokuju produljenje štapa AB tako da njegov kraj dođe u točku B' , te skraćenje štapa CB tako da njegov kraj dođe u točku B'' , kako je prikazano na slici 5 [6]. Ukoliko bi se štap CB okretao oko zgloba C, a štap AB oko zgloba A, u jednom trenutku bi se preklopili, što je označeno s položajem B_1 [6]. U tom slučaju točka B' opisuje luk $B'B_1$, a točka B'' luk $B''B_1$, ali se, zbog vrlo velikih polumjera i vrlo malih kutova za koje su se štapovi okrenuli, lukovi mogu zamijeniti s pravcem $B'B_1$ koji je okomit na štap AB i pravcem $B''B_1$ koji je okomit na štap CB [6]. Spojnica $BB_1 = \delta B$ označava pomak točke B, pri čemu je taj pomak na slici 5 prikazan puno veći kako bi se jasnije vidio [6]:

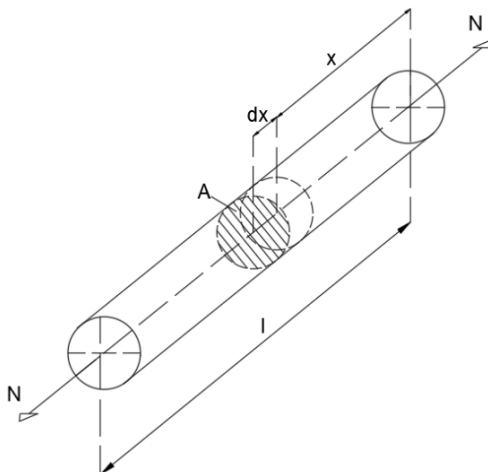


Slika 5: Plan pomaka

„Plan pomaka daje nam mogućnost da lako utvrdimo analitičku ovisnost između pomaka točaka konstrukcije i deformacije štapa“ [3].

3.5 Energija deformiranja

Rad vanjskih sila troši se, prilikom procesa deformiranja, na promjenu volumena i oblika tijela, promjenu temperature tijela, promjenu električnoga potencijala itd., a u elastičnom području i uz statičko uvođenje opterećenja može se smatrati da se sva energija troši na promjenu oblika [2]. Naime, rad vanjskih sila ili potencijal vanjskog opterećenja pretvara se u energiju deformiranja koja se također naziva i potencijalna energija ili rad unutrašnjih sila [2]. Prikazan je ravni osno opterećeni štap duljine l i konstantnog poprečnog presjeka [7].



Slika 6: Ravni osno opterećeni štapa

Izrazi koji vrijede za prethodno prikazan slučaj osno opterećenog štapa jesu:

$$N = F \quad (5.1),$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \text{const.} \quad (5.2),$$

$$\epsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{EA} = \frac{\sigma_x}{E} = \text{const.} \quad (5.3),$$

$$dV = A \cdot dx \quad (5.4),$$

dok su ostala naprezanja jednaka nuli [7,8]. Linearna promjena intenziteta unutrašnjih sila u funkciji deformiranja dovodi do izraza za rad unutrašnjih sila (unutrašnju energiju):

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon dV \quad (5.5),$$

na osnovi kojeg, uz konstantan volumen po duljini štapa i konstantnu raspodjelu naprezanja po presjeku, slijedi izraz:

$$U = \frac{F \cdot \Delta l}{2} \quad (5.6),$$

koji predstavlja potencijalnu energiju elastične deformacije [2]. Imajući u vidu da je unutrašnja sila N u promatranom presjeku, slijedi:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \quad (5.7)$$

iz čega, uvrštavajući izraz (5.7) u izraz (5.6), proizlazi:

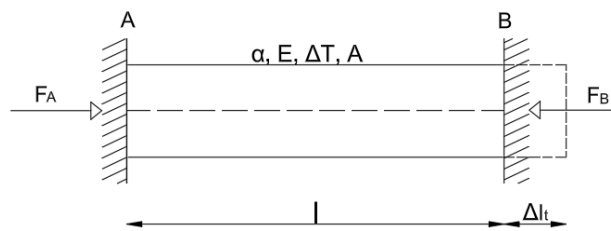
$$U = \frac{N^2 \cdot l}{2A \cdot E} \quad (5.8).$$

U slučaju promjenjivih vrijednosti aksijalne krutosti štapa vrijedi:

$$U = \sum \frac{N_i^2 \cdot l_i}{2 \cdot A_i \cdot E_i} \quad (5.9).$$

3.6 Toplinska naprezanja

Osim pod djelovanjem sila, tijela se mogu deformirati i prilikom promjene temperature, vlažnosti, kemijskih reakcija itd., te pri tome mogu nastati naprezanja koja nisu posljedica vanjskog opterećenja, a koja mogu biti izrazito opasna jer se teško otkrivaju [6]. Lom konstrukcije može nastupiti čak i ako je naprezanje koje potječe od opterećenja manje od dopuštenog [6]. U slučaju slobodnog širenja ili skupljanja tijela, deformacije ε_t nastaju bez naprezanja u tijelu, a ako je širenje ili skupljanje spriječeno, tada zbog promjene temperature u tijelu nastaju naprezanja koja se nazivaju toplinska naprezanja [3]. Deformacije elemenata kod statički određenih konstrukcija nisu podvrgnute nikakvim ograničenjima, pa se sile i naprezanja pri promjeni temperature pojedinih elemenata ili čitave konstrukcije mogu pojaviti samo u statički neodređenim konstrukcijama, odnosno onima koje za određivanje sila u pojedinim elementima zahtijevaju više jednadžbi nego od onih koje su dane statičkim uvjetima ravnoteže [3,6].



Slika 7: Štap pod utjecajem promjene temperature

Prikazan je ravni štap, upet između dviju nepomičnih stijenki, koji bi se pri porastu temperature za ΔT produljio prema izrazu:

$$\Delta l_t = \varepsilon_t \cdot l = \alpha \cdot \Delta T \cdot l \quad (6.1),$$

pri čemu su: ΔT -promjena temperature, ε_t -duljinska deformacija pri promjeni temperature, α -koeficijent toplinskog naprezanja, koji pri malim promjenama temperature ($\Delta T = 100$ do 200°C), kako je utvrđeno eksperimentima, ima konstantnu vrijednost [3,6]. Međutim, produljenje štapa sprječavaju oslonci u kojima se javljaju reakcije F_A i F_B , iz čega proizlazi: $F_A = F_B$, prema uvjetu ravnoteže [3]. Štap ne može promijeniti svoju duljinu, pa vrijedi uvjet kompatibilnosti deformacija:

$$\alpha \cdot \Delta T \cdot l = \frac{F_A \cdot l}{E \cdot A} \quad (6.2),$$

iz kojeg proizlaze izrazi:

$$F_A = F_B = \alpha \cdot \Delta T \cdot E \cdot A \quad (6.3),$$

za reakciju oslonca, te:

$$\sigma_x = \frac{F_A}{A} = \alpha \cdot \Delta T \cdot E \quad (6.4),$$

za naprezanje u štapu [3]. Naprezanje u štapu, koje u ovom slučaju ne ovisi o površini poprečnog presjeka, biti će tlačno ukoliko je $\Delta T > 0$ tj. temperatura raste, a vlačno ukoliko je $\Delta T < 0$ tj. temperatura se smanjuje [3].

3.7 Koncentracija naprezanja

Raspodjela naprezanja po površini poprečnoga presjeka jednolika je kod aksijalno opterećenih štapova konstantnog poprečnog presjeka, što vrijedi s dovoljnom točnošću i za štapove kojima se poprečni presjek mijenja postupno [3]. U praksi se upotrebljavaju i elementi konstrukcije čiji presjeci imaju nagle promjene u veličini te su na tim mjestima oslabljeni [2]. U blizini otvora, utora ili manjega poprečnog presjeka intenzitet i nejednolika raspodjela naprezanja uvelike se razlikuju od onih u neoslabljenim dijelovima presjeka [2,3,6]. Najveće vrijednosti naprezanja pojavljuju se u točkama početka slabljenja presjeka i mogu biti puno veće od prosječnih (nominalnih) naprezanja, pa se takvo povećanje naprezanja u pojedinim točkama naziva koncentracijom naprezanja [2,6]. „Veličina maksimalnoga naprezanja ovisi o odnosu promjera otvora i promjera štapa, o obliku i dubini utora te o razlici između površina poprečnih presjeka“ [3]. Stupanj koncentracije naprezanja definira se pomoću srednjeg ili nominalnog naprezanja σ_s i faktora koncentracije naprezanja α_k koji se određuje metodama teorije elastičnosti ili eksperimentalnim metodama kao što je metoda fotoelastičnosti [3]. Izraz glasi:

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_s} \quad (7.1),$$

gdje je σ_s srednje naprezanje koje se može se izraziti kao:

$$\sigma_s = \frac{F}{A_n} \quad (7.2),$$

a A_n je površina oslabljenog presjeka [3]. Povećana naprezanja pri statičkim opterećenjima ne moraju imati znatniji utjecaj na trajnost konstrukcije, ali u slučaju dinamičkih opterećenja koncentracija naprezanja može biti vrlo štetna, odnosno može prijevremeno izazvati razaranje i popuštanje materijala [2,3]. Stoga je potrebno pri projektiranju elemenata konstrukcije izbjegavati oštre kuteve prilikom prijelaza presjeka, te po mogućnosti uvoditi veće polumjere zaobljenja, žljebove za rasterećenje i slično [2,3].

3.8 Izvijanje

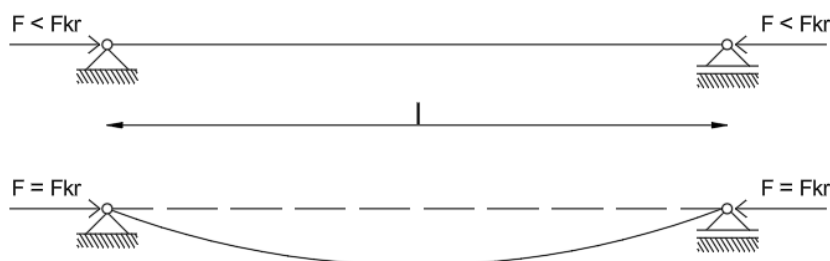
Slučajevi loma konstrukcijskog elementa ili konstrukcije u cjelini mogu nastupiti kod elemenata izloženih aksijalnome pritisku, čak i onda kada je zadovoljen uvjet čvrstoće: $\sigma_{max} \leq \sigma_{dop}$ [2]. Naime, problem koji se javlja, a nije vezan za provjeru uvjeta čvrstoće, jest problem stabilnosti ravnoteže kod elastičnog, odnosno deformabilnog tijela [2]. Kada na elastično tijelo djeluje vanjsko opterećenje, ono se deformira sve do zauzimanja ravnotežnog deformiranog oblika koji može biti stabilan, labilan ili indiferentan, ovisno o veličini vanjskog opterećenja [2]. Pri određenim vrijednostima aksijalnih sila pritiska, vitki štapovi iz pravocrtnog oblika prelaze u krivocrtni, te se takav oblik deformacije naziva izvijanje [2]. „Granična vrijednost centrične tlačne sile, do koje je prvobitni ravan oblik ravnoteže štapa još stabilan, naziva se kritičnom silom i označava se s F_{kr} “ [9]. Kako ne bi došlo do izvijanja ravnog štapa koji je opterećen centričnom tlačnom silom F , potrebno je zadovoljiti uvjet stabilnosti:

$$F \leq F_{i\ dop} \quad (8.1),$$

gdje je:

$$F_{i\ dop} = \frac{F_{kr}}{k_i} \quad (8.2),$$

a k_i je koeficijent sigurnosti protiv izvijanja [9]. Potrebno je, dakle, odrediti kritičnu silu F_{kr} za različite oblike i dimenzije štapova izrađenih od raznih materijala [9]. Istraživač Leonhard Euler prvi je 1774. godine izveo izraz za kritičnu silu i pokazao da vrijednost kritične sile ovisi o načinu učvršćenja krajeva štapa [9]. Razlikuju se 4 osnovna slučaja izvijanja štapa prema načinu učvršćivanja krajeva štapa: a) štap zglobno učvršćen na oba kraja, b) štap na jednome kraju upet, a na drugome slobodan, c) štap na jednome kraju upet, a na drugome slobodno oslonjen, d) štap upet na oba kraja [9]. Štap zglobno učvršćen na oba kraja, prikazan na slici 8, ostaje ravan ukoliko je centrična tlačna sila F manja od kritične sile F_{kr} , ali kada se njihove vrijednosti izjednače, pojavljuje se mogućnost krivocrtnog oblika štapa:



Slika 8: Izvijanje štapa

Najmanja vrijednost kritične sile pri kojoj postoji mogućnost izvijanja štapa jednaka je:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l^2} \quad (8.3),$$

te predstavlja Eulerovu kritičnu silu za štap zglobno oslonjen na oba kraja [9]. Vrijednosti kritične sile za slučajeve izvijanja štapa: b), c) i d), redom su izražene izrazima (8.4), (8.5) i (8.6):

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{4 \cdot l^2} \quad (8.4),$$

$$F_{kr} = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l^2} \quad (8.5),$$

$$F_{kr} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l^2} \quad (8.6) \quad [9].$$

Usporedbom izraza (8.3), (8.4), (8.5) i (8.6) dolazi se do zaključka da se izraz za kritičnu silu može prikazati i kao:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{(\mu \cdot l)^2} \quad (8.7),$$

gdje je μ -koeficijent duljine izvijanja štapa i iznosi:

$$\mu = \frac{1}{n} \quad (8.8),$$

dok je n -broj poluvalova sinusoide elastične linije izvijena štapa [9]. Primjenom zamjene ($l_i = \mu l$), izraz (8.7) može se zapisati kao:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_i^2} \quad (8.9),$$

gdje je l_i -duljina izvijanja, odnosno dio duljine štapa na kojoj se pojavljuje jedan polual sinusoide [9]. Ovisno o načinu učvršćenja štapa, određuju se i različite duljine izvijanja za pojedini slučaj, pa će tako za slučajeve učvršćenja štapa: a), b), c) i d) vrijediti redom sljedeći izrazi:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l^2} \quad (8.10),$$

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{(2 \cdot l)^2} \quad (8.11),$$

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{(0,7 \cdot l)^2} \quad (8.12),$$

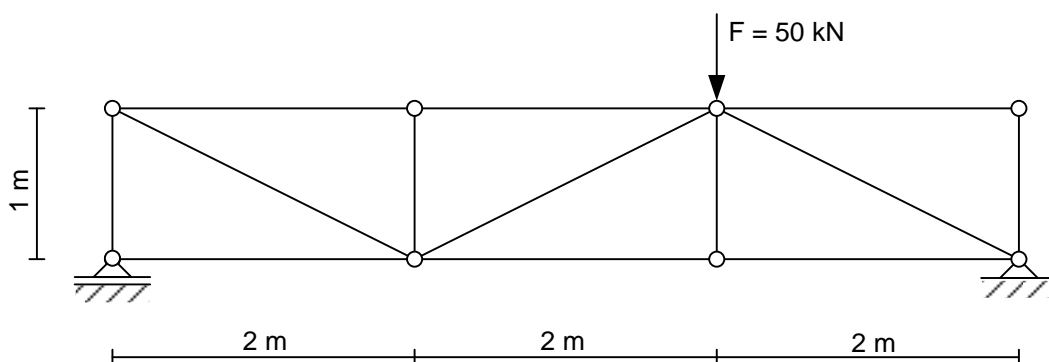
$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{(0,5 \cdot l)^2} \quad (8.13) \quad [9].$$

Iz izraza (8.9) može se vidjeti da kritična sila ovisi o: materijalu štapa odnosno modulu elastičnosti E , poprečnom presjeku štapa odnosno minimalnom momentu tromosti I_{min} , duljini štapa l i o načinu učvršćenja krajeva štapa [9].

4 RAČUNSKI PRIMJERI

1. Zadatak

Rešetka je izvedena od čeličnih cijevnih profila vanjskog promjera 51 mm i opterećena kao na skici. Treba dimenzionirati potrebnu debljinu stijenke čeličnih profila ako je dopušteno naprezanje čelika $\sigma_{dop} = 240 \text{ MPa}$, modul elastičnosti $E = 200 \text{ GPa}$, a koeficijent sigurnosti $k = 1,2$.



Slika 9: Rešetka

U početnom koraku potrebno je odrediti vrijednosti sila koje djeluju u ležajevima, te odrediti veličinu kuta α između štapa položenog u smjeru osi x i dijagonalnog štapa:

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -50 \cdot 4 + B \cdot 6 = 0 \rightarrow \underline{B = 33,33 \text{ kN (tlak)}}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow C = 0 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A - F + B = 0 \rightarrow A - 50 + 33,33 = 0 \rightarrow \underline{A = 16,67 \text{ kN (tlak)}}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 26,565^\circ$$

Preko pojedinih čvorova, primjenjujući uvjete ravnoteže i trigonometrijske funkcije, računaju se sile koje djeluju u štapovima rešetke kako bi se odredila maksimalna tlačna i maksimalna vlačna uzdužna sila koja djeluje u nekom štapu:

Čvor 1:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \underline{a = 0 \text{ kN}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A - b = 0 \rightarrow \underline{b = 16,67 \text{ kN (tlak)}}$$

Čvor 2:

$$dx = d \cdot \cos \alpha \rightarrow dx = 0,894 \text{ d}$$

$$dy = d \cdot \sin \alpha \rightarrow dy = 0,447 \text{ d}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow b - dy = 0 \rightarrow dy = 16,67 \text{ kN}$$

$$d = \frac{dy}{\sin \alpha} = \frac{16,67}{\sin(26,565)} \rightarrow \underline{d = 37,28 \text{ kN (vlak)}}$$

$$dx = 0,894 \cdot 37,28 = 33,33 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow dx - c = 0 \rightarrow \underline{c = 33,33 \text{ kN (tlak)}}$$

Čvor 3:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow c - f = 0 \rightarrow \underline{f = 33,33 \text{ kN (tlak)}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow \underline{e = 0 \text{ kN}}$$

Čvor 4:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow dy - gy = 0 \rightarrow gy = 16,67 \text{ kN}$$

$$d = g = 37,28 \text{ kN (tlak)}$$

$$dx = gx = 33,33 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow dx + gx - h = 0 \rightarrow 33,33 + 33,33 - h = 0 \rightarrow \underline{h = 66,66 \text{ kN (vlak)}}$$

Čvor 5:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow j - h = 0 \rightarrow \underline{j = 66,66 \text{ kN (vlak)}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow \underline{i = 0 \text{ kN}}$$

Čvor 7:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \underline{l = 0 \text{ kN}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow \underline{m = 0 \text{ kN}}$$

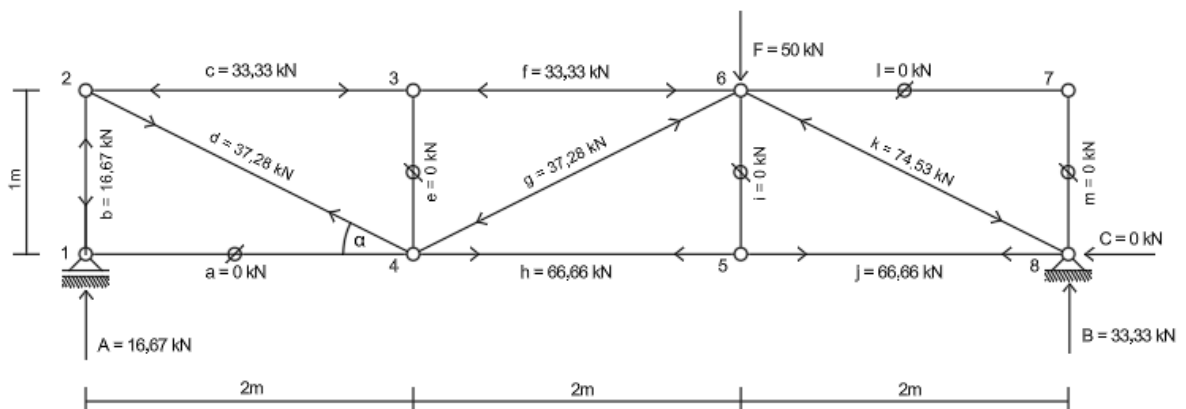
Čvor 8:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow kx - j = 0 \rightarrow kx = 66,66 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow B - ky = 0 \rightarrow ky = 33,33 \text{ kN}$$

$$k = \sqrt{kx^2 + ky^2} \rightarrow \underline{k = 74,53 \text{ kN (tlak)}}$$

Na slici su prikazane dobivene vrijednosti i smjerovi sila koje djeluju u pojedinim štapovima:



Slika 10: Sile u rešetci

$$N_{max} (\text{tlak}) = 74,53 \text{ kN}, \quad N_{max} (\text{vlak}) = 66,66 \text{ kN}$$

Preko uvjeta da maksimalna naprezanja moraju biti manja ili jednaka dopuštenima, izražava se uvjet potrebne veličine površine poprečnog presjeka:

$$\frac{\sigma_{dop}}{k} \geq \sigma_{max} \rightarrow \frac{\sigma_{dop} [MPa]}{k} \geq \frac{N_{max} (vlak) [N]}{A [mm^2]} \rightarrow \frac{240}{1,2} \geq \frac{66,66 \cdot 10^3}{A}$$

$$A \geq 333,3 \text{ mm}^2$$

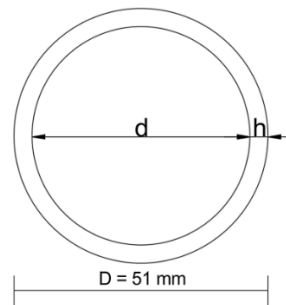
Iz priručnika [10] je očitana potrebna površina:

$$A = 352 \text{ mm}^2$$

Odabran je tipski cijevni profil sljedećih dimenzija:

$$D = 51 \text{ mm}, \quad h = 2,3 \text{ mm}$$

Na slici je prikazan odnos različitih veličina koje čine poprečni presjek profila:



Slika 11: Poprečni presjek cijevnog profila

Potrebno je za štap u kojem djeluje najveća tlačna sila napraviti provjeru na izvijanje štapa u elastičnom području. Određivanjem i uvrštavanjem vrijednosti kritične sile u izraz za Eulerovu kritičnu silu dobiva se vrijednost minimalnog momenta tromosti, iz čega proizlazi uvjet za odabiranje tipskog cijevnog profila:

$$N_{max} (tlak) = F_{dop} = 74,53 \text{ kN}$$

$$F_{kr} = F_{dop} \cdot k = 74,53 \cdot 1,2 = 89,436 \text{ kN}$$

$$L_i = L(k) = \sqrt{2^2 + 1^2} = 2,23607 \text{ m} = 2236,07 \text{ mm}$$

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{MIN}}{L_i^2} \rightarrow 89436 = \frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot I_{MIN}}{(2236,07)^2} \rightarrow I_{MIN} = 226544,44 \text{ mm}^4$$

Iz priručnika [10] je očitana potreban minimalan moment tromosti:

$$I = 242000 \text{ mm}^4$$

Odabran je mjerodavni tipski cijevni profil sljedećih dimenzija:

$$D = 51 \text{ mm}, \quad h = 7,1 \text{ mm}, \quad d = 43,9 \text{ mm}, \quad A = 979 \text{ mm}^2$$

Mjerodavan cijevni presjek dobiven je iz uvjeta stabilnosti:

$$D = 51 \text{ mm}, \quad h = 7,1 \text{ mm}$$

Za provjeru bezdimenzionalne karakteristike štapa zvane vitkost štapa izražavaju se vrijednosti površine poprečnog presjeka i minimalnog polumjera tromosti presjeka:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{MIN}}{A}} = \sqrt{\frac{242000}{979}} = 15,72 \text{ mm}$$

Potrebno je da vitkost štapa bude veća od granične vitkosti:

$$\lambda \geq \lambda_p$$

$$\frac{L_i}{i_{min}} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}}$$

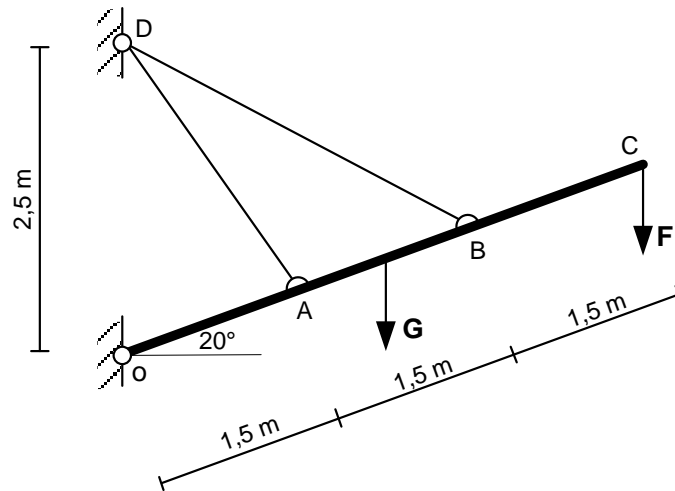
$$\frac{2236,07}{15,72} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^3}{240}}$$

$$142,24 \geq 90,69$$

→ **Uvjet je zadovoljen**

2. Zadatak

Nadstrešnica je izvedena kao kruta greda OABC duljine 4,5 m i ovješena o dva aluminijska kabla AD i BD. Kablovi su kružnog poprečnog presjeka, promjera $d=10$ mm, a modul elastičnosti je $E=70$ GPa. Ukupna težina nadstrešnice je $G=5,5$ kN. Treba naći dopuštenu vrijednost sile F ako je dopušteno naprezanje u kablovima $\sigma_{dop} = 120$ MPa.



Slika 12: Konstrukcija nadstrešnice



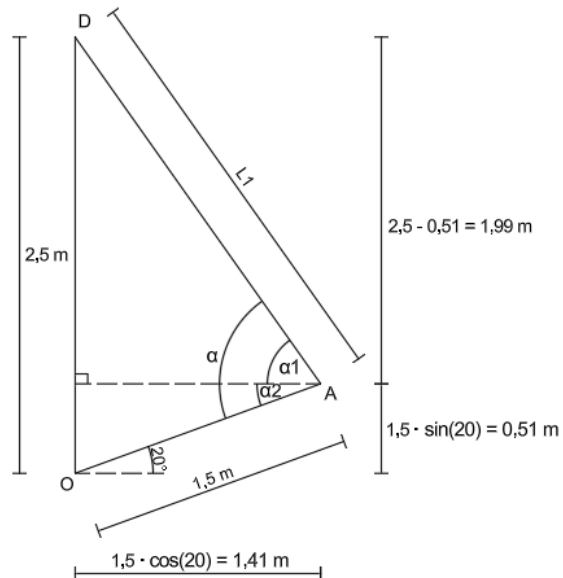
Slika 13: Nadstrešnica (Izvor: [11])

Izražena je površina poprečnog presjeka kabla:

$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{10^2 \cdot \pi}{4}$$

$$\underline{A = 25\pi = 78,54 \text{ mm}^2}$$

Za potrebe daljnjeg proračuna potrebno je odrediti vrijednosti duljina kablova te kuteva između kablova i grede. Stoga su radi bolje preglednosti izdvojeni pojedini djelovi razmatranog slučaja. U prvom djelu izdvojen je dio OAD, kako je prikazano na slici, te je pomoću trigonometrijskih odnosa izražena duljina kabla L_1 i kut α između kabla L_1 i grede:



Slika 14: Dio nadstrešnice OAD

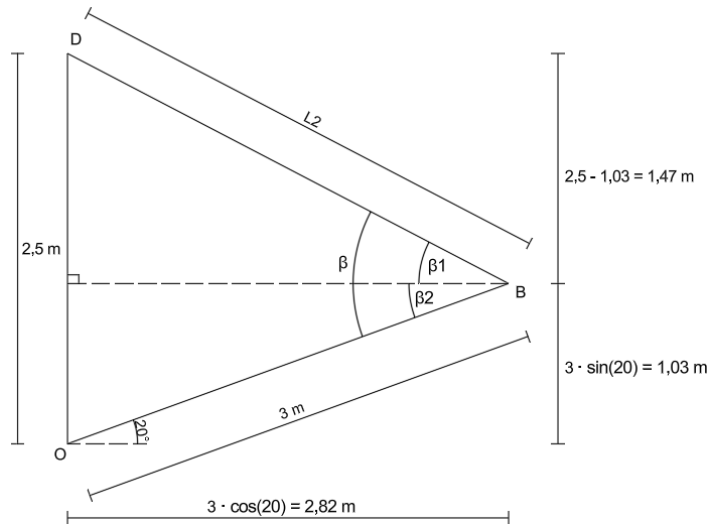
$$L_1 = \sqrt{1,41^2 + 1,99^2} \rightarrow \underline{L_1 = 2,439 \text{ m}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1,99}{1,41} \rightarrow \alpha_1 = 54,68^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{0,51}{1,41} \rightarrow \alpha_2 = 19,89^\circ$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \rightarrow \underline{\alpha = 74,57^\circ}$$

U drugom djelu izdvojen je dio OBD, kako je prikazano na slici, te je, kao i u prvom djelu, pomoću trigonometrijskih odnosa izražena duljina kabla L_2 i kut β između kabla L_2 i grede:



Slika 15: Dio nadstrešnice OBD

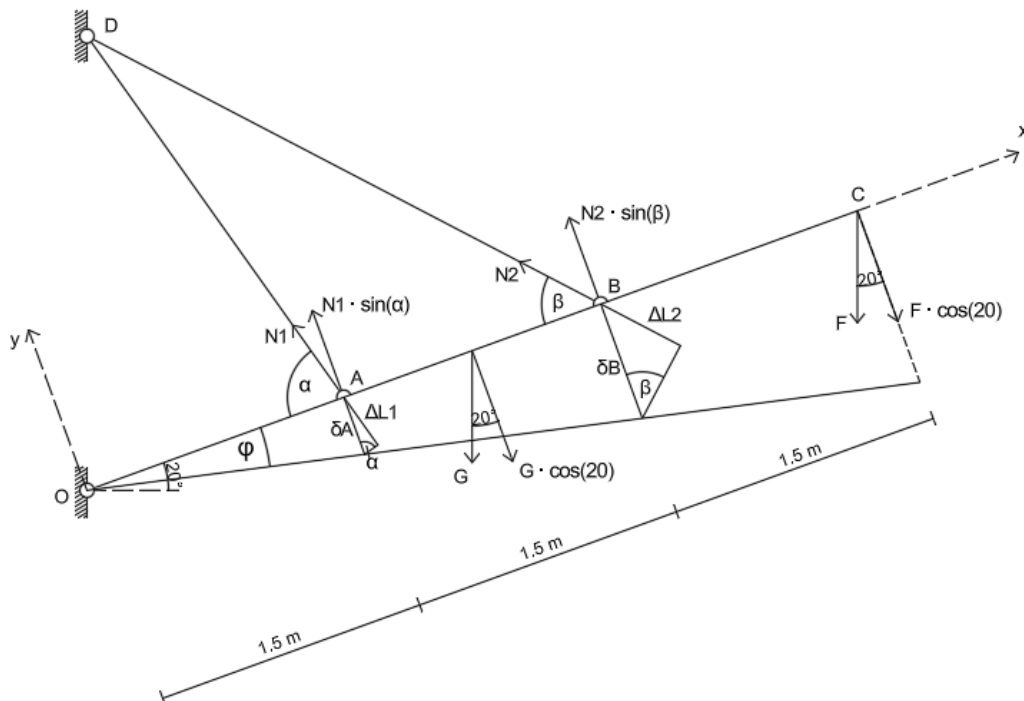
$$L_2 = \sqrt{2,82^2 + 1,47^2} \rightarrow \underline{L_2 = 3,180 \text{ m}}$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{1,47}{2,82} \rightarrow \beta_1 = 27,53^\circ$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{1,03}{2,82} \rightarrow \beta_2 = 20,06^\circ$$

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 \rightarrow \underline{\beta = 47,59^\circ}$$

Na slici je prikazan plan očekivanog pomaka usljed djelovanja vlastite težine nadstrešnice i sile F. Radi jednostavnijeg proračuna, koordinatni sustav je zaokrenut tako da se položaj grede poklapa s osi x:



Slika 16: Plan pomaka nadstrešnice

Izražene su vrijednosti produljenja kablova, pri čemu su sile koje djeluju u kablovima nepoznanice:

$$\Delta L1 = \frac{N1 \cdot L1}{E \cdot A} = \frac{N1 \cdot 2,439 \cdot 10^3}{70 \cdot 10^3 \cdot 25\pi} = \frac{2,439 \cdot N1}{1750\pi}$$

$$\Delta L2 = \frac{N2 \cdot L2}{E \cdot A} = \frac{N2 \cdot 3,180 \cdot 10^3}{70 \cdot 10^3 \cdot 25\pi} = \frac{3,180 \cdot N2}{1750\pi}$$

Koristeći sličnost trokuta, izražen je odnos pomaka δA i δB dviju točaka u kojima se kablovi spajaju s gredom. Preko uvjeta deformacija izvedena je međusobna ovisnost produljenja kablova i prethodno opisanih pomaka. Uvrštavanjem izraza u zajedničku jednadžbu izražena je ovisnost dviju sila koje djeluju u kablovima:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\delta A}{1,5} = \frac{\delta B}{3} \rightarrow \delta A = \frac{1}{2} \cdot \delta B$$

$$\delta A = \frac{\Delta L1}{\sin \alpha}, \quad \delta B = \frac{\Delta L2}{\sin \beta}$$

$$\frac{\Delta L_1}{\sin\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta L_2}{\sin\beta}$$

$$\frac{2,439 \cdot N_1}{1750\pi \cdot \sin(74,57)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3,180 \cdot N_2}{1750\pi \cdot \sin(47,59)}$$

$$2,53 \cdot N_1 = 2,15 \cdot N_2$$

$$N_1 = 0,85 \cdot N_2$$

Raspisan je uvjet ravnoteže, odnosno suma momenata na točku O. Pri tome je u jednadžbu uvrštena ranije izvedena ovisnost dviju sila koje djeluju u kablovima kako bi se tražena nepoznata sila F mogla izraziti preko samo jedne od tih dviju sila:

$$\Sigma M_O = 0 \rightarrow N_1 \cdot \sin\alpha \cdot 1,5 + N_2 \cdot \sin\beta \cdot 3 - G \cdot \cos(20) \cdot 2,25 - F \cdot \cos(20) \cdot 4,5 = 0$$

$$0,85 \cdot N_2 \cdot \sin(74,57) \cdot 1,5 + N_2 \cdot \sin(47,59) \cdot 3 - 11628,7 - F \cdot \cos(20) \cdot 4,5 = 0$$

$$4,23 \cdot F = 3,44 \cdot N_2 - 11628,7$$

$$F = \frac{3,44 \cdot N_2 - 11628,7}{4,23}$$

Iz uvjeta dopuštenih naprezanja dobivena je vrijednost maksimalne sile koja smije djelovati u kابلu. Kao maksimalna sila uzeta je sila u drugom kابلu pošto je ona veća od sile u prvom kابلu, kako se može vidjeti iz njihovog ranije izvedenog međusobnog odnosa veličina. Uvrštavajući dobivenu vrijednost sile koja djeluje u drugom kابلu u ranije izvedenu jednadžbu dobivenu iz uvjeta ravnoteže, izračunata je dopuštena vrijednost tražene sile F:

$$\sigma_{dop} = \frac{N_{max}}{A}$$

$$N_2 = \sigma_{dop} \cdot A$$

$$N_2 = 120 \cdot 25\pi$$

$$N_2 = 9424,78$$

$$F = \frac{3,44 \cdot N_2 - 11628,7}{4,23}$$

$$F = \frac{3,44 \cdot 9424,78 - 11628,7}{4,23}$$

$$F_{dop} = 4915,49 \text{ N} \approx 4,92 \text{ kN}$$

3. Zadatak

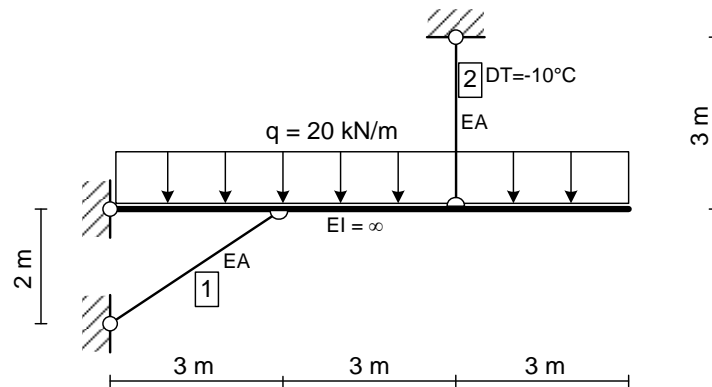
Za zadani sustav potrebno je odrediti koeficijent sigurnosti za tlačno i vlačno opterećeni štap, ako se štap 2 hladi za $\Delta T = -10^\circ\text{C}$. Štapovi su kružnog poprečnog presjeka promjera $d = 60\text{ mm}$.

$$\sigma_p = 250\text{ MPa}$$

$$\sigma_{vl,dop} = 230\text{ MPa}$$

$$E = 200\text{ GPa}$$

$$\alpha_t = 1,3 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$$



Slika 17: Opterećeni sustav

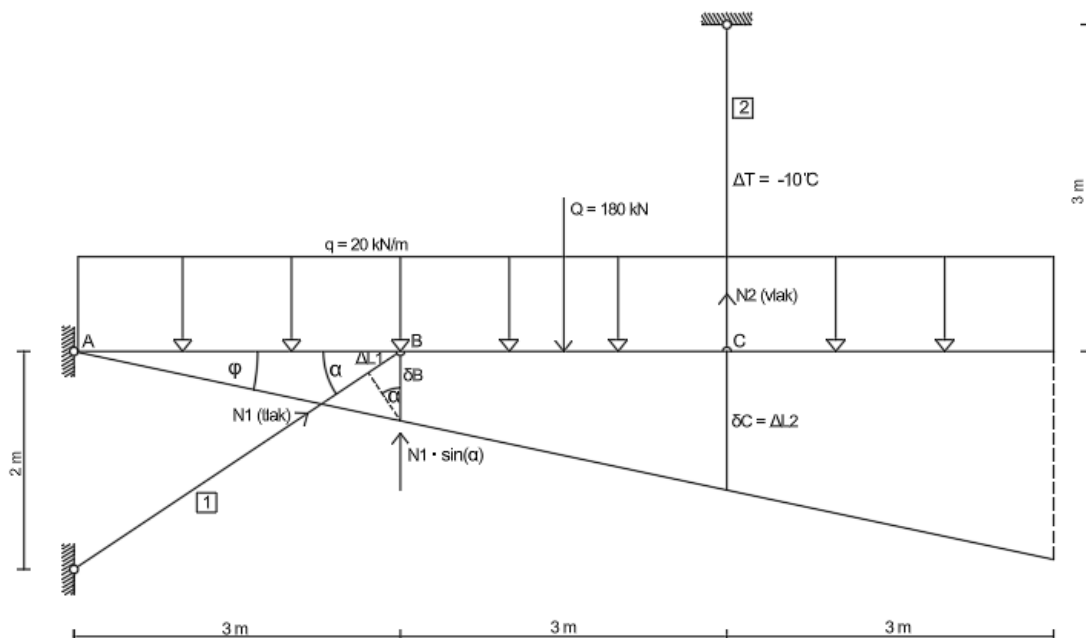
Izračunajte su vrijednosti površine poprečnog presjeka štapova, duljina štapova te kuta α kojeg štap 1 zatvara s osi x:

$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{60^2 \cdot \pi}{4} \rightarrow A = 900\pi = 2827,43\text{ mm}^2$$

$$L1 = \sqrt{3^2 + 2^2} \rightarrow L1 = 3,606\text{ m} , L2 = 3\text{ m}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3} \rightarrow \alpha = 33,69^\circ$$

Na slici je prikazan plan očekivanog pomaka uslijed djelovanja kontinuiranog opterećenja i temperaturne promjene u drugom štapu:



Slika 18: Plan pomaka opterećenog sustava

Izražene su vrijednosti produljenja štapova, pri čemu su sile koje djeluju u štapovima nepoznanice:

$$\Delta L1 = \frac{N1 \cdot L1}{E \cdot A} = \frac{N1 \cdot 3,606 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^3 \cdot 900\pi}$$

$$\Delta L1 = \frac{3,606 \cdot N1}{180000\pi}$$

$$\Delta L2 = \frac{N2 \cdot L2}{E \cdot A} + \alpha_t \cdot \Delta T \cdot L2 = \frac{N2 \cdot 3 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^3 \cdot 900\pi} + 1,3 \cdot 10^{-5} \cdot (-10) \cdot 3 \cdot 10^3$$

$$\Delta L2 = \frac{3 \cdot N2}{180000\pi} - 0,39$$

Koristeći sličnost trokuta, izražen je odnos pomaka δB i δC dviju točaka u kojima se štapovi spajaju s gredom. Preko uvjeta deformacija izvedena je međusobna ovisnost produljenja štapova i prethodno opisanih pomaka. Uvrštavanjem izraza u zajedničku jednadžbu izražena je ovisnost dviju sila koje djeluju u štapovima:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\delta B}{3} = \frac{\delta C}{6} \rightarrow 2 \cdot \delta B = \delta C$$

$$\delta B = \frac{\Delta L1}{\sin \alpha}, \quad \delta C = \Delta L2$$

$$2 \cdot \frac{\Delta L_1}{\sin \alpha} = \Delta L_2$$

$$2 \cdot \frac{3,606 \cdot N_1}{180000\pi \cdot \sin(33,69)} = \frac{3 \cdot N_2}{180000\pi} - 0,39$$

$$2,299 \cdot 10^{-5} \cdot N_1 = 5,305 \cdot 10^{-6} \cdot N_2 - 0,39$$

$$N_1 = 0,231 \cdot N_2 - 16963,9$$

Raspisan je uvjet ravnoteže, odnosno suma momenata na točku A. Pri tome je u jednadžbu uvrštena ranije izvedena ovisnost dviju sila koje djeluju u štapovima kako bi se izračunom dobile njihove vrijednosti:

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -Q \cdot 4,5 + N_1 \cdot \sin \alpha \cdot 3 + N_2 \cdot 6 = 0$$

$$-180 \cdot 10^3 \cdot 4,5 + (0,231 \cdot N_2 - 16963,9) \cdot (\sin(33,69) \cdot 3) + 6 \cdot N_2 = 0$$

$$-810000 + 0,384 \cdot N_2 - 28229,59 + 6 \cdot N_2 = 0$$

$$6,384 \cdot N_2 = 838229,59$$

$$N_2 = 131301,63 \text{ N (vlak)} \quad , \quad N_1 = 13366,78 \text{ N (tlak)}$$

Uvrštavajući prethodno dobivene vrijednosti sila koje djeluju u štapovima, izražene su vrijednosti naprezanja u svakom štapu. Preko odnosa naprezanja u štapu i dopuštenih tlačnih odnosno vlačnih naprezanja, izračunati su koeficijenti sigurnosti za pojedini štap:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{13366,78}{2827,43} \rightarrow \sigma_1 = 4,73 \text{ MPa (tlačno)}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{131301,63}{2827,43} \rightarrow \sigma_2 = 46,44 \text{ MPa (vlačno)}$$

$$k_{s,p} = \frac{\sigma_p}{\sigma_1} = \frac{250}{4,73}$$

$$k_{s,vl} = \frac{\sigma_{vl}}{\sigma_2} = \frac{230}{46,44}$$

$$k_{s,p} = 52,85$$

$$k_{s,vl} = 4,9$$

Potrebno je za štap koji je izložen pritisku napraviti provjeru na izvijanje štapa u elastičnom području. Vrijednosti duljine izvijanja (u ovom slučaju duljine štapa) i minimalnog momenta tromosti uvrštavaju se u izraz za kritičnu silu. Preko odnosa kritične sile i sile koja djeluje u tom štapu, izračunat je koeficijent sigurnosti za izvijanje:

$$L_i = L_1 = 3,606 \text{ m} = 3606 \text{ mm}$$

$$I_{MIN} = \frac{d^4 \cdot \pi}{64} = \frac{60^4 \cdot \pi}{64} = 636,173 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{MIN}}{L_i^2} = \frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 636,173 \cdot 10^3}{(3606)^2} = 96572,5 \text{ N} = 96,57 \text{ kN}$$

$$N_1 = 13366,78 \text{ N} = 13,37 \text{ kN}$$

$$k_i = \frac{F_{kr}}{N_1} = \frac{96,57}{13,37} = 7,22$$

Za dobivenu vrijednost koeficijenta sigurnosti može se zaključiti da sila u štapu neće biti veća od dopuštene sile:

$$N_1 < F_{dop}$$

→ *Uvjet je zadovoljen*

Za provjeru bezdimenzionalne karakteristike štapa zvane vitkost štapa izražavaju se vrijednosti površine poprečnog presjeka i minimalnog polumjera tromosti presjeka:

$$A = 2827,43 \text{ mm}^2$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{MIN}}{A}} = \sqrt{\frac{636,173 \cdot 10^3}{2827,43}} = 15 \text{ mm}$$

Potrebno je da vitkost štapa bude veća od granične vitkosti:

$$\lambda \geq \lambda_p$$

$$\frac{L_i}{i_{min}} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}}$$

$$\frac{3606}{15} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^3}{250}}$$

$$240,4 \geq 88,86$$

→ *Uvjet je zadovoljen*

5 ZAKLJUČAK

Provedena je analiza različitih oblika uzdužnog opterećenja elementa u svrhu dobivanja rezultata i spoznaja ključnih za ispravan proračun uzdužno opterećenih elemenata. Kod ravnih štapova opterećenih koncentriranom silom u uzdužnom smjeru izvedeni su osnovni zakoni za veličine napreznja i deformacija u slučaju rastezanja i pritiska. Izražen je zakon za određivanje produljenja odnosno skraćanja štapova, što je uzrokovano vanjskim opterećenjem. Objašnjen je i grafički prikazan postupak konstrukcije zvan plan pomaka kojim se određuje pomak pojedinog čvora, te služi za lakše utvrđivanje ovisnosti pomaka točaka konstrukcije i deformacija štapova. Analiziran je utjecaj temperature na štapne elemente te je utvrđeno da se toplinska napreznja mogu pojaviti samo kod statički neodređenih konstrukcija. Preko primjera štapa koji je upet između dviju nepomičnih stijenki izvedeni su, prema uvjetu ravnoteže i uvjetu kompatibilnosti deformacija, izrazi za reakciju u osloncu te napreznje u štapu. Budući da je uvjet stabilnosti temeljni zahtjev za konstruktivne elemente, analiziran je problem izvijanja kod štapnih elemenata izloženih aksijalnome pritisku. Izražen je uvjet stabilnosti kojeg je potrebno zadovoljiti kako ne bi došlo do izvijanja ravnog štapa. Kao ključan faktor proračuna definirana je Eulerova kritična sila, te da njezina vrijednost ovisi o načinu učvršćenja krajeva štapa. Primjenjujući zakone i spoznaje utvrđene teorijskom analizom, riješena su 3 praktična računski primjera.

POPIS LITERATURE

- [1] Gere J., Goodno B. *Mechanics of Materials*. 7.izd. Toronto: Cengage Learning; 2009.
- [2] Brnić J., Turkalj G. *Nauka o Čvrstoći 1*. Rijeka: Sveučilište u Rijeci; 2004.
- [3] Šimić V. *Otpornost Materijala 1*. 2.izd. Zagreb: Školska Knjiga; 2002.
- [4] Gross D., Hauger W., Schroder J., Wall W., Bonet J. *Engineering Mechanics 2*. 2.izd. Berlin: Springer; 2018.
- [5] Gross D., Hauger W., Schroder J., Wall W., Rajapakse N. *Engineering Mechanics 1*. 2.izd. Dordrecht: Springer; 2013.
- [6] Alfirević I. *Nauka o Čvrstoći 1*. Zagreb: Tehnička Knjiga; 1989.
- [7] Alfirević I. *Nauka o Čvrstoći 2*. Zagreb: Golden Marketing; 1999.
- [8] Brnić J., Turkalj G. *Nauka o Čvrstoći 2*. Rijeka: Zigo; 2006.
- [9] Šimić V. *Otpornost Materijala 2*. 1.izd. Zagreb: Školska Knjiga; 1995.
- [10] Džeba I., Androić B., Dujmović D. *Metalne Konstrukcije 3*. 2.izd. Zagreb: IA Projektiranje; 2003.
- [11] Kavran Grupa. Proizvodnja i Prerada Ravnog Stakla. *Kavran Grupa*. Dostupno: https://kavran.hr/proizvodi/staklene_nadstresnice/ [Pristupljeno: 31. siječnja 2025.].

POPIS SLIKA

Slika 1: Ravni aksijalno opterećeni štap	1
Slika 2: Ravni štap opterećen koncentriranom silom u težištu	4
Slika 3: Ravni štap opterećen vlastitom težinom	6
Slika 4: Štap promjenjivog presjeka	7
Slika 5: Plan pomaka	9
Slika 6: Ravni osno opterećeni štap	10
Slika 7: Štap pod utjecajem promjene temperature	11
Slika 8: Izvijanje štapa	13
Slika 9: Rešetka	15
Slika 10: Sile u rešetci	16
Slika 11: Poprečni presjek cijevnog profila	17
Slika 12: Konstrukcija nadstrešnice	19
Slika 13: Nadstrešnica (Izvor: [11])	19
Slika 14: Dio nadstrešnice OAD	20
Slika 15: Dio nadstrešnice OBD	21
Slika 16: Plan pomaka nadstrešnice	22
Slika 17: Opterećeni sustav	24
Slika 18: Plan pomaka opterećenog sustava	25